А. А. СТОЛЯР

КАК МАТЕМАТИКА УМ В ПОРЯДОК ПРИВОДИТ

2-е издание, переработанное и дополненное

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1991

ББК 22.1
С 81
УДК 51

Рецензент: д-р физ-мат. наук, проф. Киевского государственного университета *Л. А. Калужнин*

Столяр А. А.

С 81 Как математика ум в порядок приводит.— 2-е изд., перераб. и доп.— Мн.: Выш. шк., 1991.— 207 с.: ил.

ISBN 5-339-00587-9.

В популярной форме излагается логика математики, благодаря которой эта наука, по словам Ломоносова, «приводит в порядок ум» изучающего ее. Показывается, как одна и та же математическая теория описывает различные системы объектов одинаковой структуры, что обеспечивает широкое применение математики в разных областях науки и практики.

Первое издание вышло в 1982 г.

Для читателей, интересующихся математикой.

$$С \frac{1602020000-121}{М304(03)-91} 101-91$$

ББК 22.1

ISBN 5-339-00587-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

> Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит.
>
> *М. В. Ломоносов*

Иногда высказывается ошибочная точка зрения, что математика состоит из скучнейших формул и длинных утомительных преобразований и вычислений и в отличие, скажем, от музыки, изобразительного искусства и литературы культурный человек вполне может ее не знать и тем не менее им оставаться. Причины этой ошибки коренятся в неправильном понимании значимости математики в общей культуре человечества.

Несмотря на то что роль математики в современной системе наук существенно изменилась, значительно расширилось поле ее приложений и главное произошли глубокие не только количественные, но и качественные изменения внутри самой математики, приведенные в эпиграфе слова М. В. Ломоносова о математике, сказанные в XVIII в., остаются справедливыми и сегодня.

Предлагаемая книга и представляет собой попытку разъяснить смысл этих слов. В ней излагаются внутренний порядок и логика математики. Показывается, как одна и та же математическая теория описывает различные системы объектов, обладающие одной и той же структурой, что и обеспечивает широкое применение математики в различных областях науки и практики. Умение видеть общность структуры разнообразных систем объектов, несмотря на их внешнее различие,— признак высокой культуры математического мышления, признак упорядоченного ума.

Предлагаемая научно-популярная книга адресована широкому кругу читателей, всем, кто изучает или применяет математику,— учителям, преподавателям средних и высших учебных заведений, учащимся старших классов, студентам, инженерам и другим работникам различных профессий, применяющим математику.

Для понимания основного содержания книги достаточно знания математики в объеме девяти классов школы, но требуется внимательное чтение, порой с карандашом и бумагой, для воспроизведения некоторых рассуждений и решения небольшого числа предлагаемых читателю упражнений.

Все понятия и обозначения, в том числе теоретико-множественные и логические, не изучаемые и не применяемые в школе, определяются и разъясняются в тексте книги.

Если книга окажется полезной читателю, то автор будет считать цель, которую он ставил перед собой при работе над ней, достигнутой.

Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору Л. А. Калужнину за ознакомление с рукописью и полезные замечания, способствовавшие ее улучшению.

Просьба отзывы и замечания присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Если исходить из названия книги — «Как математика ум в порядок приводит», то следовало бы объяснить значения слов «математика», «ум», «ум в порядок приводит» и «как» это делает математика. Однако в предлагаемой книге мы ограничимся одним словом «как». По существу это слово и акцентируется в названии. Однако разъяснение того, как математика ум в порядок приводит, требует, разумеется, раскрытия некоторых характерных особенностей математики и какого-то определенного истолкования выражения «ум в порядок приводит».

Ум! Что это такое? Отвечая на этот вопрос, можно процитировать шутку, приведенную на 16-й полосе «Литературной газеты»: «Ум это — не голова и не мозг. Ум есть ум». Но в этой шутке заложен и глубокий смысл. Мы откажемся здесь от полных и всеобъемлющих определений, но все же попытаемся разобраться, что имеют в виду, говоря «ум». Можно заранее сказать, что наше толкование ни в коей мере не будет исчерпывающим.

Заглянем сначала в словарь русского языка Ожегова, где дается такое определение: «ум — способность человека мыслить, основа сознательной, разумной жизни». Итак, ум — способность человека мыслить. Что же в таком случае означает «ум в порядок приводит»? Мы будем исходить из того, что мыслить означает рассуждать, т. е. получать новые знания (истины) из уже имеющихся с помощью определенных правил рассуждений (следования, вывода), гарантирующих нам истинность новых знаний при условии истинности исходных (посылок).

Способность мыслить надо понимать, однако, не только как способность строить правильные рассуждения, но и как способность к восприятию знаний, к их хранению и преобразованию (с помощью рассуждений).

Таким образом, можно сказать, что ум включает восприятие, хранение и преобразование информации.

Под информацией будем понимать содержание истинных предложений, выражающих в совокупности свойства или отношения объектов какой-нибудь области знаний. Так, можно говорить о географической, химической, исторической, математической информации. Когда мы говорим, что человек имеет определенные знания в некоторой области, то это по существу означает, что он владеет определенной относящейся к ней информацией.

Эта информация, во-первых, может оказаться в уме человека неупорядоченной, т. е. различные знания — изолированными, не связанными между собой и поэтому малоэффективными в качестве исходного материала для получения новых знаний. Во-вторых, возможно также, что эта информация лежит «мертвым грузом», т. е. заполняет лишь память человека, но не преобразовывается им, не используется для получения новых знаний логическим путем, с помощью рассуждений.

Мы упомянули о «неупорядоченной» информации, и чтобы выяснить, что означает отсутствие порядка в множестве предложений, надо прежде всего понять, что такое порядок.

Естественно возникает вопрос: как математика способствует упорядочению ума? Прежде всего своим внутренним порядком, своей логикой. Но и другие области знаний имеют определенный внутренний порядок. Почему же именно внутренний порядок математики в большей мере, чем внутренний порядок других областей знаний, влияет на упорядочение ума? Потому, что внутренний порядок в математике устанавливается особым образом, с помощью отношения логического следования.

Математика влияет на упорядочение ума и такими особенностями, как общность и абстрактность своих конструкций.

Говорят, что математика — искусство разные вещи называть одними именами. На первый взгляд может показаться, что это внесет путаницу. Однако общее имя отражает общность каких-то важных характеристик. Заметим, что и в обыденной жизни мы иногда так поступаем. Например, когда разные люди нас интересуют потому, что все они проживают в г. Минске, мы их называем одним именем — минчанами, или разных детей мы называем школьниками и т. п.

В математике эти обобщенные имена относятся к системам объектов, объединяемых общностью структуры. Такие системы объектов неразличимы в математике, и они описываются одной математической теорией. Один раз доказанная теорема общей теории применяется во всех различных моделях этой теории (различных системах объектов, описываемых этой теорией).

Математика полна всякого рода правил, общих, строго определенных методов решения различных классов однотипных задач. Решая любую такую задачу, человек должен строго следовать точному предписанию (алгоритму) о том, какие действия и в каком порядке надо выполнить для решения задачи данного типа. Нередко изучающему математику часто и самому приходится составлять подобные предписания, т. е. находить алгоритм.

Можно утверждать, что математика учит точно формулировать разного рода правила, предписания, инструкции и строго их выполнять.

Естественно, что невозможно в такой небольшой по объему книге, как наша, раскрыть основы логики и математики, тем не менее какое-то представление об их влиянии на мышление человека можно составить.

Может возникнуть и такой вопрос: почему для раскрытия содержания высказывания М. В. Ломоносова о том, зачем математику учить следует, мы используем некоторые понятия, теории и формальный язык, которые еще не были разработаны в XVIII в.? Но и тогда дух и стиль математического мышления были такими же, как в настоящее время. Только более чем за два столетия, отделяющие нас от М. В. Ломоносова, они получили дальнейшее развитие.

В результате бурного развития значительно расширилось поле приложений математики, охватывающее в настоящее время почти все области науки. Современная математика стала всеобщим языком науки и еще в большей мере, чем математика времен Ломоносова, подтверждает его тезис.

В этой книге используется материал, на котором наиболее доступно, по мнению автора, раскрывается содержание высказывания великого русского ученого, а понятия современной математики подтверждают, что оно сохраняет свою силу и в настоящее время.

I. КАКОВ ПОРЯДОК В МАТЕМАТИКЕ?

Главное условие для деятельности есть порядок.

Л. Н. Толстой

1. ЧТО ТАКОЕ ПОРЯДОК?

Примеры порядков

Мы уже говорили о том, что математика влияет на ум изучающего ее своим внутренним порядком. Анализируя то, что обычно понимают под порядком, опишем это понятие математическими средствами, т. е. переведем его из интуитивного в точное математическое. Этот перевод одновременно служит простым примером математизации. Особенностью математизации является то, что большое разнообразие конкретных ситуаций описывается одной математической моделью.

Всегда, когда говорят о порядке, обычно предполагают некоторое множество предметов, между которыми установлено отношение «старшинства» или «важности», «первичности», «предшествования» и т. п. Рассмотрим несколько конкретных примеров (ситуаций).

Так, пусть имеется конечное множество M людей:

$M =$ {Александров, Иванов, Михайлов, Николаев, Петров, Столяров}, среди которых нет ровесников.

Если известен год рождения каждого из них (дальше мы будем пользоваться инициалами), например, *А* — 1921; *И* — 1935; *М* — 1930; *Н* — 1925; *П* — 1940; *С* — 1919, то можно установить в этом множестве людей отношение «старше», которое порождает в нем определенный «порядок», или превращает это множество в упорядоченное: Столяров, Александров, Николаев, Михайлов, Иванов, Петров. В этой записи на первом месте стоит фамилия самого старшего, на втором месте — фамилия того, кто старше всех остальных, кроме первого, на третьем — того, кто старше всех остальных, кроме первых двух, и т. д.

Какими же свойствами обладает отношение «старше», введенное в множество M?

Для выражения этих свойств применим буквы x, y, z в качестве обозначений элементов из M ($x, y, z, \in, M$), т. е. вместо этих переменных в записях можно подставить любую из перечисленных фамилий. Само отношение «старше» обозначим буквой S. В таких обозначениях предложение «x старше y» запишется так: «xSy». Очевидно, что если xSy, то неверно, что ySx для любых x, y (если x старше y, то y уже не старше x). В дальнейшем для отрицания некоторого предложения, выражаемого словами «неверно, что», применим специальный знак $\neg$.

Таким образом, обнаруженное свойство запишется так: для любых x, y, если xSy, то $\neg ySx$. Это свойство называется *асимметричностью.*

Также очевидно, что ни один человек не старше самого себя, т. е. для любого x $\neg xSx$.

Это свойство называется *антирефлексивностью.*

Нетрудно также заметить, что если один человек старше второго, а второй старше третьего, то и первый старше третьего, т. е. для любых x, y, z, если xSy и ySz, то xSz.

Это свойство называется *транзитивностью.*

Таким образом, введенное в описанное выше конечное множесто M людей отношение «старше» является асимметричным, антирефлексивным и транзитивным отношением.

Отношение «старше» в множестве M может быть задано множеством пар элементов из M, таких, что первый элемент каждой пары находится в этом отношении со вторым элементом этой пары:

{(*С*, *А*), (*С*, *И*), (*С*, *М*), (*С*, *Н*), (*С*, *П*), (*А*, *М*), (*А*, *Н*), (*А*, *И*), (*А*, *П*), (*Н*, *М*), (*Н*, *И*), (*Н*, *П*), (*М*, *И*), (*М*, *П*), (*И*, *П*)}.

Это же отношение можно задать с помощью истинностной таблицы, в которой указано, какие истинностные значения (И — истина или Л — ложь) принимает предложение xSy, если подставить вместо переменных x и y всевозможные их значения:

		1	2	3	4	5	6
	y \ x	*С*	*А*	*Н*	*М*	*И*	*П*
1	*С*	Л	И	И	И	И	И
2	*А*	Л	Л	И	И	И	И
3	*Н*	Л	Л	Л	И	И	И
4	*М*	Л	Л	Л	Л	И	И
5	*И*	Л	Л	Л	Л	Л	И
6	*П*	Л	Л	Л	Л	Л	Л

Как читать эту таблицу?

Например, в клетке, являющейся пересечением второй строки и четвертого столбца, стоит буква И. Это означает, что высказывание *АSМ* истинно, т. е. *А* старше *М*. В пересечении пятой строки со вторым столбцом стоит буква Л. Это означает, что высказывание *ИSА* ложно, т. е. *И* не старше *А*.

По существу истинностная таблица определяет приведенное выше множество пар (достаточно перечислить все пары значений (x, y), для которых предложение xSy истинно).

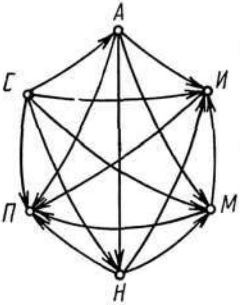

Рис. 1

Другим наглядным способом задания отношения S является граф-фигура, состоящая из точек (вершин графа) и стрелок, идущих от одних вершин к другим (ребер графа). Если элементы множества M изобразить в виде точек и от точки x провести стрелку к точке y в том и только в том случае, если xSy истинно, то получим граф, изображенный на рис. 1. Множество стрелок задает множество пар, определяющее отношение S на множестве M.

Вспомним, что мы установили отношение S на множестве M, используя информацию о том, в каком году родился каждый человек из M.

По существу приведенная истинностная таблица задает на множестве M некоторую функцию g, сопоставляющую с каждым $x \in M$ его год рождения. Обозначим через E множество значений g, т. е.

$$E = \{1919,\ 1921,\ 1925,\ 1930,\ 1935,\ 1940\}.$$

Отношение S мы установили следующим образом: мы считали (и это вполне естественно), что x старше y, если и только если x родился раньше y, т. е. $xSy \Leftrightarrow g(x) < g(y)$.

Отношение «меньше» ($<$) в множестве E (и вообще в множестве N натуральных чисел) обладает теми же свойствами (антирефлексивностью, асимметричностью и транзитивностью), что и отношение S в множестве M.

Отношения S и $<$ порождают в множествах M и E соответственно структуры одного и того же рода (M, S) и $(E, <)$. Обе эти структуры обладают еще одним важным свойством: из двух различных элементов $(x \neq y)$ либо x находится в данном отношении $(S, <)$ с y, либо y — с x. Иными словами, одно и только одно из предложений xSy или ySx для любых $x \neq y$ (в M) и

$g(x) < g(y)$ или $g(y) < g(x)$ (в E) истинно (оба не могут быть истинными в силу асимметричности отношений S и $<$).

Функция или отображение g является взаимно-однозначным соответствием, или биективным отображением множества M на множество E (каждому элементу M сопоставляется точно один элемент из E и различным элементам из M — разные элементы из E). При этом g «переводит» отношение S в отношение $<$, т. е. если $x\mathrm{S}y$, то $g(x) < g(y)$.

Обратное отображение g^{-1} является таким же (биективным), как и g. Оно отображает множество E на множество M и переводит отношение $<$ в отношение S, т. е. если $x < y$, где $x, y \in E$, то $g^{-1}(x)\mathrm{S}g^{-1}(y)$.

Такое отображение, как g (или g^{-1}), называется *изоморфизмом*, а структуры, между которыми может быть установлен изоморфизм,— *изоморфными*. Так, структуры (M, S) и $(E, <)$ изоморфны и как математические объекты неразличимы. Все свойства одной из этих структур переводятся в свойства другой. Например, в множестве M есть самый младший элемент (который не старше никакого другого), в E — самое большое число (которое не меньше никакого другого). В множестве M есть самый старший элемент (т. е. такой, что никакой другой не старше его), а в E — самое маленькое число (т. е. такое, что нет в E числа, меньше его).

Рассмотрим еще один пример. Алфавит русского языка состоит из 33 знаков, называемых буквами. Математик скажет, что это конечное множество A, состоящее из 33 элементов, называемых буквами, и что это — упорядоченное множество. Действительно, буквы алфавита всегда перечисляются в определенном, строго установленном порядке.

Что же представляет собой сам этот порядок? Это не что иное, как отношение между двумя буквами (бинарное отношение), которое можно называть словом «предшествует». Исследуем это отношение.

Пусть $A =$ (а, б, в, г, д, е, ё, ж, з, и, й, к, л, м, н, о, п, р, с, т, у, ф, х, ц, ч, ш, щ, ъ, ы, ь, э, ю, я) — алфавит.

Здесь «а» предшествует «б», «б» предшествует «в» и т. д. Буква «а» — первая, ей не предшествует никакая другая буква, «я» — последняя буква алфавита, она не предшествует никакой другой букве.

Если x, y, z — переменные для букв этого алфавита, а знак $\prec$ обозначает отношение «предшествует», то очевидно, что:

1) $\neg x \prec x$ для любого $x \in A$, т. е. отношение «предшествует» антирефлексивно;

2) если $x \prec y$, то $\neg y \prec x$ для любых x, $y \in A$, т. е. это отношение асимметрично;

3) если $x \prec y$ и $y \prec z$, то $x \prec z$ для любых x, y, $z \in A$, т. е. отношение «предшествует» транзитивно.

Если считать, что заданное перечисление букв алфавита A определяет отношение «предшествует» лишь между соседними буквами (например, {(а, б), (б, в), (в, г), ...}), и принять в качестве характеристики этого отношения свойства 1—3, то можно доказать такие предложения, как, например, а $\prec$ г или $\neg$г $\prec$ а.

У нематематика может возникнуть недоумение: зачем надо доказывать, когда и так видно, что, перечисляя буквы алфавита, букву «а» мы записываем или называем раньше буквы «г». Значит, «а» предшествует «г». Поэтому «г» не предшествует «а». Эти рассуждения уже и есть в какой-то степени доказательство. Из а $\prec$ г выводим $\neg$г $\prec$ а, неявно ссылаясь на свойство 2. Остается доказать, что а $\prec$ г:

1) а $\prec$ б (посылка);
2) б $\prec$ в (посылка);
3) а $\prec$ в (из 1 и 2 по свойству транзитивности);
4) в $\prec$ г (посылка);
5) а $\prec$ г (из 3 и 4 по свойству транзитивности);

6) $\neg г \prec а$ (из 5 по свойству асимметричности).

Если же перечисление букв алфавита A считать заданием всего множества пар букв, определяющего отношение «предшествует», т. е.

$$\begin{aligned}\prec = \{(а, б), (а, в), (а, г), (а, д), \ldots, (а, я),\\ (б, в), (б, г), (б, д), \ldots, (б, я),\\ (в, г), (в, д), \ldots, (в, я),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (ю, я)\},\end{aligned}$$

то получим в качестве следствий свойства 1—3.

Действительно, в этом множестве мы не найдем ни одной пары вида (x, x), т. е. состоящей из двух одинаковых букв. Это означает, что $\neg x \prec x$ для любого $x \in A$. Мы получили свойство антирефлексивности.

В этом множестве нет двух пар вида (x, y) и (y, x), т. е. если $x \prec y$, то $\neg y \prec x$ для любых $x, y \in A$ (асимметричность). И, наконец, для всех случаев, когда имеются две пары вида (x, y) и (y, z), т. е. такие, что одна и та же буква является вторым элементом одной пары и первым элементом другой, то найдется и третья пара (x, z), состоящая из первого элемента первой пары и второго элемента второй, т. е. если $x \prec y$ и $y \prec z$, то $x \prec z$ для любых $x, y, z \in A$ (транзитивность).

На основе отношения «предшествует» введем отношение «непосредственно предшествует».

Буква x непосредственно предшествует букве y, если $x \prec y$ и не существует буквы z, такой, что $x \prec z$ и $z \prec y$.

Так, «а» непосредственно предшествует «б», «б» непосредственно предшествует «в», но неверно, что «а» непосредственно предшествует «в» (так как существует буква «б», такая, что $а \prec б$ и $б \prec в$).

Какими свойствами обладает отношение «непосредственно предшествует»?

(Здесь и дальше, если ставится вопрос и в тексте не дается на него ответ, то предполагается, что вопрос поставлен читателю.)

Если $x \prec y$, то мы говорим также, что y следует за x. Если x непосредственно предшествует y, то мы говорим также, что y непосредственно следует за x.

Отметим, что, как в первом примере, здесь для всех $x, y \in A$, если $x \neq y$, то $x \prec y$ или $y \prec x$, т. е. для любых двух различных букв из A одна обязательно предшествует другой. Именно это свойство придает алфавиту русского языка, как говорят в математике, структуру линейного (или совершенного) порядка. Эта структура и позволяет выписать все буквы алфавита в ряд таким образом, чтобы справа от каждой буквы находилась непосредственно следующая за ней. Благодаря этой же структуре удается занумеровать буквы алфавита, т. е. приписать каждой букве номер и говорить, например, что а — первая буква русского алфавита, б — вторая, в — третья и т. д., я — тридцать третья.

Но что означает занумеровать? Попытаемся математически точно описать эту процедуру.

Оказывается, занумеровать элементы некоторого конечного множества означает построить отображение этого множества на некоторый начальный отрезок $P = \{1, 2, 3, ..., n\}$ натурального ряда (множества N натуральных чисел). В нашем примере мы установили соответствие между буквами множества (алфавита) A и числами начального отрезка натурального ряда $P = \{1, 2, 3, ..., 33\}$ или отображение $f: A \to P$ следующим образом: букве а сопоставили число 1 и, если какой-нибудь букве x соответствует число n, то непосредственно следующей за ней букве x' сопоставили число $n+1$ (непосредственно следующее за n).

Определение этого отображения можно записать так:

$$\begin{cases} f(\text{а}) = 1; \\ \text{если } f(x) = n, \text{ то } f(x') = n+1. \end{cases}$$

Этот способ определения функции называют *рекурсивным* (от лат. recursio — возвращение). При определении значения функции для некоторого значения аргумента приходится возвращаться к заданному (исходному) значению f(а).

Например, чтобы найти f(в), надо «возвращаться к f(б), а от него к f(а). Действительно, по второй строке определения, если $f(x) = n$, то $f(x') = n + 1$.

Пусть $x =$ а, тогда $x' =$ б. Так как по первой строке определения f(а) $= 1$, то, подставив последнее выражение во вторую строку, найдем: если f(а) $= 1$, то f(б) $= 1 + 1 = 2$. Теперь, зная значение f(б), по второй строке определения получим: если f(б) $= 2$, то f(в) $=$ $= 2 + 1 = 3$.

Таким образом, данное рекурсивное определение f позволяет найти номер каждой буквы из A.

Отображение f^{-1}, обратное f, отображает множество P на множество A ($f^{-1}: P \to A$) и может быть определено следующим образом:

$$\begin{cases} f^{-1}(1) = \text{а}; \\ \text{если } f^{-1}(n) = x, \text{ то } f^{-1}(n+1) = x'. \end{cases}$$

Такая процедура нумерации может показаться читателю очень медлительной. Это вполне естественно, так как мы привыкли быстро считать (или нумеровать) предметы в определенном порядке, не думая о том, что счет математически описывается с помощью рассмотренной функции f (или f^{-1}).

Функция f (и обратная ей функция f^{-1}) является изоморфизмом, так как представляет собой биективное отображение (взаимно-однозначное соответствие), переводящее отношение $\prec$ в отношение $<$ (или $<$ в $\prec$). Поэтому структуры (A, $\prec$) и (P, $<$) обладают одними и теми же свойствами. Это — изоморфные конечные модели структуры линейного порядка.

Строгий порядок

Всякое бинарное отношение, обладающее (подобно S, $\prec$, $<$) свойствами антирефлексивности, асимметричности и транзитивности, называется *отношением строгого порядка* или *строгим порядком*.

Таким образом, отношение P на некотором множестве M является строгим порядком, если оно обладает свойствами:

1) $\neg x \mathrm{P} x$ для всякого $x \in M$;

2) если $x\mathrm{P}y$, то $\neg y\mathrm{P}x$ для всяких $x, y \in M$;

3) если $x\mathrm{P}y$ и $y\mathrm{P}z$, то $x\mathrm{P}z$ для всяких $x, y, z \in M$.

Характеристика строгого порядка с помощью свойств 1—3 является, однако, избыточной. Математика, как правило, стремится давать характеристики, состоящие из минимального числа свойств, но вместе с тем полные в том смысле, что из характеристики уже можно вывести любое другое свойство изучаемого объекта.

В нашем примере изучаемым объектом является строгий порядок. Оказывается, достаточно охарактеризовать его как антирефлексивное и транзитивное отношения, так как из свойств 1 и 3 уже следует свойство 2.

Допустим, что свойство 2 ложно или истинно отрицание этого свойства, т. е. $x\mathrm{P}y$ и $y\mathrm{P}x$. Тогда по свойству 3 транзитивности имеем:

если $x\mathrm{P}y$ и $y\mathrm{P}x$, то $x\mathrm{P}x$, что противоречит свойству 1.

Таким образом, отношение строгого порядка можно определить как отношение, обладающее свойствами антирефлексивности и транзитивности.

Если отношение строгого порядка P введено на некотором множестве M и при этом оказывается, что для любых двух различных элементов $x \neq y$ из M либо $x\mathrm{P}y$, либо $y\mathrm{P}x$, то говорят, что это отношение порождает в множестве M структуру линейного (или совершенного) порядка. Образцом такой структуры является $(N, <)$, т. е. структура, порождаемая в множестве N натуральных чисел отношением строгого порядка «меньше» $(<)$. Эта структура линейного порядка бесконечна, так как множество N (носитель этой структуры) — бесконечное множество. И каждый начальный отрезок натурального ряда $[1; n] = \{1, 2, 3, ..., n\}$ с введенным в него тем же отношением «меньше» $([1; n], <)$ представляет собой конечную структуру того же рода, т. е. линейный (совершенный) строгий порядок.

Структура $([1; n], <)$ служит своеобразным эталоном, с которым сопоставляют другие структуры линейного порядка, как мы это делали в примерах 1 и 2. Такое сопоставление с математической точки зрения означает установление изоморфизма между изучаемой структурой и $([1; n], <)$, например, $(A, \prec) \leftrightarrow ([1; 33], <)$.

Естественно возникает вопрос: всегда ли отношение строгого порядка Р порождает структуру линейного порядка. Возможна ли ситуация, когда существуют $x, y \in M$, такие, что $x \neq y$ и $\neg x\mathrm{P}y$ и $\neg y\mathrm{P}x$, т. е. когда некоторые элементы x, y не находятся в этом отношении ни x с y, ни y с x? Такие ситуации возможны.

Рассмотрим простой пример. Пусть $M = \{1, 2, 3\}$. Составим множество $P(M)$ всех частей M:

$$P(M) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

В множество $P(M)$ введем отношение строгого включения $\subset$. Напомним определение этого отношения: множество A строго включается в множество B (является собственной частью B), если $A \neq B$ (A не совпадает с B) и каждый элемент A является также элементом B, т. е. $A \neq B$ и для всякого x, если $x \in A$, то $x \in B$.

Из этого определения непосредственно следует, что в множестве B есть элементы, не принадлежащие A (в противном случае множества A и B совпали бы, т. е. состояли бы из одних и тех же элементов).

Каким свойствами обладает отношение $\subset$?

Убедитесь, читатель, что $\subset$ является отношением строгого порядка, т. е. антирефлексивным и транзитивным.

Нетрудно заметить, что это отношение не порождает в множестве $P(M)$ структуру линейного порядка. Действительно, существуют такие различные элементы $P(M)$, как, например, $\{2\}$ и $\{3\}$ или $\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$, которые не находятся друг с другом в отношении $\subset$, не сопоставимы по этому отношению. Поэтому нельзя расположить элементы $P(M)$ в ряд так, чтобы каждый элемент строго включался в соседний справа, или нельзя занумеровать элементы $P(M)$ с помощью начального отрезка натурального ряда $[1; 8]$ так, чтобы между $(P(M), \subset)$ и $([1; 8], <)$ установился изоморфизм.

Структура, порожденная отношением $\subset$ в $P(M)$ носит более сложный, нелинейный характер, наглядно представленный графом на рис. 2, где элементы $P(m)$ изображены в виде точек (вершин графа), а стрелками указаны все пары элементов (x, y), такие, что $x \subset y$.

Нестрогий порядок

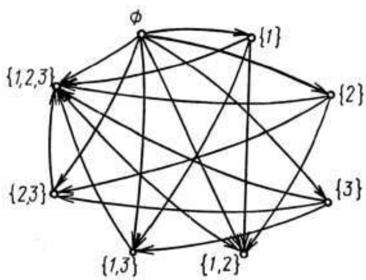

Рис. 2

Перейдем теперь к понятию нестрогого порядка. Рассмотрим несколько примеров.

Возьмем отношение нестрогого включения (или включения в широком смысле $\subseteq$) на том же множестве $P(M)$, на котором мы рассмотрели отношение строгого включения $\subset$.

Чем же отличается отношение $\subseteq$ от $\subset$? Тем, что в определении $\subseteq$ не ставится условие $A \neq B$. Таким образом, множество A включается (здесь и далее под «включением» будем понимать включение в широком смысле) в множество B, если каждый элемент A является также элементом B, т. е. $A \subseteq B$ по определению тогда и только тогда, когда для всякого x, если $x \in A$, то $x \in B$. Из этого определения следует, что, если $A \subseteq B$, то $A \subset B$ или $A = B$.

Действительно, если $A \subseteq B$, то или существует элемент множества B, не принадлежащий A, т. е. $A \subset B$, или не существует таких элементов, т. е. и $B \subseteq A$. В этом случае, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, множества A и B состоят из одних и тех же элементов, т. е. $A = B$.

Кстати, отношение $\subseteq$ можно определить и исходя из отношения строгого включения $\subset$:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \subset B \text{ или } A = B.$$

Рассмотрим свойства, которыми обладает отношение $\subseteq$.

Во-первых, в отличие от $\subset$ отношение $\subseteq$ рефлексивно, т. е. $A \subseteq A$ для всякого A. Это непосредственно следует из определения, так как $A = A$. Так, подставив A вместо B в правую часть приведенного выше определения, получаем $A \subset A$ или $A = A$. Это предложение составлено из двух элементарных предложений: $A \subset A$ (ложно) и $A = A$ (истинно), а предложение, составленное с помощью союза «или» из двух других, считается истинным, когда истинно хотя бы одно из составляющих; значит, предложение «$A \subset A$ или $A = A$» истинно, т. е. $A \subseteq A$.

Во-вторых, отношение $\subseteq$ в отличие от $\subset$ не является асимметричным. Здесь одновременно возможны $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, но в этом случае $A = B$, т. е. если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$. Это свойство называется *антисимметричностью*. Отношение $\subseteq$ является антисимметричным.

В-третьих, отношение $\subseteq$, как и $\subset$, является транзитивным, т. е. если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ (так как для всех x, если $x \in A$, то $x \in B$ ($A \subseteq B$), и если $x \in B$, то $x \in C$ ($B \subseteq C$), значит, если $x \in A$, то $x \in C$ ($A \subseteq C$)).

Структура, порождаемая в $P(M)$ отношением $\subseteq$, отличается от структуры, порождаемой в этом множестве отношением $\subset$, лишь тем, что каждый элемент находится в отношении $\subseteq$ с самим собой. Эта структура наглядно представлена графом на рис. 3.

Сравнивая рис. 2 и 3, легко замечаем различие: на графе рис. 3 в каждой вершине имеется петля. Это означает, что отношение $\subseteq$ рефлексивно (каждый элемент находится с самим собой в этом отношении). На графе рис. 2 нет ни одной петли, т. е. отношение $\subset$ антирефлексивно, ни один элемент не находится в этом отношении с самим собой.

Как видно, отношение $\subseteq$, как и $\subset$, не порождает в $P(M)$ линейный порядок.

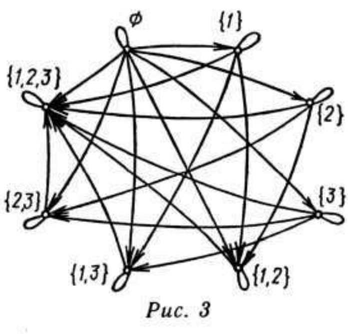

Рис. 3

Рассмотрим еще один пример нестрогого порядка. Иногда ответ на вопрос, истинны ли высказывания $3 \leqslant 3$, $3 \leqslant 5$, бывает неправильный. Для обоснования, того, что эти высказывания ложные, приводятся такие «рассуждения»: $3 = 3$ истинно, следовательно, $3 \leqslant 3$ ложно; $3 < 5$ истинно, а следовательно, $3 \leqslant 5$ уже ложно. При этом не учитывается, что именно из $3 = 3$ следует $3 \leqslant 3$ и, так как первое истинно, то и второе истинно; из $3 < 5$ следует $3 \leqslant 5$ и, так как первое истинно, то и второе истинно (об отношении следования речь пойдет дальше).

Причина ошибок, возможно, состоит в непонимании точного смысла союза «или», с помощью которого отношение $\leqslant$ образовано из отношений $<$ (меньше) и $=$ (равно).

Действительно, $3 \leqslant 3$ — сокращенная запись сложного высказывания «$3 < 3$ **или** $3 = 3$». Первое из составляющих высказываний ($3 < 3$) ложно, второе ($3 = 3$) истинно. Так как высказывание, составленное из двух других с помощью союза (логической связки) «или», считается истинным, если истинно хотя бы одно из составляющих высказываний, то $3 \leqslant 3$ истинно. Точно так же $3 \leqslant 5$ — сокращенная запись высказывания «$3 < 5$ **или** $3 = 5$». Так как одно из составляющих высказываний истинно, то и $3 \leqslant 5$ истинно.

Рассмотрим отношение $\leqslant$ (не больше, меньше или равно) на множестве N натуральных чисел. Это отношение можно определить следующим образом: $x \leqslant y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x < y$ **или** $x = y$.

Какими свойствами обладает это отношение?

Убедитесь, читатель, что это отношение обладает теми же свойствами, что и $\subseteq$.

Заметим также, что для любых x, $y \in N$ $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$.

Теперь сделаем обобщение для отношений $\subseteq$ и $\leqslant$.

Отношение P на множестве M называется отношением *нестрогого порядка* или *нестрогим порядком*, если оно

а) рефлексивно, т. е.

$x\mathrm{P}x$ для любого $x \in M$,

б) антисимметрично, т. е.

если $x\mathrm{P}y$ и $y\mathrm{P}x$, то $x = y$ для любых x, $y \in M$,

в) транзитивно, т. е.

если $x\mathrm{P}y$ и $y\mathrm{P}z$, то $x\mathrm{P}z$ для любых x, y, $z \in M$.

Эта характеристика нестрогого порядка является избыточной. Ее можно несколько упростить. Действительно, подставив x вместо z в пункт «в» (согласно пункту «б», $x\mathrm{P}y$ и $y\mathrm{P}x$ совместимы), получим: если $x\mathrm{P}y$ и $y\mathrm{P}x$, то $x\mathrm{P}x$.

Таким образом, нестрогий порядок можно охарактеризовать как антисимметричное и транзитивное отношения.

Если для любых $x, y \in M$ имеет место $x\mathrm{P}y$ или $y\mathrm{P}x$, то отношение P порождает на множестве M структуру линейного (совершенного) нестрогого порядка. В приведенных примерах отношение $\subseteq$ не порождает такой структуры на множестве $P(M)$, а $\leqslant$ порождает такую структуру на множестве N.

Рассмотрим еще один пример нестрогого порядка. Речь пойдет об отношении следования. В дальнейшем мы еще не раз обратимся к этому отношению с целью уточнения его смысла и расширения области определения. Рассмотрим пока это отношение на множестве предложений с переменными, часто встречающихся в математике в виде уравнений и неравенств.

Пусть имеем два уравнения:

$$x^2 - 2x = 0, \tag{1}$$
$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0. \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что множество корней уравнения (1) $E_1 = \{0, 2\}$, а множество корней уравнения (2) $E_2 = \{0, 1, 2\}$. Так как $E_1 \subseteq E_2$, то можно утверждать, что уравнение (2) обращается в истинное высказывание (верное равенство) по крайней мере при всех тех значениях переменной x, при которых уравнение (1) обращается в истинное высказывание. Иными словами, нет такого значения x, при котором (т. е. при подстановке которого) уравнение (1) обращалось бы в истинное, а уравнение (2) в ложное высказывание.

Говорят, что из уравнения (1) следует уравнение (2), или что уравнение (2) является следствием уравнения (1), и записывают это так:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0.$$

Рассмотрим два неравенства:

$$x < 5, \quad (3)$$
$$x < 10 \quad (4)$$

на множестве R действительных чисел.

Множество решений неравенства (3) $E_3] - \infty;$ $5[$, а неравенства (4) $E_4 =] - \infty; 10[$. Так как $E_3 \subseteq E_4$, то и здесь можно утверждать, что неравенство (4) обращается в истинное высказывание по крайней мере при всех тех значениях переменной x, при которых неравенство (3) обращается в истинное высказывание, или что нет такого значения x, при подстановке которого в (3) и (4) неравенство (3) обращалось бы в истинное, а (4) — в ложное высказывание.

Говорят, что неравенство (4) следует из (3) или является его следствием. Записывают это так: $x < 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow x < 10$.

Теперь обобщим рассмотренные примеры следования. Пусть имеем два предложения с переменной x — $A(x)$ и $B(x)$. Предложение $B(x)$ следует из предложения $A(x)$ (или $B(x)$ является следствием $A(x)$), если оно обращается в истинное высказывание по крайней мере при всех тех значениях переменной x, при которых $A(x)$ обращается в истинное высказывание. Это записывается так: $A(x) \Rightarrow B(x)$.

Рассмотрим свойства отношения $\Rightarrow$ (следует) между предложениями.

1. Нетрудно заметить, что $A(x) \Rightarrow A(x)$. $A(x)$ обращается в истинное высказывание по крайней мере при всех тех значениях x, при которых оно обращается в истинное высказывание, т. е. отношение $\Rightarrow$ рефлексивно;

2. Возможен случай, когда каждое из двух предложений $A(x)$ и $B(x)$ следует из другого. Например, пусть

$A(x): x^2 - x = 0$, а $B(x): x(x-1) = 0$. Очевидно, что имеют место следования $A(x) \Rightarrow B(x)$ и $B(x) \Rightarrow A(x)$.

В таком случае говорят, что предложения $A(x)$ и $B(x)$ эквивалентны (или равносильны), и записывают это так: $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

Обозначив через A и B области истинности, т. е. множества значений переменной x, при которых предложения $A(x)$ и $B(x)$ соответственно обращаются в истинные высказывания (если $A(x)$ и $B(x)$ — уравнения, то области истинности — их множества корней), получаем: если $A(x) \Rightarrow B(x)$, то $A \subseteq B$; если $B(x) \Rightarrow A(x)$, то $B \subseteq A$. Следовательно, если $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, то $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, или $A = B$. В нашем примере $A = B = \{0;\ 1\}$.

Итак, отношение $\Rightarrow$ (так же, как и $\subseteq$) обладает свойством антисимметричности: если $A(x) \Rightarrow B(x)$ и $B(x) \Rightarrow A(x)$, то $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

3. Пусть имеем три предложения $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ и известно, что $A(x) \Rightarrow B(x)$ и $B(x) \Rightarrow C(x)$.

Так как $A(x) \Rightarrow B(x)$, то $A \subseteq B$. Так как $B(x) \Rightarrow C(x)$, то $B \subseteq C$. Но если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ (транзитивность $\subseteq$). Так как $A \subseteq C$, то предложение $C(x)$ обращается в истинное высказывание по крайней мере при всех тех значениях x, при которых $A(x)$ обращается в истинное высказывание, т. е. $A(x) \Rightarrow C(x)$.

Как видно, отношение $\Rightarrow$ обладает и свойством *транзитивности*: если $A(x) \Rightarrow B(x)$ и $B(x) \Rightarrow C(x)$, то $A(x) \Rightarrow C(x)$.

Таким образом, отношение следования $\Rightarrow$ является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным, т. е. отношением нестрогого порядка.

Упражнения

1. Дан рост в сантиметрах пяти мальчиков: Алеши — 156; Андрея — 165; Коли — 162; Миши — 170; Сергея — 167.

Установите в этом множестве порядок с помощью отношений «выше», «ниже». Докажите, что каждое из этих отношений является отношением строгого порядка. Какая структура порядка порождается каждым из этих отношений в данном множестве?

2. Выпишите множество $P(M)$ всех подмножеств множества $M=\{1;\ 2\}$. Изобразите в виде графов структуры $(P(M), \subset)$ и $(P(M), \subseteq)$.

3. Проделайте то же, что и в упр. 2, для $M=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

4. Дано множество уравнений $M=\{Y_1,\ Y_2,\ \dots,\ Y_6\}$, где $Y_1: x^2-5x+4=0$; Y_2: $x^2-5x=0$; Y_3: $x(x-1)(x-4)=0$; Y_4: $x(x-5)=0$; $Y_5: (x-1)\ (x-4)=0$; $Y_6: x(x-5)\ \ (x-1)=0$.

Укажите, какие уравнения из каких следуют. Изобразите в виде графа структуру $(M, \Rightarrow)$.

5. Дано множество неравенств $P=\{H_1,\ H_2,\ \dots,\ H_6\}$, где H_1: $x<4$; H_2: $x>8$; H_3: $x<1$; H_4: $x>5$; H_5: $x<10$; H_6: $x>10$ и $x\in R$. Укажите, какие неравенства из каких следуют. Изобразите в виде графа структуру $(P, \Rightarrow)$.

2. КАКОВ ПОРЯДОК В МНОЖЕСТВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ?

Как определяются математические понятия?

Каждая математическая теория представляет собой множество истинных предложений, описывающих какую-нибудь систему или даже класс однотипных систем, объектов (предметов и отношений между ними). Эти объекты выражаются в теории соответствующими понятиями. Предложения же теории выражают свойства этих понятий или отношения между ними.

Стремясь анализировать внутренний порядок математики (какой-нибудь математической теории), мы должны выявлять как порядок в множестве понятий, так и порядок в множестве предложений, т. е. самой теории.

Каждое понятие имеет объем и содержание. Объем — совокупность объектов (предметов или отношений), охватываемых данным понятием, а содержание — совокупность свойств, характеризующих это понятие.

Например, объем понятия «треугольник» включает множество всевозможных треугольников, а содержание — совокупность свойств: наличие трех сторон, трех вершин, трех углов, пересечение которых и образует треугольник.

Вообще в определение понятия входит раскрытие его содержания, т. е. совокупности свойств, характеризующих это понятие. Например, мы могли бы раскрыть содержание понятия «параллелограмм», перечисляя такие его свойства: это — фигура, ограниченная замкнутой ломаной линией, состоящей из четырех звеньев (сторон), причем противоположные стороны параллельны. Но тогда наши «определения-описания» станут очень громоздкими, понятия окажутся изолированными, а множество понятий — без всякой внутренней структуры.

В математике же одно понятие сводится к другим, ранее уже определенным. Рассмотрим это на примере параллелограмма. Для сведения понятия «параллелограмм» к исходным понятиям мы использовали 17 определяемых понятий. Всего мы получили множество из 24 понятий.

На рис. 4 эти понятия и связи между ними изображены в виде графа. Вершины графа — понятия. В квадратных рамочках записаны номера определяемых понятий, в круглых — номера исходных понятий, а стрелками указано, какие понятия служат для определения следующих. Если от вершины i идет стрелка к вершине j, то понятие i используется для определения понятия j.

Номера понятиям даны произвольно и они отражают порядок появления понятий в нашем исследовании: *1* — параллелограмм; *2* — четырехугольник; *3* — параллельные стороны; *4* — многоугольник; *5* — отрезок; *6* — отрезок лежит на прямой; *7* — параллельные прямые; *8* — объединение; *9* — простая замкнутая ломаная; *10* — внутренняя область; *11* — множество; *12* — точка; *13* — лежит между; *14* — принадлежит; *15* — прямая; *16* — плоскость; *17* — прямая лежит в плоскости;

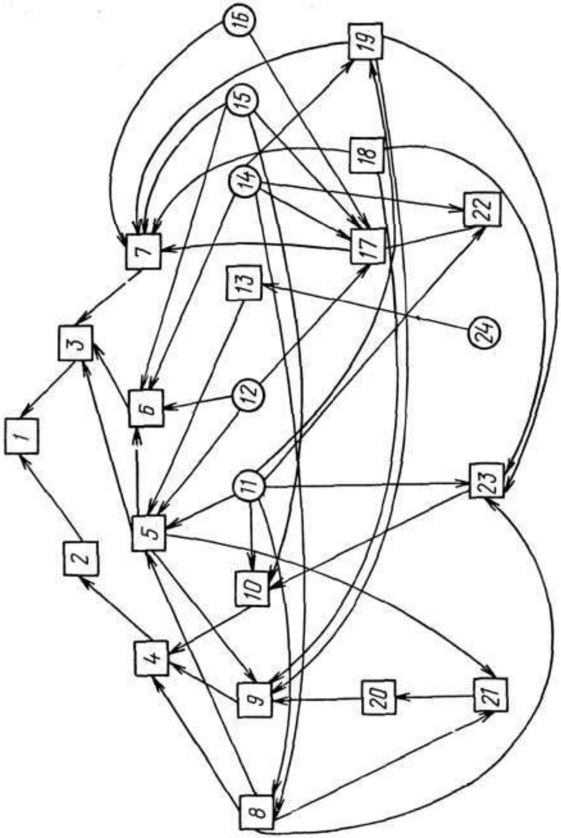

Рис. 4

18 — пересечение; *19* — пустое множество; *20* — замкнутая ломаная; *21* — ломаная; *22* — включение; *23* — разбиение множества; *24* — расстояние.

Указанный порядок устанавливается с помощью следующих определений.

Параллелограмм (1) — четырехугольник, имеющий две пары параллельных сторон.

С помощью этого определения понятие «параллелограмм» сводится к понятиям «четырехугольник» и «параллельные стороны». Теперь надо определить эти понятия.

Четырехугольник (2) — многоугольник с четырьмя сторонами.

Параллельные стороны (3), или параллельные отрезки,— отрезки, лежащие на параллельных прямых.

Итак, мы пришли к понятиям: многоугольник; отрезок; отрезок лежит на прямой; параллельные прямые.

Многоугольник (4) — объединение простой замкнутой ломаной и ее внутренней области.

Отрезок (5) — множество, состоящее из двух точек (концов отрезка) и всех точек, лежащих между ними.

Отрезок лежит на прямой (6), если все точки отрезка принадлежат прямой.

Параллельные прямые (7) — две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общей точки, или совпадающие.*

Теперь мы должны выяснить, что такое объединение, простая замкнутая ломаная, внутренняя область.

Объединение (8) двух множеств — множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств:

$$(A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}).$$

Чтобы выяснить, что такое простая замкнутая ломаная, сначала установим, что такое ломаная, затем, что такое замкнутая ломаная и, наконец, что такое простая замкнутая ломаная.

---

* В ныне действующих школьных учебниках геометрии совпадение не считается частным случаем параллельности.

Ломаная (21) — объединение отрезков, таких, что конец каждого отрезка (кроме последнего) является началом следующего и смежные отрезки не лежат на одной прямой.

Замкнутая ломаная (20) — такая ломаная, у которой конец последнего звена (отрезка) совпадает с началом первого.

Простая замкнутая ломаная (9) — замкнутая ломаная, у которой несоседние звенья не пересекаются.

Внутренняя область (10) — то из подмножеств, на которые замкнутая ломаная разбивает множество всех не принадлежащих ей точек плоскости, в котором не может быть расположена прямая.

Теперь проанализируем определение отрезка. Его можно записать так:

$$[AB] = \{A, B\} \cup \{x \mid A\overset{*}{X}B\},$$

где $A\overset{*}{X}B$ означает «точка X лежит между точками A и B».

Как видно, в этом определении используется отношение «лежит между», применимое к трем точкам (тернарное отношение).

Напомним определение этого отношения: точка X лежит между *(13)* точками A и B, если эти три точки различны, т. е. $X \neq A$, $X \neq B$ и $A \neq B$ и $|AX| + |XB| = |AB|$. В этом определении используется понятие «расстояние».

Проанализируем теперь определение параллельности прямых. Выражение «две прямые лежат в одной плоскости» означает, что существует плоскость, в которой лежат обе эти прямые. Так как прямая — множество точек, то отсутствие общей точки у двух прямых означает, что пересечение этих множеств пусто (есть пустое множество).

Выражение «существует...» называется *квантором существования* и обозначается символом $\exists$. Будем впредь пользоваться там, где это удобно, таким символом.

Определение понятия «параллельные прямые» (7) запишется в принятых в современной математике обозначениях следующим образом:

$$a \parallel b \underset{Df}{\Leftrightarrow} \exists\alpha(a \subset \alpha \text{ и } b \subset \alpha) \text{ и } (a \cap b = \varnothing \text{ или } a = b).$$

Знак $\underset{Df}{\Leftrightarrow}$ *читается «называется (означает, равносильно) по определению» (лат.* definitio — определение). Слева от знака $\underset{Df}{\Leftrightarrow}$ записано определяемое отношение параллельности, справа — ранее известные отношения, через которые определяется параллельность.

В этом определении использованы понятие: «включение одного множества в другое» (оно же использовалось и в определении отношения «отрезок лежит на прямой»), «пересечение множеств» ($\cap$) и «пустое множество» ($\varnothing$).

Если исходить из другого определения параллельности прямых, не включающего совпадение прямых ($a = b$), то оно в тех же обозначениях запишется так:

$$a \parallel b \underset{Df}{\Leftrightarrow} \exists\alpha(a \subset \alpha \text{ и } b \subset \alpha) \text{ и } (a \cap b = \varnothing).$$

Приведем определения этих понятий.

Множество A включается *(22)* в множество B (является его подмножеством), если все элементы множества A принадлежат и множеству B.

Выражение «все» (или «для всякого», «для любого») называется *квантором общности* и обозначается кратко через $\forall$.

Определение включения может быть записано так:

$$A \subset B \underset{Df}{\Leftrightarrow} \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Как видно, отношение включения сводится к отношению принадлежности (элемента к множеству).

Пересечение (18) двух множеств — множество, состоящее из всех общих элементов (принадлежащих обоим множествам)

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Пустое множество (19) — множество $\varnothing$, не содержащее никаких элементов.

Если это «странное» множество не считать множеством, то пересечение двух множеств не всегда было бы множеством (например, пересечение двух различных параллельных прямых). Однако в математике в отличие от грамматики очень мало исключений из правил.

При выяснении того, что такое внутренняя область *(10)*, мы использовали понятие «разбиение множества» на подмножества (классы) или классификации. Это чрезвычайно важное и широко применяемое в любой области науки и практики действие достаточно просто определяется на теоретико-множественном языке.

Разбиение (23) непустого множества M на классы $K_1, K_2, \ldots, K_n$ определяется следующими условиями:

все классы не пусты, т. е. $K_i \neq \varnothing$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$;

все классы попарно не пересекаются, т. е. $K_i \cap K_j = \varnothing$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$;

их объединение составляет множество M, т. е. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i = M$.

Замкнутая ломаная осуществляет разбиение множества не принадлежащих ей точек плоскости на два класса, называемых *внутренней* и *внешней областями* относительно этой ломаной.

Итак, с помощью всех приведенных определений мы свели понятие «параллелограмм» через ряд промежуточных (общематематических и геометрических) понятий к следующим шести понятиям: *множество (11), принадлежит (14), точка (12), прямая (15), плоскость (16), расстояние (24).*

Возникают вопросы: как же определить эти понятия; как продолжить процесс сведения одних понятий к другим? Вполне понятно, что процесс сведения одних понятий к другим не может продолжаться бесконечно. А это означает, что некоторые понятия должны быть объявлены исходными, первоначальными, а стало быть, не сводимыми к другим, не определяемыми через другие.

Из шести перечисленных понятий первые два — *множество* и отношение *принадлежит* — являются общематематическими исходными понятиями, остальные четыре — *точка, прямая, плоскость, расстояние* — исходными понятиями геометрической теории (они приняты за исходные в школьных учебниках).

Порядок в множестве математических понятий

Этот порядок мы можем установить с помощью следующего отношения, которое мы назовем «предшествует».

Этот термин хорошо согласуется с обычным пониманием слова «предшествует». Если понятие A предшествует понятию B в том смысле, в котором это будет уточнено ниже, оно предшествует ему и в обычном смысле — по времени введения или месту.

Определим теперь это отношение.

Понятие A предшествует понятию B, если существует конечная последовательность понятий A_0, A_1, ..., A_n, такая, что $A_0 = A$, $A_n = B$, и каждое понятие A_k используется в определении понятия A_{k+1} для всех k, удовлетворяющих условию $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Если понятие A предшествует B, то будем также говорить, что B следует за A.

Если $n=1$, т. е. понятие A непосредственно используется в определении понятия B, то будем говорить, что A *непосредственно предшествует* B, или B *непосредственно следует за* A.

Если $n>1$, то понятие A опосредованно (через другие понятия) используется в определении понятия B. Обозначим отношение «предшествует» знаком $\prec$.

Нетрудно убедиться в том, что отношение $\prec$ является строгим порядком. Действительно, $\neg A \prec A$ для любого понятия A (ни одно понятие не предшествует самому себе, не может использоваться, непосредственно или опосредованно в своем собственном определении), т. е. отношение $\prec$ антирефлексивно;

если $A \prec B$, то $\neg B \prec A$ для любых понятий A, B (если B определяется через A, а понятие A — через B, то получим *порочный круг* в определениях; например, «угол — прямой, если его стороны взаимно перпендикулярны» и «прямые — взаимно перпендикулярны, если они образуют прямой угол»; в результате такого порочного круга мы не определили ни прямой угол, ни перпендикулярные прямые), т. е. отношение $\prec$ асимметрично;

если $A \prec B$ и $B \prec C$, то $A \prec C$ для любых трех понятий A, B, C.

Действительно, если $A \prec B$, то существует последовательность понятий $A_0 = A$, A_1, ..., $A_n = B$, такая, что каждое A_k непосредственно используется в определении A_{k+1} для всех $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Так как $B \prec C$, то существует последовательность понятий $B_0 = B$, B_1, ..., $B_p = C$, такая, что каждое B_i непосредственно используется в определении B_{i+1} для всех $0 \leqslant i \leqslant p-1$. Тогда последовательность понятий

$$A_0 = A,\ A_1,\ ...,\ A_n = B_0,\ B_1,\ ...,\ B_p = C$$

обладает таким же свойством, т. е. каждое понятие, кроме последнего, непосредственно используется в определении соседнего справа. Следовательно, $A \prec C$.

По существу достаточно было убедиться, что отношение $\prec$ асимметрично и транзитивно, чтобы заключить, что оно является строгим порядком. Естественно, это отношение порождает в множестве математических понятий некоторую структуру, которая, однако, не является линейным порядком. Это наглядно видно из рис. 4, на котором структура порядка в множестве из 24 понятий изображена в виде графа.

Как же определить на графе, какие понятия предшествуют другим? Понятие i предшествует понятию j, если существует хотя бы один путь (последовательность стрелок), исходящий из вершины i и оканчивающийся в вершине j. Например, понятие «множество» *(11)* предшествует понятию «параллелограмм» *(1)*, так как существует путь

$$11 \to 5 \to 9 \to 4 \to 2 \to 1,$$

исходящий из вершины *11* и оканчивающийся в вершине *1*.

Разумеется, путь на графе, ведущий от вершины i к вершине j, может оказаться не единственным. Так, можно указать и другие пути, ведущие от *11* к *1*: $11 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ или $11 \to 19 \to 7 \to 3 \to 1$.

Обратим Ваше внимание, читатель, на следующее обстоятельство. При правильном (целесообразном) изучении математики усваивается не только некоторое множество M понятий, но и отношение порядка между ними, т. е. усваивается система $(M, \prec)$ понятий или определенным образом упорядоченная информация. По этому образцу человек приобретает умение упорядочить знания и не только математические, т. е. порядок в математических знаниях способствует и упорядочению любой информации, воспринимаемой человеком.

Упражнения

Проанализируйте определения ниже перечисленных понятий и тех, которые в них используются, до исходных понятий: 1) круг, 2) осевая симметрия, 3) поворот, 4) центральная симметрия, 5) параллельный перенос.

Изобразите структуры порядка в получаемых множествах понятий с помощью графов.

3. КАКОВ ПОРЯДОК В МНОЖЕСТВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ?

Житейский пример и маленькая математическая теория

Представим себе, что кто-то кому-то сообщил следующую информацию о родственных отношениях между четырьмя мальчиками — Андреем, Борисом, Владимиром и Геннадием. «Борис — брат Андрея, Владимир — брат Бориса, Геннадий не является братом Владимира, Андрей — брат Бориса и Владимира, но не является братом Геннадия, Борис — брат Владимира, но не является братом Геннадия, Владимир — брат Андрея, но не является братом Геннадия, Геннадий не является братом Андрея и не является братом Бориса».

Попытаемся привести в порядок эту неупорядоченную, сумбурную информацию. Для краткости будем пользоваться инициалами имен мальчиков (А, Б, В, Г) и отношение «быть братом» обозначим буквой «б». В этих обозначениях приведенная информация может быть записана в виде следующих 12 предложений:

$$p_1\text{: БбА};\ p_2\text{: ВбБ};\ p_3\text{: }\neg\text{ГбВ};\ p_4\text{: АбБ};\ p_5\text{: АбВ};$$
$$p_6\text{: }\neg\text{АбГ};\ p_7\text{: БбВ};\ p_8\text{: }\neg\text{БбГ};\ p_9\text{: ВбА};$$
$$p_{10}\text{: }\neg\text{ВбГ};\ p_{11}\text{: }\neg\text{ГбА};\ p_{12}\text{: }\neg\text{ГбБ}.$$

Естественно возникает вопрос: надо ли хранить в памяти все эти 12 предложений, чтобы знать все о родственных отношениях, существующих между четырьмя мальчиками? Ведь нет надобности загромождать свою память лишней информацией. Что же достаточно запомнить?

Нетрудно заметить, что достаточно запомнить всего лишь три предложения, например, p_1, p_2 и p_3, и знать, что отношение «быть братом» является симметричным (если XбY, то YбX для любых двух мальчиков X и Y) и транзитивным (если XбY и YбZ, то XбZ для любых трех мальчиков X, Y, Z). Все остальные предложения следуют из первых трех по этим двум свойствам.

Покажем, как математик построил бы из данного множества предложений $P = \{p_1, p_2, ..., p_{12}\}$ маленькую математическую теорию. Неважно, что объекты здесь не являются привычными для нас математическими объектами (числами, геометрическими фигурами, функциями и т. п.), а речь идет о мальчиках и отношении «быть братом». Дело в том, что теория является математической, если она описывает лишь свойства отношений между предметами и отвлекается от природы самих предметов и смысла отношений. Она является математической также по своему построению.

Математик сказал бы примерно так: дано некоторое четырехэлементное множество $M = \{$А, Б, В, Г$\}$ и некоторое симметричное и транзитивное отношение «б» на этом множестве. Какова природа элементов множества M и каков смысл отношения «б», его не интересует.

Далее он поставил бы перед собой задачу выделить из множества P предложений минимальное подмножество A, такое, чтобы из A следовали логически все остальные предложения множества P. Если за исходное принять одно предложение p_1, то p_2 уже не следует из него. Если за исходные принять предложения p_1 и p_2, то p_3 из них не следует.

Попытаемся в качестве множества исходных предложений (аксиом) принять множество $A = \{p_1, p_2, p_3\}$. Если удастся доказать теперь все остальные предложения из P в качестве «теорем», то мы построим следующую теорию, состоящую из системы аксиом A и 9 теорем:

Т.1. АбБ (p_4):

АбБ непосредственно следует из БбА (p_1) по свойству симметричности;

Т.2. БбВ (p_7):

БбВ непосредственно следует из ВбБ (p_2) по свойству симметричности;

Т.3. АбВ (p_5):

Из АбБ (Т.1) и БбВ (Т.2) следует АбВ по свойству транзитивности;

Т.4. ВбА (p_9):

непосредственно следует из АбВ (Т.3) по свойству симметричности;

Т.5. ¬ВбГ (p_{10}):

допустим, от противного, что ВбГ. Тогда по свойству симметричности получим ГбВ, что противоречит аксиоме p_3. Это противоречие доказывает теорему;

Т.6. ¬ГбА (p_{11}):

допустим, от противного, что ГбА. Тогда из ГбА (нашего допущения) и АбВ (Т.3) по свойству транзитивности следует ГбВ, что противоречит аксиоме p_3;

Т.7. ¬АбГ (p_6); Т.8. ¬ГбБ (p_{12}); Т.9. ¬БбГ (p_8).

Итак, мы построили математическую теорию. Назовем ее T. Чем же отличается построенная теория T от первоначального заданного множества предложений P?

Во-первых, первоначальное множество P предложений лишено всякой структуры. Теория T получена в результате введения в множество P отношения следования и выделения подмножества A исходных предложений (посылок). По существу T есть множество всевозможных следствий из системы аксиом A. Если это множество обозначить через «$Сл(A)$», то $T = Сл(A)$ (в это множество следствий входят, разумеется, и сами аксиомы, так как каждая из них является следствием из самой себя).

Система аксиом A и отношение следования порождают в множестве P определенную структуру. Эта структура изображена в виде графа на рис. 5. Это и есть структура теории T.

Множество $A = \{p_1, p_2, p_3\}$ — не единственно воз-

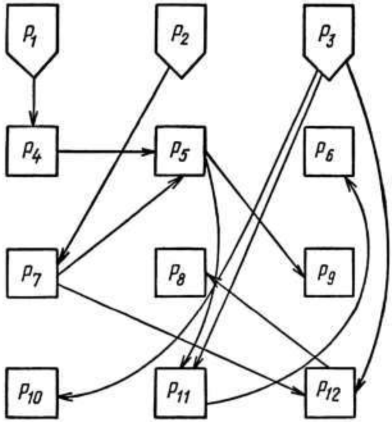

Рис. 5

можная система аксиом, на которой можно построить теорию для множества предложений P.

Докажите, что множество $A_1 = \{p_7, p_8, p_9\}$ тоже может служить такой системой аксиом, и изобразите структуру соответствующей теории с помощью графа.

Найдите еще варианты систем аксиом.

Все эти системы аксиом или соответствующие им (построенные на них) теории считаются эквивалентными (равносильными) в том смысле, что множества следствий из этих систем аксиом совпадают ($Сл(A) = Сл(A_1) = Сл(A_2) = \ldots$). Иными словами, эти теории состоят из одного и того же множества P предложений, но структуры, порождаемые в данном множестве системой аксиом и отношением следования, различны.

Второе отличие состоит в следующем. Элементы первоначально заданного множества предложений P — конкретные предложения, выражающие родственные отношения между мальчиками А, Б, В, Г.

Аксиомы и теоремы теории T — предложения, выражающие свойства некоторого симметричного и транзитивного отношения «б» в множестве M произвольной природы, причем все эти свойства следуют из трех свойств, принятых за исходные. Поэтому T описывает не только родственные отношения между мальчиками, но и свойства любого другого конкретного четырехэлементного множества с введенным в нем симметричным и транзитивным отношением, удовлетворяющим условиям, выраженным в трех аксиомах p_1, p_2, p_3.

Множество M мальчиков с отношением «быть братом» составляет лишь одну из возможных «моделей» построенной нами теории.

Приведем несколько примеров других «моделей» этой теории.

1. Пусть А, Б, В, Г — прямые (обозначим их a, b, c, d), а «б» — отношение параллельности ($\|$); оно симметрично и транзитивно.

Если истинны предложения $p_1: b \| a$; $p_2: c \| b$; $p_3: \neg d \| c$, то будут истинными и предложения $p_4 - p_{12}$, записанные в этой интерпретации, так как они доказаны как теоремы общей теории, выведены из p_1, p_2, p_3 без всякой ссылки на какую-нибудь конкретную модель.

2. Пусть А, Б, В, Г — алгебраические выражения; «б» — отношение тождества выражений на некотором числовом множестве ($\equiv$); это отношение симметрично и транзитивно.

Если выполняются (истинны) предложения p_1: Б $\equiv$ А, p_2: В $\equiv$ Б, p_3: $\neg$Г $\equiv$ В, то истинны и предложения $p_4 - p_{12}$, записанные на этом языке (в этой интерпретации).

3. Пусть теперь А, Б, В, Г — геометрические фигуры, а «б» — отношение подобия фигур ($\backsim$). Оно симметрично и транзитивно.

Если истинны предложения p_1: Б $\backsim$ А, p_2: В $\backsim$ Б,

p_3: $\neg Г \backsim В$, то истинны и предложения $p_4 - p_{12}$, так как они следуют из p_1, p_2, p_3 и это доказано один раз для любых возможных моделей, состоящих из четырехэлементного множества M с симметричным и транзитивным отношением «б» и удовлетворяющих системе аксиом $A = \{p_1, p_2, p_3\}$.

Теперь оцените, читатель, как рационально работает математик. Он строит одну общую теорию, описывающую целый класс однотипных структур (класс моделей, характеризуемых одной и той же системой аксиом). Мальчики, прямые, алгебраические выражения, геометрические фигуры, отношения «быть братом», «параллельно», «тождественно равно», «подобно», т. е. совершенно различные объекты и отношения описываются одной теорией. Более того, способ построения математической теории обеспечивает возможность получения большой информации исходя из небольшого числа исходных предложений (аксиом).

Какая экономия памяти и мышления достигается таким образом! Вот что означает — математика «ум в порядок приводит»!

Теория T устанавливает определенный порядок в множестве предложений P. Этот порядок носит логический характер, так как вводится с помощью отношения следования.

Отношение следования, как Вы помните (§ 1), является отношением нестрогого порядка. Порождаемая им структура в множестве P, изображенная на рис. 5, не является линейным порядком, носит более сложный, нелинейный характер.

Итак, при изучении математики вырабатывается определенный стиль мышления: в конкретной ситуации важно, во-первых, запомнить такую минимальную характеристику, которая, однако, достаточна для получения всей необходимой и возможной информации об этой ситуации уже с помощью одних рассуждений, и, во-вторых, следует подвести эту конкретную ситуацию под более общий случай, увидеть в ней модель некоторой общей теории.

Еще одно отличие теории T от исходного множества предложений P состоит в следующем. Теория T содержит все следствия из системы аксиом A ($A \subset P$). Но множество всевозможных следствий из A не обязательно совпадает с первоначально заданным множеством предложений P. Система аксиом A выбирается так, чтобы среди следствий из A были все предложения множества P, т. е. так, чтобы

$$P \subseteq Сл(A) = T.$$

Возникает вопрос: нельзя ли получить еще следствия из системы аксиом A, не содержащиеся в P? Оказывается, можно, так как множество предложений P не исчерпывает всех следствий из A. Например, можно доказать еще Т.10: АбА. Действительно, из АбБ (p_4) и БбА(p_1) по свойству транзитивности следует АбА. Таким же образом можно доказать Т.11: БбВ и Т.12: ВбВ. Иными словами, всякое симметричное и транзитивное отношение является также рефлексивным.

Перечисленные отношения и всякие другие, подобные им, т. е. рефлексивные, симметричные и транзитивные, являются отношениями эквивалентности.

Упражнения

1. Дополним множество M мальчиков еще одним — Димой (Д), т. е. теперь $M = \{А, Б, В, Г, Д\}$. Пусть по-прежнему «б» обозначает отношение «быть братом», а множество предложений P дополнено одним предложением p_{13}: ДбГ. Выделите систему аксиом A так, чтобы $P \subseteq Сл(A)$. Докажите все следствия из A. Найдите другую систему аксиом A_1. Установите, что $Сл(A_1) = Сл(A)$. Изобразите структуры двух теорий в виде графов.

2. Приведите другие модели теории, построенной при решении упр. 1 на базе системы аксиом A или A_1.

3. Покажите, что отношение «б» разбивает множество $M = \{А, Б, В, Г, Д\}$ на два класса (непересекающиеся подмножества) так, что: а) любые два элемента одного и того же класса находятся в отношении «б»; б) любые два элемента различных классов не находятся в этом отношении.

Маленькие теории внутри большой теории

Рассмотрим несколько достаточно простых геометрических ситуаций, изображенных на рис. 6, и попытаемся описать их математически, т. е. с помощью математических предложений. При этом будем исходить из наблюдения, опыта (например, можно скопировать рисунок на лист прозрачной бумаги и согнуть определенным образом), проводить измерения.

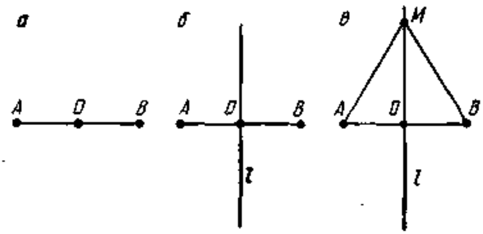

Рис. 6

Возьмем ситуацию, изображенную на рис. 6, *а*. Ее можно описать следующим образом. Мы видим, что точка O лежит на отрезке AB, т. е.

$$p_1 : O \in [AB],$$

что она — середина этого отрезка (можно подкрепить это предположение измерением), т. е.

$$p_2 : |AO| = |OB|.$$

Используя наши знания центральной симметрии, можно также утверждать, что

$$p_3 : Z_0(A) = B, \ p_4 : Z_0([AB]) = [BA].$$

Итак, мы получили множество из четырех предложений $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Но надо ли запоминать всю эту информацию, все четыре предложения, чтобы знать все о фигуре, изображенной на рис. 6, *а*?

Выясним, что из чего следует в множестве P. Из p_1 не следует p_2, так как точка O может принадлежать отрезку AB, но не быть его серединой. Из p_2 не следует p_1, так как точка O может быть равноудаленной от концов отрезка AB, но не принадлежать этому отрезку. Но из p_1 и p_2 следует p_3 (по определению центральной симметрии), а из p_3 следует p_4.

Таким образом, можно принять в качестве исходных (локальных аксиом) предложения p_1 и p_2. Из них в качестве следствий получаем p_3 и p_4. Отношение следования порождает в этом случае структуру порядка, изображенную на рис. 7, *а*.

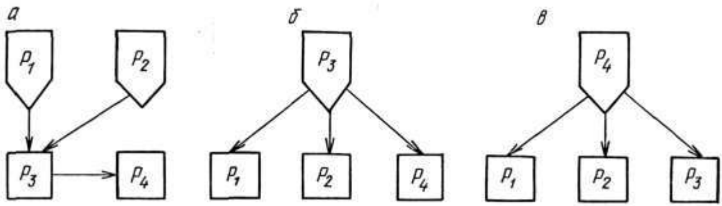

Рис. 7

Но можно в качестве исходного принять одно предложение p_3. Из него следуют p_1, p_2, p_4 (рис. 7, *б*). Можно также принять в качестве исходного предложение p_4. Из него следуют p_1, p_2, p_3 (рис. 7, *в*). В этом простом случае (четырех предложений p_1 — p_4) мы указали все возможные способы логического упорядочивания с помощью отношения следования.

Для описания ситуации, изображенной на рис. 6, *б*, дополним множество P следующими предложениями:

$$p_5: O \in l;\ p_6: [AB] \cap l = O;\ p_7: l \perp [AB];$$
$$p_8: S_l(A) = B;\ p_9: S_l([AB]) = [BA].$$

Мы получили новое, расширенное множество предложений $P_1 = \{p_1, p_2, ..., p_9\}$, такое, что $P \subset P_1$. Здесь уже возможно намного большее число различных систем исходных предложений, каждая из которых имеет среди своих следствий все предложения из P_1. Например, если в каждом из трех вариантов системы исходных предложений для множества P присоединить к исходным предложениям p_8, или p_9, или p_5 и p_7, или p_6 и p_7, то получим 12 различных систем. Присоединяя к варианту, представленному на рис. 7, *б*, в качестве нового исходного предложения p_8, получим структуру, показанную на рис. 8.

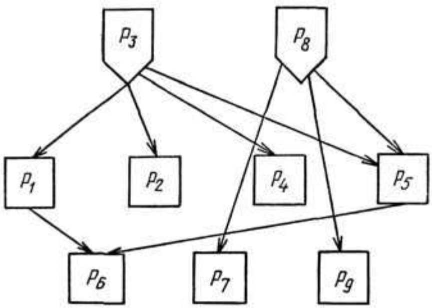

Рис. 8

Изобразите структуры, которые мы получим, если к вариантам, данным на рис. 7, *а, в*, присоединить p_9 или p_5 и p_7.

Нетрудно заметить, что фигура на рис. 6, *в* включает фигуру рис. 6, *б*, но содержит и некоторые другие элементы, а именно:

точку M, лежащую на прямой l, т. е. $p_{10}: M \in l$;

отрезки MA и MB, которые, очевидно, равны, т. е. $p_{11}: [MA] = [MB]$, и симметричны относительно l, т. е. $p_{12}: S_l([MA]) = [MB]$.

Возникает предположение, что и углы MAB и MBA равны, т. е. p_{13}: $\angle MAB = \angle MBA$, и l — биссектриса угла M, т. е. p_{14}: $\angle AMO = \angle BMO$, и сам треугольник ABM симметричен относительно l, т. е. p_{15}: $S_l(\triangle MAB) = \triangle MBA$.

Получили множество предложений: $P_2 = \{p_1, p_2, \ldots, p_{15}\}$, причем $P \subset P_1 \subset P_2$.

Возникает задача, аналогичная той, которую мы решили для P_1, т. е. надо найти такую систему исходных предложений, среди следствий которых находились бы все предложения из P_2.

Возьмем, например, систему исходных предложений $A = \{p_3\}$ для множества P, систему $A_1 = \{p_3, p_8\}$ для P_1 и присоединим к ней предложение p_{10}. Иными словами, примем систему исходных предложений $A_2 = \{p_3, p_8, p_{10}\}$. Так как из A_1 следуют все предложения из P_1, то остается доказать, что из A_2 следует каждое из предложений $p_{11} - p_{15}$.

Легко заметить, что

$$p_8,\ p_{10} \Rightarrow p_{12};$$
$$p_8,\ p_{10} \Rightarrow p_{15};$$
$$p_{12} \Rightarrow p_{11},$$

так как всякие симметричные фигуры равны:

$$p_{15} \Rightarrow S_l(\angle MAB) = \angle MBA,$$
$$\text{а } S_l(\angle MAB) = \angle MBA \Rightarrow p_{13};$$
$$p_5,\ p_8,\ p_{10} \Rightarrow S_l(\angle AMO) = \angle BMO,$$
$$\text{а } S_l(\angle AMO) = \angle BMO \Rightarrow p_{14}.$$

Итак, множество $A_2 = \{p_3, p_8, p_{10}\}$ подходит в качестве системы исходных предложений (посылок) для доказательства всех остальных предложений из P_2. Полученная структура (порожденная выбором системы исходных предложений A_2 и отношением следования) изображена на рис. 9.

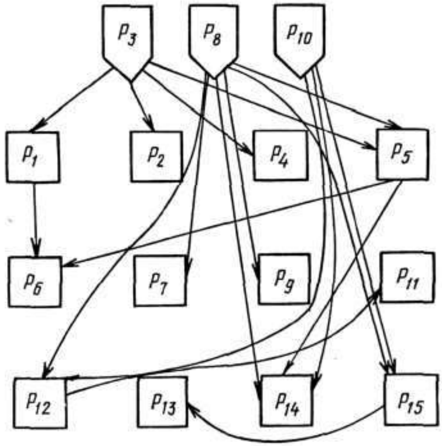

Рис. 9

В доказательствах предложений p_{11} — p_{15} (которые мы опустили) тоже используются ранее уже известные геометрические факты, например определения осевой и центральной симметрии, равенства фигур, свойства этих понятий.

Таким образом, мы построили «маленькую» теорию, описывающую фигуру, изображенную на рис. 6, *в* (равнобедренный треугольник), в рамках «большой» геометрической теории, некоторые аксиомы, определения и теоремы которой мы уже знаем.

Для множества предложений P_2 (так же как для P и P_1) можно, разумеется, выбрать различные системы исходных предложений. Наряду с A_2 можно, например, выбрать $A_3 = \{p_3,\ p_5,\ p_{12}\}$ или $A_4 = \{p_3,\ p_5,\ p_7,\ p_{10}\}$, $A_5 = \{p_3,\ p_8,\ p_{11}\}$ или $A_6 = \{p_{15}\}$ и т. д.

Важно заметить, что каждая система определяет вариант теории равнобедренного треугольника. Сколько вариантов исходных систем предложений, а стало быть и теорий, столько и различных возможных определений равнобедренного треугольника. Так, треугольник — равнобедренный, если: $A_2 \rightarrow$ две вершины симметричны относительно прямой, проходящей через третью вершину; $A_3 \rightarrow$ две стороны симметричны относительно прямой, на которой лежит медиана, опущенная на третью сторону; $A_4 \rightarrow$ медиана и высота, опущенные из одной вершины, совпадают; $A_5 \rightarrow$ две стороны равны; $A_6 \rightarrow$ имеется ось симметрии и т. д.

Все эти определения с логической точки зрения равносильны, так как относятся к одному и тому же классу фигур (равнобедренных треугольников). Обычно в школьных учебниках выбирается определение, соответствующее A_5. Этот выбор уже связан с педагогическими соображениями (равенство двух сторон — свойство наглядное, оно и принимается за определяющее, исходное для построения теории этого класса фигур).

Что такое аксиомы?

Мы видели на примерах, что упорядочение множества предложений, описывающих некоторую конкретную ситуацию, или построение какой-либо теории неизбежно связано с выделением системы исходных предложений, посылок или «локальных аксиом».

Из школьного курса известно, что вся геометрия строится на базе определенной системы аксиом.

Обычно о каком-нибудь предложении, истинность которого очевидна, говорят, что это — аксиома. В математике термин «аксиома» имеет совершенно иной смысл. Не доказывается аксиома совсем не потому, что очевидно истинна и не требует доказательства. Можно привести сколько угодно примеров теорем, не менее очевидных, чем аксиомы, из той же области математики, но которые доказываются. Почему же они требуют доказательства, а аксиомы не требуют?

Например, предложение «две различные прямые могут иметь не более одной общей точки» доказывается как теорема, хотя истинность его не менее очевидна, чем истинность предложения «через две различные точки проходит точно одна прямая», которое обычно принимается за аксиому и не доказывается.

Вообще характерной особенностью математики является то, что все ее предложения «требуют» доказательства, так же как все ее понятия «требуют» определения. Мы уже говорили о том, что с помощью определений одни понятия сводятся к другим, а эти последние еще к другим и т. д. Этот процесс не может быть бесконечным, поэтому некоторые исходные (первоначальные) понятия принимаются без определения. С помощью доказательства одни математические предложения также сводятся к другим, а эти последние еще к другим и т. д. Этот процесс тоже не может быть бесконечным. Поэтому в каждой математической теории некоторые предложения объявляются исходными (первоначальными) и принимаются за истинные без доказательства. Эти исходные предложения и называются *аксиомами*.

Рассмотрим для примера теорему о транзитивности параллельности прямых на плоскости. Пусть a, b, c — три прямые одной плоскости. Докажем, что $a \parallel b$ **и** $b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$. (Мы будем исходить из определения, включающего совпадение прямых как частный случай их параллельности.)

Представим доказательство в виде схемы, выявляющей последовательность шагов и облегчающей анализ (рис. 10). Пользуясь этой схемой, проведем анализ доказательства. Нам надо доказать параллельность прямых a и c, исходя из условий: $a \parallel b$ и $b \parallel c$. Относительно прямых a и c могут быть два предположения: а) они совпадают ($a = c$); б) они различны ($a \neq c$).

Если прямые a и c совпадают, то они парал-

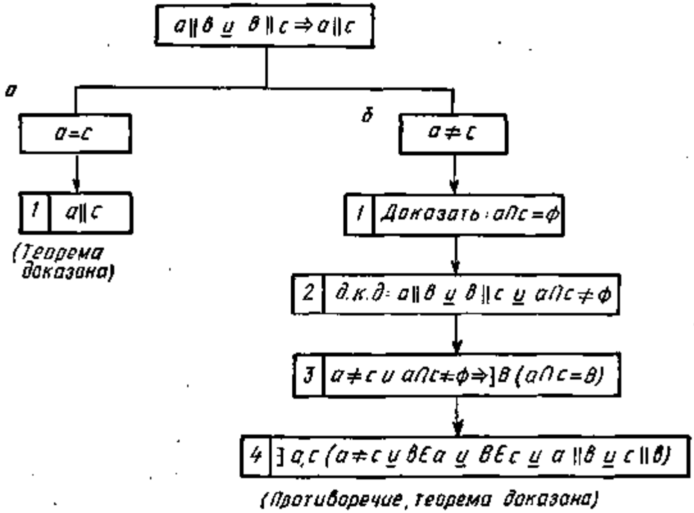

Рис. 10

лельны (согласно определению), и теорема доказана. Если прямые a и c различны, то, согласно определению, они параллельны, если не имеют общих точек, т. е. нам надо доказать, что

$$a \cap c = \varnothing. \qquad (1)$$

Будем рассуждать «от противного», т. е. допустим, что условия $a \parallel b$ и $b \parallel c$ истинны, а заключение теоремы ($a \cap c = \varnothing$) ложно, или его отрицание ($a \cap c \neq \varnothing$) истинно. Иными словами, примем следующее допущение косвенного доказательства (д. к. д.):

$$a \parallel b \text{ и } b \parallel c \text{ и } a \cap c \neq \varnothing. \qquad (2)$$

Из этого допущения и из того, что прямые a и c различны, по известной теореме о том, что две различные прямые не могут иметь более одной общей точки, следует существование одной общей точки B, т. е. такой, что

$$a \cap c = B. \tag{3}$$

Из предложения (3) мы получаем, что существуют две различные прямые a и c, проходящие через одну точку B и параллельные прямой b, т. е.

$$B \in a \text{ и } B \in c \text{ и } a \neq c \text{ и } a \parallel b \text{ и } c \parallel b. \tag{4}$$

Предложение (4) противоречит аксиоме параллельных, утверждающей, что через точку проходит не более одной прямой, параллельной данной. Это противоречие и доказывает теорему (см. главу 2).

В процессе доказательства мы ссылались на определение параллельности прямых, на теорему о том, что две различные прямые не могут иметь более одной общей точки, а также использовали предложение «$c \parallel b$», хотя по условию теоремы $b \parallel c$. Иными словами, мы неявно воспользовались свойством симметричности параллельности, которое, несмотря на очевидность, должно быть доказано, так как не числится среди аксиом геометрии.

Теорема о том, что две различные прямые не могут иметь более одной общей точки, доказывается способом от противного очень просто. Действительно, допущение о том, что две различные прямые a и b имеют две общие точки A и B, сразу же приводит к тому, что через две различные точки A и B проходят две различные прямые, что противоречит известной аксиоме об единственности прямой, проходящей через две различные точки.

Теорема о симметричности параллельности

$$a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$$

непосредственно следует из определения параллельности

$$a \parallel b \underset{\text{Df}}{\Leftrightarrow} \exists\alpha(a \subset \alpha \text{ и } b \subset \alpha) \text{ и } (a \cap b = \varnothing \text{ или } a = b).$$

Действительно, $a \subset \alpha$ **и** $b \subset \alpha \Rightarrow b \subset \alpha$ **и** $a \subset \alpha$,

$$a \cap b = \varnothing \Rightarrow b \cap a = \varnothing,$$

$$a = b \Rightarrow b = a.$$

Следовательно, $a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$.

Разумеется, в этом доказательстве мы ссылались не только на определение параллельности, но и на некоторое свойство логической операции, выражаемой союзом **и**, на переместительность пересечения множеств, на симметричность равенства. Но эти предложения принадлежат теориям, предшествующим геометрии (математической логике, теории множеств), и мы их не будем здесь анализировать.

Таким образом, ограничиваясь только геометрическими предложениями, получаем схему процесса сведения теоремы о транзитивности параллельности прямых (рис. 11).

Рис. 11

Итак, аксиомы — исходные предложения теории и именно поэтому они не доказуемы, не выводимы из других предложений этой теории. Они принимаются за исходные истинные предложения. Все остальные предложения теории доказываются, т. е. их истинность устанавливается с помощью доказательств, в которых используются уже известные истинные предложения: ранее доказанные теоремы, аксиомы и определения (истинные в силу того, что они приняты за определения).

Какова же связь между исходными понятиями и исходными предложениями (аксиомами)? Аксиомы выражают некоторые свойства исходных понятий или отношений между ними и это все, что мы первоначально знаем об этих понятиях, и только этим мы имеем право пользоваться в доказательствах теорем. Можно сказать, что аксиомы — своеобразные косвенные определения исходных понятий.

Например, все, что мы знаем первоначально об отношениях между исходными геометрическими понятиями «точка» и «прямая», заложено в трех аксиомах принадлежности:

I_1. Каждая прямая есть множество точек;

I_2. Для любых двух точек существует одна и только одна содержащая их прямая;

I_3. Существует хотя бы одна прямая; каждой прямой принадлежит хотя бы одна точка.

В этих аксиомах выражена лишь минимальная информация, достаточная, однако, для доказательства других свойств, которые мы интуитивно представляем. Например, мы полагаем, что каждой прямой принадлежит не одна, а бесконечное множество точек. Но, оказывается, это предложение может быть доказано. Правда, трех перечисленных аксиом для этого еще недостаточно. Если построить маленькую теорию, основанную на этих трех аксиомах (геометрию принадлежности), то она описывает и такие системы точек и прямых, которые состоят из одной прямой и двух точек, или из трех точек и трех прямых, из четырех точек и шести прямых и т. д. Например, назовем числа 0 и 1 точками, а множество $\{0; 1\}$ — прямой. Нетрудно убедиться в том, что все три аксиомы $I_1 - I_3$ выполняются (истинны) в этой системе объектов, состоящей из двух «точек» (0 и 1) и одной «прямой» ($\{0; 1\}$).

Действительно, прямая $\{0; 1\}$ — множество точек, т. е. аксиома I_1 выполняется (правда, прямая $\{0; 1\}$ состоит всего лишь из двух точек, но ведь эта аксиома не содержит никаких требований относительно количества точек прямой).

Аксиома I_2 утверждает, что для любых двух точек существует одна и только одна содержащая их прямая. В нашей системе объектов всего две точки (0 и 1) и существует одна и только одна содержащая их прямая $\{0; 1\}$.

И, наконец, существует хотя бы одна прямая (в нашей системе одна — $\{0; 1\}$) и каждой прямой принадлежит хотя бы одна точка (прямой $\{0; 1\}$ принадлежат даже две точки).

Итак, аксиомы $I_1 - I_3$ выполняются в нашей системе объектов. Поэтому последняя называется *моделью* системы аксиом $I_1 - I_3$.

Рассмотренные аксиомы могут выполняться и в других системах объектов, т. е. система аксиом $I_1 - I_3$ может иметь и другие модели. Например, пусть $\triangle$ и $\square$ — «точки», а множество $\{\triangle, \square\}$ — «прямая». Опять выполняются аксиомы $I_1 - I_3$.

Не следует удивляться тому, что «точками» и «прямыми» здесь названы не те объекты, к которым мы привыкли в школьной геометрии. Ведь «точки» и «прямые» — исходные, неопределяемые понятия. Нигде не сказано, что они обязательно должны быть объектами той природы, к которой мы привыкли.

Разумеется, те точки и прямые, которые с древнейших времен изучаются в геометрии, удовлетворяют аксиомам $I_1 - I_3$; для них, собственно говоря, и сформулированы эти аксиомы. Но с современной точки зрения они составляют лишь одну из моделей системы аксиом $I_1 - I_3$.

Мы исследовали модели, содержащие всего две точки и одну прямую. Возьмем модель, содержащую три точки и три прямые.

Пусть $\{0, 1, 2\}$ — «точки», а $\{0; 1\}$, $\{1; 2\}$, $\{0; 2\}$ — «прямые». Проверьте самостоятельно, что и в этой системе «точек» и «прямых» выполняются аксиомы $I_1 - I_3$.

Но если в какой-нибудь системе объектов выполняются аксиомы $I_1 - I_3$, то в ней выполняются и все следствия из этих аксиом. Например, в приведенной модели выполняется и теорема «две различные прямые имеют не более одной общей точки», доказуемая уже на базе этих аксиом.

Действительно $\{0; 1\} \cap \{1; 2\} = 1$; $\{1; 2\} \cap \{0; 2\} = 2$ $\{0; 1\} \cap \{0; 2\} = 0$. Как видно, в этой модели всякие две различные прямые имеют точно одну общую точку.

Если же возьмем четыре «точки» — 0, 1, 2, 3 и шесть «прямых» — $\{0; 1\}$, $\{0; 2\}$, $\{0; 3\}$, $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{2; 3\}$, то в этой модели существуют и такие прямые, которые не имеют общих точек. Например, прямые $\{0; 1\} \cap \{2; 3\} = \varnothing$, $\{0; 2\} \cap \{1; 3\} = \varnothing$ параллельны. Следовательно, в этой модели всякие две различные прямые имеют не более одной общей точки (т. е. ни одной или только одну).

Таким же путем можно построить и другие конечные модели (состоящие из конечного числа точек и прямых) системы аксиом $I_1 - I_3$.

Если эту систему дополнить другими аксиомами, необходимыми для получения в качестве следствий всех теорем геометрии плоскости, то такая «полная» система аксиом геометрии уже не допускает конечных моделей. Из нее следует существование бесконечного множества точек, принадлежащих каждой прямой, и бесконечного множества прямых, лежащих в плоскости.

Что же такое аксиоматический метод?

Описанный выше порядок в множествах понятий и предложений порождается аксиоматическим построением математических теорий. Что это означает?

В наших примерах мы шли как бы обратным путем, к началу теории: от определяемых понятий — к исходным, неопределяемым, от теорем (доказываемых предложений) — к аксиомам, т. е. к исходным истинным предложениям, принимаемым без доказательства.

Аксиоматическое же построение какой-нибудь теории осуществляется по следующей схеме: 1) перечисляются исходные понятия, вводимые без определений; 2) формулируются исходные истинные предложения (аксиомы), принимаемые без доказательства, выражающие основные свойства и отношения исходных понятий; 3) на основе исходных понятий определяются все остальные понятия; 4) на основе аксиом и определений доказываются все остальные предложения (теоремы) теории.

Отметим, что в доказательствах разрешается использовать, кроме аксиом и определений, также и другие предложения, если только они ранее уже доказаны. Точно также в определениях понятий разрешается использовать, кроме исходных, и другие понятия, если только они ранее уже определены. Таков порядок, устанавливаемый аксиоматическим методом.

Аксиоматический метод построения математических теорий возник в древнегреческой геометрии. Наибольшую известность он получил благодаря знаменитым «Началам» Евклида, относящимся к III в. до н. э. В них Евклид систематизировал почти весь геометрический материал, известный к тому времени, объединил и систематизировал разрозненные геометрические факты. Система Евклида многие столетия считалась образцом логически стройного построения геометрической теории. Однако с течением времени само понятие аксиоматического построения теории претерпело столь существенные изменения и настолько развилось, что евклидово построение геометрии стало выглядеть несовершенным опытом в этой области. Так, принятая Евклидом система исходных предложений оказалась недостаточной для строго логического вывода из нее всех теорем геометрии. Поэтому евклидовские доказательства не являются строгими в современном смысле этого слова, в них отдельные звенья заменены ссылкой на наглядность чертежа, а по существу на предложения, которые не только ранее не доказаны, но даже явно не сформулированы. Только в конце XIX в. немецкий математик Д. Гильберт впервые сформулировал достаточную для строго логического построения евклидовой геометрии систему аксиом.

Кроме того, Евклид с самого начала давал описания исходных понятий, таких, например, как точка, прямая, плоскость. Эти описания, разумеется, не являются математическими определениями, хотя по своей форме похожи на определения Они привязывают геометрическую теорию к одной определенной системе объектов, описанием которой она является. Говорить здесь о других моделях теории не имеет смысла.

Сам «логический вывод» теорем из аксиом, логические средства доказательства теорем у Евклида не были уточнены.

Дальнейшее развитие аксиоматического метода шло по двум направлениям. Во-первых, его взяли на вооружение другие математические теории. Во-вторых, в самой геометрии возникла необходимость глубокого исследования ее оснований, что привело к дальнейшему развитию аксиоматического метода. Эта необходимость связана с выдающимся достижением науки первой половины XIX в.— построением великим русским ученым Н. И. Лобачевским (1826 г.) и несколько позднее венгерским ученым Я. Больяй (1832 г.) первой неевклидовой геометрической системы.

Сама идея о возможности существования другой геометрической теории, отличной от евклидовой и описывающей свойства реального пространства, только в других, недоступных нашему непосредственному опыту, масштабах, идея, впервые понятая гениальными учеными Лобачевским и Больяй, настолько опередила уровень науки того времени, что многие видные ученые, их современники, считали построенную ими систему ошибочной, внутренне противоречивой.

В связи с этим впервые и возникла проблема непротиворечивости аксиоматической системы, т. е. встал вопрос об отсутствии противоречия внутри системы или о невозможности двух теорем вида A и $\neg A$, из которых одна отрицает другую.

Требование непротиворечивости — основное из требований, предъявляемых ко всякой аксиоматической теории. Противоречивая теория, т. е. такая, в которой доказуемы два предложения вида A и $\neg A$, не различает истину и ложь. В ней можно доказать что угодно: если из системы аксиом можно вывести два следствия вида A и $\neg A$, то можно получить в качестве следствия и любое предложение, выражаемое на языке этой теории, и истинное, и ложное. Очевидно, что противоречивая теория несостоятельна, поскольку она не описывает никакой реально существующей системы объектов.

Лобачевский был убежден в непротиворечивости разработанной им геометрической теории, но он этого не доказал. Убеждение великого геометра получило окончательное подтверждение в работах Клейна, Бельтрами, Пуанкаре, в которых были построены модели геометрии Лобачевского — Больяй на евклидовой плоскости, т. е. в объектах евклидовой геометрии. Этим было доказано, что геометрия Лобачевского — Больяй непротиворечива, если непротиворечива евклидова геометрия, или что противоречие в геометрии Лобачевского — Больяй имело бы своим следствием противоречие и в евклидовой геометрии.

Так возник метод моделей для сведения непротиворечивости одной математической теории к непротиворечивости другой: неевклидовой геометрии — к евклидовой, евклидовой геометрии — к арифметике вещественных чисел, *арифметики вещественных чисел* — к арифметике натуральных чисел, арифметики натуральных чисел — к теории множеств. Следовательно, методом моделей проблема непротиворечивости математических теорий может быть сведена к непротиворечивости теории множеств. А в последней были обнаружены противоречия, получившие впоследствии название «парадоксов», или «антиномий» теории множеств.

Для устранения парадоксов сама теория множеств была аксиоматизирована. Но как доказать непротиворечивость аксиоматической теории множеств?

Если построить модель этой теории в объектах какой-нибудь другой математической теории, это приведет к порочному кругу, так как непротиворечивость этой другой теории в конечном итоге сводима к непротиворечивости теории множеств.

Непосредственная проверка списка теорем теории с целью обнаружения или установления отсутствия двух теорем вида A и $\neg A$ также безнадежна, так как нет никакой уверенности в том, что имеющийся список уже доказанных теорем исчерпывает все теоремы данной теории. Возможно, что через некоторое время после окончания перебора, установившего отсутствие противоречия, будет доказана новая теорема, представляющая собой отрицание одной из ранее доказанных теорем, вошедших в проверенный список.

В поисках выхода из создавшегося положения Гильберт предложил в 1904 г. для доказательства непротиворечивости математических теорий строить их в виде формальных аксиоматических теорий (или формальных систем), в которых само понятие доказательства должно быть точным понятием. Гильберт предполагал, что непротиворечивость формальной системы удастся доказать невозможностью существования доказательств двух ее предложений вида A и $\neg A$.

Хотя дальнейшие исследования показали невозможность полной реализации этого замысла, названного впоследствии программой Гильберта, он оказался стимулом для дальнейшего развития аксиоматического метода и исследования оснований математики.

Возникла новая научная область — *метаматематика* (в переводе с греческого после математики), предметом которой является сама математика, строение математических теорий, представленных в виде формальных систем, или исчислений.

В более чем двухтысячелетней истории аксиоматического метода различают три стадии развития и соответственно три типа аксиоматических теорий.

1. *Содержательная* (или *неформальная*) аксиоматическая теория, подобная евклидовой, в которой исходные понятия с самого начала связываются с определенными интуитивными представлениями, а логические средства вывода теорем из аксиом и ранее уже доказанных теорем не фиксируются, действует здравый смысл и обычная «логическая интуиция».

2. Появление различных моделей геометрии Лобачевского — Больяй в объектах евклидовой геометрии уже означало отход от идеи содержательной аксиоматической системы: в различных моделях одной и той же аксиоматической теории значения исходных терминов различны, хотя логическая структура теории остается неизменной. Это приводит к мысли о независимости логической структуры теории от значений исходных терминов, а следовательно, о возможности описания с помощью одной теории целого класса однородных структур, обладающих одинаковыми свойствами, выраженными в аксиомах и теоремах теории. Таким образом, возникло новое понимание аксиоматической теории, характеризующее новую стадию развития аксиоматического метода.

Гильберт начинает свое построение геометрической теории («Основания геометрии», 1899) со слов: *«Мы мыслим три системы вещей. Вещи первой системы назовем точками и обозначим A, B, C, ...; вещи второй системы назовем прямыми и обозначим a, b, c, ...; вещи третьей системы назовем плоскостями и обозначим α, β, γ, ...».* Природа точек, прямых и плоскостей так же, как смысл отношений, в которых они могут находиться, несущественна для построения теории. Значения исходных терминов можно выбрать какими угодно, лишь бы выполнялись принятые аксиомы.

Теорию, подобную гильбертовской аксиоматической теории евклидовой геометрии, называют теперь *полуформальной* аксиоматической теорией. «Полуформальной» потому, что в ней логика, используемая в доказательствах теорем, как и в содержательной (неформальной) аксиоматической теории, не фиксируется, не формализована. После перечисления исходных понятий и аксиом действует опять же здравый смысл, интуитивная логика. Само же понятие «доказательство» остается на уровне интуитивных понятий.

3. Программа Гильберта предусматривала дальнейший шаг в формализации аксиоматической теории, а именно фиксирование логики, используемой в доказательствах теорем, с помощью системы логических аксиом и правил вывода, иными словами, превращение интуитивного понятия доказательства в точное математическое. Так возникла формальная аксиоматическая теория.

II. КАК МАТЕМАТИКА РАССУЖДАТЬ НАС УЧИТ

Мефистофель:
«Употребляйте с пользой время.
Учиться надо по системе.
Сперва хочу вам в долг вменить
На курсы логики ходить.
Ваш ум, не тронутый доныне,
На них приучат к дисциплине,
Чтоб взял он направленья ось,
Не разбредаясь вкривь и вкось».

И. В. Гете. Фауст, ч. I

1. КАК МЫ РАССУЖДАЕМ

Что такое рассуждение?

Под рассуждением будем понимать умозаключение или вывод из одного или нескольких предложений, называемых посылками нового предложения — заключения. Договоримся, что слова «рассуждение», «умозаключение» и «вывод» — синонимы, и подчеркнем, что рассуждение состоит из предложений — посылок и заключения.

Между посылками и заключением существует определенная связь, благодаря которой они составляют рассуждение. Но рассуждение может быть правильным или неправильным. Вот и возникает вопрос: какое рассуждение следует считать правильным?

Наши знания о свойствах вещей окружающего мира или об их отношениях мы выражаем в предложениях. О предложении, которое верно отражает действительность, говорят, что оно истинно (или выражает истину). Если же предложение выражает свойство вещей или отношение между ними, которого в действительности нет, то говорят, что оно ложно.

Очевидно, что рассуждение можно считать правильным лишь тогда, когда с его помощью из истинных посылок нельзя получить ложное заключение.

Рассуждение, допускающее получение ложного заключения из истинных посылок, не только не расширяет наши знания об окружающем мире, но доставляет ложную информацию. Поэтому такое рассуждение естественно считать неправильным.

Как же мы рассуждаем?

Мы будем рассматривать рассуждения в логическом плане. Нас будет интересовать, какое заключение из заданных посылок человек должен выработать, чтобы рассуждение было правильным.

Правильность рассуждения определяется его формой, структурой и не зависит от его содержания. Этим объясняется название науки, изучающей формы рассуждений, отвлекаясь от их содержания,— формальной логики.

Рассуждения совершенно различного содержания, применяемые в различных областях знаний и в повседневной жизни, могут иметь одну и ту же форму, структуру построения.

Например, рассуждения:

1) все квадраты — ромбы, все ромбы — параллелограммы, следовательно, все квадраты — параллелограммы;

2) все натуральные числа — целые, все целые числа — рациональные, следовательно, все натуральные числа — рациональные;

3) все березы — деревья, все деревья — растения, следовательно, все березы — растения, столь различные по содержанию, имеют одну и ту же форму, построены по одной схеме:

все A суть B, все B суть C,
следовательно, все A суть C.

Введением букв — переменных A, B, C — мы отвлеклись от конкретного содержания каждого из приведенных рассуждений и выделили их общую форму. В каждом из трех приведенных рассуждений правильность определяется не конкретным содержанием, а формой посылок и заключения, одинаковой во всех трех рассуждениях.

В нашем примере общая форма трех рассуждений легко выражается на теоретико-множественном языке:

«$A \subseteq B$, $B \subseteq C$; следовательно, $A \subseteq C$», и правильность этой схемы обосновывается транзитивностью отношения включения ($\subseteq$).

В основе каждого правильно построенного рассуждения независимо от его предметного содержания лежит определенная формально-логическая схема.

Почему именно математика?

Почему именно математика играет особую роль в развитии логики мышления, способности рассуждать?

Во-первых, потому, что в математике все предложения, за исключением, разумеется, исходных (аксиом), доказываются, а математические доказательства представляют собой цепочки рассуждений. Во-вторых, логическая схема рассуждений наиболее «наглядно» (в чистом виде) выявляется именно в математике благодаря особенному, свойственному только ей стилю мышления.

Известный советский математик и педагог А. Я. Хинчин (1894—1959) охарактеризовал этот стиль мышления такими словами: «Для математики характерно доведенное до предела доминирование логической схемы рассуждения; математик, потерявший, хотя бы времен-но, из вида эту схему, вообще лишается возможности научно мыслить. Эта своеобразная черта стиля математического мышления, в столь полной мере не встречающаяся ни в одной другой науке, имеет в себе много ценного. Очевидно, что она в максимальной степени позволяет следить за правильностью течения мысли и гарантирует от ошибок; ...»[1].

Академик А. Н. Колмогоров говорит: «...знакомство с началами логики практически в значительной мере происходит на уроках математики»[2]. Разумеется, эти начала логики чаще всего остаются не выявленными, скрытыми за определенным математическим содержанием. Мы попытаемся их раскрыть, постичь их сущность.

Но так как речь пойдет о логике, то прежде всего — немного истории.

Основоположником формальной логики считается древнегреческий философ Аристотель (384—322 гг. до н. э.), впервые разработавший теорию дедукции, т. е. теорию логического вывода. Ему принадлежит открытие формального характера логического вывода, состоящего в том, что в наших рассуждениях одни предложения выводятся из других в силу определенной связи между их формой, структурой независимо от их конкретного содержания.

Формальная логика и изучает формы человеческих рассуждений, отвлекаясь от их конкретного содержания, отвечая на вопрос: как мы рассуждаем?

Логика Аристотеля дополнялась, изменялась и усовершенствовалась в течение многих веков отдельными философами и целыми философскими школами.

---

[1] *Хинчин А. Я.* Педагогические статьи.— М., 1963.— С. 141.

[2] *Колмогоров А. Н.* Научные основы школьного курса математики. Первая лекция. Современные взгляды на природу математики.— *Математика в школе.*— 1969.— № 3.— С. 17.

Однако значительный прогресс этой науки был достигнут лишь в XIX в., когда в логике стали использовать математические методы. Возникла математическая логика.

Развитию математической логики и применению ее к теории математического доказательства способствовали труды многих выдающихся математиков и логиков конца XIX и XX в., в том числе советских математиков И. И. Жегалкина, В. И. Гливенко, А. Н. Колмогорова, П. С. Новикова, А. А. Маркова, Н. А. Шанина и их многочисленных учеников.

Математическая логика сделала возможным усовершенствование аксиоматического метода и сама усовершенствовалась с помощью этого метода.

Одно из главных достижений математической логики — перевод интуитивного понятия доказательства в точное математическое (речь идет о формальном доказательстве, т. е. о доказательстве в рамках формальной теории).

Название «математическая логика» имеет двоякий смысл. С одной стороны, эта отрасль науки строится как математическая теория и в этом смысле она представляет собой «математику логики». С другой стороны, ее можно рассматривать как логику математики. Цель этой науки — разработка точного логического языка математики, с помощью которого можно проводить математические доказательства.

2. ЛОГИЧЕСКИЙ ЯЗЫК МАТЕМАТИКИ

Как устроены математические предложения?

Мы уже установили, что правильность рассуждения зависит лишь от логической формы (структуры) составляющих его предложений. Поэтому, чтобы разобраться в правильности рассуждений, надо прежде всего выявить различные структуры предложений.

Рассмотрим несколько предложений из различных разделов школьной математики:

1) **если** четырехугольник — параллелограмм **и** его диагонали равны, **то** этот четырехугольник — прямоугольник;

2) **если** число делится на 2 **и** делится на 3, **то** оно делится на 6;

3) **если** $a = 0$ **и** $b = 0$, **то** уравнение $ax = b$ имеет бесконечное множество корней;

4) **если** f — четная функция **и** $2 \in D(f)$, **то** $f(-2) = f(2)$;

5) **если** $2 \in D(f)$ **и** $f(-2) = f(2)$, **то** f — четная функция.

Анализ данных предложений сразу же выявляет их различное содержание. В первом предложении речь идет о четырехугольнике, во втором — о числах, в третьем — об уравнении, в четвертом и пятом — о функции.

Содержание этих предложений выражается языком математических терминов, или символов: четырехугольник, параллелограмм, диагонали, равны, прямоугольник — в первом; число, делится на 2, 3, 6 — во втором; a, 0, b, $=$, уравнение, $ax = b$, бесконечное множество, корни — в третьем; f, четная функция, 2, $D(f)$, $\in$, $f(-2)$, $f(2)$ — в четвертом и пятом. Из этих терминов и символов строятся элементарные (простые) предложения, а именно:

1) четырехугольник — параллелограмм,

его диагонали равны,

четырехугольник — прямоугольник;

2) число делится на 2,

(число) делится на 3 (в скобки взято слово, которое подразумевается),

(число) делится на 6;

3) $a = 0$,

$b = 0$,

уравнение $ax = b$ имеет бесконечное множество корней;

4) , 5) f — четная функция,

$2 \in D(f)$,

$f(-2) = f(2)$.

Однако легко заметить, что во все приведенные предложения входят общие слова: ... **если** ... **и** ..., ... **то** ..., расположенные в одной и той же последовательности. С помощью этих слов из элементарных предложений образуются сложные или составные.

Если отвлечься от конкретного содержания данных предложений, т. е. удалить из них все то, чем они отличаются, и сохранить лишь то, что у них общее, то получим следующую форму:

если ... **и** ..., **то** ...,

или

если A **и** B, **то** C (если вместо пустых мест воспользоваться буквами A, B, C в качестве переменных).

Это и есть общая логическая форма (структура) приведенных предложений.

Как видно, математическое содержание заложено в простых предложениях, из которых строятся сложные (составные). Исходя из конкретного содержания простых предложений A, B, C и из смысла логических связей, выражаемых словами **если..., то** и **и** (который мы дальше уточним), нетрудно заметить, что первое — четвертое предложения истинны, а пятое — ложно. Но пятое отличается от четвертого тем, что те же простые предложения связаны теми же словами «**если..., то**» и «**и**», но в ином порядке. Однако четвертое предложение истинно, а пятое уже ложно.

Можно провести такой эксперимент. Заменим в пяти предложениях союз «и» союзом «или». Что теперь можно сказать об истинности полученных предложений? Все они ложны. Вот что значит сказать (или написать) «или» там, где должно быть «и»!

Математика нуждается в точном логическом языке, на котором операции, обозначаемые словами «не», «и», «или», «если..., то», «тогда и только тогда», с помощью которых из одних предложений строятся другие, были бы точно определены. Такой язык для математики разработан в математической логике.

Истинно или ложно?

Предложение, относительно которого имеет смысл вопрос, истинно оно или ложно, в логике называют *высказыванием*.

Если то, что высказывается в предложении, верно, соответствует действительности, то предложение — *истинное высказывание*, если же неверно, не соответствует действительности, то предложение — *ложное высказывание*.

Например, предложения «$1 < 3$», «число 8 делится на 2», «1 не есть простое число», «$3+5=8$» — истинные высказывания; предложения «$1 > 3$», «число 9 делится на 2», «2 не есть простое число», «$3+5=9$» — ложные высказывания.

Каждому высказыванию приписывают одно из двух истинностных значений — И (истина), если оно истинно, и Л (ложь), если оно ложно.

Таким образом, можно сказать, что первые четыре из приведенных высказываний имеют истинностное значение И, а каждое из остальных — значение Л (дальше, для краткости, вместо «истинностное значение» будем говорить просто «значение»).

В математике очень часто пользуемся предложениями, содержащими одну или несколько переменных. Например, «$x < 3$», «число x делится на 2», «a не есть простое число», «$x + y = 8$» и т. д. Относительно каждого из этих предложений уже не имеет смысла вопрос, истинно оно или ложно. Ведь переменные x, a, y играют роль пустых мест в записи предложений (вместо «$x < 3$» можно писать «$\ldots < 3$», вместо «$x + y = 8$» — «$\ldots + \ldots = 8$» и т. д.). Такие предложения обращаются в высказывания лишь при подстановке вместо переменных каких-либо их значений (при заполнении пустых мест именами элементов множества — области значений переменной) и называются *высказывательными формами* (или формами для высказываний). Каждая такая высказывательная форма порождает множество высказываний одной и той же формы (конечное или бесконечное в зависимости от того, конечна или бесконечна область значений переменной). Например,

x	$x<3$	И или Л?
0	$0<3$	И
1	$1<3$	И
2	$2<3$	И
3	$3<3$	Л
4	$4<3$	Л
. . .	. . .	. . .

т. е. если область значений переменной x — множество целых неотрицательных чисел $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, то нетрудно заметить, что только числа 0, 1, 2 обращают высказывательную форму «$x < 3$» в истинное высказывание. Иными словами, на множестве N_0 неравенство «$x < 3$» имеет три решения (0, 1, 2).

Как известно, *решением уравнения* $x + y = 8$ называется пара значений переменных x, y, обращающая эту высказывательную форму в истинное высказывание. Если область значений переменных — множество N_0, то всевозможные решения найдем среди пар чисел, каждое из которых не превышает 8:

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
0	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И	Л	...
1	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И	Л	Л	...
2	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	...
3	Л	Л	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л	...
4	Л	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л	...
5	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	...
6	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	...
7	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	...
8	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	...
9	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	...

. . . .

Выпишите из этой таблицы множество решений уравнения $x+y=8$. Составьте аналогичную таблицу для неравенства $x+y<8$ и выпишите множество решений этого неравенства на том же множестве N_0.

Как видно, всякое уравнение или неравенство представляет собой не что иное, как высказывательную форму, а его решение — значение переменной или набор значений переменных, при подстановке которых высказывательная форма обращается в истинное высказывание.

Под словом «предложение» дальше будем понимать «высказывание» или «высказывательную форму». Конечно, имеются и такие предложения, как вопросительные и восклицательные, которые не являются ни высказываниями, ни высказывательными формами, а значит, не входят в класс интересующих нас предложений.

Все приведенные примеры высказываний и высказывательных форм рассматриваются как элементарные, т. е. не расчленяемые на другие.

Как мы уже видели, из элементарных предложений могут быть сконструированы сложные или составные с помощью разного рода логических связей (операций), выражаемых словами «не», «и», «или», «если..., то», «тогда и только тогда», «все», «существует» или некоторыми другими, понимаемыми как синонимы перечисленных.

Чтобы уметь однозначно выявить истинностное значение сложного высказывания по заданным значениям составляющих его элементарных высказываний, надо точно определить все логические операции, с помощью которых сконструировано это сложное высказывание из элементарных.

Не

При отрицании чего-либо обычно пользуются частицей «не» или словами «неверно, что» (частица «не» ставится перед сказуемым, слова «неверно, что» — перед всем отрицаемым высказыванием).

Например, если мы хотим отрицать, что

«Точка M лежит на прямой a» ($M \in a$), (1)

мы говорим:

«Точка M **не** лежит на прямой a» или
«**Неверно, что** точка M лежит на прямой a». (2)

Нетрудно заметить, что истинностные значения высказываний (1) и (2) находятся в определенной связи: если высказывание (1) истинно, то (2) ложно, если же (1) ложно, то (2) истинно.

Операция, с помощью которой из высказывания (1) получено высказывание (2), называется отрицанием, и само высказывание (2) называется отрицанием высказывания (1).

Исходя из этого обычного смысла отрицания высказывания, приходим к следующему определению: *отрицанием* некоторого высказывания A называется высказывание, которое истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно.

Отрицание высказывания A обозначается через $\neg A$ (мы уже пользовались этим обозначением в главе 1). Так, отрицание высказывания $M \in a$ обозначим $\neg M \in a$ (в школьной геометрии применяется обозначение $M \notin a$), отрицание высказывания $a \parallel b$ — $\neg a \parallel b (a \nparallel b)$.

Определение отрицания может быть записано и в виде следующей истинностной таблицы, в которой показано, какие истинностные значения принимает отрицание $\neg A$ в зависимости от истинностных значений высказывания A:

A	$\neg A$
И	Л
Л	И

Определение отрицания пригодно и в том случае, когда A — высказывательная форма. В этом случае встречающееся в определении выражение «когда A ложно (истинно)» надо понимать в смысле «при всех тех значениях переменных, при которых A ложно (истинно)».

И

Если два высказывания соединены союзом «и», то получаемое таким путем сложное высказывание обычно считается истинным тогда и только тогда, когда истинны оба составляющие его высказывания. Если же хотя бы одно из составляющих высказываний ложно, то получаемое из них с помощью союза «и» сложное высказывание также ложно (то же относится и к высказывательным формам).

Например, высказывание «Число 2 простое **и** (число 2) четное» (заключенное в скобки выражение явно не высказывается, а подразумевается), истинно, так как оба составляющих его высказывания — «число 2 простое» и «число 2 четное» — истинны; высказывание «диагонали ромба взаимно перпендикулярны и равны» ложно, так как одно из составляющих высказываний — «диагонали ромба равны» — ложно; высказывательная форма «$x > 3$ **и** $x < 7$» (сокращенно $3 < x < 7$), где x — переменная для целых чисел ($x \in Z$), обращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях переменной x (4, 5, 6), которые обращают в истинное высказывание каждую из составляющих высказывательных форм $x > 3$ и $x < 7$. Любое же другое значение x, при котором хотя бы одна из составляющих высказывательных форм ложна, обращает данную высказывательную форму в ложное высказывание.

Предложение (высказывание или высказывательная форма), построенное с помощью союза «и», называют конъюнкцией (от лат. conjunctio — союз, связь).

Исходя из обычного смысла союза «и», приходим к следующему определению: *конъюнкцией* двух высказываний A и B называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B.

Конъюнкцию высказываний A и B обозначим через $A \wedge B$ (в литературе применяется также $A \& B$).

Определение конъюнкции можно записать и в виде истинностной таблицы:

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Когда мы определяем пересечение двух множеств A и B, то характеристическое свойство выражается с помощью конъюнкции высказывательных форм $x \in A$ и $x \in B$:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Решая неравенство

$$|x-1| < 2,$$

мы по существу устанавливаем равносильность

$$|x-1| < 2 \Leftrightarrow x-1 < 2 \wedge x-1 > \\ > -2 \Leftrightarrow x \leqslant 3 \wedge x > -1,$$

а эта конъюнкция сокращенно записывается так: $-1 < x < 3$.

Решая уравнение

$$|x-1| + |y-2| = 0,$$

мы устанавливаем (обычно неявно) равносильность

$$|x-1| + |y-2| = 0 \Leftrightarrow |x-1| = 0 \wedge |y-2| = \\ = 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 2;$$

т. е. решением данного уравнения является пара чисел $(1; 2)$.

Всякая система уравнений, например

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

представляет собой по существу конъюнкцию $f(x, y) = 0 \wedge g(x, y) = 0$. Поэтому множество решений системы, т. е. множество пар чисел, обращающих в истинное высказывание конъюнкцию двух высказывательных форм, есть пересечение множеств решений уравнений, составляющих систему, т. е. пересечение множеств пар чисел, обращающих в истинное высказывание каждую высказывательную форму:

$$\{(x, y) \mid f(x, y) = 0 \wedge g(x, y) = 0\} =$$
$$= \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\} \cap \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$$

(по определению пересечения). Это же относится и к системе неравенств. Приведенные примеры далеко не исчерпывают ситуации, когда явно или неявно используется конъюнктивная связь предложений.

Отметим, что конъюнкцию не всегда выражают союзом «и». Так, в формулировке теорем используется и союз «а» (в качестве синонима для «и»), встречаются и другие («но», «однако» и др.). С другой стороны, не всегда союз «и» обозначает конъюнктивную связь предложений.

Рассмотрим два высказывания:

«17 **и** 19 — простые числа» (1)

«17 **и** 19 — взаимно простые числа». (2)

Здесь (1) — сокращенная запись конъюнкции «17 — простое число **и** 19 — простое число». Что же касается (2), то это элементарное предложение, выражающее отношение между двумя числами 17 и 19, состоящее в том, что у них нет общего делителя, отличного от 1. Таким образом, в (2) союз «и» связывает не предложения, а два субъекта (подлежащих), находящиеся в определенном отношении (выражаемом сказуемым «взаимно простые числа»).

Или

В обыденной речи союз «или» применяется в двух смыслах: неразделительном (соединительном), когда сложное предложение, образованное с помощью этого слова, считается истинным, когда истинно **хотя бы одно** из составляющих предложений, и в разделительном, когда сложное предложение считается истинным, когда истинно **только одно** из составляющих предложений (в этом случае иногда говорят **или..., или, либо..., либо**).

Приведем примеры.

1. Если в высказывании «Точка M лежит на прямой a **или** точка M лежит на прямой b» (сокращенно $M \in a$ **или** $M \in b$) союз **«или»** употреблен в неразделительном смысле, то это высказывание истинно и в том случае, когда M — точка пересечения двух прямых ($a \cap b = M$). Если же этот союз применяется как разделительный, то приведенное высказывание истинно, когда точка M лежит на прямой a, но не лежит на прямой b или точка M лежит на прямой b, но не лежит на прямой a.

2. Высказывание

«$2 < 3$ **или** $2 = 3$» (сокращенно «$2 \leqslant 3$») истинно при любом понимании союза **«или»**, так как одно из составляющих высказываний ($2 < 3$) истинно, а другое ($2 = 3$) ложно.

Высказывание же «$2 > 3$ **или** $2 = 3$» (сокращенно «$2 \geqslant 3$») ложно при любом понимании **«или»**, так как оба высказывания ложны.

3. Высказывательная форма

«$x < 3$ **или** $x = 3$» (сокращенно «$x \leqslant 3$»), где x — переменная для натуральных чисел, обращается в истинное высказывание, если вместо x подставить одно из чисел 1, 2, 3. При первых двух значениях высказывательная форма $x < 3$ обращается в истинное высказывание, а $x = 3$ — в ложное, при третьем — наоборот. При этом неважно, в каком смысле употреблен союз «или», так как нет такого значения x, которое обращало бы в истинные высказывания обе высказывательные формы $x < 3$ и $x = 3$.

В математике двусмысленность применения союза «или» исключается в результате использования обозначений и определения операций, соответствующих двум смыслам этого союза. Высказывание, образованное с помощью союза «или» в неразделительном смысле, называется дизъюнкцией (от лат. disjunctio — разобщение) и обозначается знаком $\vee$, а высказывание, образованное с помощью союза «или» в разделительном смысле, называется строгой дизъюнкцией и обозначается знаком $\dot{\vee}$.

Исходя из неразделительного смысла союза «или», приходим к следующему определению. *Дизъюнкцией* двух высказываний A и B называется высказывание $A \vee B$, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно **хотя бы одно** из этих высказываний (т. е. или A, или B, или оба). Отсюда непосредственно следует, что дизъюнкция $A \vee B$ ложна только в том случае, когда оба высказывания A и B ложны.

Это определение пригодно и для высказывательных форм, если выражение «тогда и только тогда» понимать в смысле «при всех тех и только тех значениях переменных».

Определение дизъюнкции может быть записано в виде следующей истинностной таблицы:

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Исходя из разделительного смысла союза «или», сформулируйте определение строгой дизъюнкции и составьте соответствующую истинностную таблицу. Сравните таблицу строгой дизъюнкции с таблицей дизъюнкции. Чем они отличаются друг от друга?

Строгую дизъюнкцию можно выразить через другие ранее уже определенные нами логические операции (отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию).

Действительно, предложение

«либо A, либо B»

мы понимаем в смысле

«(A **и не** B) **или** (B **и не** A)».

Заменив в этой записи слова «и», «не», «или» знаками соответствующих логических операций, получим

$$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A). \qquad (1)$$

Таким образом, строгую дизъюнкцию $A \vee B$ можно рассматривать и как сокращенное обозначение предложения (1).

Покажите в явном виде применение дизъюнкции:

а) в определении объединения двух множеств (запишите это определение подобно приведенному выше определению пересечения);
б) при решении уравнения $(x-1)(x-2)=0$;

в) при решении неравенства $|x-1| > 2$.

Очень часто дизъюнкция встречается совместно с конъюнкцией.

Приведем в качестве примера логический анализ решения неравенства

$$\frac{x-1}{x-3} < 0.$$

Обычно рассуждаем так: «дробь меньше нуля тогда и только тогда, когда числитель меньше нуля, а знаменатель больше нуля, или, наоборот, когда числитель больше нуля, а знаменатель меньше».

Переведем теперь сказанное на логический язык математики:

$$\frac{x-1}{x-3} < 0 \Leftrightarrow (x-1<0 \wedge x-3>0) \vee (x-1> \\ > 0 \wedge x-3<0).$$

Отсюда множество E решений неравенства

$$E = \left\{x \left| \frac{x-1}{x-3} < 0\right.\right. = \{x \mid (x-1<0 \wedge x-3>0) \vee \\ \vee (x-1>0 \wedge x-3<0)\} \\ = \{x \mid (x<1 \wedge x>3) \vee \\ \vee (x>1 \wedge x<3)\}$$

$$= \{x \mid x < 1 \wedge x > 3\} \cup$$
$$\cup \{x \mid x > 1 \wedge x < 3\}$$
$$= \varnothing \cup]\,1;\,3\,[=]\,1;\,3\,[.$$

Определение дизъюнкции, как и конъюнкции, распространяется на любое число высказываний (или высказывательных форм). Так, конъюнкция $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ истинна, когда истинны все составляющие $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а дизъюнкция $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ истинна, когда истинно хотя бы одно из них.

Одна из черт математического стиля мышления состоит в учете при рассмотрении любого вопроса всей совокупности логических возможностей (полной дизъюнкции возможных случаев). Например, при рассмотрении теоремы об измерении вписанного угла («вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается») учитывают три возможных расположения центра окружности относительно вписанного угла:

«центр окружности лежит на стороне угла» (A, рис. 12, *а*) **или**

«центр окружности лежит внутри угла» (B, рис. 12, *б*) **или**

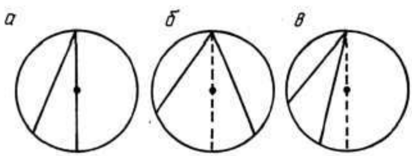

Рис. 12

«центр окружности лежит вне угла» (C, рис. 12, *в*).

Дизъюнкция $A \vee B \vee C$ истинна потому, что она является полной, т. е. других расположений центра относительно угла нет. Эта теорема доказывается способом, известным под названием «доказательства разбором случаев». После того, как она доказана для каждого из трех случаев расположения центра относительно угла, доказательство завершается следующим рассуждением: «*Если* $A \vee B \vee C$, *то теорема доказана*: но $A \vee B \vee C$ истинно, следовательно, теорема доказана».

Если..., то...

Очень часто математические теоремы сконструированы с помощью слов «если..., то». Даже если теорема сформулирована иначе, предпочитают переформулировать ее с помощью этих слов, так как такая формулировка облегчает выделение условия (предложения, помещенного между словами «если» и «то») и заключения теоремы (предложения, помещенного за словом «то»).

Приведем примеры.

1. Вместо «вертикальные углы — равны» говорят «**если** углы — вертикальные (A), **то** они равны (B)». В такой формулировке выявлены: условие, т. е. то, что дано (A — «углы — вертикальные»), и заключение, т. е. то, что требуется доказать при заданном условии (B — «углы равны»).

Истинность предложения «**если** углы вертикальные, **то** они равны» исключает возможность существования таких углов, которые были бы вертикальными, но не были бы равными, т. е. истинность предложения «**если** A, **то** B» означает то же, что ложность предложения «A **и не** B» («$A \wedge \neg B$»), или истинность его отрицания **«неверно, что** A **и не** B**»** ($\neg(A \wedge \neg B)$).

2. Рассмотрим высказывательную форму «**Если** x делится на 3, **то** $x+9$ делится на 3».

Согласно известной теореме теории делимости (если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число), приведенная высказывательная форма обращается в истинное высказывание при любом целом значении переменной x.

Данная высказывательная форма — предложение типа **«если** $A(x)$, **то** $B(x)$», причем $A(x)$ — высказывательная форма «x делится на 3», а $B(x)$ — высказывательная форма «$x+9$ делится на 3». Это предложение истинно при любом целом значении x. Выясним, какие истинностные значения могут при этом принимать составляющие высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$ при различных значениях x:

x	$A(x)$	$B(x)$
3	И	И
4	Л	Л
5	Л	Л
6	И	И
. . .	. . .	. . .

Сколько бы мы ни продолжали подстановку значений x, нам не найти такого значения, которое обращало бы $A(x)$ в истинное высказывание, а $B(x)$ — в ложное.

3. Рассмотрим высказывательную форму **«если** $x-1=0$, **то** $x^2-3x+2=0$» типа **«если** $A(x)$, **то** $B(x)$», где $A(x): x-1=0$, $B(x): x^2-3x+2=0$.

Подставим в приведенную высказывательную форму некоторые значения x:

x	$A(x)$	$B(x)$
1	И	И
2	Л	И
3	Л	Л
. . .	. . .	. . .

Сколько бы мы ни продолжали подстановку значений переменной, не найдется такого значения x, при котором $A(x)$ обращалось бы в истинное высказывание, а $B(x)$ — в ложное.

4. В школьной геометрии доказывается теорема

«если многоугольник — правильный, **то** около него можно описать окружность».

Это есть истинное предложение типа **«если** A, **то** B», где из высказывания A: «многоугольник — правильный» следует высказывание B: «около него можно описать окружность». Истинность этого предложения означает, что мы не можем найти такой правильный многоугольник (A истинно), около которого нельзя описать окружность (B ложно). Однако мы можем найти неправильный многоугольник, например разносторонний прямоугольник, около которого можно описать окружность (A ложно, B истинно); мы можем также найти неправильный многоугольник, например непрямоугольный ромб, около которого нельзя описать окружность (A ложно и B ложно), и, разумеется, правильный многоугольник (например, квадрат или правильный шестиугольник и т. п.), около которого можно описать окружность (A истинно и B истинно).

Приведенные примеры высказываний и высказывательных форм типа «**Если** A, **то** B» показывают, что всякие предложения такого вида имеют тот же логический смысл (выражают ту же логическую связь между составляющими предложениями A и B), что и предложение «**неверно, что** A **и не** B», которое на логическом языке записывается так:

$$\neg(A \wedge \neg B). \tag{1}$$

Составим истинностную таблицу для предложения (1):

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
И	И	Л	Л	И
И	Л	И	И	Л
Л	И	Л	Л	И
Л	Л	И	Л	И

В этой таблице для каждого из четырех возможных наборов истинностных значений двух предложений A и B находятся постепенно истинностные значения предложений $\neg B$, $A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge \neg B)$. Как видно, предложение (1) ложно в одном только случае: когда A истинно, а B ложно. Во всех остальных случаях оно истинно. Так как предложение **«если** A, **то** B» имеет тот же логический смысл, что и (1), т. е. равносильно предложению (1), мы приходим к следующему определению предложения этого типа, именуемого импликацией. *Импликацией* **«если** A, **то** B**»** называется предложение, которое ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно (если A и B — высказывания, то и импликация **«Если** A, **то** B» — высказывание; если же хотя бы одно из предложений A или B — высказывательная форма, то эта импликация — высказывательная форма).

Импликация **«если** A, **то** B» обозначается через $A \supset B$ или $A \to B$.

Таким образом, определение импликации можно записать в виде следующей истинностной таблицы, совпадающей с приведенной истинностной таблицей для предложения (1):

A	B	$A \supset B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Если импликация $A \supset B$ истинна, то говорят, что
а) B — **следствие из** A, или
б) B **следует из** A, или
в) A **достаточное условие** для B, или
г) B **необходимое условие** для A.
Если A и B — высказывательные формы, то,

утверждая, что импликация $A \supset B$ истинна, мы имеем в виду, что она обращается в истинное высказывание при любых значениях переменных, входящих в A и B (хотя бы в одно из них).

Рассмотренная импликация $(x-1=0) \supset (x^2-3x+ +2=0)$ истинна, так как при любых значениях x она обращается в истинное высказывание, поэтому $x^2- -3x+2=0$ есть следствие из $x-1=0$.

Сделаем одно замечание, касающееся определения импликации. На первый взгляд, кажутся неестественными случаи, когда A или A и B ложны (3-я и 4-я строки таблицы). Не вызывает сомнения истинность высказывания «**если** 9 делится на 3, **то** 81 делится на 3», но многие сомневаются в истинности высказывания «**если** 10 делится на 3, **то** 100 делится на 3», забывая при этом, что оба эти высказывания получены в результате подстановки различных значений переменной x в высказывательную форму «**если** x делится на 3, **то** x^2 делится на 3», в истинности которой (при любых значениях переменной x) никто не сомневается.

Такого рода высказывания, полученные из истинных высказывательных форм, широко используются в математических доказательствах, и единственное отличие их от привычных разговорных оборотов состоит в том, что в математике обычно не пользуются сослагательным наклонением (по-видимому, истинность импликации «**если бы** 10 делилось на 3, **то** и 100 делилось **бы** на 3» уже не вызывала бы сомнений»).

Если и только если

Выясним смысл логической связки, выраженной словами «если и только если» или «тогда и только тогда» (эти выражения применяются как синонимы).

Приведем примеры.

1. Высказывание

«четырехугольник — параллелограмм, **если и только если** его диагонали делятся точкой пересечения пополам»

мы понимаем в том же смысле, что и высказывание

«**если** — четырехугольник — параллелограмм, **то** его диагонали делятся точкой пересечения пополам, **и если** диагонали четырехугольника делятся точкой пересечения пополам, **то** четырехугольник — параллелограмм».

2. Высказывательную форму

«$x^2 - 3x + 2 = 0$, **если и только если** $(x-1) \times \times (x-2) = 0$»,

мы понимаем в том же смысле, что и

«**если** $x^2 - 3x + 2 = 0$, **то** $(x-1)(x-2) = 0$ **и если** $(x-1)(x-2) = 0$, **то** $x^2 - 3x + 2 = 0$».

Отвлекаясь от содержания приведенных предложений, можно утверждать, что всякое предложение типа

$$\text{«}A, \textbf{ если и только если } B\text{»} \qquad (1)$$

понимается обычно в том же смысле, что и предложение

$$\text{«}\textbf{если } A, \textbf{ то } B, \textbf{ и если } B, \textbf{ то } A\text{»}. \qquad (2)$$

Предложение (2) можно записать на логическом языке следующим образом:

$$(A \supset B) \wedge (B \supset A).$$

Составим для предложения (2) истинностную таблицу:

A	B	$A \supset B$	$B \supset A$	$(A \supset B) \wedge (B \supset A)$
И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л
Л	И	И	Л	Л
Л	Л	И	И	И

Таким образом, предложение (2), а следовательно, и понимаемое в том же смысле первое предложение (1) истинны, когда оба предложения A и B имеют одинаковые истинностные значения, т. е. оба истинны или оба ложны.

Предложение типа (1) называют *эквиваленцией* и обозначают знаком $\sim (A \sim B)$.

Исходя из смысла приведенных предложений, сформулируйте определение и составьте истинностную таблицу эквиваленции $A \sim B$.

Если эквиваленция $A \sim B$ истинна, то два составляющих ее предложения A и B называются *эквивалентными* или *равносильными*.

Все и некоторые

С помощью рассмотренных логических операций ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\sim$) над предложениями из высказываний получаем снова высказывания, из высказывательных форм — высказывательные формы.

Рассмотрим теперь операции, преобразующие высказывательные формы в высказывания. Одной из таких операций является подстановка вместо переменных их значений. Например, подставив в высказывательную форму $x^2 - 3x + 2 = 0$ вместо x значение 2 всюду, где эта переменная входит в высказывательную форму, получим истинное высказывание $2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$; подставив значение 3,— ложное высказывание $3^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$.

Если в двуместную (содержащую две переменные) высказывательную форму $x + 2y = 7$ вместо x подставить значение 3, получим одноместную (содержащую одну переменную) высказывательную форму $3 + 2y = 7$. Если же вместо x подставить 3 и вместо y значение 2, то получим истинное высказывание $3 + 2 \cdot 2 = 7$. С другой стороны, подставив вместо x значение 2, а вместо y — значение 3, получим ложное высказывание $2+2\cdot 3=7$ (т. е. пара чисел (3; 2) является решением уравнения $x+2y=7$, а пара (2; 3) не является решением).

Таким образом, с помощью подстановок из высказывательной формы получаем высказывания о конкретных предметах (в наших примерах — высказывания о конкретных числах). Однако из высказывательных форм можно вывести и высказывания всеобщности, выражающие свойства предметов или отношения между предметами некоторого множества, а также высказывания о существовании предметов из данного множества, обладающих определенным свойством или находящихся в определенном отношении.

Для получения таких высказываний используют операции навешивания кванторов (или связывания кванторами).

Пусть имеем одноместную высказывательную форму $A(x)$, которую можно читать так: «x обладает свойством A», где x — переменная для элементов из некоторого непустого множества M (области определения высказывательной формы $A(x)$).

Очевидно, могут представиться три возможности:

1) **все** элементы x обладают свойством A;

2) **некоторые**, но не обязательно все элементы x обладают свойством A;

3) **ни один** элемент x не обладает свойством A.

Заметим, что три возможности выражены с помощью трех высказываний, а не высказывательных форм, хотя в них содержится переменная x. Каждое из этих высказываний истинно или ложно, причем истинностное значение не зависит от x.

Например, если $A(x)$ обозначает «x — простое число», а $M=N$ — множество натуральных чисел, то 1 и 3 — ложные высказывания, а 2 — истинное высказывание. Если же $A(x)$ означает «$x > 0$», а M — множество натуральных чисел, то высказывания 1 и 2 истинны, а 3 ложно. Если $A(x)$ обозначает «$x < 0$» на том же множестве N, то 1 и 2 — ложные высказывания, а 3 — истинное.

В выражении «x обладает свойством A» ($A(x)$) переменная x не связана, она входит в него свободно. В предложениях 1—3 переменная x связана выражениями «все», «некоторые», «ни один».

Первое высказывание начинается со слова «все». Можно также его сформулировать несколько иначе:

«**Для всякого** (или **«для всех»**, **«для любого»**) x истинно $A(x)$».

Получаем следующую символическую запись этого высказывания: $\forall x A(x)$. Здесь переменная x связана квантором общности и поэтому в отличие от $A(x)$, куда x входит свободно, представляет запись высказывания, истинностное значение которого зависит лишь от интерпретации свойства A и области определения, но не зависит от x. Кстати, сама подстановка значений допустима лишь для свободной переменной, т. е. в высказывательной форме $A(x)$, но бессмысленна для связанной переменной.

Рассмотрим теперь второе высказывание. Его можно сформулировать и так: «**существует** (хотя бы один) x, для которого истинно $A(x)$». Это высказывание символически можно записать так: $\exists x A(x)$. Здесь переменная x связана квантором существования.

Высказывание 3 выражает то же, что и высказывание «**неверно, что** существует элемент x, обладающий свойством A», представляющее собой отрицание второго высказывания, т. е. $\neg \exists x A(x)$. Но нельзя ли иначе выразить эту же мысль? Например так, чтобы высказывание не начиналось со знака отрицания (со слов «неверно, что»).

В школьной математике часто приходится формулировать отрицания предложений сложной логической структуры. Обычно это делается интуитивно, без применения каких-либо логических правил, при этом часто допускаются ошибки.

На логическом языке математики можно сформулировать простые правила конструкирования и преобразования отрицаний предложений различной логической структуры. Такие правила основаны на некоторых законах логики. На законах логики основаны и наши рассуждения. Поэтому сначала выясним, что это такое — законы логики, и ознакомимся с некоторыми из них. Затем мы уже легко получим и правила преобразования отрицаний предложений сложной логической структуры и некоторые правила (схемы) построения рассуждений.

Всегда истинно — закон логики

Мы уже знаем, что истинностное значение сложного предложения зависит от истинностных значений составляющих его элементарных предложений. При одном наборе этих значений (в одной строке истинностной таблицы) сложное предложение принимает значение И, при другом наборе (в другой строке) — значение Л.

Естественно предположить, что существуют и такие сложные предложения, которые при любых наборах значений составляющих их элементарных предложений (во всех строках истинностной таблицы) принимают только значение И. Рассмотрим несколько примеров.

1. Если взять какое-нибудь элементарное высказывание, то его истинностное значение зависит от конкретного содержания. Например, высказывание «г. Могилев стоит на Днепре» — истинное высказывание. Но

кто-то может считать истинным и его отрицание: «г. Могилев не стоит на Днепре». Если взять дизъюнкцию этих двух высказываний, т. е. высказывание: «г. Могилев стоит на Днепре **или** г. Могилев не стоит на Днепре», то для определения его истинностного значения совсем не надо знать географию, так же как для определения истинностного значения высказывания «*ABCD* — параллелограмм **или** *ABCD* не есть параллелограмм» не надо знать, является *ABCD* параллелограммом, или нет, и вообще, что такое параллелограмм.

Точно так же для определения истинностного значения высказывания «1 — простое число **или 1 не** есть простое число» не надо знать, является ли 1 простым числом, и вообще, что такое простое число.

Дело в том, что приведенные предложения, как и другие подобные предложения, имеющие ту же логическую форму (структуру), истинны в силу самой этой структуры. Для определения истинностного значения этих предложений, какого бы содержания они ни были, надо знать только логику.

Действительно, каждое из этих предложений имеет структуру $A \vee \neg A$ и нетрудно доказать, что предложение такой формы всегда истинно независимо от истинностного значения A.

Если A истинно, то и дизъюнкция $A \vee \neg A$ истинна, если же A ложно, то $\neg A$ истинно и опять дизъюнкция $A \vee \neg A$ истинна. Это доказательство можно представить в виде истинностной таблицы

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
И	Л	И
Л	И	И

Итак, $A \vee \neg A$ тождественно-истинное (или всегда истинное) предложение. Такие предложения и выражают законы логики.

Закон логики, выражаемый тождественно-истинным предложением $A \vee \neg A$, известен под названием *закона исключенного третьего* (от лат. tertium non datur — «третьего не дано», т. е. «A **или не** A»).

Заметим, что предложение $A \vee \neg A$ остается тождественно-истинным и в случае, когда A — высказывательная форма. Например, если $A: x \in N$, дизъюнкция $x \in N \vee \neg x \in N$ истинна при любом значении x. Если подставить $x = 2$, то $2 \in N \vee \neg 2 \in N$ истинно, так как $2 \in N$ истинно; если же подставить $x = -2$, то $-2 \in N \vee \neg -2 \in N$ опять истинно, так как $\neg -2 \in N$ истинно.

Для обозначения того, что $A \vee \neg A$ — тождественно-истинное предложение (выражает закон логики), применяется знак $\models$, т. е. $\models A \vee \neg A$ читается «$A \vee \neg A$ — тождественно-истинное предложение» (выражает закон логики).

2. Составим теперь конъюнкцию из двух предложений вида A и $\neg A$, одно из которых — отрицание другого. Например,

«г. Могилев стоит на Днепре **и** г. Могилев **не** стоит на Днепре»,

«$ABCD$ — параллелограмм **и** $ABCD$ **не** есть параллелограмм»,

«1 — простое число **и** 1 **не** есть простое число».

Совершенно очевидно, что данные предложения ложны, причем для такого утверждения не обязательно знать, стоит г. Могилев на Днепре или нет, является $ABCD$ параллелограммом или нет, число 1 — простое или нет. Эти предложения ложны в силу самой логики: ничто (никто) не может одновременно обладать и не обладать одним и тем же свойством.

Конъюнкция вида $A \wedge \neg A$ называется *противоречием* и она всегда ложна (в том числе, когда A — высказывательная форма).

Следовательно, отрицание этой конъюнкции всегда истинно, т. е. $\models \neg(A \wedge \neg A)$. Этот закон логики называется *законом исключения противоречия.*

3. Рассмотрим высказывание

«точка B лежит на прямой a» ($B \in a$);

его отрицание

«точка B **не** лежит на прямой a» ($\neg B \in a$)

и отрицание этого отрицания

«**неверно, что** точка B **не** лежит на прямой a» ($\neg\neg B \in a$).

Нетрудно заметить, что последнее высказывание выражает то же, что и первое, только в другой форме. Эти два высказывания имеют одно и то же истинностное значение.

Рассмотрим высказывательную форму

$$x = 2y,$$

ее отрицание

$$\neg x = 2y \text{ (или } x \neq 2y)$$

и отрицание этого отрицания

$$\neg\neg x = 2y \text{ (или } \neg x \neq 2y).$$

Как видим, последняя высказывательная форма выражает то же, что и первая, только в другой форме. Эти две высказывательные формы при любых значениях переменных x и y имеют одно и то же истинностное значение.

Очевидно, что какое бы ни было предложение A, эквиваленция $\neg\neg A \sim A$ всегда истинна. Итак, $\models \neg\neg A \sim A$. Это — *закон двойного отрицания.*

Так как эквиваленция $\neg\neg A \sim A$ всегда истинна, то составляющие ее предложения ($\neg\neg A$ и A) равносильны, т. е. $\neg\neg A \Leftrightarrow A$, и мы можем предложение $\neg\neg A$ всюду, где оно встречается, заменить равносильным предложением A.

4. Очевидно, что высказывание

«**неверно, что** этот треугольник равнобедренный **и** прямоугольный» (1)

и высказывание

«этот треугольник **не** равнобедренный **или не** прямоугольный» (2)

выражают одну и ту же мысль в разной логической форме. Эти два высказывания либо оба истинны, либо оба ложны, но не могут быть одно истинным, а другое ложным.

Если взять теперь высказывательные формы

$$\text{«}\textbf{неверно, что } x = 0 \textbf{ и } y = 1\text{»} \qquad (3)$$

и

$$\text{«}x \neq 0 \textbf{ или } y \neq 1\text{»}, \qquad (4)$$

то о них можно сказать то же, что и о высказываниях (1) и (2). При любых значениях x и y высказывательные формы (3) и (4) обращаются либо в истинные, либо в ложные высказывания:

x	y	(3)	(4)
0	0	И	И
0	1	Л	Л
1	0	И	И
1	1	И	И
1	2	И	И
...	...	...	...

Предложения (1) и (3) имеют форму $\neg(A \wedge B)$, а предложения (2) и (4) — форму $\neg A \vee \neg B$.

Возникает гипотеза, что любые предложения вида

$$\neg(A \wedge B) \text{ и } \neg A \vee \neg B$$

равносильны, или их эквиваленция тождественно-истинна, т. е.

$$\models \neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B.$$

Докажем это с помощью истинностной таблицы:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$
1	2	3	4	5	6	7	8
И	И	И	Л	Л	Л	Л	И
И	Л	Л	И	Л	И	И	И
Л	И	Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	И	И

Как составлена эта таблица? Сначала для всех значений A и B (столбцы 1 и 2) выписаны значения конъюнкции $A \wedge B$ (столбец 3), затем ее отрицания $\neg(A \wedge B)$ (столбец 4). Дальше определены значения $\neg A$ (столбец 5) и $\neg B$ (столбец 6) и их дизъюнкции $\neg A \vee \neg B$ (столбец 7). Здесь можно остановиться, так как совпадение столбцов 4 и 7 доказывает равносильность предложений $\neg(A \wedge B)$ и $\neg A \vee \neg B$. Поэтому столбец 8 состоит из одних И, и это доказывает, что эквиваленция этих предложений всегда истинна.

Итак, мы можем записать еще два закона логики:

$$\models \neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B,$$
$$\models \neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B,$$

известные под названием законов де Моргана (по имени шотландского математика и логика Огастеса де Моргана).

Эти законы дают еще два правила преобразования отрицаний:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B,$$
$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B,$$

т. е. отрицание конъюнкции равносильно дизъюнкции отрицаний, а отрицание дизъюнкции — конъюнкции отрицаний.

5. Выясняя логический смысл импликации

$$\text{«Если } A\text{, то } B\text{»} \; (A \supset B),$$

мы установили, что она ложна, а следовательно, ее отрицание истинно в одном только случае — когда A истинно, а B ложно.

Иными словами, мы установили равносильность следующих предложений

«неверно, что если A, **то** B»;
«A **и не** B»,

т. е. $\neg(A \supset B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ или $\models \neg(A \supset B) \sim A \wedge \neg B$.

Итак, имеем еще одно правило, а именно правило отрицания импликации: отрицание импликации $A \supset B$ можно заменить конъюнкцией предложений A и $\neg B$.

Докажите с помощью истинностной таблицы, что

$$\neg(A \sim B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$$

(установите, что столбцы истинностных значений предложений $\neg(A \sim B)$ и $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$ совпадают). Эту равносильность можно доказать и без помощи истинностной таблицы, используя ранее уже доказанные равносильности:

$\neg(A \sim B) \Leftrightarrow \neg((A \supset B) \wedge (B \supset A))$;
$\Leftrightarrow \neg(A \supset B) \vee \neg(B \supset A)$ (по одному из законов де Моргана);
$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$ (по правилу отрицания импликации).

Как записать в виде тождественно-истинного предложения закон логики, на котором основано это правило преобразования отрицания эквиваленции?

6. Исходя из смысла кванторов общности и существования, легко заметить, что предложение «**неверно, что всякое** число x (из множества N) простое» выражает то же, что предложение «**существует** x (из множества N) такое, что оно **не** простое»; предложение «**неверно, что всякий** параллелограмм — прямоуголь-

ник» выражает **то** же, что и предложение «**существует** параллелограмм такой, что он **не** прямоугольник». Вообще любое предложение типа «**неверно, что всякое** x обладает свойством A» выражает то же, что и предложение «**существует** x, такое, что **не** обладает свойством A».

Данные предложения — первое и второе:

$$\neg \forall x A(x) \text{ и } \exists x \neg A(x)$$

равносильны $\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$, или их эквиваленция тождественно-истинна (выражает закон логики):

$$\models \neg \forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x).$$

Хотя этот логический закон фиксирует интуитивно ясный факт, его доказательство, как и доказательство других логических законов, связанных с кванторами, уже невозможно методом истинностных таблиц (так, если $A(x)$ означает «x — простое число» и $x \in N$, то истинностная таблица станет бесконечной).

Легко также заметить, что предложение «**неверно, что существует** натуральное число x, такое, что оно отрицательное» выражает то же, что предложение «**всякое** натуральное число x **не** отрицательно». Иными словами, предложение

«**неверно, что существует** x, такое, что оно обладает свойством A»

выражает то же, что и предложение

«**всякое** x обладает свойством **не** A»,

т. е. $\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$ или $\models \neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$.

Мы получили следующее правило построения отрицания предложения, начинающегося с одного или нескольких кванторов: каждый квантор общности заменяется квантором существования, каждый квантор существования — квантором общности, а знак отрицания переносится на выражение, стоящее за всеми кванторами.

Это правило применимо также и к предложению, которое начинается с нескольких кванторов. Например,

$$
\begin{aligned}
\neg\forall a\forall b\exists x(ax=b) &\Leftrightarrow \exists a\,\neg\forall b\exists x(ax=b)\\
&\Leftrightarrow \exists a\exists b\,\neg\exists x(ax=b)\\
&\Leftrightarrow \exists a\exists b\forall x\,\neg(ax=b),
\end{aligned}
$$

т. е. предложение «**неверно, что для всякого** a, **всякого** b **существует** x, такое, что $ax=b$» равносильно предложению «**существует** a, **существует** b, такие, что **для всякого** x **неверно, что** $ax=b$ (**или** $ax\neq b$)», что соответствует сформулированному правилу.

Теперь перечислим полный набор правил для построения (и преобразования) отрицания предложения любой логической структуры:

1) $\neg\neg A\Leftrightarrow A$;
2) $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$;
3) $\neg(A\vee B\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$;
4) $\neg(A\supset B)\Leftrightarrow A\wedge\neg B$;
5) $\neg(A\sim B)\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(B\wedge\neg A)$;
6) $\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x\,\neg A(x)$;
7) $\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\,\neg A(x)$.

Покажем теперь на конкретных примерах применение данных правил.

Пример 1. Мы знаем, что значит некоторое отношение P рефлексивно, симметрично, транзитивно:

$\forall x\,x\mathrm{P}x$ (рефлексивность);
$\forall x\forall y(x\mathrm{P}y\supset y\mathrm{P}x)$ (симметричность);
$\forall x\forall y\forall z(x\mathrm{P}y\wedge y\mathrm{P}z\supset x\mathrm{P}z)$ (транзитивность).

Исходя из этих записей, определим теперь, что означает отношение P **не** рефлексивно, **не** симметрично, **не** транзитивно:

$$\neg\forall x\,x\mathrm{P}x\Leftrightarrow\exists x\,\neg x\mathrm{P}x \qquad \text{(правило 6)}$$

$$\neg\forall x\forall y(x\mathrm{P}y\supset y\mathrm{P}x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y \neg(xPy \supset yPx) \qquad \text{(правило 6)}$$
$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (xPy \wedge \neg yPx) \qquad \text{(правило 4)}$$
$$\neg \forall x \forall y \forall z (xPy \wedge yPz \supset xPz) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists x \exists y \exists z \neg(xPy \wedge yPz \supset xPz) \qquad \text{(правило 6)}$$
$$\Leftrightarrow \exists x \exists y \exists z (xPy \wedge yPz \wedge \neg xPz) \text{ (правило 4)}$$

Пример 2. Обратимся еще раз к определению параллельных прямых

$$a \parallel b \underset{Df}{\Leftrightarrow} \exists \alpha (a \subset \alpha \textbf{ и } b \subset \alpha) \textbf{ и } (a \cap b = \varnothing \textbf{ или } a = b)$$

или

$$a \parallel b \underset{Df}{\Leftrightarrow} \exists \alpha (a \subset \alpha \wedge b \subset \alpha) \wedge (a \cap b = \varnothing \vee a = b).$$

Как видим, предложение, записанное справа от знака $\underset{Df}{\Leftrightarrow}$, определяющее отношение параллельности, имеет сложную логическую структуру, содержащую и квантор, и конъюнкцию, и дизъюнкцию.

Построим теперь отрицание этого предложения, т. е. выясним, исходя из данного определения, что означает «a **не параллельно** b».

$$\neg a \parallel b \Leftrightarrow \neg(\exists \alpha (a \subset \alpha \wedge b \subset \alpha) \wedge (a \cap b = \varnothing \vee a = b))$$
$$\Leftrightarrow \neg \exists \alpha (a \subset \alpha \wedge b \subset \alpha) \vee \neg(a \cap b = \varnothing \vee a = b)$$
$$\text{(правило 2)}$$
$$\Leftrightarrow \forall \alpha \neg(a \subset \alpha \wedge b \subset \alpha) \vee (\neg a \cap b = \varnothing \wedge \neg a = b)$$
$$\text{(правила 7, 3)}$$
$$\Leftrightarrow \forall \alpha (\neg a \subset \alpha \vee \neg b \subset \alpha) \vee (a \cap b \neq \varnothing \wedge a \neq b)$$
$$\text{(правило 2)}$$

Прочитаем полученную запись: «две прямые непараллельны тогда и только тогда, когда они **не** лежат в одной плоскости **или** они различны **и** имеют хотя бы одну общую точку (множество общих точек непусто)».

В первом случае, т. е. когда прямые не лежат в одной плоскости, они называются *скрещивающимися*, во втором, т. е. когда они различны и имеют хотя бы одну общую точку, доказывается, что они имеют точно одну общую точку, и называются *пересекающимися*.

Как видно, с помощью точного отрицания параллельности мы выяснили все остальные возможные отношения между двумя прямыми (разумеется, остается еще доказать существование скрещивающихся прямых).

Пример 3. В школьном курсе математики дается следующее определение четной функции: «функция f называется четной, если вместе с каждым значением переменной x из области определения f значение $(-x)$ также входит в область определения этой функции и при этом выполняется равенство $f(-x)=f(x)$».

Итак, f — четная функция $\underset{Df}{\Leftrightarrow} \forall x \in D(f)(-x \in D(f) \wedge f(-x)=f(x))$. Что же означает «$f$ не является четной функцией»?

Из данного определения, построив его отрицание, получаем: «f не есть четная функция»

$$\Leftrightarrow \neg\forall x \in D(f)(-x \in D(f) \wedge f(-x)=f(x))$$
$$\Leftrightarrow \exists x \in D(f)\, \neg(-x \in D(f) \wedge f(-x)=f(x))$$
$$\Leftrightarrow \exists x \in D(f)(-x \notin D(f) \vee f(-x) \neq f(x)),$$

т. е. «f не есть четная функция» означает, что существует (хотя бы одно) значение x из области определения функции, такое, что $-x$ не принадлежит области определения или $f(-x) \neq f(x)$.

В приведенных примерах мы осуществляли символическую запись предложений, затем строили и преобразовывали их отрицания, используя перечисленные правила, а затем вновь сформулировали полученные отрицания. Можно, разумеется, и непосредственно по словесной формулировке предложения строить его точное отрицание без перевода на символический язык.

Упражнения

1. В сложном высказывании «если завтра будет хорошая погода, то мы пойдем на пляж и будем купаться или поедем в лес» замените элементарные высказывания буквами **(высказывательными переменными)**, а логические связки — знаками соответствующих операций. Постройте отрицание и сформулируйте его словесно.

2. Даны символические записи определений нечетной и периодической функций:

f — нечетная функция $\underset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall x \in D(f)(-x \in D(f) \wedge f(-x) = -f(x));$$

f — периодическая функция $\underset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow}$

$$\exists T \neq 0 \forall\ x \in D(f)\,(x - T \in D(f) \wedge x + T \in D(f) \wedge f(x) = f(x + T)).$$

Прочтите эти определения и постройте их отрицания.

3. Даны два предложения: «если четырехугольник — параллелограмм, то его диагонали делятся точкой пересечения пополам»; «если диагонали четырехугольника не делятся точкой пересечения пополам, то этот четырехугольник не есть параллелограмм». Докажите, что любые два предложения такой же структуры, как приведенные, равносильны, или их эквиваленция всегда истинна.

4. Даны два предложения: «если одно слагаемое делится на 3 и сумма делится на 3, то и другое слагаемое делится на 3»; «если одно слагаемое делится на 3, а другое не делится на 3, то сумма не делится на 3». Докажите, что любые два предложения такой же структуры, как приведенные, равносильны, или их эквиваленция всегда истинна.

То же докажите для следующих предложений:

если $a > b$ и $b > 0$ или $b = 0$, то $a > 0$;

если $a > b$ и $\neg a > 0$, то $\neg b > 0$ и $b \neq 0$.

5. Постройте отрицания предложений, сформулированных в упражнениях 3, 4. Укажите, какие из них равносильны.

6. Докажите равносильности (с помощью истинностных таблиц):

а) $A \supset (B \supset C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \supset C$;
б) $(A \supset B) \wedge (A \supset C) \Leftrightarrow A \supset (B \wedge C)$;
в) $(A \supset C) \vee (B \supset C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \supset C$.

Приведите примеры предложений, имеющих такие же структуры.

3. ЕЩЕ РАЗ О ТОМ, КАК МЫ РАССУЖДАЕМ

Законы логики

Итак, мы уже имеем небольшой набор законов логики:

1) $\models A \vee \neg A$ (закон исключенного третьего);
2) $\models \neg(A \wedge \neg A)$ (закон исключения противоречия);
3) $\models \neg\neg A \sim A$ (закон двойного отрицания);
4) $\models \neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$ (законы
5) $\models \neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$ де Моргана);
6) $\models \neg(A \supset B) \sim A \wedge \neg B$ (закон отрицания импликации);
7) $\models \neg(A \sim B) \sim (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$ (закон отрицания эквиваленции);
8) $\models \neg\forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x)$ (законы отрицания кванторов);
9) $\models \neg\exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$.

Решив упражнения **3, 4, 6** из § 2, мы сможем записать еще следующие законы:

10) $\models (A \supset B) \sim (\neg B \supset \neg A)$ (закон контрапозиции);
11) $\models ((A \wedge B) \supset C) \sim ((A \wedge \neg C) \supset \neg B)$ (закон расширенной контрапозиции);
12) $\models (A \supset B) \supset C \sim (A \wedge B) \supset C$;
13) $\models (A \supset B) \wedge (A \supset C) \sim (A \supset (B \wedge C))$;
14) $\models (A \supset C) \wedge (B \supset C) \sim (A \vee B \supset C)$.

Для того чтобы быть подготовленными к анализу простейших, но широко распространенных в математике видов рассуждений, дополним этот набор несколькими законами логики:

15) $\models ((A \supset B) \wedge A) \supset B$;
16) $\models ((A \supset B) \wedge \neg B) \supset \neg A$;
17) $\models (A \supset B) \wedge (B \supset C) \supset (A \supset C)$;
18) $\models (A \supset B) \wedge (A \supset \neg B) \supset \neg A$.

Что из чего следует

Всякое рассуждение можно представить в виде следования: «из предложений (посылок) A_1, A_2, ..., A_n следует предложение (заключение) B» Это означает, что предложение B истинно по крайней мере всегда, когда истинны все посылки A_1, A_2, ..., A_n.

Мы уже знаем, что правильность рассуждения (следования) определяется его логической формой (структурой посылок и заключения) и не зависит от его содержания. Какова же связь рассуждений с законами логики?

Эта связь состоит в том, что «из посылок A_1, A_2, ..., A_n следует заключение B»

$$A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n \Rightarrow B,$$

а именно тогда и только тогда, когда импликация $(A_1 \wedge \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \supset B$ выражает закон логики, т. е.

$$\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \supset B.$$

Действительно, если из посылок A_1, A_2, ..., A_n следует заключение B, то B не может быть ложным, когда все посылки истинны, поэтому импликация $(A_1 \wedge A_2 \wedge \wedge \dots \wedge A_n) \supset B$ всегда истинна (она ложна только в одном случае, когда все посылки A_1, A_2, ..., A_n истинны, а B ложна, но в этом случае B не следует из этих посылок).

И, обратно, если импликация $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \supset \supset B$ всегда истинна и предложения A_1, A_2, ..., A_n истинны, то B не может быть ложным, поэтому B следует из этих посылок.

Теперь мы можем перейти к ответу на поставленный в заголовке вопрос — что из чего следует. Отвечая на него, будем выявлять неявно применяемые в конкретных рассуждениях (простейшие) правила вывода (следования). С этой целью обратимся к однотипным (по логической структуре посылок и заключения) рассуждениям различного содержания, отвлечемся от этого содержания, т. е. перейдем от рассуждений к их схеме. Эта общая схема, если она действительно представляет собой некоторое следование, и явится тем правилом, по которому построены все рассматриваемые однотипные рассуждения. Если же эта схема не представляет собой следования, то все рассуждения, построенные по этой схеме, неправильны.

Итак, приступим к выявлению простейших правил вывода. Рассмотрим следующие рассуждения (в той неполной форме, в какой они встречаются в обычной практике, когда не все посылки явно высказываются):

I. Число a делится на 6, следовательно, оно делится на 3;

II. $ABCD$ — ромб, следовательно, он — параллелограмм;

III. Число a — натуральное, следовательно, оно целое;

IV. $\triangle ABC$ правильный, следовательно, $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=60°$;

V. Сегодня понедельник, следовательно, завтра вторник.

Эти неполные рассуждения можно дополнить недостающей посылкой следующим образом:

I. Если число a делится на 6, то оно делится на 3;
число a делится на 6;

следовательно, оно делится на 3.

II. Если $ABCD$ — ромб, то он — параллелограмм;
$ABCD$ — ромб;

следовательно, он — параллелограмм.

Таким же образом можно дополнить рассуждения III—V.

Хотя эти рассуждения различного содержания, но построены они одинаково, по одной и той же схеме: имеют две посылки, причем первая посылка — импликация, вторая — первый член этой импликации, и заключение — второй член импликации. Таким образом, рассуждения построены по следующей схеме «из $A \supset B$ и A следует B», и нам остается выяснить, имеет ли место следование $A \supset B,\ A \Rightarrow B$.

Но мы уже знаем, что подобное следование имеет место тогда и только тогда, когда импликация $((A \supset B) \wedge A) \supset B$ выражает закон логики, т. е. $\models ((A \supset B) \wedge A) \supset B$. В нашем перечне законов логики он стоит под номером 15.

Мы доказали, что импликация $((A \subset B) \wedge A) \subset B$ всегда истинна построением истинностной таблицы. Можно доказать это и способом от противного.

Допустим, что импликация $((A \supset B) \wedge A) \supset B$ не всегда истинна. Значит, существует хотя бы одна строка истинностной таблицы, в которой эта импликация принимает значение Л. Тогда в соответствии с определением импликации в этой строке первый член импликации $(A \supset B) \wedge A$ принимает значение И, а второй B — значение Л.

Но если $(A \supset B) \wedge A =$ И, то $A \supset B =$ И и $A =$ И. Подставляя вместо A и B их значения в $A \supset B$, находим И $\supset$ Л $=$ Л. Мы получили противоречие ($A \supset B =$ И и $A \supset B =$ Л). Значит (здесь мы неявно пользуемся законом исключения противоречия), такой строки в истинностной таблице нет. Следовательно, $\models ((A \supset B) \wedge A) \supset B$. Как видно, не построив непосредственно истинностную таблицу, мы доказали, что в ней нет ни одной буквы Л.

Итак, мы получили правило вывода

$$A \supset B,\ A \Rightarrow B,$$

которое записывается также в виде «дроби»:

$$\frac{A \supset B,\ A}{B}$$

(над чертой перечисляются посылки, под чертой записано заключение).

Для этого широко применяемого правила вывода сохранилось латинское название modus ponens (МР), что означает «утверждающий модус» (от утверждения об истинности посылки A с помощью посылки $A \supset B$ переходим к утверждению об истинности заключения B). Это правило называют также правилом заключения (ПЗ).

Попробуем сейчас несколько изменить конструкцию рассуждений I—V, а именно: поменяем местами в каждом из них вторую посылку и заключение, оставив без изменения первую посылку (обозначим эти новые рассуждения соответственно через I′—V′).

I′. Если число a делится на 6, то оно делится на 3;

число a делится на 3;

следовательно, оно делится на 6.

Это рассуждение неправильно, так как число a может делиться на 3 и не делиться на 6, т. е. обе посылки могут оказаться истинными, а заключение ложным (например, при $a = 9$).

II′. Если $ABCD$ — ромб, то он — параллелограмм;

$ABCD$ — параллелограмм;

следовательно, он — ромб.

Но $ABCD$ может оказаться параллелограммом с различными смежными сторонами, и тогда обе посылки будут истинными, а заключение ложным, т. е. и это рассуждение неправильное.

III′. Если число a — натуральное, то оно целое;
число a — целое;

следовательно, число a — натуральное.

Например, при $a=-2$ обе посылки истинны, а заключение ложно, т. е. рассуждение неправильное.

IV′. Если $\triangle ABC$ — правильный, то $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=$ $=60°$;

$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=60°$;

следовательно, $\triangle ABC$ — правильный.

V′. Если сегодня понедельник, то завтра вторник;

завтра вторник;

следовательно, сегодня понедельник.

Рассуждения IV′ и V′ кажутся правильными, хотя неправильность рассуждений I′—III′ той же структуры совершенно очевидна. Это объясняется тем, что импликации, обратные первым посылкам I′—III′ («если число a делится на 3, то оно делится на 6», «если $ABCD$ — параллелограмм, то он — ромб», «если число a — целое, то оно — натуральное»), ложны, в то время как импликации, обратные первым посылкам IV′ и V′ («если $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=60°$, то $\triangle ABC$ правильный» и «если завтра вторник, то сегодня понедельник»), истинны. Применяемые в практике неполные рассуждения (в которых первая посылка явно не высказывается) «$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=$ $=60°$. Следовательно, $\triangle ABC$ правильный» и «Завтра вторник. Следовательно, сегодня понедельник» правильны. Но при восстановлении полной формулировки надо в качестве первых посылок взять импликации, обратные тем, которые фигурируют в I′—V′. Тогда мы получим правильные рассуждения.

Общая схема рассуждений I′—V′ такова: «из $A\supset B$ и B следует A», т. е. $A\supset B,\ B\Rightarrow A$. Легко доказать, что такое следование не имеет места. Это можно сделать различными способами. Например, можно подобрать такой набор истинностных значений A и B, при котором обе посылки истинны, а заключение ложно. Таким набором значений является $A=$ Л, $B=$ И.

Можно построить истинностную таблицу для импликации $((A \supset B) \wedge B) \supset A$ и установить, что она не выражает закон логики, не является всегда истинной.

Возьмем в качестве примеров рассуждения, начинающиеся с тех же посылок, что и I—V, но отличающиеся от них вторыми посылками и заключениями.

VI. Если число a делится на 6, то оно делится на 3;

число a не делится на 3;

следовательно, оно не делится на 6.

VII. Если $ABCD$ — ромб, то он — параллелограмм;

$ABCD$ не есть параллелограмм;

следовательно, $ABCD$ не есть ромб.

VIII. Если число a — натуральное, то оно — целое;

число a не есть целое;

следовательно, число a не есть натуральное.

IX. Если $\triangle ABC$ — правильный, то $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=$

$=60°$, неверно, что $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=60°$;

следовательно, $\triangle ABC$ не есть правильный.

X. Если сегодня понедельник, то завтра вторник;

неверно, что завтра вторник;

следовательно, неверно, что сегодня понедельник.

Нетрудно заметить, что эти рассуждения построены по одной и той же схеме:

$$A \supset B,\ \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Но данное следование имеет место тогда и только тогда, когда

$$\models (A \supset B) \wedge \neg B) \supset \neg A,$$

а этот закон логики числится в нашем перечне под номером (16).

Докажите тождественную истинность импликации

$$((A \supset B) \wedge \neg B) \supset \neg A$$

способом от противного, и мы получим еще одно правило вывода

$$\frac{A \supset B,\ \neg B}{\neg A},$$

называемое *правилом отрицания* (ПО) (от лат. modus tollens — отрицающий модус).

Поменяйте местами вторые посылки и заключения в рассуждениях VI—X. Получились ли правильные рассуждения?

Выявим теперь еще одно широко применяемое правило вывода. Рассмотрим следующие рассуждения.

I. Если число a натуральное, то оно целое;

если число a целое, то оно рациональное;

следовательно, если число a натуральное, то оно рациональное.

II. Если $ABCD$ — квадрат, то он — ромб;

если $ABCD$ — ромб, то он — параллелограмм;

следовательно, если $ABCD$ — квадрат, то он — параллелограмм.

III. Если сегодня понедельник, то завтра вторник;

если завтра вторник, то послезавтра среда;

следовательно, если сегодня понедельник, то послезавтра среда.

Отвлекаясь от содержания рассуждений I—III, заменяя фигурирующие в них элементарные предложения переменными A, B, C, получаем следующую схему, по которой построены эти рассуждения: $A \supset B,\ B \supset C \Rightarrow A \supset C$. Но это следование имеет место тогда и только тогда, когда $\models (A \supset B) \wedge (B \supset C) \supset \supset (A \supset C)$, а этот закон логики числится в нашем перечне под номером 17.

С помощью истинностной таблицы вы уже доказали, что всегда истинна импликация $(A \supset B) \wedge (B \supset C) \supset (A \supset C)$. Докажите теперь это способом от противного.

Рассмотрим рассуждение с одной посылкой:

Если число a делится на 6, то оно делится на 3;

следовательно, если число a не делится на 3, то оно не делится на 6.

Какова схема этого рассуждения? На каком законе логики основана правильность этой схемы?

Таким образом, мы получили еще одно правило вывода

$$\frac{A \supset B}{\neg B \supset \neg A},$$

называемое *правилом контрапозиции* (ПК).

По-видимому, таким же образом можно получить новые правила вывода на основе и других законов логики. Например, на основе закона расширенной контрапозиции (11)

$$\models (A \wedge B \supset C) \sim (A \wedge \neg C \supset \neg B)$$

можно получить правило вывода

$$\frac{A \wedge B \supset C}{A \wedge \neg C \supset \neg B},$$

называемое *правилом расширенной контрапозиции* (ПРК).

А вот пример рассуждения, в котором применено это правило:

Если число a делится на 2 **и** делится на 3, **то** оно делится на 6;

следовательно, **если** число a делится на 2 **и не** делится на 6, **то** оно **не** делится на 3.

Итак, мы уже выявили пять правил вывода:

1) $\dfrac{A \supset B,\ A}{B}$ (ПЗ);

2) $\dfrac{A \supset B,\ \neg B}{\neg A}$ (ПО);

3) $\dfrac{A \supset B,\ B \supset C}{A \supset C}$ (ПС);

4) $\dfrac{A \supset B}{\neg B \supset \neg A}$ (ПК);

5) $\dfrac{A \wedge B \supset C}{A \wedge \neg C \supset \neg B}$ (ПРК).

Буквы A, B, C в записях этих правил обозначают любые (элементарные или сложные) высказывания или высказывательные формы. Но, как видно, эти правила не затрагивают внутреннюю структуру элементарных предложений, в них не фигурируют кванторы. Это лишь простейшие правила вывода. Но существуют и другие правила, в которых используется внутренняя структура элементарных предложений.

Упражнения

1. Правильно ли рассуждение, в котором из посылки $\neg\neg A$ выводится заключение A?

2. Можно ли из посылок A и B вывести заключение $A \wedge B$? Как обосновать правило вывода $\dfrac{A,\ B}{A \wedge B}$, известное под названием «введение конъюнкции» (ВК)?

3. Можно ли из посылки «этот треугольник равнобедренный и прямоугольный» вывести заключение:

а) «этот треугольник равнобедренный»; б) «этот треугольник прямоугольный»; в) «этот треугольник равнобедренный или прямоугольный»? Запишите схемы этих рассуждений, отвлекаясь от их содержания, и определите, правильны ли они.

4. Можно ли из двух посылок $A \vee B$ и A вывести заключение B? Можно ли из этих посылок вывести заключение $\neg B$? Иначе говоря, правильны ли рассуждения, имеющие форму

$$\frac{A \vee B,\ A}{B}, \tag{1}$$

$$\frac{A \vee B,\ A}{\neg B}? \tag{2}$$

Проверьте, какие истинностные значения принимают посылки и заключение в (1) при $A = \text{И}$ и $B = \text{Л}$, в (2) при $A = B = \text{И}$. О чем свидетельствует результат проверки?

5. Можно ли из двух посылок $A \vee B$ и $\neg A$ вывести заключение B (или из двух посылок $A \vee B$ и $\neg B$ заключение A)? Иными словами, правильны ли рассуждения, построенные по схеме

$$\frac{A \vee B,\ \neg A}{B}\left(\text{или } \frac{A \vee B,\ \neg B}{A}\right)?$$

Например, рассуждение «$x > 0 \vee x = 0$; $\neg x > 0$; следовательно, $x = 0$» (или «$x > 0 \vee x = 0$; $x \neq 0$; следовательно, $x > 0$»)?

Мы получили еще одно правило вывода $\frac{A \vee B,\ \neg A}{B}$ $\left(\text{или } \frac{A \vee B,\ \neg B}{A}\right)$ (*удаление дизъюнкции* (УД)).

6. Правильно ли рассуждение, в котором из следующих посылок:

$$\begin{gathered} \neg A \wedge B \\ \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) \\ \neg A \wedge \neg B \end{gathered}$$

соответственно выводятся заключения:

$$\begin{gathered} \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) \\ \neg A \wedge \neg B \\ \neg(A \vee B)? \end{gathered}$$

На каких законах логики основаны рассуждения такой формы?

4. КАК МЫ ДОКАЗЫВАЕМ

Самое простое

Самое простое доказательство состоит из одного рассуждения (умозаключения). Мы рассматривали примеры таких доказательств, анализируя рассуждения с целью выявления применяемых в них правил вывода. Однако выявленных нами правил вывода недостаточно для анализа простых доказательств. Приведем пример Для обоснования, допустим, истинности предложения «если $ABCD$ — квадрат, то $ABCD$ — ромб» мы не будем проводить доказательство, а просто скажем, что данное предложение «непосредственно следует» из определения квадрата.

Но, говоря «непосредственно следует», мы уже утверждаем, что имеет место некоторое следование, а «непосредственно» означает, что «доказательство» состоит из одного рассуждения. Это рассуждение можно построить следующим образом:

$$\frac{\text{Всякий квадрат — ромб,}}{\text{следовательно, если } ABCD \text{ — квадрат, то } ABCD \text{ — ромб.}}$$

Посылка «всякий квадрат — ромб» истинна в силу определения «всякий квадрат — ромб с прямым углом». Ее можно записать в несколько иной, хотя и необычной для обиходного языка, но удобной для выявления применяемого здесь правила вывода форме: «для всякого x, если x — квадрат, то x — ромб». Тогда наше рассуждение примет такой вид:

$$\frac{\forall x\,(x \text{ — квадрат} \supset x \text{ — ромб})}{\text{следовательно, } ABCD \text{ — квадрат} \supset ABCD \text{ — ромб.}}$$

Чтобы выявить схему рассуждения, обозначим высказывательную форму «x — квадрат $\supset x$ — ромб» через $A(x)$, а $ABCD$ через a. Получим следующую схему рассуждения:

$$\frac{\forall x A(x)}{A(a)}.$$

Истинность заключения $A(a)$ при условии истинности посылки $\forall x A(x)$ очевидна. Если все элементы некоторого множества M (области определения высказывательной формы $A(x)$) обладают некоторым свойством A, то и конкретный элемент a этого множества обладает этим свойством.

Предложение $\forall x A(x) \supset A(a)$ выражает закон логики, т. е.

$$\models \forall x A(x) \supset A(a).$$

Это можно доказать простым рассуждением. Действительно, если $\forall x A(x)$ — ложное высказывание, то импликация $\forall x A(x) \supset A(a)$ истинна. Если же $\forall x A(x)$ — истинное высказывание, то $A(x)$ обращается в истинное высказывание при любом значении x из M, а значит, и $A(a)$ истинно. Следовательно, импликация $\forall x A(x) \supset A(a)$ опять истинна.

Правило вывода $\frac{\forall x A(x)}{A(a)}$ называется *правилом конкретизации* (ПКт). Оно позволяет перейти от утверждения о наличии некоторого свойства A у всех элементов некоторого множества к утверждению о наличии этого свойства у одного конкретного элемента.

Так как в нашем примере посылка имеет вид $\forall x A(x)$, а заключение — вид $A(a)$, то рассуждение построено по правилу конкретизации.

Покажите, что ПКт лежит в основе доказательства следующих предложений: а) если $ABCD$ — ромб, то $ABCD$ — параллелограмм; б) если $1 \in N$, то $1 \in Q$.

Цепочка рассуждений

Итак, простейшее доказательство состоит из одного рассуждения. Любое же доказательство представляет собой цепочку рассуждений, т. е. конечную последовательность рассуждений, посылками которых являются истинные предложения (аксиомы, ранее доказанные теоремы, предложения, истинные в силу определений, условия доказываемого предложения или заключения предшествующих рассуждений последовательности), а заключение последнего рассуждения есть доказываемое предложение. Название «цепочка» оправдано тем, что заключение каждого из рассуждений, образующих доказательство, за исключением последнего, является посылкой хотя бы в одном из последующих рассуждений последовательности.

Разумеется, в обычной практике доказательства не высказываются явно все посылки и заключения рассуждений, образующих доказательство. Поэтому в такой неполной форме трудно выявить логику доказательства, т. е. те правила вывода, которые в нем используются (разумеется, тоже неявно).

Проведем анализ доказательств некоторых математических предложений. Цель этого анализа — восстановить пропущенные посылки и промежуточные заключения, выявить используемые правила вывода.

Пусть известно, что $ABCD$ — квадрат; необходимо доказать, что $ABCD$ — параллелограмм. Доказываемое предложение можно записать и так: «если $ABCD$ — квадрат, то $ABCD$ — параллелограмм». Нам надо установить истинность этого предложения. Так как оно имеет структуру импликации, то достаточно установить истинность заключения «$ABCD$ — параллелограмм» при истинности условия (посылки) «$ABCD$ — квадрат» с помощью каких-либо уже известных истинных предложений.

Иными словами, мы должны установить следование

$$Г,\ ABCD \text{ — квадрат} \Rightarrow ABCD \text{ — ромб} \qquad (1)$$

заключения «$ABCD$ — ромб» из посылки «$ABCD$ — квадрат» и совокупности $Г$ уже известных истинных предложений геометрической теории (при этом, разумеется, из совокупности $Г$ может использоваться одно или несколько предложений).

Следование (1) и устанавливается с помощью доказательства, т. е. цепочки рассуждений. В обычной практике эта цепочка не высказывается целиком явно. Говорят примерно так: «Так как $ABCD$ — квадрат, то он — ромб, а ромб — параллелограмм. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм».

Восстановим полное доказательство в виде цепочки рассуждений:

1) $$\frac{\forall x\,(x \text{ — квадрат} \supset x \text{ — ромб}) \quad \text{(по определению);}}{ABCD \text{ — квадрат} \supset ABCD \text{ — ромб}}$$
(по ПКт);

2) $$\frac{\forall x\,(x \text{ — ромб} \supset x \text{ — параллелограмм}) \quad \text{(по определению);}}{ABCD \text{ — ромб} \supset ABCD \text{ — параллелограмм}}$$
(по ПКт);

3) $$\frac{\begin{array}{l} ABCD \text{ — квадрат} \supset ABCD \text{ — ромб (заключение 1);} \\ ABCD \text{ — ромб} \supset ABCD \text{ — параллелограмм (заключение 2)} \end{array}}{ABCD \text{ — квадрат} \supset ABCD \text{ — параллелограмм}}$$
(по ПС);

4) $ABCD$ — квадрат $\supset ABCD$ — параллелограмм (заключение 3);

$$\frac{ABCD \text{ — квадрат (посылка);}}{ABCD \text{ — параллелограмм (по ПЗ).}}$$

Как видно, полное доказательство представляет собой цепочку из четырех рассуждений, в которой используются ПКт (дважды), ПС и ПЗ.

Приведем другой вариант доказательства, в котором не прибегают к ПС:

1) $\forall x\,(x$ — квадрат $\supset x$ — ромб) (по определению);
$\overline{ABCD \text{ — квадрат} \supset ABCD \text{ — ромб}}$ (по ПКт);

2) $ABCD$ — квадрат $\supset ABCD$ — ромб (заключение 1);
$ABCD$ — квадрат (посылка);
$\overline{ABCD \text{ — ромб (по ПЗ);}}$

3) $\forall x\,(x$ — ромб $\supset x$ — параллелограмм) (по определению);
$\overline{ABCD \text{ — ромб} \supset ABCD \text{ — параллелограмм}}$ (по ПКт);

4) $ABCD$ — ромб $\supset ABCD$ — параллелограмм (заключение 3);
$ABCD$ — ромб (заключение 2);
$\overline{ABCD \text{ — параллелограмм (по ПЗ).}}$

Как видно, и в этом варианте полное доказательство представляет собой цепочку из четырех рассуждений, но логика несколько отличается от логики первого варианта: используются ПКт (дважды) и ПЗ (дважды).

Последовательность предложений

Представление полного доказательства в виде цепочки рассуждений не совсем рационально, так как в нем неизбежно повторение отдельных предложений, служащих заключениями одних рассуждений и посылками других (последующих).

Можно исключить эти повторения введением сплошной нумерации предложений, составляющих полное доказательство, т. е. представлением последнего в виде конечной последовательности предложений. В таком представлении приведенные выше полные доказательства будут выглядеть так (будем вести запись в две колонки: слева запишем сами предложения, составляющие доказательство, справа — анализ доказательства, т. е. указание способа установления истинности каждого предложения, логики доказательства):

Первый вариант

Доказательство	*Анализ доказательства*
1) $\forall x$ (x — квадрат $\supset x$ — ромб);	1) по определению;
2) $ABCD$ — квадрат $\supset$ $\supset ABCD$ — ромб;	2) из 1 по ПКт;
3) $\forall x$ (x — ромб $\supset x$ — параллелограмм);	3) по определению;
4) $ABCD$ — ромб $\supset$ $\supset ABCD$ — параллелограмм;	4) из 3 по ПКт;
5) $ABCD$ — квадрат $\supset$ $\supset ABCD$ — параллелограмм;	5) из 2, 4 по ПС;
6) $ABCD$ — квадрат;	6) посылка;
7) $ABCD$ — параллелограмм.	7) из 5, 6 по ПЗ.

Второй вариант

Доказательство	*Анализ доказательства*
1) $\forall x$ (x — квадрат $\supset x$ — ромб);	1) по определению;
2) $ABCD$ — квадрат $\supset$ $\supset ABCD$ — ромб;	2) из 1 по ПКт;
3) $ABCD$ — квадрат;	3) посылка;
4) $ABCD$ — ромб;	4) из 2, 3 по ПЗ;
5) $\forall x$ (x — ромб $\supset x$ — параллелограмм);	5) по определению;
6) $ABCD$ — ромб $\supset$ $\supset ABCD$ — параллелограмм;	6) из 5 по ПКт;
7) $ABCD$ — параллелограмм.	7) из 4, 6 по ПЗ.

Мы привели лишь очень простой пример полного доказательства. Оно состоит из семи строк (доказательство в виде цепочки рассуждений состояло из 10 строк). В практике используются более короткие, сокращенные доказательства, без явного применения логики. Однако для полного выяснения того, что представляет собой доказательство в математике, необходимо представить его в полной форме с выявленной логикой.

Приведем еще один пример. Рассмотрим теорему о трех перпендикулярах: «если прямая на плоскости перпендикулярна к проекции наклонной, то она перпендикулярна и к самой наклонной».

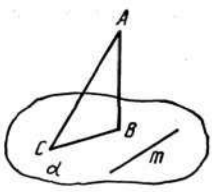

Рис. 13

Сначала приведем обычное доказательство. Пусть $m \subset \alpha$, $m \perp (BC)$ и $[BC] = \text{Пр}_\alpha [AC]$ (рис. 13). Докажем, что $m \perp (AC)$. Так как $[BC] = \text{Пр}_\alpha\ [AC]$, то $(AB) \perp \alpha$. Так как

$m \subset \alpha$ и $(AB) \perp \alpha$, то $m \perp (AB)$. Так как $m \perp (BC)$ (по условию) и $m \perp (AB)$, то $m \perp (ABC)$. Из того, что $m \perp (ABC)$ и $(AC) \subset (ABC)$, следует $m \perp (AC)$, что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к построению полного доказательства теоремы. Доказать эту теорему — значит установить следование

$$\Gamma,\ m \subset \alpha,\ m \perp (BC),\ [BC] = \text{Пр}_\alpha [AC] \Rightarrow m \perp (AC).$$

Доказательство	*Анализ доказательства*
1) $[BC] = \text{Пр}_\alpha [AC]$;	1) посылка;
2) $[BC] = \text{Пр}_\alpha [AC] \supset \supset (AB) \perp \alpha$;	2) по определению;
3) $(AB) \perp \alpha$;	3) из 1, 2 по ПЗ;
4) $m \subset \alpha$;	4) посылка;
5) $m \subset \alpha \wedge (AB) \perp \alpha$;	5) из 3, 4 по ВК*;
6) $m \subset \alpha \wedge (AB) \perp \alpha \supset \supset m \perp (AB)$;	6) по определению;
7) $m \perp (AB)$;	7) из 5, 6 по ПЗ;
8) $m \perp (BC)$;	8) посылка;
9) $m \perp (AB) \wedge m \perp (BC)$;	9) из 7, 8 по ВК;
10) $m \perp (AB) \wedge m \perp (BC) \supset \supset m \perp (ABC)$;	10) ранее доказанная теорема;
11) $m \perp (ABC)$;	11) из 9, 10 по ПЗ;
12) $A \in (ABC)$;	12) по определению (ABC);
13) $C \in (ABC)$;	13) по определению (ABC);
14) $A \in (ABC) \wedge \wedge C \in (ABC)$;	14) из 12, 13 по ВК;
15) $A \in (ABC) \wedge \wedge C \in (ABC) \supset (AC) \subset \subset (ABC)$;	15) аксиома;

* ВК — правило введения конъюнкции.

16) $(AC) \subset (ABC)$; 16) из 14, 15 по ПЗ;

17) $m \perp (ABC) \wedge (AC) \subset$
$\subset (ABC)$, 17) из 11, 16 по ВК;

18) $m \perp (ABC) \wedge (AC) \subset$
$\subset (ABC) \supset m \perp (AC)$; 18) по определению;

19) $m \perp (AC)$. 19) из 17, 18 по ПЗ.

Все приведенные примеры представляют собой «прямые» доказательства. Что же такое прямое доказательство? Это конечная последовательность предложений, каждое из которых или аксиома, или ранее доказанная теорема, или предложение, истинное в силу определения, или условие доказываемой теоремы, или получено из вывода. Такое доказательство называют также *формальным*.

Обычное доказательство отличается от формального тем, что в нем не высказываются явно все используемые предложения и правила вывода. Однако любое доказательство неизбежно связано с рассуждением. Неоднократно используя в доказательствах определенные схемы рассуждений, мы видим эти схемы в различных по содержанию, но одинаковых по форме рассуждениях, хотя обычно и не знаем, как называются эти схемы или правила вывода. Математика учит применять эти схемы, отличать правильные рассуждения от неправильных.

Противоречие доказывает теорему!

В математике часто используются различные формы косвенного доказательства, известного под названием доказательства способом «от противного». Каковы же логические основы косвенного доказательства?

Пусть необходимо доказать некоторую теорему $A \supset B$, т. е. установить следование $\Gamma, A \Rightarrow B$, где Γ — совокупность уже известных истинных предложений (аксиом, ранее доказанных теорем, определений) теории, на языке которой выражено и доказываемое предложение; A — условие; B — заключение данной теоремы.

Если не удается установить это следование построением прямого доказательства, то поступают так: допускают, что предложение $A \supset B$ ложно, а следовательно, его отрицание $\neg(A \supset B)$ или $A \wedge \neg B$ истинно. Отрицание доказываемого предложения называют *допущением косвенного доказательства* (дкд). Присоединяя дкд к совокупности посылок Γ, выводят из них следствия до тех пор, пока не получается предложение $\neg A$, или в более общем случае предложение $\neg C$, где $C \in \Gamma$, т. е. предложение, противоречащее одной из посылок.

В конце доказательства обычно говорят: «полученное противоречие доказывает теорему». Выясним точный смысл этого выражения.

Итак, мы получили следование $\Gamma,\ A,\ \neg B \Rightarrow \neg C$. Кроме того, так как $C \in \Gamma$ и каждая посылка следует из самой себя, имеет место также следование (тривиальное) $\Gamma,\ A,\ \neg B \Rightarrow C$.

Таким образом,

$$\Gamma,\ A \neg B \Rightarrow C \wedge \neg C, \tag{1}$$

т. е. мы установили, что из посылок Γ, A и $\neg B$ следует противоречие $C \wedge \neg C$.

Следование (1) имеет место, если заключение $C \wedge \neg C$ истинно, по крайней мере, когда истинны все посылки. Но заключение $C \wedge \neg C$ — противоречие, а противоречие всегда ложно. Следовательно, хотя бы одна из посылок ложна. Но все посылки из Γ — уже известные истинные предложения данной теории (аксиомы, ранее доказанные теоремы или предложения, истинные в силу принятых определений), A — условие доказываемой теоремы, при истинности которого и доказывается теорема. Следовательно, ложной должна быть посылка $\neg B$. Если же $\neg B$ ложно, то его отрицание $\neg\neg B$ истинно, и так как $\neg\neg B \Leftrightarrow B$ (по закону двойного отрицания), само B истинно.

Итак, с помощью противоречия $C \wedge \neg C$ из истинности посылок Γ, A мы вывели истинность B, т. е. установили следование $\Gamma, A \Rightarrow B$, или доказали теорему $A \supset B$.

По существу мы использовали правило вывода

$$\frac{A \wedge \neg B \supset \neg C,\ A \wedge \neg B \supset C}{A \supset B},$$

известное под названием «сведение к абсурду (нелепости)» (от лат. reductio ad absurdum (RA)). Это правило основано на законе логики, фигурирующем в нашем перечне (§ 3) под номером 18, только вместо A у нас $A \wedge \neg B$, а вместо B — C.

Рассмотрим пример. Обратимся еще раз к теореме

$$A \supset B: a \parallel b \wedge b \parallel c \supset a \parallel c, \tag{1}$$

выражающей свойство транзитивности параллельности прямых (a, b, c — различные прямые на плоскости), и проанализируем косвенное доказательство этой теоремы.

Допущение косвенного доказательства:

$$A \wedge \neg B: a \parallel b \wedge b \parallel c \wedge \neg a \parallel c. \tag{2}$$

Из этого допущения, применяя УК (правило удаления конъюнкции), получаем

$$A: a \parallel b \wedge b \parallel c, \tag{3}$$

$$\neg B: \neg a \parallel c. \tag{4}$$

По определению параллельных прямых находим

$$\neg B \supset C: \neg a \parallel c \supset \exists B (B \in a \wedge B \in c). \tag{5}$$

Из (4) и (5) по ПЗ выводим

$$C: \exists B (B \in a \wedge B \in c). \tag{6}$$

Из (3) и (6) по ВК запишем

$$A \wedge C: a \parallel b \wedge b \parallel c \wedge \exists B (B \in a \wedge B \in c).$$

Получается, что через точку B проходят две различные прямые a и c, параллельные прямой b, что противоречит аксиоме параллельных.

По этой аксиоме получаем

$$\neg(A \wedge C): \neg(a \parallel b \wedge b \parallel c \wedge \exists B (B \in a \wedge B \in c)$$

или

$$\neg a \parallel b \vee \neg b \parallel c \vee \forall B (\neg B \in a \vee \neg B \in c).$$

Таким образом, мы пришли к противоречию ($A \wedge C$ и $\neg(A \wedge C)$), которое и доказывает теорему (в уточненном выше смысле этих слов).

Доказательство методом исключения

Другая форма косвенного доказательства состоит в следующем. Допустим, надо доказать теорему $A \supset B_1$, т. е. установить следование $\Gamma, A \Rightarrow B_1$.

Наряду с B_1 рассматриваются все остальные возможности $B_2, ..., B_n$, т. е. такие, что $B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_n \in \in \Gamma$ (дизъюнкция $B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_n$ является истинным предложением — аксиомой, ранее доказанной теоремой или предложением, истинным в силу определения).

Исходя из посылок Γ, A, устанавливают, что каждая $B_i (2 \leqslant i \leqslant n)$ ведет к противоречию, т. е. что истинна конъюнкция их отрицаний $\neg B_2 \wedge \neg B_3 \wedge ... \wedge \neg B_n$ или $\neg(B_2 \vee ... \vee B_n)$. Из $B_1 \vee (B_2 \vee ... \vee B_n)$ и $\neg(B_2 \vee ... \vee \vee B_n)$ по УД (правилу удаления дизъюнкции), получаем B_1.

Таким образом, установлено следование $\Gamma, A \Rightarrow B_1$ или доказана теорема $A \supset B_1$. Описанная процедура называется *методом исключения* (исключением с помощью условия теоремы A всех возможностей, кроме B_1, мы получаем B_1).

Рассмотрим пример. Докажем методом исключения теорему: если любая плоскость, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то эти прямые параллельны.

Для краткости обозначим отношение пересечения прямых или прямой и плоскости знаком $\otimes$, т. е.

$$a \otimes b \underset{Df}{\Leftrightarrow} \exists C(a \cap b = C),$$
$$a \otimes \alpha \underset{Df}{\Leftrightarrow} \exists A(a \cap \alpha = A).$$

В этих обозначениях теорема запишется так:

$$A \supset B_1 : \forall \alpha(\alpha \otimes a \supset \alpha \otimes b) \supset a \parallel b.$$

Таким образом, надо установить следование

$$\Gamma,\ \forall \alpha(\alpha \otimes a \supset \alpha \otimes b) \Rightarrow a \parallel b.$$

Проведем логический анализ (выявим логику) доказательства этой теоремы методом исключения. Исходим *из того,* **что прямые** a **и** b **могут быть или параллельными, или пересекающимися, или скрещивающимися,** т. е. что истинна дизъюнкция $B_1 \vee B_2 \vee B_3$:

$a \parallel b \vee a \otimes b \vee a \dot{-} b$ (ранее доказанная теорема). (1)

Теперь покажем, что каждая из возможностей B_2 и B_3 противоречит условию A рассматриваемой теоремы. Действительно, допущение

$$B_2 : a \otimes b \tag{2}$$

приводит к

$$a \otimes b \supset \exists \alpha(\alpha \otimes a \wedge \neg \alpha \otimes b) \tag{3}$$

(достаточно провести произвольную плоскость α через b, отличную от плоскости, определяемой пересекающимися прямыми a, b).

Из (2) и (3) по ПЗ находим

$$\exists \alpha(\alpha \otimes a \wedge \neg \alpha \otimes b)$$

или

$$\neg\forall\alpha(\alpha \otimes a \supset \alpha \otimes b),$$

т. е. $\neg A$. Итак, мы получаем Γ, A, $a \otimes b \Rightarrow \neg A$ и Γ, A, $a \otimes b \Rightarrow A$, т. е. из посылок Γ, A, $a \otimes b$ выводим противоречие $A \wedge \neg A$ и по RA (правилу сведения к абсурду) находим

$$\neg a \otimes b. \tag{4}$$

Аналогично допущение

$$B_3 : a \dot{-} b \tag{5}$$

приводит к

$$a \dot{-} b \supset \exists\alpha(\alpha \otimes a \wedge \neg\alpha \otimes b) \tag{6}$$

(достаточно через b и какую-нибудь точку прямой a провести плоскость α).

Из (5) и (6) по ПЗ получаем

$$\exists\alpha(\alpha \otimes a \wedge \neg\alpha \otimes b)$$

или

$$\neg\forall\alpha(\alpha \otimes \alpha \supset \alpha \otimes b),$$

т. е. $\neg A$. Таким образом, мы установили, что Γ, A, $a \dot{-} b \Rightarrow \neg A$, и так как Γ, A, $a \dot{-} b \Rightarrow A$, то из посылок Γ, A, $a \dot{-} b$ выводимо противоречие $A \wedge \neg A$. Следовательно, по RA

$$\neg a \dot{-} b. \tag{7}$$

Из (4) и (7) по ВК получаем

$$\neg a \otimes b \wedge \neg a \dot{-} b$$

или

$$\neg(a \otimes b \vee a \dot{-} b). \tag{8}$$

Из (1) и (8) по УД находим $a \parallel b$, что и требовалось доказать.

На практике, разумеется, доказательство этой теоремы методом исключения излагается очень кратко: мы устанавливаем, что прямые a и b не пересекаются и не скрещиваются, так как в каждом из этих случаев можно провести плоскость, пересекающую одну из этих прямых, но не пересекающую другую, что противоречит условию, поэтому остается, что $a \parallel b$.

Четыре предложения

Для предложения

$$A \supset B \qquad (1)$$

можно составить еще три предложения, определенным образом связанные с ним по своей структуре, а именно:

предложение, обратное (1),

$$B \supset A, \qquad (2)$$

предложение, противоположное (1),

$$\neg A \supset \neg B, \qquad (3)$$

предложение, контрапозитивное (1),

$$\neg B \supset \neg A. \qquad (4)$$

Если предложение (1) — теорема некоторой теории, т. е. принадлежит этой теории, то будут ли теоремами и предложения (2), (3), (4)? Надо ли доказывать все четыре предложения?

Рассмотрим несколько примеров.

Пусть следующее предложение — рассмотренная теорема $A \supset B_1$:

$$\forall\alpha(\alpha \otimes a \supset \alpha \otimes b) \supset a \parallel b. \qquad (1)$$

Тогда обратное предложение $B_1 \supset A$:

$$a \parallel b \supset \forall\alpha(\alpha \otimes a \supset \alpha \otimes b); \qquad (2)$$

противоположное $\neg A \supset \neg B_1$:

$$\neg\forall\alpha(\alpha \otimes a \supset \alpha \otimes b) \supset \neg a \parallel b; \tag{3}$$

контрапозитивное $\neg B_1 \supset \neg A$:

$$\neg a \parallel b \supset \neg\forall\alpha(\alpha \otimes a \supset \alpha \otimes b). \tag{4}$$

Истинны ли предложения (2), (3), (4)?

Рассмотрим еще пример:

$A \supset B$: если число делится на 9, то оно делится **на** 3; (1)

$B \supset A$: если число делится на 3, то оно делится **на** 9; (2)

$\neg A \supset \neg B$: если число не делится на 9, то оно не делится на 3; (3)

$\neg B \supset \neg A$: если число не делится на 3, то оно не делится на 9. (4)

Приведем еще пример:

$A \supset B$: если многоугольник правильный, то около него можно описать окружность; (1)

$B \supset A$: если около многоугольника можно описать окружность, то он правильный; (2)

$\neg A \supset \neg B$: если многоугольник неправильный, то около него нельзя описать окружность; (3)

$\neg B \supset \neg A$: если около многоугольника нельзя описать окружность, то он неправильный. (4)

Как видно, во всех примерах истинны предложения (1) и (4). В первом примере истинны также предложения (2) и (3), во втором и третьем — они ложны. Объясняется это следующим. Предложения $A \supset B$ и $\neg B \supset \neg A$ равносильны: $A \supset B \Leftrightarrow \neg B \supset \neg A$, или $A \supset B \sim \neg B \supset \neg A$ есть закон логики, т. е.

$$\models (A \supset B) \sim (\neg B \supset \neg A).$$

Это — закон контрапозиции (номер 10 в нашем перечне (§ 3)). Поэтому, если предложение (1) истинно, то (4) тоже истинно, оно следует из (1) по ПК. То же верно и для предложений $B \supset A$ и $\neg A \supset \neg B$. Поэтому и эти предложения либо оба истинны, либо оба ложны.

Итак, если предложение (1) — теорема, то и (4) — теорема, не требующая специального доказательства, так как она следует из (1) по ПК. Что же касается предложений (2) и (3), то они оба одновременно могут быть или не быть теоремами. Если мы доказали одно из них, то второе следует из него по ПК.

Иногда говорят: «обратная (противоположная) теорема неверна». Это предложение противоречиво, так как теорема — истинное предложение, поэтому она не может быть неверной (ложной). Вместо «обратная теорема неверна» следует корректно говорить «обратное предложение неверно (ложно)», или «обратное предложение не является теоремой».

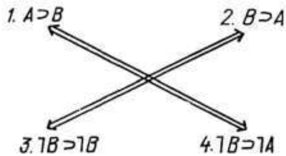

Рис. 14

Связь между предложениями (1) — (4) изображена наглядно на рис. 14.

Необходимо и достаточно

С предложениями (1) — (4) связаны часто встречающиеся в математике выражения «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо».

Например, мы говорим «правильность многоугольника — достаточное, но не необходимое условие для того, чтобы около него можно было описать окружность», а «возможность описания около многоугольника окружности — необходимое, но недостаточное условие для его правильности»; «пропорциональность сторон двух треугольникєв — необходимое и достаточное условие для их подобия»; «пропорциональность сторон двух четырехугольников — необходимое, но недостаточное услоие для их подобия»; «$x = 2$ — достаточное,

но не необходимое условие для того, чтобы $x^2=4$»; «$x^2=4$ необходимо, но недостаточно для того, чтобы $x=2$». Как это надо понимать?

Если предложение $A \supset B$ — теорема (или, вообще, истинное предложение), то говорят также, что «A — **достаточное условие для** B», а «B — **необходимое условие для** A». Это надо понимать так: истинность A достаточна для утверждения истинности B, а истинность B необходима для утверждения истинности A.

Действительно, если $A \supset B$ — теорема, то B следует из A и, возможно, других истинных посылок Γ, т. е. имеет место следование $\Gamma, A \Rightarrow B$. Поэтому, если A истинно, то истинно и B, т. е. истинность A достаточна для истинности B.

Необходимость истинности B для истинности A объясняется тем, что если $A \supset B$ истинно, а B ложно, то и A ложно (так как $A \supset B \Leftrightarrow \neg B \supset \neg A$, то из истинности $\neg B$ (ложности B) следует истинность $\neg A$ (ложность A)).

Таким образом, обороты речи «из A следует B», «A — достаточное условие для B», «B — необходимое условие для A» применяются как синонимы.

Если наряду с предложением $A \supset B$ истинно также и предложение $B \supset A$, то каждое из предложений A и B является необходимым и достаточным условием для другого, так как в этом случае A и B равносильны.

Сведем сказанное о необходимых и достаточных условиях в таблицу:

$A \supset B$	$B \supset A$	A	B
1	2	3	4
И	И	необходимое и достаточное условие для B	необходимое и достаточное условие для A

1	2	3	4
И	Л	достаточное, но не необходимое условие для B	необходимое, но не достаточное условие для A
Л	И	необходимое, но недостаточное условие для B	достаточное, но не необходимое условие для A

В математике необходимое и достаточное условие иногда называют *признаком.* Например, параллельность противоположных сторон — признак параллелограмма (необходимое и достаточное условие того, чтобы четырехугольник был параллелограммом). Этот признак обычно включается в определение параллелограмма (принимается за определяющий признак).

Назовите другие признаки параллелограмма и возможные соответствующие им определения.

Еще одна форма косвенного доказательства

Одна из наиболее простых форм косвенного доказательства — контрапозитивная — основана на правиле контрапозиции (ПК). Эта форма доказательства состоит в следующем.

Пусть надо доказать уже приведенную теорему (1): $A \supset B$. Вместо теоремы (1) доказывают равносильную ей контрапозицию (4):

$$\neg B \supset \neg A.$$

Из (4) по ПК следует (1).

Например, вместо теоремы «если соответственные углы, образованные при пересечении двух прямых третьей, равны, то эти две прямые параллельны» доказывают контрапозицию этого предложения, т. е. «если две прямые (на плоскости) не параллельны, то при пересечении их третьей образуются неравные соответственные углы».

Упражнения

1. Проведите логический анализ косвенных доказательств теорем:

1) обратной теореме Пифагора;

2) если прямая вне плоскости параллельна какой-нибудь прямой *плоскости, то она параллельна и самой плоскости*;

3) не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2;

4) если две плоскости перпендикулярны к одной прямой, то они параллельны.

Специальные методы доказательства

Ответ на вопрос, как мы доказываем в математике, был бы далеко не полным, если бы мы ограничились приведенным выше логическим анализом прямого и косвенного доказательства.

В математике имеются разнообразные **специальные методы** доказательства, представляющие собой блестящие образцы тонких, изящных, нестандартных рассуждений, доставляющих истинное наслаждение и радость познания красоты. Это — особая эстетика интеллектуального плана.

Специальные методы математических доказательств — тема целой книги. Мы ограничимся здесь несколькими примерами и доказательства дадим в обычной (свернутой) форме.

Пример 1. Пусть необходимо доказать следующее предложение: ($P(n)$: «Число 8^n+6 делится на 7 при любом натуральном n $(n \in N)$».

Как доказать, что некоторое свойство P имеет место для любого натурального числа? Непосредственной проверкой истинность подобного утверждения можно установить лишь для конечного множества значений n. Но ведь множество N натуральных чисел бесконечно!

Придумали такой интересный путь: установить истинность предложения $P(1)$, т. е. наличие свойства P

у числа 1, и перехода этого свойства («по наследству») от любого значения n, скажем от $n = k$, к непосредственно следующему за ним значению $n = k + 1$, т. е. истинность предложения $\forall k(P(k) \supset P(k+1))$.

Действительно, в этом случае можно было бы построить цепь рассуждений:

$$\frac{\forall k(P(k) \supset P(k+1))}{P(1) \supset P(2)} \text{ (ПКт)}; \quad \frac{P(1),\ P(1) \supset P(2)}{P(2)} \text{ (ПЗ)};$$

$$\frac{\forall k(P(k) \supset P(k+1))}{P(2) \supset P(3)} \text{ (ПКт)}; \quad \frac{P(2),\ P(2) \supset P(3)}{P(3)} \text{ (ПЗ) и т. д.}$$

Но до каких пор «и т. д.»?

Совершенно очевидно, что получается, к сожалению, бесконечная цепь рассуждений. Иными словами, это «доказательство» представляет собой принципиально незавершаемый процесс. Каким же образом преобразовать эту бесконечную цепь рассуждений в конечную?

Такое преобразование осуществимо, если в качестве основы этого метода доказательства принять свойство, характеризующее множество натуральных чисел, именно как бесконечное и принимаемое обычно в качестве одной из аксиом (аксиомы *математической индукции*) при аксиоматическом построении арифметики натуральных чисел.

Эту аксиому можно сформулировать так: «Если 1 обладает некоторым свойством P и для любого натурального числа k, обладающего этим свойством, справедливо, что свойством P обладает и непосредственно следующее за ним число $k + 1$, то этим свойством обладают все натуральные числа» или на логическом языке математики:

$$P(1) \wedge \forall k(P(k) \supset P(k+1)) \supset \forall n P(n).$$

Теперь получаем простой способ доказательства предложения $\forall n P(n)$, именуемый *методом математической индукции:* необходимо доказать:

$$P(1) \tag{1}$$

и

$$\forall k(P(k) \supset P(k+1)). \qquad (2)$$

Тогда по аксиоме математической индукции из (1) и (2) следует $\forall n P(n)$.

Применим теперь этот метод при решении примера 1.

(1) При $n=1$ утверждение задачи верно (8^1+6 делится на 7).

(2) Допустим, что оно верно при некотором $n = k$ ($k \geqslant 1$), т. е. 8^k+6 делится на 7, или $8^k+6=7m$, где $m \in N$, и докажем, что оно верно и для $n=k+1$.

$$8^{k+1}+6 = 8 \cdot 8^k + 6 = 8(7m-6)+6 = 7 \cdot 8m - 42 = \\ = 7(8m-6),$$

где $8m-6 \in N$, так как $m \in N$. Значит, если 8^k+6 делится на 7, то и $8^{k+1}+6$ делится на 7. Следовательно, 8^n+6 делится на 7 при любом натуральном n.

Хотя метод математической индукции относится лишь к доказательству предложений, выражающих свойства натуральных чисел, не надо думать, что его применение очень ограничено. Часто предложения, сформулированные на другом языке, переводимы на язык натуральных чисел, т. е. представимы в виде форм для высказываний, содержащих переменную для натуральных чисел.

В качестве примера приведем следующую задачу: «Доказать предложение: сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $2d(n-2)$».

Натуральное число фигурирует здесь в качестве числа сторон выпуклого n-угольника и, так как утверждение $S_n = 2d(n-2)$, где S_n — сумма углов выпуклого n-угольника, нужно доказать для любого выпуклого n-угольника, то это доказательство следует начинать с $n=3$ (для $n<3$ рассматриваемое предложение бессмысленно, так как простейший многоугольник — треугольник).

Итак, начнем с $n=3$, т. е. с треугольника: $S_3 =$

$= 2d(3-2) = 2d$, т. е. для $n = 3$ наше предложение верно (теорема о сумме углов треугольника ранее уже доказана).

Допустим, что для некоторого $n = k$ наше предложение верно, т. е. $S_k = 2d(k-2)$.

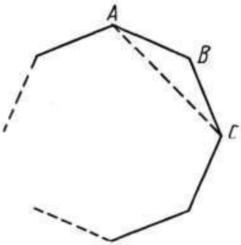

Рис. 15

Рассмотрим выпуклый $(k+1)$-угольник (рис. 15) и, проведя в нем диагональ AC, разложим его на k-угольник и треугольник. Следовательно, $S_{k+1} = S_k + S_3$; или

$$S_{k+1} = 2d(k-2) + 2d;$$
$$S_{k+1} = 2d((k+1)-2).$$

Таким образом мы доказали, что предложение $S_n = 2d\,(n-2)$ верно для любого натурального n, не меньшего 3.

Пример 2. Рассмотрим следующую задачу: «На прямой задано множество точек M, такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего две другие точки из M. Доказать, что множество M бесконечно».

Так как всякое множество может быть конечным или бесконечным, то возникает идея доказательства методом исключения. Если удастся исключить возможность, что множество M конечно, то тем самым мы докажем, что оно бесконечно.

Но как доказать, что множество M не может быть конечным? Здесь напрашивается косвенное доказательство: допуская, что множество M конечно, мы должны получить противоречие. Это оказывается возможным, если применить так называемое *правило крайнего.*

В самом общем виде это правило состоит в том, что рассматривается объект, обладающий какими-либо *крайними*, или, как говорят математики, *экстремальными* свойствами.

В нашем примере, допуская, что множество M конечно, мы рассматриваем точки этого множества, занимающие на прямой крайние положения, самую левую, или самую правую точку (располагая прямую горизонтально, для удобства). Например, пусть A самая левая точка множества M. Но, по определению M, точка A должна быть серединой некоторого отрезка BC, такого, что и $B, C \in M$. Тогда либо B, либо C должна лежать левее точки A, что противоречит нашему допущению.

«Крайнее» свойство может иметь разнообразные формы.

Рассмотрим еще одну задачу: «На полях бесконечной шахматной доски написаны натуральные числа, так, что каждое число равно среднему арифметическому четырех соседних чисел — верхнего, нижнего, правого и левого. Доказать, что все числа на доске равны между собой».

Заметим, что чаще всего применение правила крайнего сочетается с косвенным доказательством.

Из допущения, что не все числа на полях шахматной доски равны, следует, что среди них есть наименьшее, одно или несколько (вот это число (числа) и есть в данной задаче объект с крайним свойством).

Пусть a — наименьшее число, m, n, p, q — четыре соседних числа. По условию задачи

$$a = \frac{m+n+p+q}{4}. \qquad (1)$$

Так как, по нашему допущению, a — наименьшее, то $m \geqslant a$, $n \geqslant a$, $p \geqslant a$, $q \geqslant a$ и, если хотя бы одно из соседних чисел строго больше a, то нарушается равенство (1). Следовательно, все соседние числа равны a. (Мы получили противоречие с условием задачи, выраженным равенством (1), из-за допущения, что не все числа на полях равны. Значит, все эти числа равны.)

Пример 3. Рассмотрим задачу: «Доказать, что существуют по крайней мере два жителя г. Минска с одинаковым числом волос на голове».

На первый взгляд, кажется, задача очень сложная. Но если дополнить ее недостающими (не выраженными в явном виде) данными, а именно, что население г. Минска перевалило за миллион, а волос на голове человека не более 200 000, то сразу же снимается ореол недоступности.

Действительно, если разделить население Минска (разумеется мысленно) на множества людей так, чтобы в одно множество попали люди с одинаковым числом волос на голове, а в различные множества с различным, то таких множеств окажется не более 200 000. Следовательно, хотя бы одно из этих множеств должно состоять более чем из одного человека. Значит, существуют хотя бы два минчанина с одинаковым числом волос на голове.

На основе этого метода доказательства лежит принцип, состоящий в весьма простом утверждении: в любой совокупности из n множеств, содержащих в общей сложности m элементов, где $m > n$, есть хотя бы одно множество, содержащее не менее двух элементов. Этот принцип известен под названием *«принцип «ящиков» Дирихле»* (по имени известного математика XIX века П. Г. Дирихле). Естественно возникает вопрос: причем тут «ящики»? Дело в том, что наиболее популярная форма этого принципа, откуда и его название, состоит в следующем утверждении: если в n ящиках лежит m предметов, причем $m > n$, то хотя бы в одном из ящиков лежит не меньше двух предметов. Но так же как метод математической индукции применим к доказательству предложений, которые сформулированы не обязательно на языке натуральных чисел, принцип «ящиков» применим к доказательству предложений, в формулировке которых вовсе не обязательно фигурируют ящики. В этом мы уже убедились при рассмотрении примера 3.

Рассмотрим еще один пример: «Если 50 человек стоят в комнате размером 7×7 м, то имеется по крайней мере 2 человека, находящиеся друг от друга на расстоянии, меньшем чем 1,5 м. Доказать».

Чтобы применить принцип «ящиков», разобьем пол комнаты на 49 квадратов со стороной в 1 м. Тогда 49 человек могут стать по одному в каждом квадрате. Оставшийся, пятидесятый, должен стать в уже занятый квадрат. И расстояние между двумя людьми, стоящими в одном квадрате, не может быть больше длины диагонали квадрата, т. е. $\sqrt{2}$, а $\sqrt{2} < 1{,}5$.

Упражнения

1. Доказать методом математической индукции следующие предложения:

а) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$;

г) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ делится на 11 при любом натуральном n.

2. На плоскости задано некоторое множество точек M, такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего какую-либо пару точек того же множества M. Доказать, что множество M содержт бесконечно много точек.

3. Доказать, что не существует четверки натуральных чисел x, y, z, u, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$.

4. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем никакие двое не собрали одинакового числа грибов. Доказать, что есть трое грибников, собравших вместе не менее 50 грибов.

III. КАК МАТЕМАТИКА РАЗНЫЕ ВЕЩИ ОДНИМИ ИМЕНАМИ НАЗЫВАЕТ

> Единство природы обнаруживается в «поразительной аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений.
>
> *В. И. Ленин*

1. РЕАЛЬНЫЕ СИТУАЦИИ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Различные задачи — одна модель

Решая различные по содержанию задачи, мы часто приходим к одному и тому же уравнению или к одной и той же системе уравнений.

Возьмем для примера две задачи.

1. Двое рабочих изготовляют m деталей за a дней. Одному из них на изготовление этого количества деталей требуется на b дней больше, чем другому. За сколько дней может изготовить m деталей каждый рабочий, если будет работать один?

2. Бассейн вместимостью m м^3 наполняется двумя кранами за a ч. Один из кранов наполняет бассейн за время, на b ч большее, чем другой. За какое время может наполнить бассейн каждый из кранов в отдельности?

Решение этих задач приводят к одному уравнению

$$\frac{m}{x}+\frac{m}{x-b}=\frac{m}{a} \qquad (1)$$

или к одной системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} x-y&=b,\\ \frac{m}{x}+\frac{m}{y}&=\frac{m}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Уравнение (1) *или* система уравнений (1′), равносильная (1), является «математической моделью» обеих задач, а также других задач иного содержания, но с той же структурой связей между величинами, которая и описывается уравнением (1) или системой (1′).

Если же исходить из уравнения (1), то можно утверждать, что каждая из приведенных задач тоже является «моделью» этого уравнения в той реальной ситуации, к которой относится задача.

Иными словами, отношение «быть моделью» должно быть симметричным, т. е. если уравнение или система уравнений является моделью (математической, абстрактной) некоторой конкретной задачи, то и последняя является моделью (конкретной, содержательной) данного уравнения или данной системы уравнений.

Мы здесь пользуемся интуитивным представлением о «моделях» и не будем стремиться к уточнению этого понятия с помощью соответствующего общего определения.

В приведенном примере мы назвали уравнение (1) или систему уравнений (1′) «математической моделью» каждой из задач — первой и второй.

Когда речь идет о «математической модели» явления, процесса, то обычно имеется в виду описание этого явления, процесса средствами какой-нибудь математической теории, системой алгебраических или дифференциальных уравнений вместе с начальными и граничными условиями и другими данными, необходимыми для ее решения.

Во многих случаях изучение некоторых явлений, процессов приводит к выявлению определенных связей между самим течением процесса и его скоростью, а в более сложных случаях и ускорением. Иными словами, изучение явления (процесса) приводит к выявлению связей между искомой, пока неизвестной функцией, описывающей изучаемое явление, и производной функцией, описывающей скорость этого течения, а может быть и второй производной, описывающей ускорение, и т. д. Эти связи выражаются дифференциальным уравнением или системой таких уравнений.

Например, простейшее дифференциальное уравнение

$$y' = -ky \tag{2}$$

и его решение

$$y = y_0 e^{-kx} \tag{3}$$

могут описать: процесс распада радия (в этом случае формула (3) дает массу радия в момент x, если y_0 — масса радия в момент времени x_0), процесс изменения атмосферного давления в зависимости от высоты x над уровнем океана (в этом случае (3) — барометрическая формула), процесс изменения народонаселения (если прирост населения в данный момент пропорционален количеству населения в этот момент), процесс охлаждения тела при постоянной температуре окружающей среды (поскольку скорость остывания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды), т. е. любой процесс показательного роста или спада (при $k < 0$ или $k > 0$), характеризующийся тем, что скорость изменения величины пропорциональна самой изменяющейся величине в данный момент.

Как видно, при всем многообразии явлений природы существует определенное единство, наглядно раскрывающееся при построении математических моделей этих явлений. Дифференциальное уравнение описывает не одно, а целый класс явлений, относящихся к разным областям, но объединяемых общей характеристикой, выражаемой этим дифференциальным уравнением. Один раз решив уравнение (2), мы уже можем применить его решение (3) к любой задаче, приводящей к уравнению этого типа.

Одна задача — различные модели

Не только различные задачи приводят к одной и той же математической модели, но и для одной и той же задачи можно построить различные модели.

Математическое описание определяемой условиями задачи конкретной ситуации с помощью уравнения или системы уравнений, как правило, не является полным. Именно степень «неполноты» этого описания является причиной того, что решение уравнения или системы уравнений иногда может и не быть решением задачи, моделью которой является это уравнение или система уравнений. Поэтому обычно проверка решения по условиям задачи считается составной частью процесса решения задачи.

Однако можно уменьшить степень неполноты математической модели задачи, добавляя к уравнению (или системе уравнений) систему неравенств и, возможно, других предложений, выражающих ограничения, накладываемые условиями задачи на различные фигурирующие в ней величины (граничные условия).

Проиллюстрируем эти общие рассуждения одним простым примером. Рассмотрим задачу: «В трех баках было 50 л бензина, причем в первом было на 10 л больше, чем во втором. Когда из первого бака вылили в третий 26 л, во втором и третьем баках стало бензина поровну. Сколько бензина было первоначально в первом баке?»

Обычно решение этой задачи состоит в сведении ее к уравнению

$$x - 10 = 50 - x - (x - 10) + 26,$$

где x — первоначальный объем бензина в первом баке. Решение этого уравнения ($x=32$) считают и решением задачи, так как $x>0$.

Однако условия задачи накладывают на величину x более сильные ограничения и решение уравнения не является решением задачи. Проведем такой анализ. Фигурирующие в задаче величины — количество литров бензина в каждом из трех баков первоначально и после переливания — выражены как функции одной из них:

Бак	Объем бензина, л	
	первоначально	после переливания
Первый	x	$x-26$
Второй	$x-10$	$x-10$
Третий	$50-x-(x-10)$	$50-x-(x-10)+26$

Отметим, что некоторые из величин положительные, некоторые неотрицательные, а две из них равны. Выразив это математически, получаем систему, состоящую из одного уравнения и пяти неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} x-10=50-x-(x-10)+26; \\ x>0; \\ x-10>0; \\ 50-x-(x-10)\geqslant 0; \\ x-26\geqslant 0; \\ 50-x-(x-10)+26>0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Так как некоторые неравенства системы (1) являются следствиями других (из этой же системы), то ее можно упростить (исключением следствий):

$$\left.\begin{array}{l} x-10=50-x-(x-10)+26; \\ x-26\geqslant 0; \\ 50-x-(x-10)\geqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Таким образом, по существу решение задачи сводится к решению системы (2), а не к решению одного уравнения. Система (2) представляет собой модель, полученную в результате более глубокого анализа реальной ситуации, описанной в задаче.

Система (2) легко приводится к следующей:

$$\begin{cases} x = 32; \\ x \geqslant 26; \\ x \leqslant 30, \end{cases} \qquad (3)$$

несовместимость которой очевидна. Отсюда следует, что и условия задачи, приводящие к несовместимой модели, несовместимы (противоречивы), т. е. задача не имеет решения.

Разумеется, можно сразу заметить противоречивость условий этой задачи (если в трех баках всего 50 л бензина, то после того, как из первого перелили в третий 26 л, не может стать во втором и третьем баках поровну). Но мы хотели обнаружить противоречие с помощью построения достаточно хорошей математической модели.

Приведенный пример показывает, что не всякая математическая модель точно описывает реальную ситуацию для решения связанных с нею задач.

Таким образом, математика учит глубоко анализировать ситуации и как можно более полно переводить их на язык математики. Разумеется, стремление к полному математическому описанию может привести к настолько сложным моделям, что их использование для решения задачи станет затруднительным. Однако в настоящее время у человека появился помощник, значительно расширяющий его возможности в этом направлении. Это — ЭВМ. Она не боится сложных моделей, главное — чтобы объем информации укладывался в память машины.

Классы (схемы) моделей

Нередко в определенной области науки или практики появляется новая задача, попытка решения которой с применением известных в математике средств не увенчивается успехом. Иными словами, конкретная модель этой задачи, абстрагированная от ее содержания, не укладывается ни в одну из известных схем моделей, разработанных в различных математических теориях.

В таком случае встает проблема разработки новой схемы моделей, решение которой приводит к дальнейшему развитию одной из существующих математических теорий или же к появлению новой.

Соотношение между реальностью и математикой можно представить следующим образом. Для реальной ситуации и возникающих в ней задач строится математическая модель. Затем эта модель исследуется. Для этого она обобщается, т. е. рассматривается схема или класс подобных моделей в рамках математической теории, средствами которой построен этот класс моделей, или же разрабатывается специальная новая теория. Созданный при этом формальный аппа-

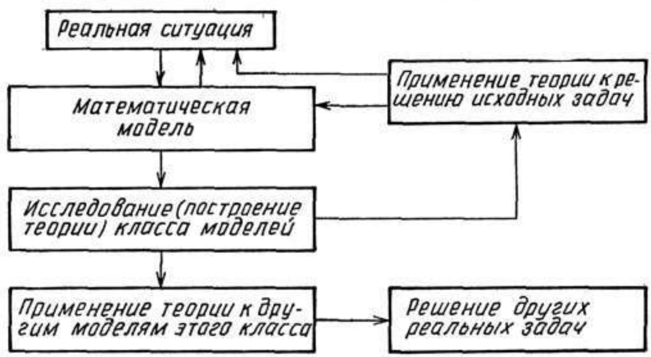

Рис. 16

рат применяется затем для решения задач, описанных исходной моделью, а также для других реальных задач, приводящих к моделям этого же класса. Сказанное можно изобразить в виде схемы, представленной на рис. 16. В ней наглядно отображается осуществление известной ленинской формулы пути познания объективной реальности: от живого созерцания (реальной ситуации) к абстрактному мышлению (построению теории класса моделей) и от нее к практике (к решению задач, связанных с исходной и другими реальными ситуациями).

Алгоритмы

С классами моделей связаны классы однотипных задач, с некоторыми классами однотипных задач — общие методы их решения.

Например, с классом моделей (уравнений)

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

связан класс задач типа

«решить уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)». \tag{1}$$

В этом классе столько частных задач, сколько троек чисел (a, b, c).

Для класса задач (1) существует общий метод решения (алгоритм), во-первых, применимый к любой частной задаче этого класса (свойство *массовости* алгоритма), во-вторых, однозначно определяющий каждый шаг процесса решения в зависимости от результата предыдущего шага (свойство *определенности*, или *детерминированности*), в-третьих, гарантирующий получение результата за конечное число шагов (свойство *результативности*).

Допустим, что мы еще не знаем алгоритма решения уравнения (1). Тогда для какой-нибудь частной задачи этого класса, например, задачи «найти корни уравнения $x^2-6x+5=0$», мы ищем способ ее решения.

Решение другой, более простой частной задачи $x^2 = 4$ (которую мы умеем решать) наводит на мысль преобразовать левую часть данного уравнения так, чтобы получить квадрат некоторого выражения: $x^2-6x+5=x^2-2x\cdot 3+9-9+5=(x-3)^2-4$.

Таким образом, исходное уравнение преобразовано в следующее: $(x-3)^2=4$.

Мы получили корни: $x-3=\pm 2$; $x_1=5$; $x_2=1$.

Но, решая подобным образом другие частные задачи (например, $x^2-6x+9=0$, $x^2+2x+4=0$), обнаруживаем, что может получиться два равных корня или ни одного (действительного) корня. От чего это зависит?

Повторяя процедуру «выделения полного квадрата» в общей задаче «решить уравнение $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0)$», получаем

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

и обнаруживаем, что различные результаты решения задач этого класса зависят от знака выражения b^2-4ac (обозначаемого обычно буквой D и называемого *дискриминантом*).

Итак, исходя из решения частных задач, анализируя это решение и обобщая применяемый способ, приходим к общему методу (алгоритму) решения всего класса задач, который можно представить в виде блок-схемы (рис. 17). Она весьма наглядна. В ромбиках заключены условия, от выполнения или невыполнения которых зависит дальнейший ход и результат решения задачи (выполнение условия обозначается словом «Да», невыполнение — словом «Нет»).

Представленный с помощью блок-схемы (см.

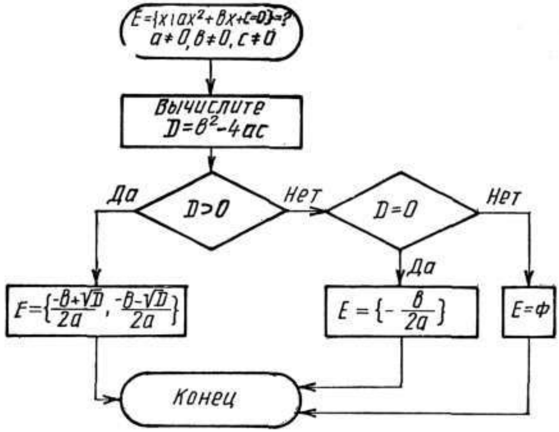

Рис. 17

рис. 17) алгоритм может быть задан и следующим предписанием, представляющим собой конечную последовательность указаний:

1. Вычислите $D = b^2 - 4ac$. Перейдите к п. 2.

2. **Если** $D > 0$, **то** перейдите к п. 3, **иначе** — к п. 4.

3. Уравнение имеет два различных вещественных корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \; x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Перейдите к п. 7.

4. **Если** $D = 0$, **то** перейдите к п. 5, **иначе** — к п. 6.

5. Уравнение имеет два равных вещественных корня: $x_1 = x_2 = -b/2a$. Перейдите к п. 7.

6. Уравнение не имеет вещественных корней. Перейдите к п. 7.

7. Процесс решения окончен.

Это словесное предписание, как и блок-схема, однозначно определяет порядок выполнения действий, т. е. с чего начинать (каков первый шаг) и какой шаг непосредственно следует за каждым шагом (кроме, разумеется, последнего, объявляющего процесс решения оконченным).

Особую роль в этом предписании играют указания 2 и 4, сформулированные с помощью выделенных слов **(если, то, иначе).** Они осуществляют *разветвление* процесса решения. В зависимости от выполнения или невыполнения выделенных условий ($D > 0$, $D = 0$), иными словами, от их истинностных значений зависят различные последовательности шагов.

Это можно представить в виде таблицы, не требующей комментариев:

$D > 0$	$D = 0$	Последовательность шагов
И	—	1, 2, 3, 7
Л	И	1, 2, 4, 5, 7
Л	Л	1, 2, 4, 6, 7

В качестве второго, несколько более сложного примера, рассмотрим класс задач: «Чему равен наибольший общий делитель двух неравных натуральных чисел a, b (НОД$(a, b) = ?$)».

Здесь мы опять имеем бесконечный класс однотипных частных задач, столько, сколько имеется пар натуральных чисел (a, b). И есть общий метод решения любой задачи этого класса, известный под названием «алгоритм Евклида», даже два варианта этого метода. Рассмотрим вариант этого метода, использующий действие деления, известный поэтому и как метод последовательного деления.

Покажем сначала на частной задаче, например «НОД$(280, 45) = ?$», в чем состоит этот метод, основанный на свойстве НОД$(a, b) =$ НОД(b, r), где r — остаток от деления a на b.

Опишем его с помощью словесного предписания:

1. Делите большее число (280) на меньшее (45): $280 = 45 \cdot 6 + 10$.

2. Делите меньшее число (45) на остаток (10): $45 = 10 \cdot 4 + 5$.

3. Делите первый остаток (10) на второй (5): $10 = 2 \cdot 5 + 0$.

4. Так как в последнем делении получен остаток, равный нулю, то предпоследний остаток, или последний, *отличный от нуля, остаток* (5) *является наибольшим общим делителем* данных двух чисел, т. е. НОД$(280, 45) = 5$.

Перейдем теперь к описанию этого метода в общем виде, т. е. для любой пары неравных натуральных чисел (a, b), где, допустим, $a > b$ (если $a < b$, можно сначала поменять их местами и большее число называть a, меньшее b): делим a на b; если остаток $r_1 = 0$, то НОД$(a, b) = b$; если $r_1 \neq 0$, то делим b на r_1; если остаток $r_2 = 0$, то НОД$(a, b) = r_1$, если же $r_2 \neq 0$, то делим r_1 на r_2, и так далее до получения остатка $r_n = 0$. Тогда НОД$(a, b) = r_{n-1}$, где r_{n-1} — последний отличный от нуля остаток.

Легко доказать, что описанная процедура конечна. Действительно, любой остаток — неотрицательное целое число ($r_i \geqslant 0$), а последовательность остатков убывает ($b > r_1 > r_2 > \ldots \geqslant 0$). Следовательно, она конечна и последний остаток равен нулю.

Однако приведенное описание, содержащее выражение «и так далее», не годится. Кроме того, нетрудно заметить, что в этой процедуре повторяется многократно одно и то же действие (деление большего числа не меньшее), меняются лишь компоненты действия, причем определенным образом, закономерно. Возникает вопрос: нельзя ли построить такое предписание, чтобы действие деления содержалось в нем лишь один раз, но было бы точно определено, до каких пор надо повторить это действие и над какими числами оно выполняется в каждом повторении? Оказывается можно. Но при этом придется исходным переменным a и b на каждом шагу *присваивать* новые значения. Так, сначала мы делим a на b; затем, присвоив a значение b (это обозначается специальным символом «$a := b$»), а b — значение r_1 ($b := r_1$) и, разделив опять a на b, по существу, мы уже делим b на r_1; дальше, если $a := r_1$ и $b := r_2$, то, разделив опять a на b, мы делим уже r_1 на r_2.

Таким образом получаем следующее предписание:

1. Разделите a на b. Перейдите к п. 2.
2. **Если** остаток $r = 0$, **то** перейдите к п. 4, **иначе** — к п. 3.
3. $a := b$; $b := r$. Перейдите к п. 1.
4. НОД$(a, b) = b$. Перейдите к п. 5.
5. Процесс окончен.

Как видно, мы получили компактное описание алгоритма Евклида в виде предписания, состоящего всего из пяти указаний, хотя в процессе решения различных частных задач этого класса оказывается разное и иногда довольно большое число шагов.

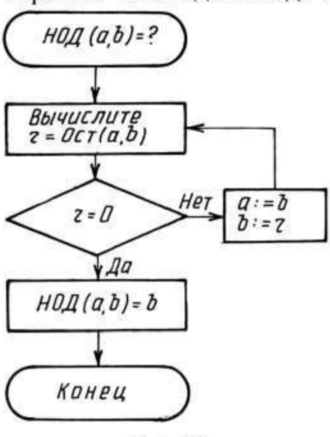

Рис 18

Приведенное предписание может быть точно переведено в блок-схему (рис. 18), при этом числа на блоках — номера соответствующих указаний.

Мы получили пример алгоритма, в котором какое-то действие (или какая-то последовательность действий) повторяется. Это — пример *циклического алгоритма*. Повторяющаяся часть такого алгоритма называется *циклом*. Переменная, от значения которой зависит построение цикла, называется *параметром цикла*. В нашем примере параметром цикла является переменная r. Пока $r \neq 0$, цикл повторяется. Как только r принимает значение 0, процесс оканчивается.

Покажем на таблице выполнение алгоритма Евклида для двух частных задач:

Задача 1: НОД(280,45) = ?	шаги	a	b	$r=0$	НОД(280,45)
	1	280	45	Л (нет)	
	2	45	10	Л (нет)	
	3	10	5	И (да)	5

Задача 2: НОД(1448,124) = ?	шаги	a	b	r	$r=0$	НОД(1448,124)
	1	1448	124	84	Л (нет)	
	2	124	84	40	Л (нет)	
	3	84	40	4	Л (нет)	
	4	40	4	0	И (да)	4

Как видно, в задаче 1 мы имеет три повторения цикла, в задаче 2 — четыре.

Таким образом, конструирование алгоритмов способствует упорядочению мыслительной деятельности, приводит ум в порядок. В то же время это — одна из важнейших задач математики. Алгоритмы приучают строго придерживаться определенной последовательности действий, выявлять выполнение или невыполнение определенных условий и правильно находить продолжение процесса решения.

Что же мы должны понимать под алгоритмом?

Приведенные примеры подсказывают нам, что алгоритм можно понимать, как *точное, понятное предписание о том, какие действия и в каком порядке необходимо выполнить, чтобы решить любую задачу из* *данного класса однотипных задач* (для которого и предназначен этот алгоритм).

В таком понимании алгоритм является лишь интуитивным понятием и данное разъяснение, разумеется, не является определением. В нем фигурируют выражения, не являющиеся математическими терминами («предписание», «понятное предписание», «точное предписание», «действие»). Именно интуитивным понятием алгоритма пользовались в математике с древнейших времен. Если поиск алгоритма для решения нового класса задач увенчается успехом, не возникнет потребности в уточнении этого понятия. В противном случае появятся две гипотезы: или искомый алгоритм существует, но поиск ведется не теми средствами, которые нужны для его представления, или же он вовсе не существует. В первом случае поиск необходимо продолжить, во втором — продолжать поиск несуществующего объекта бессмысленно. В последнем случае необходимо доказать несуществование искомого алгоритма, а для этого уже нужно знать точно (в математическом смысле), что такое алгоритм. Иными словами, возникла необходимость перевода интуитивного понятия алгоритма в точное математическое, построения математической теории алгоритмов. В 30-х гг. XX в. появилось несколько вариантов такой теории, а в настоящее время теория алгоритмов представляет собой обширную, отпочковавшуюся от математической логики, научную теорию с широкими приложениями как внутри, так и вне математики. Происхождение слова алгоритм связано с именем выдающегося средневекового ученого, 1200-летие со дня рождения которого отмечалась по решению ЮНЕСКО в 1983 г. Мухаммед бен Муса аль-Хорезми́ (в переводе с арабского «Мухаммед сын Мусы из Хорезма»), сокращенно аль-Хорезми́, уроженец Хивы (ныне центр Хорезмской области Узбекистана). Его творческая деятельность протекала в IX в. главным образом в Багдаде, где в то время правил халиф аль-Мамун, покровительствовавший математике и собравший в созданном им «Доме мудрости», своего рода академии наук, много крупных ученых того времени.

В одном из своих трудов аль-Хорезми описал десятичную систему счисления и впервые сформулировал правила выполнения арифметических действий над целыми числами и простыми дробями, которыми мы пользуемся и сейчас при вычислениях.

В латинском переводе арифметического труда аль-Хорезми правила начинались словами *Dixit Algorithmi* (Алгоризми говорит). Постепенно люди забыли, что Алгоризми — это автор правил, и стали сами эти правила называть алгоритмами. Так «Алгоризми говорит» постепенно преобразовалось в «алгоритм гласит».

Таким образом, слово «алгоритм» — латинизированное имя аль-Хорезми. Как научный термин это слово первоначально обозначало лишь правила арифметических действий в десятичной системе счисления. Затем постепенно этот термин приобретает все более широкий смысл, обозначая уже не только правила действий в десятичной системе счисления, но любые точные правила действий.

В конце концов слово «алгоритм» стало научным термином, обозначающим одно из фундаментальных понятий современной математики и информатики, по существу, одно из общенаучных понятий.

Упражнения

1. Постройте блок-схему алгоритма решения: 1) уравнения $ax = b$; 2) системы неравенств $\begin{cases} x < a, \\ x > b; \end{cases}$ 3) системы уравнений

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a_1x + b_1y = c_1. \end{cases}$$

2. АБСТРАКТНАЯ ТЕОРИЯ И КОНКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ

Одна теория, много моделей

Мы уже знаем, что различные реальные, конкретные ситуации могут описываться с помощью одной (абстрактной) математической модели. Теперь покажем, что одна и та же (абстрактная) математическая теория может иметь много различных моделей и этим обеспечивается ее широкое применение.

Рассмотрим некоторое множество M, состоящее из произвольных элементов, например чисел, векторов и т. д. Предположим, что в этом множестве введена некоторая операция, сопоставляющая каждой паре элементов из M точно один элемент из этого же множества. Известно много примеров таких операций (сложение в множестве натуральных, целых, рациональных или вещественных чисел; умножение в любом из этих множеств). Обозначим эту операцию знаком «$\circ$», т. е. $a \circ b$ обозначает результат операции, выполненной над элементами a и b, причем $a \in M$, $b \in M$ и $a \circ b \in M$. В множестве M выделяется один элемент «e» (нейтральный элемент), играющий особую роль относительно операции «$\circ$».

Говорят, что система объектов $(M, \circ, e)$ образует *группу*, если выполняются следующие аксиомы (называемые групповыми, так как в совокупности они и определяют группу):

$g1$. $\forall a, b, c \in M (a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c)$ (операция «$\circ$» ассоциативна);

$g2$. $\forall a \in M (a \circ e = a)$ (свойство нейтрального элемента);

$g3$. $\forall a \in M \exists a' \in M (a \circ a' = e)$ (аксиома симметричного элемента).

Исходя из этого, сформулируем такое определение: всякое множество M с некоторой операцией «$\circ$» и выделенным элементом «e» называется *группой*, если операция ассоциативна, e — нейтральный элемент относительно операции, т. е. $a \circ e = a$ для любого $a \in M$ и для любого $a \in M$ существует симметричный ему элемент a', такой, что $a \circ a' = e$.

Система аксиом $g1 - g3$ вместе со всеми следствиями из них образует теорию групп. Всякое следствие из $g1 - g3$ является теоремой этой теории.

Любая система, состоящая из некоторого множества, операции на нем и выделенного элемента, в которой выполняются аксиомы $g1 - g3$, а значит, и все следствия из них, т. е. теоремы теории групп, называется *моделью* этой теории или просто *группой*. Поэтому можно также сказать, что система аксиом $g1 - g3$ характеризует класс моделей, называемых группами.

Опишем некоторые модели этого класса (группы).

1. Пусть M — множество Z целых чисел, операция «$\circ$» — обычное сложение «$+$» в Z, а выделенный элемент e — 0 (число нуль).

Совершенно очевидно, что в системе $(Z, +, 0)$ выполняются аксиомы $g1 - g3$. Так как сложение ассоциативно, $a + (b + c) = = (a + b) + c$ для любых a, b, $c \in Z$, т. е. выполняется $g1$; $a + 0 = a$ для любого $a \in Z$, т. е. выполняется $g2$, и, наконец, для каждого целого числа a существует симметричное (противоположное) ему число $-a$, такое, что $a + (-a) = 0$, т. е. выполняется $g3$.

Таким образом, система $(Z, +, 0)$ является группой. Говорят также, что множество Z образует группу относительно сложения, или аддитивную группу (от лат. additio — прибавление, сложение).

Возьмем то же множество Z, но вместо действия сложения — умножение, а вместо числа 0 в качестве выделенного элемента — число 1. В таком случае нетрудно показать, что система $(Z, \cdot, 1)$ не является группой. Так как умножение ассоциативно, то $g1$ выполняется; так как $a \cdot 1 = a$ для любого $a \in Z$, то выполняется и $g2$, но ни для какого $a \in Z$, за исключением $a = 1$, не найдем симметричного числа a', такого, чтобы выполнялась $a \cdot a' = 1$, т. е. $g3$ не выполняется.

Заметим, что существование модели системы двух аксиом $g1$, $g2$, в которой третья аксиома $g3$ не выполняется, свидетельствует о независимости этой аксиомы, т. е. о том, что она не является следствием остальных аксиом (если $g3$ была бы следствием системы $g1$, $g2$, то она выполнялась бы в любой модели этой системы аксиом).

2. Пусть M — множество $Q \setminus \{0\}$, т. е. множество рациональных чисел без нуля, операция «$\circ$» — обычное умножение «$\cdot$», а e — 1.

Так как умножение ассоциативно $(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ для любых a, b, $c \in Q)$, то выполняется $g1$; так как $a \cdot 1 = a$ для любого $a \in Q$, то выполняется $g2$; для всякого $a \in Q \setminus \{0\}$ существует симметричный (обратный) элемент $\frac{1}{a}$, такой, что $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Таким образом, система $(Q \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ принадлежит классу моделей, характеризуемому системой аксиом $g1 - g3$, т. е. является группой.

3. Система $(R \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ является группой. Так как $Q \setminus \{0\} \subset R \setminus \{0\}$, то группа примера 2 является подгруппой последней.

В рассмотренных примерах мы имеем бесконечные группы, так как носители этих структур, т. е. множества Z, $Q \setminus \{0\}$, $R \setminus \{0\}$ — бесконечные множества.

4. Приведем пример конечной группы. Пусть $M = \{-1;\ 1\}$, т. е. множество M (носитель структуры) состоит всего лишь из двух элементов: -1 и 1. Операция «$\circ$» — «$\cdot$» (обычное умножение), а e — 1.

Здесь надо прежде всего убедиться в том, что операция умножения не выводит действия из множества M. Это нагляднoo видно из следующей таблицы:

$\cdot$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

Так как умножение ассоциативно в множестве Z, то оно ассоциативно и в M, т. е. $g1$ выполняется (то же и для $g2$). Так как $1 \cdot 1 = 1$ и $-(1) \cdot (-1) = 1$, то каждый элемент из M является обратным для самого себя.

Таким образом, система $(\{-1;\ 1\},\ \cdot,\ 1)$ является группой (конечной, двухэлементной).

В приведенных примерах групповая операция выступает как обобщение сложения и умножения. Однако класс моделей, характеризуемый системой аксиом $g1 - g3$, далеко не исчерпывается числовыми группами (носители которых — числовые множества).

5. Пусть M — множество $\{Ro\}$ поворотов плоскости вокруг центра O. Операция «$\circ$» — композиция двух поворотов $R_o^\beta \circ R_o^\alpha$ (т. е. их последовательное применение, сначала R_o^α — поворот на угол α, затем R_o^β — поворот на угол β), результатом которой является поворот $R_0^{\alpha+\beta}$ на угол $\alpha + \beta$. Нейтральный элемент e — поворот R_o^0 на нулевой угол.

Система $(\{R_o\}, \circ, R_o^0)$ — группа. Действительно, композиция поворотов ассоциативна, т. е. выполняется $g1$; так как R_o^0 — тождественное преобразование плоскости и оставляет все точки плоскости на месте, то $R_o^\alpha \circ R_o^0 = R_o^\alpha$, т. е. выполняется $g2$. Наконец, для каждого элемента R_o^α имеется обратный поворот $R_o^{-\alpha}$, такой, что $R_o^\alpha \circ R_o^{-\alpha} = R_o^0$, т. е. выполняется $g3$. Эта группа бесконечна. Но если выделить из $\{R_o\}$ подмножество поворотов, которое приводит к самосовмещению правильный n-угольник с центром O, то получим конечную подгруппу этой группы.

Итак, системы разных объектов (целых, рациональных, вещественных чисел, поворотов плоскости) названы одними именами — группами, так как они обладают общей структурой, описанной одной теорией. И один раз доказанная теорема этой теории применяется в любых ее моделях, не требуя каждый раз нового доказательства.

Вот какая «экономия» мышления достигается «искусством называть разные вещи одними именами», построением одной абстрактной теории, описывающей целый класс моделей!

Еще одна теория и много моделей

Термин «алгебра» обычно применяется в двух смыслах. В одном под алгеброй понимают теорию, описывающую структуру некоторого множества с введенными в нем операциями (в таком смысле понимаем и «школьную алгебру», изучающую операции над числами из некоторого множества). В современной математике под алгеброй понимают само множество с введенными в нем операциями, обладающими определенными свойствами (алгебраическую систему, или алгебраическую структуру). В этом втором смысле мы и будем применять здесь слово «алгебра». Например, множество R вещественных чисел вместе с определенными в нем операциями сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$ образует некоторую алгебру $(R, +, \cdot)$.

Перейдем сейчас к рассмотрению так называемой булевой алгебры (по имени английского математика Джорджа Буля). Разработанные в середине XIX в. Д. Булем, О. де Морганом и их последователями начала математической логики представимы в виде такой алгебры.

Возьмем некоторое множество M, в котором определены две операции: одну из них обозначим через «$+$» и назовем сложением, другую обозначим через «$\cdot$» и назовем умножением. В M выделим два элемента: 0 — нейтральный элемент относительно сложения и 1 — нейтральный элемент относительно умножения.

Класс моделей $(M, +, \cdot, 0, 1)$ и каждая модель этого класса называется *булевой алгеброй*, если выполняются следующие аксиомы:

б1. $\forall x, y (x + y = y + x)$ (коммутативность сложения);

б2. $\forall x, y (x \cdot y = y \cdot x)$ (коммутативность умножения);

б3. $\forall x, y, z (x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$ (дистрибутивность умножения относительно сложения);

б4. $\forall x, y, z (x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z))$ (дистрибутивность сложения относительно умножения);

б5. $\forall x (x + 0 = x)$ (0 — нейтральный элемент относительно сложения);

б6. $\forall x (x \cdot 1 = x)$ (1 — нейтральный элемент относительно умножения);

б7. $\forall x \exists x' (x + x' = 1)$ (x' — дополнение элемента x);

б8. $\forall x (x \cdot x' = 0)$.

Словесно это можно выразить так: $(M, +, \cdot, 0, 1)$ — булева алгебра, если обе операции коммутативны, каждая из них дистрибутивна относительно другой, существует (в множестве M) нейтральный элемент относительно каждой операции и для каждого элемента из M существует в этом множестве элемент, называемый дополнением первого, такой, что сумма этих двух элементов равна 1 (нейтральному элементу относительно умножения), а произведение 0 (нейтральному элементу относительно сложения).

Система аксиом б1 — б8 вместе со всеми следствиями из них образует теорию булевой алгебры. Всякое следствие из б1 — б8 является теоремой этой теории. Причем для развертывания теории, т. е. доказательства ее теорем, совсем не надо знать природу элементов множества-носителя M и смысл операций «$+$» и «$\cdot$».

Докажем для примера две теоремы теории булевой алгебры.

Предварительно заметим, что каждой аксиоме из б1 — б8 можно сопоставить «двойственную» аксиому из тех же б1 — б8, получаемую заменой символов «$+$», «$\cdot$», «0», «1» соответственно знаками «$\cdot$», «$+$», «1», «0». Каждому выводу теоремы из аксиом будет соответствовать двойственный вывод.

Приведем пример двух взаимно-двойственных выводов. В них мы применим известные из «школьной алгебры» правило подстановок (ПП) и правило замены равным (ПЗР).

Вывод 1.

1. $(x+x)\,(x+x') = x+(x\cdot x')$	(ПП, б4);
2. $(x+x)\,1 = x+0$	(ПЗР, пункт 1, б7, б8);
3. $(x+x)\,1 = x+x$	(ПП, б6);
4. $x+x=x$	(ПЗР, пункты 2, 3, б5).

Мы доказали теорему $\forall x(x+x=x)$, выражающую свойство идемпотентности сложения (от лат. idempotens — сохраняющий ту же степень).

Вывод 2

1. $(x\cdot x)+(x\cdot x') = x\cdot(x+x')$	(ПП,б3);
2. $(x\cdot x)+0 = x\cdot 1$	(ПЗР, пункт 1, б8, б7);
3. $(x\cdot x)+0 = x\cdot x$	(ПП, б5);
4. $x\cdot x = x$	(ПЗР, пункты 2, 3, б6).

Мы доказали теорему $\forall x(x\cdot x=x)$, выражающую свойство идемпотентности умножения.

Нетрудно заметить, что второй вывод может быть получен из первого заменой в каждой строке знаков

«+», «·», «0», «1» символами «·», «+», «1», «0» и аксиом на двойственные.

По существу достаточно доказать лишь одну из приведенных теорем, так как в теории булевой алгебры действует «принцип двойственности» позволяющий из данного равенства получить еще одно, двойственное ему, не нуждающееся в специальном доказательстве.

Итак, система аксиом б1 — б8 характеризует класс моделей булевой алгебры. Опишем некоторые модели этого класса.

1. Пусть M — множество всевозможных частей некоторого (универсального) множества D, которое обозначим через $P(D)$. Например, если $D=\{a, b\}$, то $P(D)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

В качестве операции «+» возьмем объединение $\bigcup$, а в качестве «·» — пересечение $\bigcap$. Выделим два элемента из $P(D)$ — $\varnothing$ и $D=\{a, b\}$.

Система $(P(D), \bigcup, \bigcap, \varnothing, D)$, называемая *алгеброй множеств*, является булевой алгеброй (или моделью булевой алгебры). Доказать это предложение — означает установить, что все аксиомы б1 — б8, переведенные на язык алгебры множеств, выполняются в этой алгебре.

Для перевода аксиом б1 — б8 воспользуемся следующим словарем:

Язык булевой алгебры	*Язык алгебры множеств*
x, y, z — переменные для элементов из M	A, B, C — переменные для частей из D, или элементов из $P(D)$
«+»	$\bigcup$
«·»	$\bigcap$
0	$\varnothing$
1	D
x'	$\overline{A}$

Легко доказать и в общем случае, т. е. для любого $P(D)$, выполнимость аксиом б1 — б8. Приведем в качестве примера доказательство аксиомы б4

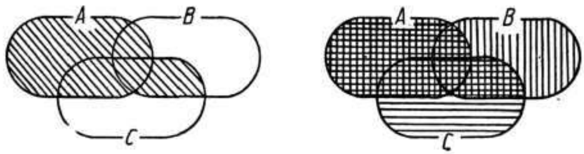

Рис. 19

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

т. е. свойства дистрибутивности объединения относительно пересечения (рис. 19).

Нам необходимо доказать, что множества $E_1 = A \cup (B \cap C)$ и $E_2 = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ равны, т. е. если $x \in E_1$, то $x \in E_2 (E_1 \subseteq E_2)$ и, наоборот, если $x \in E_2$, то $x \in E_1 (E_2 \subseteq E_1)$.

Пусть $x \in E_1$. Тогда

$$x \in A (1')$$

или

$$x \in B \cap C (1'').$$

Если истинно $(1')$, т. е. $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, т. е. $x \in E_2$.

Если истинно $(1'')$, т. е. $x \in B \cap C$, то $x \in B$, тогда $x \in A \cup B$, и $x \in C$, следовательно, $x \in A \cup C$. Значит, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, т. е. $x \in E_2$.

Пусть теперь $x \in E_2$. Тогда $x \in A \cup B$, и поэтому

$$x \in A \text{ или } x \in B \qquad (2')$$

и $x \in A \cup C$, следовательно,

$$x \in A \text{ или } x \in C. \qquad (2''')$$

Если $x \in A$, то $x \in A \cup (B \cap C)$, т. е. $x \in E_1$. Если же $x \notin A$, то, согласно $(2')$, $x \in B$ и, согласно $(2'')$, $x \in C$, следовательно, $x \in B \cap C$. Отсюда следует, что $x \in A \cup (B \cap C)$, т. е. $x \in E_1$.

Итак, всякая алгебра множеств — булева алгебра.

2. Среди всевозможных булевых алгебр наиболее простые — двухэлементные, т. е. алгебры, носители которых состоят всего из двух элементов — нейтрального элемента относительно сложения (0) и нейтрального элемента относительно умножения (1).

В этом простейшем случае, т. е. для всех двухэлементных булевых алгебр $(\{0; 1\}, +, \cdot, 0, 1)$, исходя из аксиом и уже доказанных двух теорем, можно составить таблицы двух операций — «$+$» и «$\cdot$». Из б5 получаем: $1+0=1$; $0+0=0$. Из б1 выводим: $1+0=0+1$, следовательно, и $0+1=1$. По уже доказанному свойству идемпотентности сложения: $1+1=1$.

Итак, мы получили следующую таблицу сложения в двухэлементной булевой алгебре:

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Составьте таблицу умножения.

Иными словами, сложение и умножение в двухэлементных булевых алгебрах определяются следующим образом:

$$x+y=\begin{cases}0, \text{ если } x=y=0;\\ 1 \text{ во всех остальных случаях;}\end{cases}$$

$$x\cdot y=\begin{cases}1, \text{ если } x=y=1;\\ 0 \text{ во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Рассмотрим теперь две модели двухэлементной булевой алгебры. Пусть $M=\{\text{И}, \text{Л}\}$, т. е. M — множество истинных и ложных высказываний, операция «$+$» — дизъюнкция ($\vee$), а «$\cdot$» — конъюнкция ($\wedge$). Нетрудно заметить, что таблицы дизъюнкции и конъюнкции совпадают с приведенными выше таблицами сложения и умножения в абстрактной двухэлементной булевой алгебре (если И сопоставить 1, а Л — 0).

Система ({И, Л}, $\vee$, $\wedge$, И, Л) является булевой алгеброй, т. е. удовлетворяет аксиомам б1 — б8. Эту модель булевой алгебры называют *алгеброй высказываний* (или *алгеброй логики*).

Рассмотрим еще одну модель двухэлементной булевой алгебры, лежащую в основе ее технических приложений,— алгебру контактных схем.

Электрическая цепь снабжена «контактами», которые могут находиться в двух состояниях: «замкнуто», когда пропускают ток в цепи (рис. 20, *а*), и «разомкнуто», когда не пропускают ток (рис. 20, *б*).

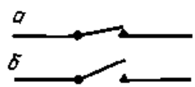

Рис. 20

Мы не будем касаться способа перевода контактов из одного состояния в другое. Нас интересует лишь то, что каждый контакт может быть замкнутым или разомкнутым. Точно так же в алгебре высказываний нас интересует лишь то, что каждое высказывание может быть истинным или ложным. Здесь обнаруживается глубокое сходство между системами, состоящими из объектов различной природы (высказываний и контактных схем). Это сходство и подсказывает возможность интерпретации (истолкования) алгебры высказываний (двухэлементной булевой алгебры) в объектах контактных схем.

Для построения этой интерпретации достаточен следующий исходный словарь:

Язык алгебры высказываний	*Язык алгебры контактных схем*
X, Y, Z — переменные для высказываний, каждое из которых может быть истинным или ложным	X, Y, Z — переменные для контактов, каждый из которых может быть замкнутым или разомкнутым
И	1 — замкнуто;
Л	0 — разомкнуто.

На основе этого исходного словаря легко выясняется смысл дизъюнкции, конъюнкции и отрицания в новой итерпретации (какие соединения контактов соответствуют этим операциям в новой модели булевой алгебры).

Дизъюнкции $X \vee Y$ ставится в соответствие схема, состоящая из параллельного соединения контактов X и Y, замкнутая тогда и только тогда, когда хотя бы один из контактов X или Y замкнут, или разомкнутая тогда и только тогда, когда оба контакта разомкнуты (рис. 21, *а*).

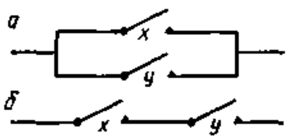

Рис. 21

Конъюнкции $X \wedge Y$ ставится в соответствие схема, состоящая из последовательного соединения контактов X и Y, замкнутая тогда и только тогда, когда оба эти контакта замкнуты (рис. 21, *б*).

Одна и та же таблица

X	Y	$X \vee Y$	$X \wedge Y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

в одной интерпретации символов определяет истинностное значение дизъюнкции или конъюнкции двух высказываний X и Y в зависимости от истинностных значений этих высказываний, в другой — характеризует схему, состоящую из параллельного или последовательного соединения контактов X и Y в зависимости от состояний этих контактов.

Нетрудно убедиться непосредственно в выполнимости аксиом б1 — б8 в новой интерпретации, когда знак «$=$» истолковывается как знак эквивалентности схем (две схемы эквивалентны, если при любых состояниях содержащихся в них контактов они одновременно пропускают ток (замкнуты) или не пропускают (разомкнуты)). При этом роль отрицания (дополнения) играет инверсия контакта, т. е. контакт $\bar{X}$, управляемый тем же элементом (реле, выключателем), что и контакт X, так что когда контакт X замкнут, $\bar{X}$ разомкнут, а когда X разомкнут, $\bar{X}$ замкнут.

Так как алгебра высказываний и алгебра контактных схем — две модели двухэлементной булевой алгебры, то между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие, переводящее истинное высказывание в замкнутый контакт, ложное высказывание — в разомкнутый контакт, дизъюнкцию высказываний — в параллельное соединение контактов, конъюнкцию высказываний — в последовательное соединение контактов, отрицание высказывания — в инверсию контакта, т. е. любую формулу алгебры высказываний, составленную из высказываний и их отрицаний с помощью операций дизъюнкции и конъюнкции,— в схему, составленную из контактов и их инверсий с помощью параллельных и последовательных соединений, и обратно.

Такое взаимно-однозначное соответствие между двумя алгебрами (и вообще системами) называется *изоморфизмом*, а сами эти алгебры — *изоморфными*.

Изоморфные системы, с математической точки зрения,— неразличимые объекты, хотя внешне они могут быть совершенно различными, например «высказывания» и «контакты».

Изоморфность алгебры высказываний и алгебры контактных схем освобождает нас от построения специальной теории алгебры контактных схем и открывает возможность использования аппарата теории алгебры высказываний (или вообще двухэлементной булевой алгебры) при решении задач анализа, упрощения и синтеза (конструирования) контактных схем. Более того, этот аппарат используется и для синтеза сложных бесконтактных (электронных) схем, работающих в тысячи раз быстрее, чем соответствующие контактные схемы, и обеспечивающих огромные скорости действия современных ЭВМ.

Особая прикладная значимость двухэлементной булевой алгебры явилась стимулом для специального построения этой алгебры на базе понятия булевой функции, реализуемой в современных ЭВМ. Обнаруживается любопытная связь между булевыми функциями, составляющими основы логики ЭВМ, и двоичной системой счисления, составляющей основы арифметики ЭВМ. Это — один из многочисленных элементов математической эстетики.

Арифметика и логика ЭВМ

Из первоначальных сведений об электронных вычислительных машинах (ЭВМ) известно, что они могут воспринимать, хранить и обрабатывать (преобразовать) информацию, представленную в виде конечных последовательностей электрических сигналов двух типов, скажем, двух уровней напряжения, высокого и низкого, которые принято обозначать цифрами «0» и «1», т. е. в виде конечных последовательностей, или *слов* из нулей и единиц, называемых также *двоичными кодами*.

1. Система счисления — язык для именования и записи чисел. Всякий язык пользуется какой-то совокупностью знаков, называемой *алфавитом*. Знаки алфавита называются *буквами*.

В общении между людьми и в ручных вычислениях используется *десятичная позиционная система счисления*. Десятичной она называется потому, что алфавит этого языка состоит из десяти букв, называемых *цифрами*: $A_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Позиционной — потому, что значение каждой цифры зависит от места (позиции), занимаемого цифрой в записи числа.

Например, в слове «3333», записанной на этом языке, первая слева цифра «3» обозначает число 3000, вторая — 300, третья — 30, а четвертая — число 3.

Всякое натуральное число записывается в виде *слова*, т. е. конечной последовательности букв-цифр данного алфавита. И грамматика этого языка чрезвычайно проста. Она состоит, собственно говоря, из одного правила. Например, слово «2867» обозначает число, получаемое как результат выполнения всех операций в выражении

$$2 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 7,$$

или

$$2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7,$$

т. е. является краткой записью суммы произведений последовательных степеней десяти (основания системы счисления) на числа, каждое из которых меньше десяти, обозначаемые цифрами, из которых строится имя «2867» числа в виде слова (в результате опускания знаков «$+$», «$\cdot$» и последовательных степеней числа 10).

Вообще, если какое-нибудь натуральное число l записано в десятичной системе счисления с помощью слова «$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$», где каждая a_i — цифра, т. е. $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ и $a_n \neq 0$, то

$$l = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Естественно, возможны позиционные системы счисления и с основанием, отличным от 10, в частности с основанием 2 — *двоичная система счисления.*

Эта система пользуется наиболее простым алфавитом, состоящим всего лишь из двух букв-цифр, $A_2 = \{0, 1\}$. И совершенно аналогично десятичной системе всякое натуральное число записывается с помощью слова в алфавите A_2.

Например, слово 1101011 в алфавите A_2 обозначает число, получаемое в результате выполнения всех операций в выражении (записанном в десятичной системе счисления):

$$1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1,$$

т. е. число 107, записанное в алфавите A_{10}, что обычно записывают так: $1101011_2 = 107$.

Вообще, если число l записывается в двоичной системе счисления с помощью слова «$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$», т. е. $0 \leqslant a_i \leqslant 1$ и $a_n \neq 0$, то $l = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + a_1 2 + a_0$.

Как перевести двоичное число, т. е. запись числа в двоичной системе, в десятичное, мы уже видели на приведенном выше примере двоичного числа 1101011_2.

Для обратного перевода десятичного числа в двоичное имеется довольно простой алгоритм. Он состоит из последовательного деления на 2 данного десятичного числа, затем частного, второго частного, третьего и т. д. до получения частного, равного 0. Последовательность остатков от последнего к первому и представляет собой двоичное слово (так как остатками от деления на 2 могут быть только 0 или 1), обозначающее данное число.

Применим этот алгоритм перевода к числу 237.

$$\begin{array}{llllllllll}
237 & \lvert 2 & & & & & & & & \\
1 & 118 & \lvert 2 & & & & & & & \\
 & 0 & 59 & \lvert 2 & & & & & & \\
 & & 1 & 29 & \lvert 2 & & & & & \\
 & & & 1 & 14 & \lvert 2 & & & & \\
 & & & & 0 & 7 & \lvert 2 & & & \\
 & & & & & 1 & 3 & \lvert 2 & & \\
 & & & & & & 1 & 1 & \lvert 2 & \\
 & & & & & & & 1 & 0 &
\end{array}$$

Последовательность остатков от последнего к первому составляет слово «11101101», обозначающее в двоичной системе счисления десятичное число 237.

Действительно, $11101101_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 128 + 64 + 32 + 8 + 4 + 1 = 237$.

Приведенные примеры показывают, что двоичная запись числа в 2—3 раза длиннее его десятичной записи. Это вполне понятно, чем меньше цифр используется для записи чисел, тем длиннее сами эти записи. Но это вовсе не «волнует» современных ЭВМ, скорости работы которых достигают много миллионов операций в секунду.

Преимущество двоичной системы в качестве языка для ЭВМ состоит не только в удобстве моделирования двоичных чисел с помощью электронных элементов, но и в простоте двоичной арифметики.

Действительно, таблицы сложения и умножения здесь чрезвычайно просты:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Сложение двух многозначных двоичных чисел осуществляется по тому же алгоритму «сложения в столбик», что и в десятичной системе, разумеется с использованием соответствующей таблицы сложения.

Например,

$$
\begin{array}{r} 11101101 \\ +\ \ 1101011 \\ \hline 101011000 \end{array} \quad \left(\begin{array}{r} 237 \\ +\ 107 \\ \hline 344 \end{array} \right)
$$

Умножение же многозначных двоичных чисел сводится лишь к сдвигу и сложению чисел, равных множимому (так как умножение на единицу не меняет числа).

Например,

$$
\begin{array}{r} 11011 \\ \times\ \ \ 1101 \\ \hline 11011 \\ 11011\ \ \\ 11011\ \ \ \\ \hline 101011111 \end{array}
$$

2. Различные устройства ЭВМ с функциональной точки зрения можно представить в виде своеобразных «черных ящиков», так как их внутреннее строение нас не интересует, вообще говоря, с n входами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и m выходами $y_1, y_2, \ldots, y_m$, каждый из которых в любой момент работы может принимать одно из значений 0 или 1.

Таким образом, любой из выходов $y_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ является функцией от n входов, $y_i = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, причем каждый из аргументов и сама функция могут принимать лишь два значения, 0 или 1.

Это и служит стимулом для специального изучения подобных функций.

Определение 1. *Двузначная функция двузначных аргументов называется булевой функцией.*

В записи булевой функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$, принимающие лишь два значения (0, 1), также называются *булевыми переменными*.

В школьном курсе математики мы обычно изучаем числовые функции, области определения и значений которых, как правило, числовые бесконечные множества (рациональных, вещественных чисел). И множество таких функций тоже бесконечно.

У булевых же функций область значений всегда одна — двухэлементное множество $B = \{0, 1\}$. Область определения одноместной булевой функции (функции одной переменной) — это же множество B; двуместной функции (функции двух переменных) — множество всевозможных пар элементов из B, т. е. $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, обозначаемое B^2; трехместной (функции трех переменных) — множество B^3 всевозможных троек элементов из B,

$$B^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\} \text{ и т. д.}$$

Область определения n-местной булевой функции — множество B^n всевозможных n-к элементов из B.

Отметим еще одно обстоятельство. Элементам множества B, т. е. 0 и 1 на первых порах не приписываем ни обычный числовой, ни какой-нибудь другой конкретный смысл. Это просто знаки, обозначающие пока неопределенные объекты.

Так как область определения и область значений булевой функции — конечные множеств, возникает вопрос: сколько существует булевых функций, одноместных, двуместных, трехместных и n-местных?

Для определения числа булевых функций применим индукцию по числу аргументов, т. е. определим сначала число одноместных булевых функций, затем — число двуместных, трехместных; заметим общую закономерность, выдвинем гипотезу о числе n-местных булевых функций и докажем ее. Ограничимся пока табличным способом задания булевых функций.

Приводим всевозможные булевы функции одной переменной:

x	0	1
f_0	0	0
f_1	0	1
f_2	1	0
f_3	1	1

Набор значений каждой функции представляет собой двухбуквенное слово в алфавите $B=\{0, 1\}$. В таблице выписаны всевозможные такие слова, причем функции занумерованы так, что слово, обозначающее набор значений каждой функции, представляет собой двузначную двоичную запись ее номера (f_0 — 00; f_1 — 01; f_2 — 10; f_3 — 11).

По такому способу нумерации функций можно подсчитать число булевых функций двух, трех и вообще n переменных, используя двоичную систему счисления.

Рассмотрим все (хотя и неявно выписанные) булевы функции двух переменных:

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
f_0	0	0	0	0
f_1	0	0	0	1
f_2	0	0	1	0
f_3	0	0	1	1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
f_k	1	1	1	1

Каждой двуместной булевой функции ставим в соответствие набор ее значений в виде четырехбуквенного слова в алфавите $B=\{0, 1\}$ таким образом, что это слово представляет собой четырехзначную двоичную запись номера функций. И так как наибольшему номеру k соответсвует слово «1111», а нумерация начинается с 0, то всего имеется $k+1$ функций: $k+1=1111_2+ +1=10000_2=2^4=16$.

Таким образом, имеется 16 булевых функций двух переменных.

Для трехместных булевых функций составим аналогичную таблицу:

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
f_0	0	0	0	0	0	0	0	0
f_1	0	0	0	0	0	0	0	1
f_2	0	0	0	0	0	0	1	0
f_3	0	0	0	0	0	0	1	1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
f_k	1	1	1	1	1	1	1	1

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем, что число трехместных булевых функций равно $k+1=11111111_2+1=1\ 0000\ 0000_2=2^8=256$.

Сопоставим теперь полученные нами результаты и выдвинем гипотезу о числе n-местных булевых функций:

n	Число булевых функций
1	$4=2^2=2^{2^1}$
2	$16=2^4=2^{2^2}$
3	$256=2^8=2^{2^3}$
. . .	. . . .
n	2^{2^n} (гипотеза)

Докажем теперь эту гипотезу, воспользовавшись тем же методом, что и для $n=1, 2, 3$, т. е. стандартной таблицей с описанной выше нумерацией функций, позволяющих использовать двоичную систему счисления для подсчета числа функций:

x_1	0	0	0	.	.	.	0
x_2	0	0	0	.	.	.	1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_n	0	1	1	.	.	.	1
f_0	0	0	0	7	.	.	0
f_1	0	0	0	.	.	.	1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
f_k	1	1	1	.	.	.	1

Здесь необходимо учесть, что число всевозможных наборов значений n булевых переменных x_1, x_2, ..., x_n, равно 2^n.

В таком случае, число n-местных булевых функций

$$k+1 = \underbrace{11\ldots1_2}_{2^n} + 1 = \underbrace{1\ 00\ \ldots\ 0_2}_{2^n} = 2^{2^n}.$$

Итак, мы доказали следующее предложение: число булевых функций n переменных равно 2^{2^n}.

(Обратите внимание! Какое интересное применение получила здесь двоичная система счисления к подсчету числа булевых фукнций! Не в этом ли эстетика математики?)

До сих пор мы ограничивались табличным представлением булевых функций. Однако во многих приложениях такое представление не является удобным. Возникает вопрос: как представить булевы функции с помощью формул?

Для решения этого вопроса мы должны, прежде всего, определить **исходные** или **основные** булевы функции, через которые окажется возможно выразить любую булеву функцию.

Определение 2. *Исходными (основными) считаются следующие три булевы функции:*

(1) $$\bar{x}=\begin{cases}0, \text{ если } x=1,\\ 1, \text{ если } x=0.\end{cases}$$

(2) $$xy=\begin{cases}1, \text{ если } x=y=1,\\ 0 \text{ во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

(3) $$x\vee y=\begin{cases}0, \text{ если } x=y=0,\\ 1 \text{ во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Эти определения можно, разумеется, записать и в табличной форме:

(1)

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

(2)—(3)

x	y	xy	$x\vee y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Легко заметить, что эти же таблицы (2) — (3) мы получили для сложения и умножения в двухэлементной алгебре исходя из принятой системы аксиом булевой алгебры.

Как видно, функция $\bar{x}$ — функция одной переменной (одноместная), остальные две — функции двух переменных (двуместные).

До сих пор мы не приписывали значениям «0» и «1» никакого смысла. Однако булевы функции допускают различные интерпретации, определящие многообразные приложения теории этих функций.

Мы уже знаем две интерпретации, на языке алгебры высказываний и на языке контактных схем. Мы сохраним для трех основных булевых функций их названия в логической интерпретации — отрицание, конъюнкция, дизъюнкция (чтобы не смешивать булевы сложение и умножение с одноименными операциями в двоичной арифметике).

Теперь рассмотрим третью интерпретацию булевых функций на языке электронных схем.

Построим интерпретационный словарь:

0	сигнал низкого напряжения;
1	сигнал высокого напряжения;
$\bar{x}$	логический элемент $x \to \boxed{\text{НЕ}} \to \bar{x}$ с одним входом и одним выходом, работающий следующим образом: если на вход поступает сигнал высокого напряжения, то на выходе появляется сигнал низкого напряжения и наоборот;
xy	логический элемент $\begin{matrix} x \to \\ y \to \end{matrix} \boxed{\text{И}} \to xy$ с двумя или более входами и одним выходом; на выходе появляется сигнал высокого напряжения тогда и только тогда, когда на все входы поступают такие же сигналы. Следовательно, на выходе появляется сигнал низкого напряжения, когда хотя бы на один из входов поступает такой сигнал;
$x \vee y$	логический элемент $\begin{matrix} x \to \\ y \to \end{matrix} \boxed{\text{ИЛИ}} \to x \vee y$ с двумя или более входами и одним выходом; на выходе появляется сигнал низкого напряжения тогда и только тогда, когда на все входы поданы такие же сигналы

Мы не будем рассматривать физические основы и техническое устройство этих логических элементов (это уже не математика), нам достаточно знать, в каком смысле мы можем говорить о реализации ими трех исходных булевых функций.

Из определений этих функций легко получить их свойства (законы булевой алгебры). Некоторые из них мы уже получили раньше в логической или теоретико-множественной интерпретации.

Приведем перечень наиболее важных свойств.

(1) $\bar{\bar{x}} = x$;

(2) $xy = yx$;

(3) $x \vee y = y \vee x$;

(4) $x(yz) = (xy)z$;

(5) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;

(6) $x(y \vee z) = xy \vee xz$;

(10) $x1 = x$;

(11) $x \vee 0 = x$;

(12) $x0 = 0$;

(13) $x \vee 1 = 1$;

(14) $x\bar{x} = 0$;

(15) $x \vee \bar{x} = 1$;

(7) $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$; (16) $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$;

(8) $xx = x$; (17) $\overline{x \vee y} = \bar{x}\bar{y}$.

(9) $x \vee x = x$;

Обратим внимание на сходство и различие между этой, булевой, и обычной (школьной) алгебрами. Если дизъюнкции сопоставить сложение, а конъюнкции — умножение, то одинаковыми являются свойства (2) — (6) и (10) — (12). Однако в обычной алгебре лишь умножение дистрибутивно относительно сложения (6), в булевой же алгебре каждая из двух операций дистрибутивна относительно другой ((6), (7)).

Существенно различие между способами доказательства свойств. Рассматривая, например, обычную алгебру на множестве рациональных или вещественных чисел, мы не можем доказать, что $xy = yx$ простой проверкой этого равенства для любых значений x, y, так как этих значений бесконечное множество. В двухэлементной же булевой алгебре, ввиду того, что все переменные принимают лишь два значения, доказательство перечисленных выше и других свойств сводится к простой проверке равенств при любых значениях входящих в них переменных. Разумеется, в более сложных случаях, например, когда в равенство входит три или более переменных, эту проверку (доказательство) можно осуществить с помощью таблицы.

Например, для доказательства свойства (7) дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции составим следующую таблицу:

x	y	z	yz	$x \vee yz$	$x \vee y$	$x \vee z$	$(x \vee y)(x \vee z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Совпадение столбцов значений выражений $x \vee yz$ и $(x \vee y)(x \vee z)$ является доказательством равенства (7) этих выражений.

Докажите аналогичным способом все остальные перечисленные выше свойства булевых функций.

Теперь возвратимся к поставленной выше задаче представления булевых функций с помощью формул.

Четыре одноместные булевы функции (табл. 1) легко выразить аналитически: $f_0(x) = 0$; $f_1(x) = x$; $f_2(x) = \bar{x}$; $f_3(x) = 1$.

Однако с увеличением числа аргументов задача выражения любой булевой функции через три основные усложняется. Но имеются алгоритмы, позволяющие для любой булевой функции, заданной табличным способом, построить формулу, выражающую эту функцию через три основные. Опишем один из них на одном конкретном примере.

Пусть задана некоторая булева функция трех переменных с помощью следующей таблицы:

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x, y, z)$	0	0	0	1	0	1	1	1

Описываемый алгоритм состоит из трех шагов:

1) Укажите все наборы значений переменных, для которых функция равна 1.

Для нашего примера: (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1).

2) Для каждого из указанных наборов постройте конъюнкцию из переменных или их отрицаний, принимающую значение 1 при этом наборе значений переменных.

Для нашего примера: $\bar{x}yz$, $x\bar{y}z$, $xy\bar{z}$, xyz.

3) Составьте дизъюнкцию этих конъюнкций. Полученная формула и выражает данную функцию.

Для нашего примера:

$$f(x,\ y,\ z)=\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz. \qquad (1)$$

Легко доказать истинность предложения (1).

Если взять любой набор значений переменных, для которого таблично заданная функция принимает значение 1, то один из членов дизъюнкции, соответствующий этому набору, равен 1, а следовательно, и вся дизъюнкция равна 1. Если же взять любой набор значений переменных, для которого таблично заданная функция равна 0, то ни один из членов дизъюнкции не равен 1, все равны 0. Следовательно, и дизъюнкция при этом наборе значений переменных равна 0. Таким образом, дизъюнкция (1) выражает ту же функцию, что и вышеприведенная таблица.

Реализацию булевых функций в ЭВМ покажем на примере главной части арифметического устройства ЭВМ — *сумматора*, выполняющего сложение многозначных двоичных чисел.

Сумматор представляет собой последовательное соединение одноразрядных двоичных сумматоров, каждый из которых осуществляет сложение в одном определенном разряде и перенос в старший разряд (рис. 22).

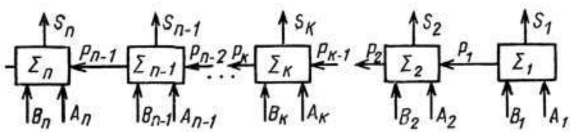

Рис. 22

Рассмотрим задачу синтеза схемы одноразрядного двоичного сумматора, осуществляющего сложение в каком-то разряде, т. е. устройства с тремя входами

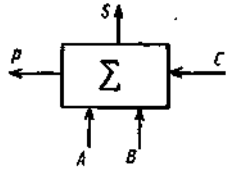

Рис. 23

A, B, C и двумя выходами S и P (рис. 23), воспринимающего соответствующими сигналами через входы A и B двоичные цифры-слагаемые данного разряда, через вход C — перенос из младшего разряда, который также может быть 0 или 1, и выдающего через выход сумму S в данном разряде, а через P — перенос в старший разряд, причем ясно, что S и P также могут принимать значение 0 и 1.

Таким образом, выходы S и P представляют собой булевы функции от входов A, B, C: $S = S(A, B, C)$; $P = P(A, B, C)$.

Эти функции определим, пользуясь таблицей сложения в двоичной системе счисления:

Входы			Выходы	
A	B	C	S	P
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Исходя из табличного задания двух булевых функций S и P, построим выражающие их формулы по описанному выше алгоритму:

$$S = \bar{A}\bar{B}C \vee \bar{A}B\bar{C} \vee A\bar{B}\bar{C} \vee ABC; \qquad (1)$$

$$P = \bar{A}BC \vee A\bar{B}C \vee AB\bar{C} \vee ABC. \qquad (2)$$

Задача состоит в конструировании с помощью трех логических элементов («не», «и» и «или») схемы одноразрядного двоичного сумматора, реализующей булевы функции (1) и (2). Однако предварительно необходимо привести выражения (1) и (2) к такому виду, чтобы получить наиболее экономную схему, в которой используется *наименьшее число логических элементов*.

Займемся теперь преобразованием булевых выражений, в какой-то мере аналогичным хорошо известному из школьной практики преобразованию алгебраических выражений.

Начнем с упрощения выражения (2). Присоединим к нему дизъюнктивно еще две конъюнкции ABC (допустимо по свойству (9)):

$$P = \bar{A}BC \vee A\bar{B}C \vee AB\bar{C} \vee ABC \vee ABC \vee ABC.$$

Теперь сгруппируем (используя ассоциативность дизъюнкции (5)) первый и четвертый, второй и пятый, третий и шестой члены и вынесем за скобки общие множители (используя дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции (6)):

$$P = BC(\bar{A} \vee A) \vee AC(\bar{B} \vee B) \vee AB(\bar{C} \vee C).$$

Согласно свойству (15), каждое выражение в скобках равно 1, а в конъюнкции единица опускается (свойство (10)). Таким образом, получаем:

$$P = BC \vee AC \vee AB.$$

Упростим теперь выражение (1). Прежде всего уменьшим число знаков отрицаний в нем, а следовательно, и число соответствующих логических элементов, требуемых для схемы сумматора.

Используя законы (16), (17), получаем

$$S = ABC \vee \overline{(A \vee B \vee \bar{C})(A \vee \bar{B} \vee C)(\bar{A} \vee B \vee C)}.$$

Упростим выражение, стоящее под знаком отрицания. Для этого раскроем скобки, воспользуясь дистрибутивностью конъюнкции относительно дизъюнкции (6). Выполним эти действия следующим образом: берем каждую букву из первой пары скобок и составляем с нею всевозможные конъюнкции, содержащие по одной букве из второй и третьей пары скобок; при этом сразу же отбрасываем конъюнкции, равные 0, т. е. содержащие какую-нибудь букву без отрицания и с отрицанием (14), а повторяющиеся конъюнкции пишем только один раз (9):

$$(A \vee B \vee \bar{C})\quad(A \vee \bar{B} \vee C)\quad(\bar{A} \vee B \vee C) = AB \vee AC \vee A\bar{B}C \vee ABC \vee \bar{A}BC \vee BC \vee AB\bar{C} \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C} = (AB \vee AC \vee BC) \vee (A\bar{B}C \vee \bar{A}BC \vee AB\bar{C} \vee ABC) \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C} = P \vee P \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C} = P \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

Следовательно, $S = ABC \vee P \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Используя еще раз законы (16), (17) и (1), получаем $S = ABC \vee \bar{P}(A \vee B \vee C)$.

Таким образом, принимая

$$S = ABC \vee \bar{P}(A \vee B \vee C);$$
$$P = BC \vee AC \vee AB,$$

получаем следующую схему одноразрядного двоичного сумматора (рис. 24).

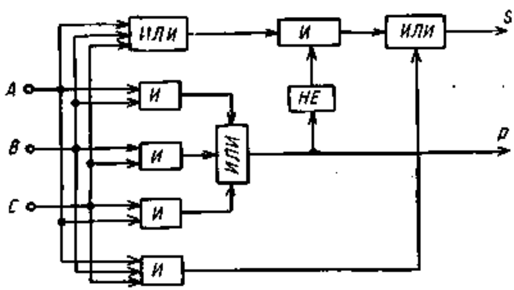

Рис. 24

Блестящий пример! И еще раз мы убедились, что математика учит, несмотря на различие объектов, обнаруживать общность внутренней структуры и возможность применения аппарата одной математической теории к решению задач, возникающих в различных системах, обладающих общей структурой.

В этом также кроется один из важных аспектов того, как математика «ум в порядок приводит».

IV. И КАК МАТЕМАТИКУ УЧИТЬ СЛЕДУЕТ (ВМЕСТО ПОСЛЕСЛОВИЯ)

Лучший способ изучить — это открыть самому.

Д. Пойа

Радость математического «открытия» я познал рано, подметив в возрасте пяти-шести лет закономерность

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 \text{ и так далее.}$$

А. Н. Колмогоров

1. ИНТЕРЕС

У читателя вполне естественно может возникнуть вопрос: почему название этого послесловия начинается с союза «и»?

Союз «и» соединяет здесь название книги с названием послесловия: «Как математика ум в порядок приводит и как математику учить следует», а для полного и явного выражения мысли надо было бы еще добавить: «чтобы она ум в порядок приводила».

Не надо думать, что математика сама по себе «ум в порядок приводит» независимо от того, как мы ее изучаем. Тема «как математику учить следует» не менее обширна, чем та, которой посвящена эта небольшая книга, и, бесспорно, заслуживает детального рассмотрения в отдельной, специально предназначенной для этой цели книге. Не можем, однако, закончить размышления на тему, как математика ум в порядок приводит, ничего не говоря о том, как математику учить следует, чтобы она ум в порядок приводила.

Мы ограничимся в этом послесловии лишь формулировкой и разъяснением некоторых принципов, лежащих в основе того, как математику учить следует.

Автор будет ссылаться при этом на концепцию изучения математики, принадлежащую выдающемуся венгерскому математику и педагогу, большая часть плодотворной научной и педагогической деятельности которого проходила в Стенфордском университете (США). В этом небольшом городе, известном именно своим знаменитым университетом, в декабре 1987 г., на 98-м году жизни скончался Дъерд (Джордж) Пойа. Три переведенные на русский язык его книги по проблемам изучения и преподавания математики («Как решать задачу?», «Математика и правдоподобные рассуждения» и «Математическое открытие») — бесспорно лучшие книги по этим проблемам в мировой литературе.

Кроме того, автор исходит также из своего собственного большого опыта непрерывного изучения математики, обучения других этому предмету и подготовки учителей математики.

Каковы же эти основополагающие принципы эффективного изучения математики?

Учить математику, не питая особого интереса к ней, «из-под палки», бесполезная трата времени. По-видимому, это относится и к любой другой области знаний. Однако, когда речь идет о математике, то интерес к ней — важнейший помощник в преодолении возникающих в процессе ее изучения трудностей, в мобилизации всех умственных и физических сил для достижения этой цели.

Но откуда берется интерес к математике? Это не врожденное качество, хотя о выдающемся математическом, как и о музыкальном, таланте говорят, что он «от бога», т. е. запрограммирован в генах человека. Интерес к математике воспитуем и даже самовоспитуем. Прежде всего он может воспитываться извне:

увлеченным математикой учителем (кому повезет иметь такого учителя), или ближайшей средой, родителями, старшим братом или другом, уже успевшим полюбить эту, казалось бы довольно непривлекательную, науку. Но это внешнее побуждение — лишь стимул, толчок к внутреннему, к воспитанию у себя интереса к математике.

Нужна сила воли для преодоления возникающих на первых порах трудностей. Иначе может создаться мнение о неспособности к успешному изучению математики, а математика представится скучнейшей, «непробиваемой» наукой. Тогда и возникает вопрос: зачем нужна математика? У того же, кто ею интересуется, такой вопрос никогда не возникнет.

Академик Андрей Николаевич Колмогоров (1903—1987), выдающийся математик XX века, в одном из своих выступлений разделил студентов, изучающих математику, на три категории. К первой, самой малочисленной (к сожалению!) он отнес студентов, которые изучают математику, не думая о том, нужна ли она им. Единственным стимулом для ее изучения является интерес к ней. Студенты второй категории изучают математику, потому что сознают, что она нужна им для будущей профессии. К третьей, самой многочисленной (тоже к сожалению!) относятся студенты, которые учат математику, чтобы получить стипендию.

Вообще, для учения имеется много стимулов. «Однако,— считает Д. Пойа,— самым хорошим стимулом для учения является интерес, который вызывает у учащегося изучаемый материал, а лучшей наградой за интенсивную умственную деятельность — наслаждение, доставляемое такой деятельностью» («Математическое открытие.— М.: Наука, 1976.— С. 291). Этот принцип Д. Пойа назвал «Наилучший стимул».

2. ЗНАЕШЬ, ЗНАЧИТ УМЕЕШЬ!

Иногда говорят, что у кого-то хорошие теоретические знания, но он не умеет их применять на практике. Возможно, что в каких-то областях науки такое разделение знаний и умений имеет смысл. В математике же такое разделение невозможно. Здесь знать, значит уметь.

Д. Пойа следующим образом определяет понятие умения: «Умение в математике — это способность решать задачи, находить доказательства, критически анализировать доводы, с достаточной легкостью пользоваться математическим аппаратом, распознавать математические понятия в конкретных ситуациях» («Математическое открытие».— М.: Наука, 1976.— С. 302). Но находить доказательства — это тоже задача, и критический анализ доводов — задача. Использование математического аппарата характерно для решения задач. Распознавание математических понятий в конкретных ситуациях необходимо для построения математических моделей этих ситуаций, а также для решения задач специфического вида. Таким образом, перефразировав определение Пойа, можно сказать, что умение в математике означает в конечном итоге способность решать задачи в самом широком понимании слова «задача».

Математические знания всегда проверялись, проверяются и будут проверяться через умение решать задачи. И именно это умение более всего способствует развитию ума. Поэтому вопрос, как математику учить следует, по существу, сводится к вопросу, как научиться решать задачи.

Прежде всего надо уточнить, какие задачи имеются в виду. Конечно же не задачи, непосредственно решаемые с помощью известных алгоритмов, называемые иногда стандартными (например, «найти площадь прямоугольника с основанием 10 см и высотой 5 см»).

Речь идет о так называемых *нестандартных задачах*, порождающих необходимость поиска решения, использования разнообразных эвристических приемов. Именно эти задачи бросают вызов интеллекту, а стало быть развивают его.

Отдавая предпочтение нестандартным задачам, мы вовсе не ратуем за полное исключение стандартных задач. Без умения решать стандартные задачи, т. е. без знания соответствующих алгоритмов, нельзя научиться решать нестандартные задачи, так как решение последних, после более или менее сложных, а порой «хитроумных» рассуждений, сводится к решению некоторых стандартных задач. Хорошо известны, например, достаточно сложные уравнения, приводящиеся к квадратным, уже стандартным уравнениям.

Где же взять такие нестандартные задачи? В школьных учебниках их мало, и они обычно содержатся только в разделе «Задачи повышенной трудности». Но есть журнал «Квант», постоянно публикующий как хорошие нестандартные задачи, так и специальные приемы поиска решения определенных их классов. Выпускается серия под названием «Задачник «Кванта»», имеются и сборники олимпиадных задач разного уровня (республиканских, всесоюзных, международных олимпиад). Немало задач содержится в книге Д. Пойа «Математическое открытие».

Как же научиться решать задачи? Только в процессе самостоятельного их решения, причем задач должно быть как можно больше. Возникновение трудностей неизбежно. Хорошую задачу очень редко удается решить сразу, как говорят, «с первого захода». Преодолевать возникающие трудности помогает интерес к решаемой задаче, поэтому мы и поставили его на первое место.

Иногда к одной и той же задаче приходится возвращаться многократно, испробовать различные стратегии поиска. Бывает и так, что после многих безуспешных попыток и долгих размышлений, когда уже не думаешь о задаче, неожиданно появляется решение, иногда даже во сне. Этот феномен психологи называют озарением. Однако это явление не происходит на пустом месте, без длительных, усиленных размышлений. При достаточно большом опыте новые задачи иногда уже не вызывают таких больших трудностей, так как среди ранее решенных могут оказаться похожие на них или такие, к которым они сводятся. Важно после решения каждой задачи проанализировать пройденный путь, способ решения, приемы поиска, все то, что может оказаться полезным для рассмотрения задач. Этот заключительный этап процесса решения задачи Пойа называет взглядом назад.

Приемы и методы решения фиксируются не только памятью, но и, что особенно важно, мышлением, которые таким образом обогащаются новыми, порой оригинальными, нестандартными, специфическими для математики способами рассуждений. Происходит постепенное развитие *математического мышления*.

Участие в математических олимпиадах разного уровня, т. е. соревнованиях с жесткими условиями выполнения заданий за определенное время, требует достаточного опыта решения задач, развитого математического мышления.

Рассказывают, что однажды академик А. Н. Колмогоров наблюдал в МГУ за работой участников математической олимпиады и прикидывал, как решается одна из предложенных задач. В это время один мальчик первым закончил работу, причем дал оригинальное решение этой, по мнению академика, сложной задачи. Андрей Николаевич, восхищенный этим решением, заметил: «Надо бы этому мальчику предложить «Великую теорему Ферма»!».

Напомним удивительную историю этой проблемы, которую за три с лишним столетия самые блестящие математические умы не могут решить. (Кто знает, может быть кто-нибудь из читателей этой книги когда-нибудь решит ее!) Французский математик, юрист по образованию Пьер Ферма (1601—1665) написал на полях одной книги: «Я открыл тому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком узки», а речь он вел о доказательстве следующего предложения: «Уравнение $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z», получившего впоследствии название «Великая теорема Ферма». «Великая», разумеется, потому, что до сих пор никто не нашел это доказательство.

Многочисленные исследования имели в качестве результата доказательство этого предложения лишь для отдельных значений n. Некоторым математикам казалось, что они нашли общее доказательство, но впоследствии в этих доказательствах обнаружились ошибки.

Может быть, и сам Ферма ошибся и это предложение не верно. Но тогда нужно найти хотя бы одно значение $n (n > 2)$, для которого существует тройка (x, y, z) натуральных чисел, удовлетворяющая это уравнение. Однако и такой контрпример не найден. С помощью ЭВМ удалось проверить справедливость утверждения для большого числа значений n. Но это опять-таки не доказательство. И до сих пор никому не удалось найти доказательство, о котором в середине XVII века объявил П. Ферма. (Более подробно о великой теореме Ферма, о других удивительных историях и математических проблемах читатель может узнать в Энциклопедическом словаре юного математика (М.: Педагогика.— 1985)).

3. «ИЗОБРЕТЕНИЕ ВЕЛОСИПЕДА»

Обычно, когда кто-то открывает или изобретает то, что уже давно открыто или изобретено, говорят, что он «изобрел велосипед». Однако, когда «открытие» делается в процессе учения, т. е. учащийся открывает для себя то, что уже давно открыто в науке, он рассуждает как первооткрыватель. И это главное.

Один известный ученый говорил, что в начале он открывал то, что всем было известно, затем он стал открывать то, что лишь немногим было известно, и только после этого он открыл что-то такое, что никому не было известно.

Когда-то ученик 6-го класса И. Гельфанд, обратив внимание на прямоугольные треугольники со сторонами 3, 4, 5 и 5, 12, 13, захотел найти все прямоугольные треугольники с целыми сторонами и вывел общую формулу для их сторон, т. е. нашел все так называемые Пифагоровы тройки (все такие тройки взаимно простых чисел можно получить по формулам $x=m^2-n^2$; $y=2mn$; $z=m^2+n^2$). Но этот шестиклассник тогда не знал ни термина «Пифагоровы тройки», ни то, что математики древней Греции уже знали все эти тройки чисел. По существу, он тогда «изобрел велосипед», но теперь бывший шестиклассник — академик И. М. Гельфанд — один из крупнейших математиков современности, лауреат Ленинской, Государственных и многих международных премий, член зарубежных академий, Почетный доктор Оксфордского, Парижского, Гарвардского и других университетов.

И маленький, шестилетний Колмогоров тоже «изобрел велосипед», открыв закономерность, о которой говорится в эпиграфе к данному послесловию. При этом он, по словам самого Андрея Николаевича, испытал «радость математического открытия».

Не случайно двух упомянутых выше выдающихся математиков объединяет одна общая черта — забота о математическом воспитании школьников, о повышении интереса учащихся к математике. А. Н. Колмогоров был основателем физико-математической школыинтерната при МГУ, председателем научно-методического совета школы и сам преподавал в ней. И. М. Гельфанд — основатель Всесоюзной заочной математической школы и председатель ее научного совета.

Как видно, выражение «изобрести велосипед», которое иногда воспринимается с негативным оттенком, при использовании для обозначения одного из принципов современного преподавания и изучения математики имеет явно положительный смысл. Это и есть принцип *активного изучения*, по выражению Д. Пойа. Именно оно дает эффект «приведения ума в порядок».

4. ПОИСК РЕШЕНИЯ И РАДОСТЬ ОТКРЫТИЯ

Было бы несправедливо по отношению к читателю закончить это послесловие, не давая ему возможности испытать напряженность поиска и радость открытия. Наиболее подходящий для этой цели материал — нестандартные задачи. В дальнейшем, говоря «задачи», будем иметь в виду именно такие задачи.

Как же вести поиск решения задач?

Поиск может быть «слепым», т. е. можно искать решение вслепую, не учитывая заложенной в условиях задачи «эвристической» информации, подсказывающей перспективное направление (стратегию) поиска. Такой поиск, хотя и может иногда привести к открытию способа решения, чаще всего заводит в тупик или связан с большим объемом рассуждений. Это объясняется тем, что, ведя поиск вслепую, решающий задачу стремится найти решение без глубокого анализа условий и поэтому ему бросается в глаза то, что находится на поверхности, а рациональный, нестандартный способ решения обычно «зарыт» глубоко, его надо еще «раскопать». Дальше мы убедимся в этом на конкретных примерах.

Кроме «слепого» поиска есть более эффективный *упорядоченный* или *эвристический*, поиск, который учитывает и использует заложенную в условиях задачи эвристическую информацию. Этот поиск регулируется различными эвристическими и специальными приемами. Некоторые из этих приемов (их очень много) мы проиллюстрируем на приведенных ниже задачах.

1. Решите неравенство

$$\sqrt{-25x^2+15x-2}(8x^2-6x+1) \geqslant 0.$$

Кто-то определенно попытается это неравенство решить, как говорится, «в лоб», т. е. возвести обе его части в квадрат. Нетрудно представить себе, что этот путь безнадежен, заводит в тупик.

Какая же эвристическая информация заложена в условии задачи? Неравенство имеет вид

$$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) \geqslant 0. \tag{1}$$

При этом должно выполняться условие $f(x) \geqslant 0$. Поэтому неравенство (1) удовлетворяется тогда и только тогда, когда справедлива система неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

В нашем случае имеем

$$\begin{cases} -25x^2+15x-2 \geqslant 0, \\ 8x^2-6x+1 \geqslant 0, \end{cases}$$

а это — уже стандартная задача. Решив ее, Вы получите множество решений этой системы, а следовательно, и исходного неравенства.

2. Решите неравенство

$$(x-1)\sqrt{-x^2+x+6} \leqslant 0.$$

3. Решите неравенство

$$(1+\sin x)(x^2-3x-28) \geqslant 0.$$

Задача сводится к следующей

$$f(x)\cdot g(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)\geqslant 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x)\leqslant 0, \\ g(x)\leqslant 0. \end{cases}$$

4. Пусть $n \in N$ и $n > 1$, а

$$S = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Выясните, верно ли, что $S < \frac{3}{4}$.

Попытка сложить эти дроби заводит в тупик. Но не встречались ли мы с чем-то подобным? Вспомните, как находили сумму n членов арифметической прогрессии. Если же задача вызовет у Вас затруднения и Ваши попытки не увенчаются успехом, посмотрите в ответах, однако не делайте этого сразу после первой неудавшейся попытки решения.

5. На прямой задано множество точек M, такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего две другие точки из M. Докажите, что множество точек M бесконечно.

Доказательство. Допустим, что множество точек M конечно. Тогда существуют «крайние» точки, самая левая и самая правая (если прямая расположена горизонтально), или самая верхняя и самая нижняя (если прямая расположена вертикально). Пусть A — такая крайняя точка. Но так как $A \in M$, то A — середина отрезка, соединяющего две другие точки из M, но тогда A уже не будет крайней точкой. Наше допущение о конечности множества M приводит к противоречию. Следовательно, M — бесконечное множество точек.

Примененный здесь прием называется «правилом крайнего». Он состоит в том, что рассматривается объект (точка, число, функция и т. п.), обладающий какими-то крайними, или, как говорят математики, экстремальными свойствами. Эти свойства в разных задачах проявляются по-разному.

Попробуйте! Примените правило крайнего к задачам 6, 7, 8.

6. На плоскости задано некоторое множество точек M, такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего какую-либо пару точек того же множества M. Докажите, что множество M содержит бесконечно много точек.

7. На полях бесконечной шахматной доски написаны натуральные числа, так, что каждое число равно среднему арифметическому четырех соседних чисел — верхнего, нижнего, правого и левого. Докажите, что все числа на доске равны между собой.

8. Докажите, что не существует четверки натуральных чисел x, y, z, u, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2=3(z^2+u^2)$.

9. Определите натуральное число n, так, чтобы 1001 делилось на $n+1$, а $n-1$ делилось на 15.

(Подсказка: так как $1001=7\cdot 11\cdot 13$, то делителями 1001 будут 1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001.)

10. Докажите, что для любого натурального n $z=n^3+11n$ делится на 6.

(Подсказка: $z\,\vdots\,6 \Leftrightarrow z\,\vdots\,2$ и $z\,\vdots\,3$ («$\vdots$» обозначает отношение «делится на».) Рассмотрите случаи, когда n — четное, нечетное, делится или не делится на 3.)

11. Докажите, что $n^3+3n^2-n-3\,\vdots\,48$ для любого нечетного n.

(Подсказка: разложите на множители многочлен.)

12. Найдите пары $(a,\ b)$ рациональных чисел, для которых $(a+b)^3=a^3+b^3$.

13. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{3x-2-x^2}>\sqrt{2}(1-\sqrt{x}).$$

(Подсказка: Наше неравенство имеет вид $f(x)>g(x)$. Найдите области определения $f(x)$ и $g(x)$.)

14. Докажите неравенство $x^4 - x^2 - 3x + 5 > 0$ для любого $x \in R$.

Некоторые попытаются разложить левую часть на множители. Но эти попытки заводят в тупик.

Нужна какая-то стратегия поиска. Например, так как в левой части имеется многочлен четвертой степени (эвристическая информация), то можно было бы попытаться представить его в виде $(x^2 - a)^2 + (x - b)^2 + c$ и, если окажется, что $c > 0$, то и все это выражение положительно. Имеем: $x^4 - x^2 - 3x + 5 = (x^2 - a)^2 + (x - b)^2 + c = x^4 + x^2(1 - 2a) - 2bx + a^2 + b^2 + c$.

Теперь остается Вам приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x и закончить доказательство.

Этот прием известен под названием метода *неопределенных коэффициентов.*

15. Найдите действительные корни уравнения $x^4 + 4x - 1 = 0$.

Если можно было бы многочлен $x^4 + 4x - 1$ представить в виде разности квадратов $(x^2 - a)^2 - c^2(x - b)^2$, то задача была бы решена. Попробуйте!

16. Решите уравнение $\sqrt{7 - x} = x - 1$. Здесь, разумеется, можно поступить стандартно. Получим квадратное уравнение $x^2 - x - 6 = 0$ и из двух его корней 3 и -2 только первый будет корнем исходного уравнения. (Почему?)

Но это уравнение можно решить и иначе. Угадайте один корень ($x = 3$) и докажите, что других корней нет.

Действительно, при $x < 3$, $\sqrt{7 - x} > 2$, а $x - 1 < 2$, т. е. нет корня, меньшего числа 3. При $x > 3$, $\sqrt{7 - x} < 2$, а $x - 1 > 2$, т. е. нет и корня, большего числа 3.

Этот метод, основанный на свойствах возрастания или убывания функций, часто выручает, когда стандартное решение иррациональных и других уравнений очень громоздко или вообще заводит в тупик.

17. Решите уравнение $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+4}=\sqrt{9+8x}$.

18. Решите уравнение $(x^2-1)(x+5)(x+3)=105$. Тот, кто сразу же возьмется представить левую часть в виде многочлена, потерпит неудачу.

Разложите 105 на множители и рассмотрите различные возможные случаи.

19. Всякий выпуклый четырехугольник делится диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что выпуклый четырехугольник тогда и только тогда параллелограмм, когда любые два из четырех треугольников имеют равные площади.

(Обратите внимание на выражение «тогда и только тогда».)

20. Если в трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то сумма квадратов диагоналей равна квадрату суммы оснований трапеции.

Определите (различными способами) площадь этой трапеции, если длины диагоналей равны 60 и 36 см соответственно.

21. Решите уравнение $x+\frac{1}{x}=7\frac{1}{7}$.

Это уравнение, конечно же, любой решит. Но как? Большинство решающих сведет его к квадратному уравнению с довольно большими коэффициентами. А нельзя ли проще? Вот вопрос, который всегда мы должны задавать себе, решая любую задачу!

В этой задаче эвристическая информация, подсказывающая простейший способ решения, лежит прямо на поверхности. Но если Вы не заметили, то перепишем уравнение в виде: $x+\frac{1}{x}=7+\frac{1}{7}$.

Теперь совершенно ясно: уравнение решается устно, оно имеет два корня $x=7$ и $x=\frac{1}{7}$.

22. Решите уравнения:

а) $x + \frac{1}{x} = 2{,}5$; б) $\frac{x^2 - 1}{x + 7} + \frac{x + 7}{x^2 - 1} = 2\frac{1}{2}$;

в) $\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = 4{,}25$.

23. Решите уравнение

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 12.$$

Стандартное решение приводит к уравнению четвертой степени, которое мы не умеем решать. Но обратите внимание! В левой части имеется сумма квадратов, которую можно представить в виде квадрата суммы без удвоенного произведения. Попробуйте!

ОТВЕТЫ

Глава I

Параграф 1

3. $P(M)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

4. $Y_1 \Rightarrow Y_3$; $Y_1 \Rightarrow Y_5$; $Y_2 \Rightarrow Y_4$; $Y_2 \Rightarrow Y_6$; $Y_4 \Rightarrow Y_2$; $Y_4 \Rightarrow Y_6$; $Y_5 \Rightarrow Y_1$; $Y_5 \Rightarrow Y_3$.

5. $H_1 \Rightarrow H_5$; $H_2 \Rightarrow H_4$; $H_3 \Rightarrow H_1$; $H_3 \Rightarrow H_5$; $H_6 \Rightarrow H_2$; $H_6 \Rightarrow H_4$.

Параграф 2

Отображение, расстояние; отношение.

Отображение, симметричные относительно прямой p точки; отношение; перпендикулярно, отрезок, середина отрезка; прямой угол; множество точек; между; расстояние; смежные углы, равные углы; угол; объединение, пересечение; луч, область.

Параграф 3

1. $A=\{p_1, p_2, p_3, p_{13}\}$; $A_1=\{p_7, p_8, p_9, p_{13}\}$.
3. $\{А, Б, В\}$, $\{Г, Д\}$.

Глава II

Параграф 2

1. $A \supset B \wedge (C \vee D)$; $A \wedge (\neg B \vee \neg C \wedge \neg D)$.
2. f не является нечетной функцией $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists x \in D(f)\,(-x \notin D(f) \vee f(-x) \neq -f(x));$$

f не является периодической функцией $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall T \neq 0\, \exists x \in D(f)\,(x-T \notin D(f) \vee x + T \notin D(f) \vee f(x) \neq f(x+T)).$$

3. $A \supset B \Leftrightarrow \neg B \supset \neg A$ или $\models A \supset B \sim \neg B \supset \neg A$

A	B	$A \supset B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \supset \neg A$	$A \supset B \sim \neg B \supset \neg A$
И	И	И	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И

4. $A \wedge B \supset C \Leftrightarrow A \wedge \neg C \supset \neg B$;
$A \wedge (B \vee C) \supset D \Leftrightarrow A \wedge \neg D \supset \neg B \wedge \neg C$;

5. $A \vee \neg B$; $\neg B \wedge \neg\neg A$; $A \wedge B \wedge \neg C$; $A \wedge \neg C \wedge \neg\neg B$;
$A \wedge (B \vee C) \wedge \neg D$; $A \wedge \neg D \wedge (\neg\neg B \vee \neg\neg C)$.

6. в)

A	B	C	$A \supset C$	$B \supset C$	$(A \supset C) \vee (B \supset C)$	$A \wedge B$	$A \wedge B \supset C$
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	Л	Л	Л	И	Л
И	Л	И	И	И	И	Л	И
И	Л	Л	Л	И	И	Л	И
Л	И	И	И	И	И	Л	И
Л	И	Л	И	Л	И	Л	И
Л	Л	И	И	И	И	Л	И
Л	Л	Л	И	И	И	Л	И

Параграф 3

3. а) да; б) да; в) да.

$$\frac{A \wedge B}{A};\ \frac{A \wedge B}{B};\ \frac{A \wedge B}{A \vee B};\quad \models A \wedge B \supset A;\ \models A \wedge B \supset B;\ \models A \wedge B \supset A \vee B.$$

4. Из двух посылок $A \vee B$ и A нельзя вывести ни заключение B, ни заключение $\neg B$.

6. Первое и последнее правильны (законы де Моргана).

Глава IV

1. $\left[\frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right] \cup \left\{\frac{2}{5}\right\}$. 2. $[-2;\ 1] \cup \{3\}$. 3. $\left\{-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right\}$. 4. $S =$
$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+k} + \ldots + \frac{1}{2n} +$

$$+\ \frac{S = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \ldots}{2S = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n-1}\right) + \ldots}$$

$$\frac{\dots+\frac{1}{2n-(k-1)}+\dots+\frac{1}{n+1}}{\dots+\left(\frac{1}{n+k}+\frac{1}{2n+1-k}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n+1}\right)}$$

Нужно доказать, что $S<3/4$ или $2S<3/2$, а для этого достаточно показать, что каждое выражение в скобках меньше, чем $3/(2n)$, или что любое выражение вида $\frac{1}{n+k}+\frac{1}{2n+1-k}$ меньше $3/(2n)$, т. е., что

$$\frac{1}{n+k}+\frac{1}{2n+1-k}<\frac{3}{2n}(1\leqslant k\leqslant n); \qquad (1)$$

или

$$3(n+k)(2n+1-k)>(3n+1)2n; \qquad (2)$$
$$3nk+n+3k-3k^2>0;\ 3k(n-k)+(n+3k)>0.$$

Это неравенство очевидно справедливо, так как $1\leqslant k\leqslant n$. И так как это неравенство равносильно (2) или (1), то каждое выражение в скобках меньше, чем $3/(2n)$. Поэтому, $2S<n\left(\frac{3}{2n}\right)=\frac{3}{2}$ и $S<3/4$.

6. Доказывается аналогично 5.

7. Допустим, что не все числа на доске равны между собой. Тогда найдется одно или несколько наименьших. Пусть a — наименьшее (одно из наименьших) и выполняется условие задачи

$$a=(m+n+p+q)/4, \qquad (1)$$

где m, n, p, q — соседние числа. Отсюда следует, что $a\leqslant m$; $a\leqslant n$; $a\leqslant p$; $a\leqslant q$. Но если хотя бы одно из этих неравенств окажется строгим, то не будет выполняться условие (1).

8. Допустим, что существует, может быть даже не одна, четверка натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению. Тогда существует четверка a, b, c, d такая, что $a^2+b^2=3(c^2+d^2)$ и a^2+b^2 — минимальная. Но так как правая часть равенства делится на 3, то и левая должна делиться на 3, т. е. $a=3m$; $b=3n$ и $a^2+b^2=$ $=9m^2+9n^2=3(c^2+d^2)$, или $c^2+d^2<a^2+b^2$, что противоречит нашему допущению.

9. $n=76$.

10. а) Если n четное, то оно делится на 2. Если же n нечетное, $n=2k+1$, то $n^2+11=4k^2+4k+12$ — четно, т. е. делится на 2. Итак, при любом натуральном n $z \vdots 2$.

б) Если $n \vdots 3$, то и $z \vdots 3$.

Пусть теперь n не делится на 3, т. е. $n=3k+1$ или $n=3k+2$.

Если $n = 3k+1$, то $n^2+11 = 9k^2+6k+12 \,\vdots\, 3$. *Если* $n = 3k+2$, то $n^2+11 = 9k^2+12k+15 \,\vdots\, 3$. Следовательно, $z \,\vdots\, 3$ при любом натуральном n.

Так как для любого натурального n $z \,\vdots\, 2$ и $z \,\vdots\, 3$, то для любого натурального n $z \,\vdots\, 6$.

11. $n^3+3n^2-n-3 = (n+3)(n+1)(n-1)$. Так как n — нечетное, то $n-1$, $n+1$, $n+3$ — четные последовательные числа, значит, два из них делятся на 2, одно на 4.

Из трех последовательных натуральных чисел $n-1$, n, $n+1$ точно одно делится на 3, поэтому и одно из чисел $n-1$, $n+1$, $n+3$ делится на 3 (если n, то и $n+3$). Следовательно, данное выражение делится на $2\cdot 2\cdot 4\cdot 3 = 48$.

12. $(0, b)$, где b — любое рациональное число; $(a, 0)$, где a — любое рациональное число; $(-b, b)$, где b — любое рациональное число.

13. Неравенство не имеет решения.

15. $x^4+4x-1=0 \Leftrightarrow (x^2+1)^2-2(x-1)^2=0 \Leftrightarrow (x^2+1+\sqrt{2}(x-1))(x^2+1-\sqrt{2}(x-1))=0$. **17.** $x=5$. **18.** $x=2$.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

(не используемые в школьном курсе)

$\prec$ предшествует
$\wedge$ и
$\vee$ или
$\supset$ если ..., то
$\sim$ тогда и только тогда, когда
$\neg$ неверно, что
$\forall$ все
$\exists$ существует
$\models$ тождественно-истинно
$\underset{Df}{\Leftrightarrow}$ означает (равносильно) по определению
$\Leftrightarrow$ равносильно
$\Rightarrow$ следует

СОДЕРЖАНИЕ

Научно-популярное издание

Столяр Абрам Аронович

КАК МАТЕМАТИКА УМ В ПОРЯДОК ПРИВОДИТ

Заведующий редакцией *Л. Д. Духвалов*
Редактор *Е. А. Пастушенко*
Младший редактор *Л. С. Крумкачева*
Художник обложки *С. В. Черенович*
Художественный редактор *Ю. С. Сергачев*
Технический редактор *И. П. Тихонова*
Корректор *В. П. Шкредова*

ИБ № 3152

Сдано в набор 14.05.90. Подписано в печать 31.10.90. Формат 70 × 108/32. Бумага типогр. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 9,1. Усл. кр.-отт. 9,36. Уч.-изд. л. 8,79. Тираж 21 500 экз. Зак. 394. Цена 1 р.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по печати 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО им. Я. Коласа. 220005, Минск, ул. Красная, 23.