Лекция: Выборки. Размещения, перестановки, размещения с повторениями, сочетания, сочетания с повторениями, их число. Примеры.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по курсу "Избранные вопросы дискретной математики".
3-й курс, группа 318,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.su

Выборки

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – множество из n элементов.

Набор элементов $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$, $r \geq 1$, называется **выборкой объема r из n элементов**, или (n, r)-**выборкой**.

Выборка называется **упорядоченной**, если порядок следования элементов в ней задан.

Две упорядоченные выборки, отличающиеся лишь порядком следования элементов, считаются **различными**.

Если порядок следования элементов не является существенным, то выборка называется **неупорядоченной**.

В выборках могут допускаться или не допускаться **повторения** элементов.

Правило суммы и правило произведения

Как правило, основной вопрос заключается в **подсчете** числа возможных выборок с определенными свойствами.

Часто при подсчете числа комбинаторных объектов (выборок) применяются два основных приема: **правило суммы** и **правило произведения**.

Правило суммы правило произведения

Правило суммы: если объект A может быть выбран m способами, а объект B – другими n способами при условии, что одновременный выбор A и B невозможен, то выбор “A или B” можно осуществить $m+n$ способами.

Правило произведения: если объект A может быть выбран m способами, и после каждого из таких выборов объект B в свою очередь может быть выбран n способами, то выбор “A и B” в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Размещения

Размещением из n элементов по k называется *упорядоченная* (n, k)-выборка без повторений элементов.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.

Перечислим все размещения из элементов множества A по 2:
$1, 2;\ \ 1, 3;\ \ 2, 1;\ \ 2, 3;\ \ 3, 1;\ \ 3, 2.$

Пример. Турист может посетить города Углич, Ростов, Ярославль, Кострому, Сергиев Посад.
Сколько маршрутов с последовательным посещением трех городов он может составить?

Для решения этой задачи надо подсчитать число размещений из 5 по 3.

Число размещений

Число размещений из n по k будем обозначать как $P(n, k)$.

Теорема 1. *При* $1 \leq k \leq n$ *верно равенство*
$P(n, k) = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Нам надо подсчитать число размещений из n по k, $1 \leq k \leq n$.

Понятно, что если $k = 1$, то $P(n, 1) = n$.

Число размещений

Доказательство (продолжение). При $k \geq 2$ воспользуемся правилом произведения. Выделим два признака каждого размещения: значение первого элемента и значения всех остальных элементов.

Первый элемент можно выбрать n различными способами.

При каждом фиксированном первом элементе, например, как a_i, остальные элементы образуют размещение по $(k-1)$ из множества $A' = \{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$. Таких размещений в точности $P(n-1, k-1)$.

Получаем рекуррентное соотношение
$P(n, k) = n \cdot P(n-1, k-1)$ при $2 \leq k \leq n$.

Отсюда по индукции получаем, что
$P(n, k) = n(n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)$. $\square$

Решение задачи о туристе

Напомним условие задачи.

Пример. Турист может посетить города Углич, Ростов, Ярославль, Кострому, Сергиев Посад.
Сколько маршрутов с последовательным посещением трех городов он может составить?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 1:
$P(5,3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
Т.е. можно составить 60 таких маршрутов.

Убывающий факториал

Число $n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)$ называется **убывающим факториалом** для чисел n и k и обозначается как $(n)_k$. Т.е. $P(n,k)=(n)_k$.

Для удобства вычислений по определению полагают, что $(n)_0=1$ и $(n)_k=0$ при $0\le n<k$.

Получили рекуррентное соотношение для убывающих факториалов $(n)_k=n\cdot(n-1)_{k-1}$.

Перестановки

Перестановкой n элементов называется *упорядоченная* (n, n)-выборка без повторений элементов.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все перестановки элементов множества A:
$1, 2, 3;\ \ 1, 3, 2;\ \ 2, 1, 3;\ \ 2, 3, 1;\ \ 3, 1, 2;\ \ 3, 2, 1.$

Пример. Восемь студентов пишут ответ на экзаменационный вопрос.
Сколькими способами их могут последовательно вызвать отвечать?

Для решения этой задачи надо подсчитать число перестановок 8 элементов.

Число перестановок

Число перестановок n элементов будем обозначать как $P(n, n)$.

Теорема 2. *Имеет место равенство* $P(n, n) = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1$.

Доказательство. Перестановка – это частный случай размещения n элементов по k при $k = n$.

Поэтому (по теореме 1) $P(n, n) = (n)_n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1$.

$\square$

Решение задачи о студентах

Напомним условие задачи.

Пример. Восемь студентов пишут ответ на экзаменационный вопрос.
Сколькими способами их могут последовательно вызвать отвечать?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 2:
$P(8,8) = 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1 = 5760$.
Т.е. возможны 5760 вариантов последовательных ответов студентов.

Факториал

Число $n(n-1)\cdot\dots\cdot 1$ называется **факториалом** числа n и обозначается как $n!$.

Размещения с повторениями

Размещением с повторениями из n элементов по k называется *упорядоченная* (n, k)-выборка с возможными повторениями элементов.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все размещения с повторениями по 2 из элементов множества A:
$1, 1;\ \ 1, 2;\ \ 1, 3;\ \ 2, 1;\ \ 2, 2;\ \ 2, 3;\ \ 3, 1;\ \ 3, 2;\ \ 3, 3.$

Пример. Есть по одному билету в театр, в цирк и на концерт. Сколькими способами их можно распределить между четырьмя студентами (если каждый студент может получить сколько угодно билетов)?

Для решения этой задачи надо подсчитать числа размещений с повторениями из 4 по 3.

Число размещений с повторениями

Число размещений с повторениями из n по k будем обозначать как $\hat{P}(n,k)$.

Теорема 3. *При* $n \geq 1$, $k \geq 1$ *верно равенство* $\hat{P}(n,k) = n^k$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Нам надо подсчитать число размещений с повторениями из n по k, $n \geq 1$, $k \geq 1$.

Понятно, что если $k = 1$, то $\hat{P}(n,1) = n$.

Число размещений с повторениями

Доказательство (продолжение). При $k \geq 2$ воспользуемся правилом произведения. Выделим два признака каждого размещения с повторениями: значение первого элемента и значения всех остальных элементов.

Первый элемент можно выбрать n различными способами.

При каждом фиксированном первом элементе, например, как a_i, остальные элементы образуют размещение с повторениями по $(k-1)$ из того же множества $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. А таких размещений с повторениями в точности $\hat{P}(n, k-1)$.

Получаем рекуррентное соотношение $\hat{P}(n, k) = n \cdot \hat{P}(n, k-1)$ при $n \geq 1$, $k \geq 2$.

Отсюда по индукции получаем, что $\hat{P}(n, k) = n^k$. $\square$

Решение задачи о билетах

Напомним условие задачи.

Пример. Есть по одному билету в театр, в цирк и на концерт. Сколькими способами их можно распределить между четырьмя студентами (если каждый студент может получить сколько угодно билетов)?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 3:
$\hat{P}(n, k) = 4^3 = 64.$
Т.е. существует 64 способа распределения билетов между студентами.

Сочетания

Сочетанием из n элементов по k называется *неупорядоченная* (n, k)-выборка без повторений элементов.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все сочетания из элементов множества A по 2:
$1, 2; \;\; 1, 3; \;\; 2, 3.$

Пример. В олимпиаде по программированию может участвовать команда из трех студентов группы.
Сколько возможностей составить команду, если в группе 20 студентов?

Для решения этой задачи нужно подсчитать число сочетаний из 20 по 3.

Число сочетаний

Число сочетаний из n по k будем обозначать как $C(n,k)$.

Теорема 4. *При* $1 \leq k \leq n$ *верно равенство* $C(n,k) = \frac{(n)_k}{k!}$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Нам надо подсчитать число сочетаний из n по k, $1 \leq k \leq n$.

Рассмотрим все размещения из n элементов множества A по k. Их ровно $(n)_k$.

В каждом размещении выбраны какие-то k элементов из множества A. Если не учитывать порядок этих выбранных k элементов, мы получим некоторое сочетание из элементов множества A по k.

Число сочетаний

Доказательство (продолжение). Другими словами, размещения с одним и тем же набором выбранных k элементов задают одно и то же сочетание по k элементов.

Чем различаются размещения с одним и тем же набором выбранных k элементов? Только порядком элементов. Число различных перестановок выбранных k элементов равно $k!$ (по теореме 2).

Следовательно, $C(n,k) = \frac{(n)_k}{k!}$.

$\square$

Решение задачи о команде на олимпиаду

Напомним условие задачи.
Пример. В олимпиаде по программированию может участвовать команда из трех студентов группы.
Сколько возможностей составить команду, если в группе 20 студентов?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 4:
$C(20,3) = \frac{(20)_3}{3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140.$

Т.е. существует 1140 возможных команд на олимпиаду по программированию из трех студентов этой группы.

Рекуррентная формула для числа сочетаний

Теорема 5. *При* $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n$ *верно равенство* $C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1)$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$. Нам надо подсчитать число сочетаний из n по k при $1 \leq k \leq n$, $n \geq 2$.

Заметим, что если $k = 1$, то $C(n,1) = n$.

С другой стороны, $C(n-1,1) = n-1$, и, по соглашениям для убывающих факториалов, верно $C(n-1,0) = \frac{(n-1)_0}{0!} = 1$.

Поэтому, $C(n,1) = C(n-1,1) + C(n-1,0)$.

Рекуррентная формула для числа сочетаний

Доказательство (продолжение). При $k \geq 2$ воспользуемся правилом суммы. Разобьем все сочетания на два непересекающиеся множества: сочетания, не содержащие элемент a_n, и сочетания, содержащие элемент a_n.

Сочетаний, не содержащих элемент a_n, в точности $C(n-1, k)$, т.к. это все сочетания из элементов множества $A' = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ по k.

Сочетаний, содержащих элемент a_n, в точности $C(n-1, k-1)$, т.к. все такие сочетания можно получить, добавив элемент a_n, к каждому из сочетаний из элементов множества $A' = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ по $(k-1)$.

Отсюда, по правилу суммы,
$C(n, k) = C(n-1, k) + C(n-1, k-1)$ при $2 \leq k \leq n$. $\square$
Несложно проверить, что доказанное соотношение верно для всех чисел n и k при $0 \leq k \leq n$.

Бином Ньютона

Теорема 6 [Формула бинома Ньютона]. *При* $n \geq 1$ *верно* $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C(n,k)x^k y^{n-k}$.

Доказательство. $(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}_{n}$.

Подсчитаем, сколько раз при перемножении скобок появится слагаемое $x^{n-k}y^k$, $0 \leq k \leq n$.

Выделим k скобок. Из них выберем множитель x. Из оставшихся $(n-k)$ скобок выберем множитель y.

Число возможностей выделить k скобок из всех равно числу сочетаний из n по k. Т.е. равно $C(n,k)$.

Следовательно, после перемножения скобок и приведения подобных слагаемых коэффициент при слагаемом $x^k y^{n-k}$ будет равен $C(n,k)$.

Биномиальные коэффициенты

Число $\frac{(n)_k}{k!}$ называется **биномиальным коэффициентом** для чисел n и k и обозначается как C_n^k или $\binom{n}{k}$.

Получили свойства биномиальных коэффициентов: $C_n^0 = 1$, $C_n^k = 0$ при $k > n$ и $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Сочетания с повторениями

Сочетанием с повторениями из n элементов по k называется *неупорядоченная* (n, k)-выборка с возможными повторениями элементов.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все сочетания с повторениями из элементов множества A по 2:
$1, 1;\ \ 1, 2;\ \ 1, 3;\ \ 2, 2;\ \ 2, 3;\ \ 3, 3.$

Пример. На почте пять видов открыток к Новому году. Сколькими способами из них можно выбрать семь открыток?

Для решения этой задачи надо подсчитать число сочетаний с повторениями из 5 по 7.

Число сочетаний с повторениями

Число сочетаний с повторениями из n по k будем обозначать как $\hat{C}(n,k)$.

Теорема 7. *При* $n \geq 1$, $k \geq 1$ *верно равенство* $\hat{C}(n,k) = C(n+k-1,k)$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Нам надо подсчитать число сочетаний с повторениями из элементов множества A по k при $n \geq 1$ и $k \geq 1$.

Число сочетаний с повторениями

Доказательство (продолжение). Рассмотрим вектор с $(n+k-1)$ координатами из нулей и единиц, в котором ровно $(n-1)$ нулей.

Содержательно будем считать нули разделителями. Эти $(n-1)$ нулей делят вектор на n кусков.

Будем полагать, что число единиц в i-м куске – это число элементов a_i в сочетании с повторением, которое соответствует этому вектору. Понятно, что общее число единиц в векторе равно k.

Для примера рассмотрим $n = 3$, и $k = 3$. Тогда вектор $(1, 1, 0, 0, 1)$ сотвествует выборке a_1, a_1, a_3. А, например, выборке a_1, a_2, a_3 соответствует вектор $(1, 0, 1, 0, 1)$.

Число сочетаний с повторениями

Доказательство (продолжение). Получаем, что каждому сочетанию с повторениями из n по k соответствует некоторый вектор из нулей и единиц с $(n+k-1)$ координатами, в котором ровно $(n-1)$ нулей, и наоборот, по каждому такому вектору однозначно восстанавливается сочетание с повторением, ему соответствующее.

Значит, число сочетаний с повторениями из n по k совпадает с числом таких векторов.

А сколько таких векторов? Нам надо из $(n+k-1)$ координат вектора выбрать k координат, в которых будут стоять единицы. В остальных координатах будут находится нули.

Число возможностей выбора – это число сочетаний из $(n+k-1)$ по k.

Следовательно, $\hat{C}(n,k) = C(n+k-1,k)$. $\square$

Решение задачи об открытках

Напомним условие задачи.
Пример. На почте пять видов открыток к Новому году. Сколькими способами из них можно выбрать семь открыток?

Решение. Воспользуемся формулой из теоремы 7:
$\hat{C}(5,7) = C(5+7-1,7) = C(11,7) = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4!} = 330.$

Т.е. существует 330 возможностей составить набор поздравительных открыток в Новому году.

Задача о билетах в театр

Пример 1. Сколькими способами можно распределить три билета в театр между 20 студентами, если

1) распределяются билеты в разные театры, а каждый студент может получить не более одного билета;

2) распределяются билеты в разные театры и на разные дни, а каждый студент может получить любое (не превышающее трех) число билетов;

3) распределяются равноценные билеты на вечер, и каждый студент может получить не более одного билета?

Решение задачи о билетах в театр

Решение.
1) Пусть распределяются билеты в разные театры, а каждый студент может получить не более одного билета.

Каждый студент может получить не более **одного** билета, значит, выборка **без повторений**.

Билеты **неравноценны**, значит, порядок в выборке **важен**.

Поэтому число возможных способов распределений билетов равно числу **размещений без повторений** из 20 по 3, т.е. $(20)_3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

Решение задачи о билетах в театр

Решение (продолжение).
2) Пусть распределяются билеты в разные театры и на разные дни, а каждый студент может получить любое (не превышающее трех) число билетов.

Каждый студент может получить **более одного билета**, значит, имеем дело с выборкой **с повторениями**.

Билеты **неравноценны**, значит, порядок в выборке **важен**.

Поэтому число возможных способов распределений билетов равно числу **размещений с повторениями** из 20 по 3, т.е. $20^3 = 8000$.

Решение задачи о билетах в театр

Решение (продолжение).
3) Пусть распределяются равноценные билеты на вечер, и каждый студент может получить не более одного билета.

Каждый студент может получить не более **одного** билета, значит, выборка **без повторений**.

Билеты **равноценны**, значит, порядок в выборке **не важен**.

Поэтому число возможных способов распределений билетов равно **числу сочетаний без повторений** из 20 по 3, т.е. $C_{20}^{3} = \frac{(20)_3}{3!} = \frac{6840}{6} = 1140$.

Еще задача о билетах в театр

Пример 2.
1. Сколькими способами можно распределить 4 билета в театр среди 20 студентов группы, если каждый студент может получить не более 2-х билетов, и все билеты считаются равнозначными.

2. Сколькими способами можно распределить 2 билета в театр и 2 билета на концерт среди 20 студентов группы, если каждый студент может получить не более 2-х билетов, и билеты на одно мероприятие считаются равнозначными.

Решение второй задачи о билетах в театр

Решение. 1) Пусть каждый студент может получить не более 2-х билетов, и все билеты считаются равнозначными.

Т.к. билеты **равноценны**, то порядок в выборке **не важен**.

Т.к. всего билетов – 4, а каждый студент может получить не более 2-х, возможны такие варианты:
а) 4 студента получают по 1-му билету (C_{20}^4 вариантов – выбираем 4-х студентов, получающих по билету);
б) 1 студент получает 2 билета, и еще 2 студента по 1-му билету ($C_{20}^1 \cdot C_{19}^2$ вариантов – выбираем 1-го студента, получающего 2 билета, и еще 2-х студентов, получающих по 1-му билету);
в) 2 студента получают по 2 билета (C_{20}^2 вариантов – выбираем 2-х студентов, каждый из которых получает по 2 билета).

По правилу суммы число возможных способов распределений билетов равно $C_{20}^4 + C_{20}^1 \cdot C_{19}^2 + C_{20}^2$.

Решение второй задачи о билетах в театр

Решение. 2) Пусть каждый студент может получить не более 2-х билетов, и билеты на одно мероприятие считаются равнозначными.

Т.к. билеты **неравноценны**, то порядок в выборке **важен**.

Решение второй задачи о билетах в театр

Решение (продолжение). Сначала будем распределять 2 билета в театр, а потом 2 билета на концерт. Т.к. каждый студент может получить не более 2-х билетов, возможны такие варианты:

а) 2 студента получают по 1-му билету в театр (C_{20}^2 вариантов); затем либо 2 студента получают по одному билету на концерт (C_{20}^2 вариантов), либо 1 студент получает 2 билета на концерт (C_{18}^1 (почему?));
б) 1 студент получает 2 билета в театр (C_{20}^1 вариантов); затем либо 2 студента получают по одному билету на концерт (C_{19}^2 вариантов), либо 1 студент получает 2 билета на концерт (C_{19}^1 вариантов).

По правилам суммы и произведения число возможных способов распределений билетов равно
$C_{20}^2 \cdot (C_{20}^2 + C_{18}^1) + C_{20}^1 \cdot (C_{19}^2 + C_{19}^1)$.

Задача о разложении числа на слагаемые

Пример 3. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы k неотрицательных слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых считаются различными?

Решение. Введем множество $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Содержательно будем считать, что добавление элемента a_i в выборку означает прибавление единицы к слагаемому с номером i (полагаем, что сначала все слагаемые нулевые).

Тогда условие задачи равносильно подсчету числа сочетаний с повторениями из k элементов множества A по n. В самом деле, пусть $n = 5$, а $k = 3$. Тогда выборка a_1, a_1, a_3, a_3, a_3 соответствует сумме $5 = 2 + 0 + 3$. А, например, сумме $5 = 1 + 2 + 2$ соответствует выборка a_1, a_2, a_2, a_3, a_3.

Значит, искомое число представлений равно $\hat{C}(k, n) = C(k + n - 1, n)$.

Литература к лекции

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. VIII 1.2–1.12.

Конец лекции