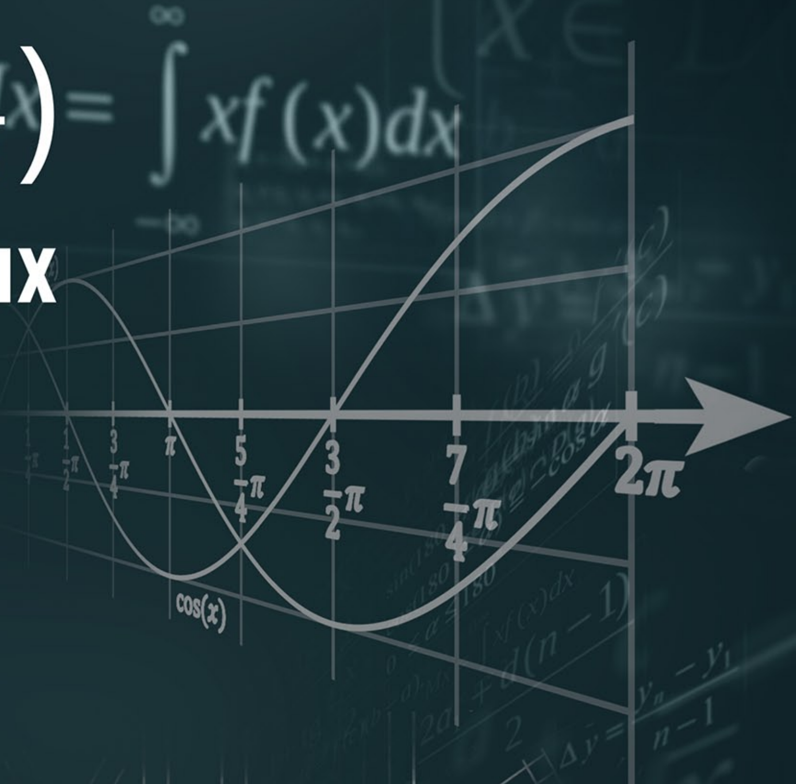
100 x (САМЫХ / ВАЖНЫХ)

ОТКРЫТИЙ / УЧЕНЫХ



МАТЕМАТИКА

ИЛЛЮСТРИРОВАННАЯ ИСТОРИЯ

ВНУТРИ

ПУТЕВОДИТЕЛЬ-
ХРОНОЛОГИЯ
ПО ИСТОРИИ
МАТЕМАТИКИ
И ЧИСЕЛ

ОТ -1 ДО ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

МАТЕМАТИКА

ИЛЛЮСТРИРОВАННАЯ ИСТОРИЯ

ЧИТАЙТЕ В СЕРИИ:

«ИЛЛЮСТРИРОВАННАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ НАУКИ»

MATHEMATICS

AN ILLUSTRATED HISTORY OF NUMBERS

TOM JACKSON

WORTH PRESS

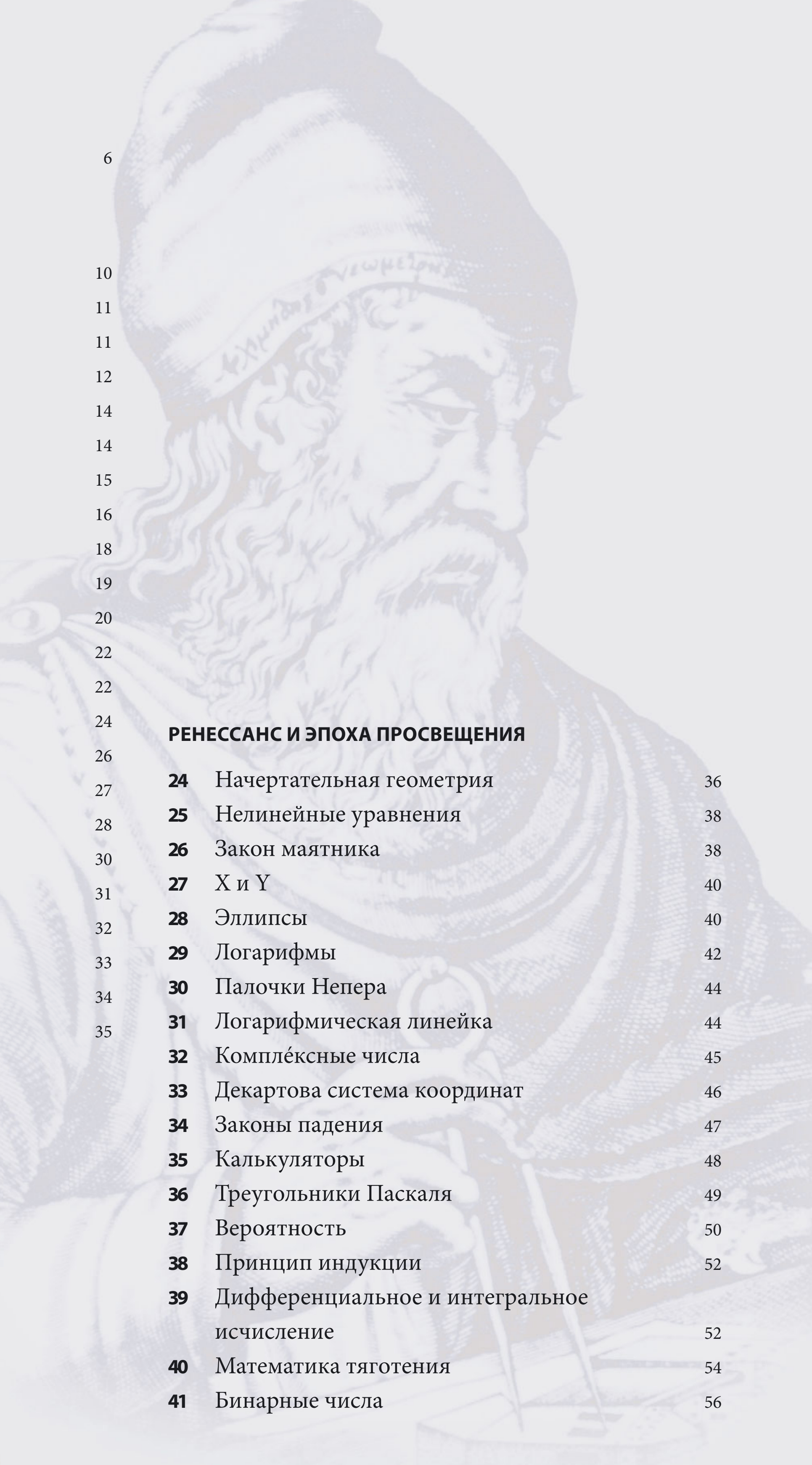
МАТЕМАТИКА

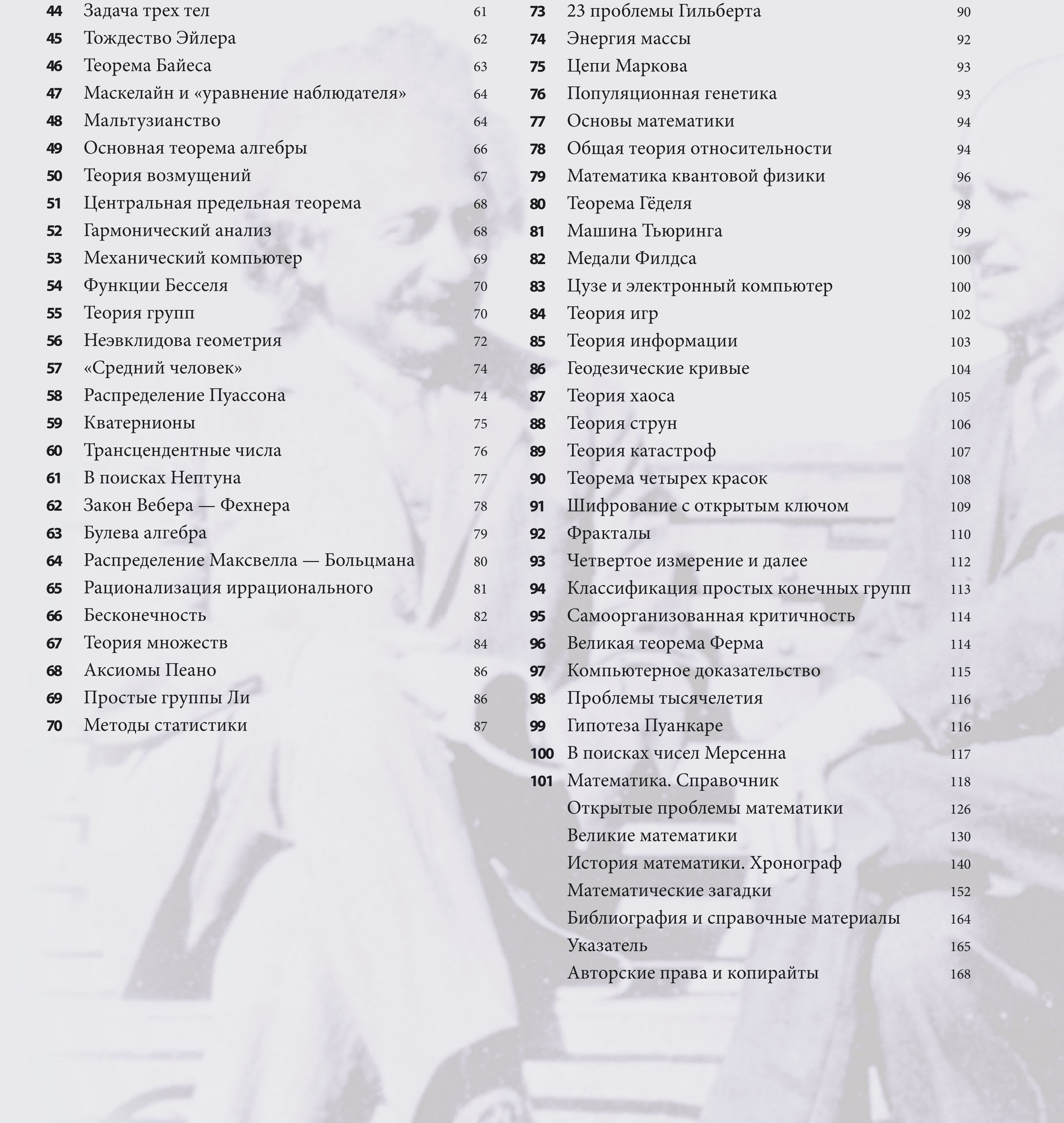
ИЛЛЮСТРИРОВАННАЯ ИСТОРИЯ

ТОМ ДЖЕКСОН

МОСКВА
2017

Оглавление





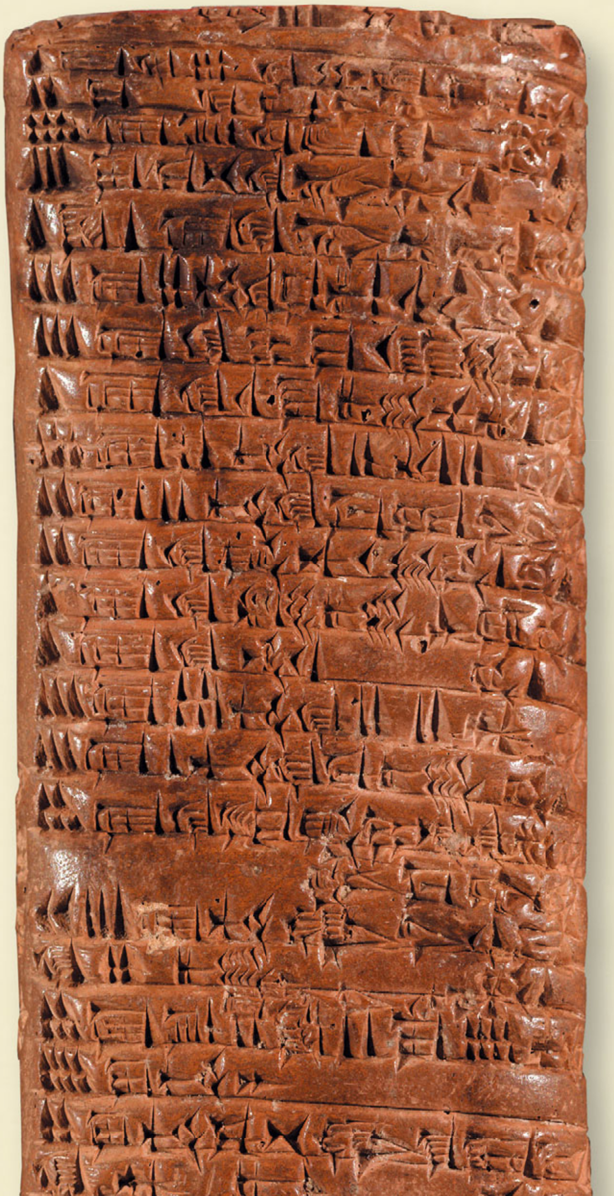
НОВЫЕ ЧИСЛА, НОВЫЕ ТЕОРИИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

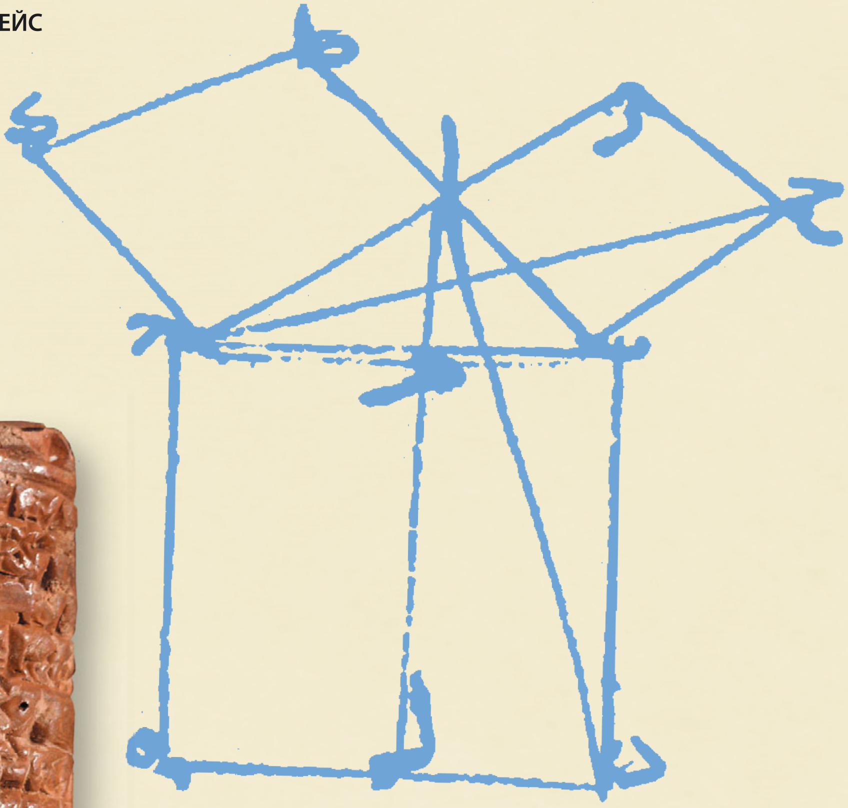
Предисловие

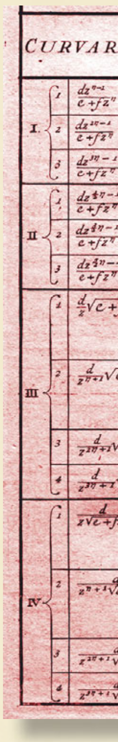
МАТЕМАТИКА — ЭТО НАУКА? ИСКУССТВО? ВОЗМОЖНО, И ТО, И ДРУГОЕ, А ВОЗМОЖНО — НИ ТО, НИ ДРУГОЕ. МАТЕМАТИКА — ПРЕДМЕТ, ОТЛИЧНЫЙ ОТ ВСЕХ ДРУГИХ ДОСТИЖЕНИЙ ЧЕЛОВЕЧЕСТВА, ИНТЕРФЕЙС МЕЖДУ ИНТЕЛЛЕКТОМ И ВООБРАЖЕНИЕМ, СКОМПОНОВАННЫЙ ИЗ ТОЧНО ПОДОБРАННЫХ ПРОПОРЦИЙ РЕАЛЬНОГО И НЕРЕАЛЬНОГО.

Математика возникла как способ учета богатства и метод раздела земли. Большинство математических записей древности — таких, например, как эта табличка, созданная 4000 лет назад, — это протоколы различных сделок.



Арабское доказательство теоремы Пифагора графическим методом демонстрирует отношение между длинами сторон треугольника.





Мысли и деяния великих мудрецов — прекрасный предмет для обсуждения. Здесь мы собрали ровно сотню таких историй. Каждая из них посвящена одному конкретному математическому открытию, серьезной проблеме, решение которой стало настоящим прорывом, изменив наше представление о мире и нашем месте в нем.

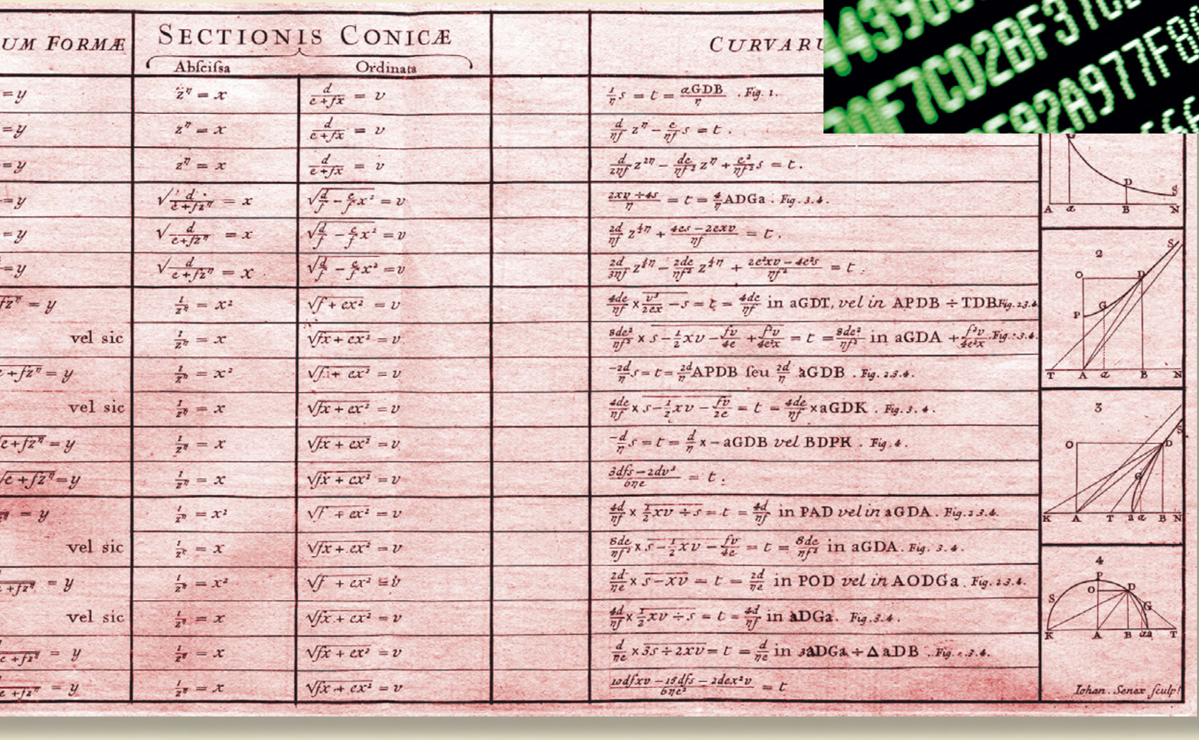
История чаще всего представляется нам чередой драматичных перемен — идеи возникают, захватывают умы, а потом уходят в небытие; культуры доминируют, а затем приходят в упадок; одна концепция меняет другую. В математике все не так. Стоит математику доказать, что некое утверждение является истинным, опровергнуть это уже невозможно. Так, геоцентрическую систему строения мира, разработанную античным астрономом Клавдием Птолемеем (и считавшуюся истинной почти полтора тысячелетия), сменили более совершенные, а разработанные им же методы геометрических измерений, которые он использовал для описания движения этой Вселенной, применяются до сих пор.

Сегодня фраза «система Птолемея» — расхожее клише для описания классического заблуждения. Методы же александрийской школы геометрии были верными во времена Птолемея, остаются верными и сейчас, формируя основы тригонометрии (теперь вы знаете, кто в этом виноват).

Главный принцип

История математики совсем не похожа на рассказ о том, как новые смелые идеи сметают старые, обветшалые истины, выводя их из обращения. Совсем наоборот, это, скорее, рассказ о том, как к старым, почтенным постулатам добавляются новые принципы, постепенно расширяя математический аппарат.

Компьютерный код — это своего рода математическая азбука. Когда числа двоичной системы, составленные из единиц и нолей, становятся слишком длинными для обработки, их преобразуют в символы шестнадцатеричной системы — от 0 до F.



UM FORMÆ	SECTIONIS CONICÆ Abſciſſa	 Ordinata		CURVARU
$=y$	$z^\eta = x$	$\frac{d}{e+fx} = v$		$\frac{1}{\eta}s = t = \frac{aGDB}{\eta}$. *Fig.* 1.
$=y$	$z^\eta = x$	$\frac{d}{e+fx} = v$		$\frac{d}{\eta f}z^\eta - \frac{e}{\eta f}s = t$.
$=y$	$z^\eta = x$	$\frac{d}{e+fx} = v$		$\frac{d}{2\eta f}z^{2\eta} - \frac{de}{\eta f^2}z^\eta + \frac{e^2}{\eta f^2}s = t$.
$=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^\eta}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f}x^2} = v$		$\frac{2xv \div 4s}{\eta} = t = \frac{4}{\eta}$ADGa . *Fig.* 3. 4.
$=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^\eta}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f}x^2} = v$		$\frac{2d}{\eta f}z^{\frac{1}{2}\eta} + \frac{4es - 2exv}{\eta f} = t$.
$=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^\eta}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f}x^2} = v$		$\frac{2d}{3\eta f}z^{\frac{3}{2}\eta} - \frac{2de}{\eta f^2}z^{\frac{1}{2}\eta} + \frac{2e^2xv - 4e^2s}{\eta f^2} = t$.
$fz^\eta = y$	$\frac{1}{z^\eta} = x^2$	$\sqrt{f + ex^2} = v$		$\frac{4de}{\eta f} \times \overline{\frac{v^3}{2ex} - s} = t = \frac{4de}{\eta f}$ in aGDT, *vel in* APDB ÷ TDB *Fig.* 2. 3. 4.
vel sic	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$		$\frac{8de^2}{\eta f^2} \times \overline{s - \frac{1}{2}xv - \frac{fv}{4e} + \frac{f^2v}{4e^2x}} = t = \frac{8de^2}{\eta f^2}$ in aGDA $+ \frac{f^2v}{4e^2x}$. *Fig.* 3. 4.
$+fz^\eta = y$	$\frac{1}{z^\eta} = x^2$	$\sqrt{f + ex^2} = v$		$-\frac{2d}{\eta}s = t = \frac{2d}{\eta}$APDB ſeu $\frac{2d}{\eta}$ aGDB . *Fig.* 2. 3. 4.
vel sic	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$		$\frac{4de}{\eta f} \times \overline{s - \frac{1}{2}xv - \frac{fv}{2e}} = t = \frac{4de}{\eta f} \times$ aGDK . *Fig.* 3. 4.
$e+fz^\eta = y$	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$		$-\frac{d}{\eta}s = t = \frac{d}{\eta} \times -$ aGDB *vel* BDPK . *Fig.* 4.
$\sqrt{e+fz^\eta} = y$	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$		$\frac{3dfs - 2dv^3}{6\eta e} = t$.
$= y$	$\frac{1}{z^\eta} = x^2$	$\sqrt{f + ex^2} = v$		$\frac{4d}{\eta f} \times \overline{\frac{1}{2}xv \div s} = t = \frac{4d}{\eta f}$ in PAD *vel in* aGDA . *Fig.* 2. 3. 4.
vel sic	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$		$\frac{8de}{\eta f^2} \times \overline{s - \frac{1}{2}xv - \frac{fv}{4e}} = t = \frac{8de}{\eta f^2}$ in aGDA. *Fig.* 3. 4.
$+fz^\eta = y$	$\frac{1}{z^\eta} = x^2$	$\sqrt{f + ex^2} = v$		$\frac{2d}{\eta e} \times \overline{s - xv} = t = \frac{2d}{\eta e}$ in POD *vel in* AODGa . *Fig.* 2. 3. 4.
vel sic	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$		$\frac{4d}{\eta f} \times \overline{\frac{1}{2}xv \div s} = t = \frac{4d}{\eta f}$ in aDGa. *Fig.* 3. 4.
$c+fz^\eta = y$	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$		$\frac{d}{\eta e} \times \overline{3s \div 2xv} = t = \frac{d}{\eta e}$ in 3aDGa ÷ Δ aDB . *Fig.* 2. 3. 4.
$e+fz^\eta = y$	$\frac{1}{z^\eta} = x$	$\sqrt{fx + ex^2} = v$		$\frac{10dfxv - 15dfs - 2dex^2v}{6\eta e^2} = t$

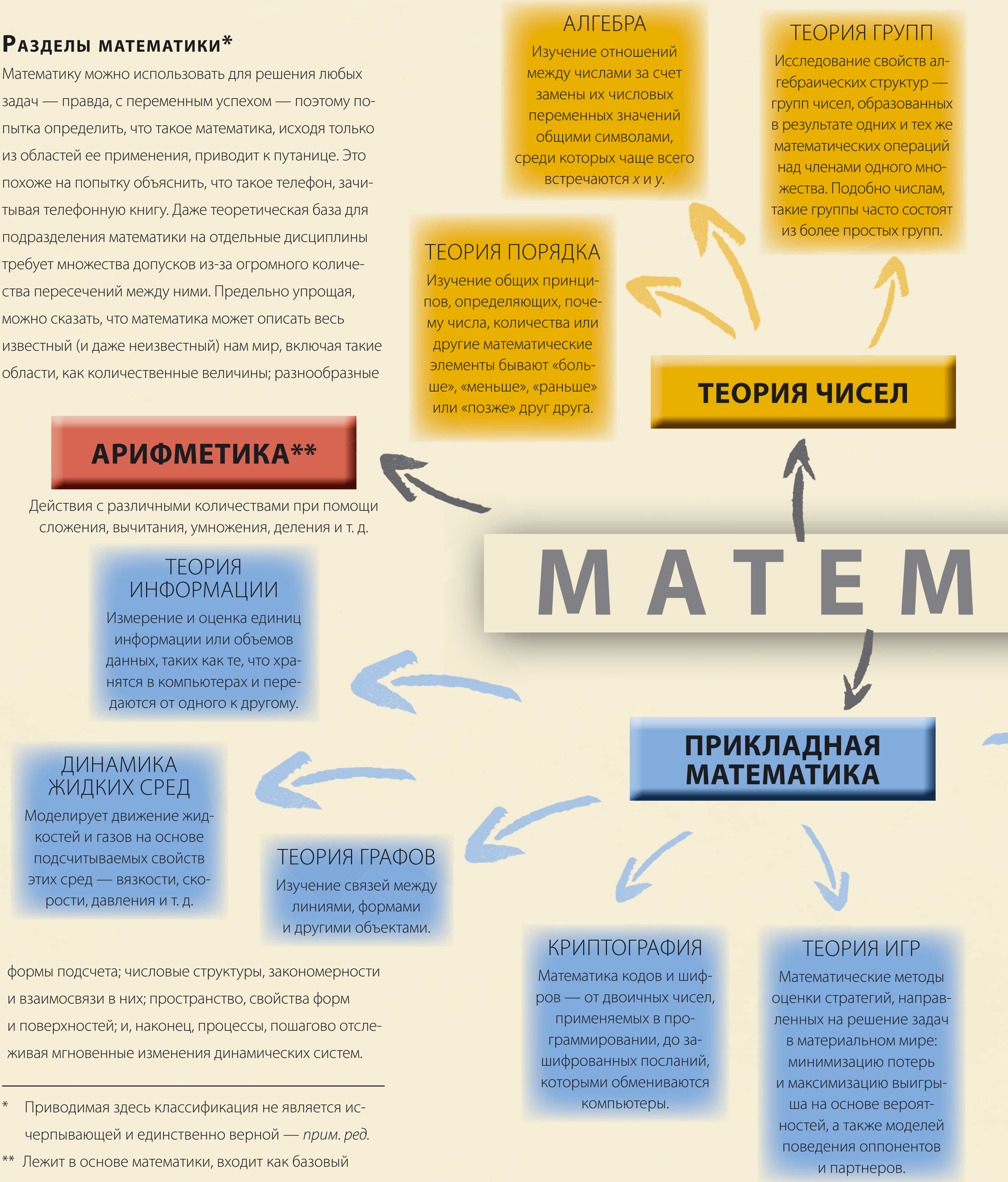
Скрытые глубины математики. Таблица слева показывает, как превращение линейной геометрии в алгебру позволило создать способ математического описания природных изменений — от роста растений до падения индексов фондовых бирж.

История начинается с единицы, но бесконечность — это далеко не ее финал. Термин «математика» происходит от греческого слова «знание». Фактически все, что мы знаем, — в отличие от того, во что верим — начинается с измерения, с численной оценки, с численного выражения или описания. Таким образом, возникает первый практический вопрос: существовали ли эти количественные величины сами по себе или нам пришлось изобретать их, чтобы потом применить в своих целях? Если математика — продукт деятельности человеческого ума, значит, она внутренне присуща человеку, ведь сходные системы счисления появляются независимо друг от друга в разных изолированных культурах. Майя пришли к идее ноля независимо от вавилонян или индийской цивилизации, а, насколько нам известно, эти культуры никогда не обменивались идеями — да и вообще ничем не обменивались. Двоичная система символов, зафиксированная в классическом китайском труде «И Цзин» («Книга перемен») перекликается с гадательной системой ифа, зародившейся у народов йоруба, населявших долину р. Нигер в Африке.

Не в математике ли отражаются принципы существования реальности — как явные, так и скрытые? Имя Пифагора чаще всего связывают с его исследованиями свойств прямоугольного треугольника. Однако почти так же часто вспоминают и о том, что он был первым, кто «привязал» математику к явлениям природы, определив взаимосвязь между длиной струны и высотой тона ее звучания. Как вы увидите, орбиты небесных тел, накопление богатств, политические стратегии и даже принципы красоты следуют по путям, обозначенным числами. Давайте же начнем наше путешествие.

Разделы математики*

Математику можно использовать для решения любых задач — правда, с переменным успехом — поэтому попытка определить, что такое математика, исходя только из областей ее применения, приводит к путанице. Это похоже на попытку объяснить, что такое телефон, зачитывая телефонную книгу. Даже теоретическая база для подразделения математики на отдельные дисциплины требует множества допусков из-за огромного количества пересечений между ними. Предельно упрощая, можно сказать, что математика может описать весь известный (и даже неизвестный) нам мир, включая такие области, как количественные величины; разнообразные формы подсчета; числовые структуры, закономерности и взаимосвязи в них; пространство, свойства форм и поверхностей; и, наконец, процессы, пошагово отслеживая мгновенные изменения динамических систем.



АЛГЕБРА

Изучение отношений между числами за счет замены их числовых переменных значений общими символами, среди которых чаще всего встречаются *x* и *y*.

ТЕОРИЯ ГРУПП

Исследование свойств алгебраических структур — групп чисел, образованных в результате одних и тех же математических операций над членами одного множества. Подобно числам, такие группы часто состоят из более простых групп.

ТЕОРИЯ ПОРЯДКА

Изучение общих принципов, определяющих, почему числа, количества или другие математические элементы бывают «больше», «меньше», «раньше» или «позже» друг друга.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

АРИФМЕТИКА**

Действия с различными количествами при помощи сложения, вычитания, умножения, деления и т. д.

МАТЕМ

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

Измерение и оценка единиц информации или объемов данных, таких как те, что хранятся в компьютерах и передаются от одного к другому.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ДИНАМИКА ЖИДКИХ СРЕД

Моделирует движение жидкостей и газов на основе подсчитываемых свойств этих сред — вязкости, скорости, давления и т. д.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Изучение связей между линиями, формами и другими объектами.

КРИПТОГРАФИЯ

Математика кодов и шифров — от двоичных чисел, применяемых в программировании, до зашифрованных посланий, которыми обмениваются компьютеры.

ТЕОРИЯ ИГР

Математические методы оценки стратегий, направленных на решение задач в материальном мире: минимизацию потерь и максимизацию выигрыша на основе вероятностей, а также моделей поведения оппонентов и партнеров.

---

* Приводимая здесь классификация не является исчерпывающей и единственно верной — *прим. ред.*

** Лежит в основе математики, входит как базовый инструмент во все ее разделы — *прим. ред.*

АТИКА

ГЕОМЕТРИЯ

ТОПОЛОГИЯ

Раздел геометрии, изучающий только связи между элементами одного объекта; длины и углы могут свободно изменяться — это не влияет на фундаментальные свойства объекта.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Дисциплина, изучающая отношения между длинами сторон треугольника и его внутренними углами, как на плоскости, так и на выпуклых и вогнутых поверхностях.

ФРАКТАЛЫ

Применяя геометрию и топологию к объектам реального мира, мы обнаруживаем «неровные» поверхности, а также объекты, обладающие свойством самоподобия, — считается, что эти поверхности и объекты имеют дробную метрическую размерность.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Использование геометрических методов для исследования динамических систем или методы счисления, применяемые в комплексной геометрии.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Использование алгебраических выражений для описания граней и поверхностей геометрических фигур и объектов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЛОСОФИЯ

ЛОГИКА

Изучает, почему выражения вроде 1+1 = 2 являются истиной, а также другие вопросы, образующие фундаментальные основы математики.

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Исследование и сравнение численных множеств, их взаимоотношений и пересечений, а также вопроса, являются ли они бесконечными

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

СЧИСЛЕНИЕ

Раздел математики, описывающий постоянные изменения — от движения объектов материального мира до изменения кривизны абсолютно условных алгебраических кривых — и разбивающий эти траектории на мельчайшие текущие отрезки.

ТЕОРИЯ ХАОСА

Описывает, почему и каким образом развитие динамических систем может настолько сильно разниться даже в случае мельчайших изменений изначально заданных условий; объясняет, почему одна маленькая деталь может вызвать огромные изменения.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Этот раздел имеет дело с математическими выражениями, включающими функции и производные от них. Функция — это определенная операция, осуществляемая над переменной исходной величиной; производная — мгновенный частный результат действия функции.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Математика шанса, вычисляющая вероятность того, что некое событие произойдет, исходя из исходных условий и возможных исходов.

МАТСТАТИСТИКА

Позволяет извлечь ценную информацию из математических выборок из реальных количественных данных о материальном мире.

ДОИСТОРИЧЕСКАЯ ЭПОХА — СРЕДНИЕ ВЕКА

1 Учимся считать

Математика начинается со счета. Самые головоломные путешествия в абстрактную сферу чисел не имеют смысла без 1, 2, 3… Тем не менее одну проблему, которая выглядит достаточно простой, математика пока не в силах разрешить: числа изобретены людьми или существовали и до людей?

Немецкий математик XIX в. Леопольд Кроникер полушутя заметил: «Господь создал целые числа, все остальное — дело рук человека». «Целые числа», которые имел в виду Кроникер, — это натуральные целые числа от 0 до 9*. Начиная с 10 мы просто используем их заново (слово «целые» в его английском написании — integers — происходит от латинского слова «нетронутый»).

Итак, числа — такая же часть природы, как атомы или силы? История не оставила нам информации о том, как появились числа, ибо возникли они еще в доисторическую эпоху. Весьма вероятно, что наши далекие предки, которые еще не были людьми, могли различать небольшие количества — два, три и т. д. Предполагается, однако, что формализованный подсчет мог появиться только тогда, когда предметов для подсчета стало гораздо больше.

В наборе инструментов человека каменного века было уже достаточно предметов для того, чтобы точное знание об их количестве было полезным. Точные значения первоначально «записывались» как простые насечки на камне или кости — их количество соответствовало значению числа. Такие камни и кости сохранились до наших дней. Мокшане — народность, проживающая на западе России, — и сегодня пользуются традиционной системой подсчета, мало отличающейся от таких насечек. Этнографы полагают, что эта система сохранилась у мокшан с доисторических времен.

Настоящий прорыв в умении считать — и записывать результаты подсчета — произошел после того, как человечество перешло от кочевого образа жизни охотников и собирателей к оседлому, начав заниматься земледелием. Количество домашнего скота и личных вещей — несомненных признаков цивилизации — росло, и ради их точного учета стоило, наконец, научиться считать. Подсчитав их, человек начинал сравнивать полученные числа с другими, а потом объединять их, меняться и приумножать. Так и родилась математика.

ПОДСЧЕТ НА ГЛАЗОК

Частенько мы оперируем приблизительными величинами — *немного, несколько* или, скажем, *миллионы*. В этих случаях точность не так важна и у нас нет времени — или возможности — сосчитать интересующие нас объекты. Однако, когда необходимость в точном подсчете все же возникает, наш мозг, похоже, способен произвести оценку лишь в определенных пределах. И эти пределы являются его врожденным свойством. Взгляните на эти камни. Их шесть, конечно, но ваш мозг, скорее всего, определил их количество как «две группы по три». Закройте один камень рукой и взгляните на картинку снова. Вероятно, человеческий мозг в пределах одного набора объектов способен распознать лишь количество, равное пяти**. Подсчет бóльших величин требует объединения мелких групп объектов в более крупные.

Кость Ишанго, сделанная из малой берцовой кости бабуина 20 000 лет назад в Центральной Африке, — один из древнейших математических инструментов. Это не просто запись неких чисел — насечки на кости, вероятно, использовались для расчетов в рамках двенадцатеричной системы счета.

---

* Точнее, от 1 до 10 — когда люди осваивали порядковый счет, ноля еще «не было» — *прим. ред.*

** Любой подсчет «на глазок» — сравнение с уже заданным количеством. Поэтому вполне допустимо предположение о том, что изначально человек сравнивал с наиболее близкими ему «предметами» — руками, ногами, пальцами, отсюда и «неспособность» мозга мгновенно распознавать количество, большее пяти — *прим. ред.*

2 Позиционная система счисления

Имея пальцы, досчитать до десяти легко. Однако для того, чтобы считать дальше, требуется иной подход. Сегодня мы используем позиционную систему счисления, оперирующую десятками. Древнейшая же позиционная система счисления сформировалась в Вавилоне 5000 лет назад. Основой этой системы стало число 60.

Вавилоняне писали клинообразными заостренными тростниковыми палочками по сырой глине. Высыхая, глина превращалась в твердые таблички. Вавилонские цифры, что неудивительно, составлялись из клинообразных штрихов. Шестидесятеричную (основанную на числе 60) систему счисления вавилоняне заимствовали у своих предков. Это весьма разумная система. Число 60 можно разделить на 1, 2, 3, 4 и 5 — сравните это, например, с возможностями числа 10. Количество минут в одном часе (60) и градусов (360, то есть 6×60) в окружности — наследство, доставшееся нам от вавилонских математиков. Подобно цифровому ряду от 0 до 9, что мы используем сегодня, вавилонская система записи чисел была способна обозначать единицы, десятки или шестидесятки в зависимости от того, на каком месте в ряду цифр оказывался каждый конкретный символ. Впрочем, прочесть вавилонские надписи сегодня могут лишь эксперты. Сравните эту систему с появившейся позднее древнеримской, в которой числовые значения символов оставались неизменными вне зависимости от положения: LXI это 50+10+1 или 61.

Первые десять цифр вавилонской системы счисления. Для обозначения чисел 40 и 50 имелись отдельные символы.

3 Счеты

Многие считают, что счеты появились до того, как люди научились записывать цифры. Вавилонская система счисления, вероятно, была изобретена для записи чисел, полученных в результате вычислений с помощью двигающихся бусин или четок.

Китайские счеты имеют два отделения для подсчета в десятеричной (каждая бусина из верхнего отделения имеет значение 5) или шестнадцатеричной (две бусины из верхнего отделения добавляют 10 к числу 15, образованному бусинами из нижнего). Шестнадцатеричная система исчисления используется для подсчета традиционных китайских единиц веса, каждая из которых состоит из 16 единиц.

Сегодня в магазинах продавцы считывают с упаковки штрихкоды лазерными сканерами, или покупатели сами делают это с помощью систем самообслуживания. Однако всего несколько десятков лет назад продавцы подсчитывали стоимость покупок на счетах. Во многих странах Азии торговцы до сих пор производят весьма сложные вычисления, полагаясь лишь на деревянную рамку с нанизанными на проволоку бусинами. Скорость этих вычислений весьма впечатляет.

Счеты сами по себе не настолько древнее вычислительное устройство, как может показаться. Это симбиоз счетных таблиц, разработанных на Ближнем Востоке, со счетными палочками, изобретенными на Дальнем. С античности осталось слово «абак», которым называли счеты. Это слово происходит от арабского слова «пыль» и подразумевает, вероятно, песчаную площадку или рамку со стопками небольших голышей или других счетных предметов, организованных внутри нее.

В Китае счетные фишки нанизывались на стержень. Этот инструмент был похож на детскую головоломку-пирамидку. Китайские символы, обозначавшие числа, появившиеся около III в. до н. э., внешне напоминают вертикальные стержни, на которые нанизаны стопки дисков. Лишь в XVI в. н. э. эти инструменты объединились, превратившись в удобные ручные счеты.

4 Теорема Пифагора

Пифагор — сакральный персонаж классической греческой античности, хотя бóльшая (если не вся) часть его биографии — миф, увековеченный его последователями, одним из которых был Платон.

Списки самых знаменитых математиков мира чаще всего возглавляет имя Пифагора. Это значительное достижение для человека, которого, возможно, никогда и не существовало, который был главным подозреваемым в убийстве и даже не формулировал теорему, которая прославила его.

Теорема Пифагора — третий по важности (и частоте преподавания) после базовых арифметических действий и таблицы умножения математический принцип. Она настолько наглядна и проста, что запомнить ее очень легко: $a^2 + b^2 = c^2$. Для тех, у кого под рукой нет учебника, напоминаем: это уравнение означает, что сумма квадратов двух катетов (коротких сторон) прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы — самой длинной его стороны. Таким образом, зная длину двух сторон, вы всегда можете вычислить длину третьей.

Практика прежде доказательства

Эта теорема получила имя Пифагора из Самоса, жившего на юге Италии примерно 2500 лет назад. Однако ее знали по крайней мере за несколько веков до этого, но, насколько нам известно, Пифагор был первым математиком, доказавшим, что она верна. В молодости Пифагор много путешествовал, бывал в Египте, Вавилоне и, возможно, даже добирался до Индии. Во всех этих местах он видел, как работает «его» теорема на практике — в землемерном деле и строительстве. Египетские землемеры постоянно пользовались веревками, на которых были завязаны несколько узелков. Расстояния между ними соответствовали мерам длины в 3, 4 и 5 единиц измерения. Если из этих веревок складывали треугольник, у него всегда был точный прямой угол в 90 градусов. Числа 3, 4 и 5 образуют первое из бесконечных множеств «пифагоровых троек» — наборов из трех целых чисел, удовлетворяющих условиям теоремы.

В 2002 г. теорему Пифагора применили в совершенно современном контексте — в суде Нью-Йорка. Судьи постановили, что торговцы наркотиками, пойманные на распространении своего зелья в пределах 1000 шагов от школ, должны получать более суровое наказание.

На фреске из египетской гробницы, созданной в 1600 г. до н. э., изображены древнеегипетские землемеры, измеряющие пшеничные поля перед уборкой урожая. Углы каждого поля были прямыми — составляли точно 90° — благодаря системе пифагоровых троек в веревочном выражении.

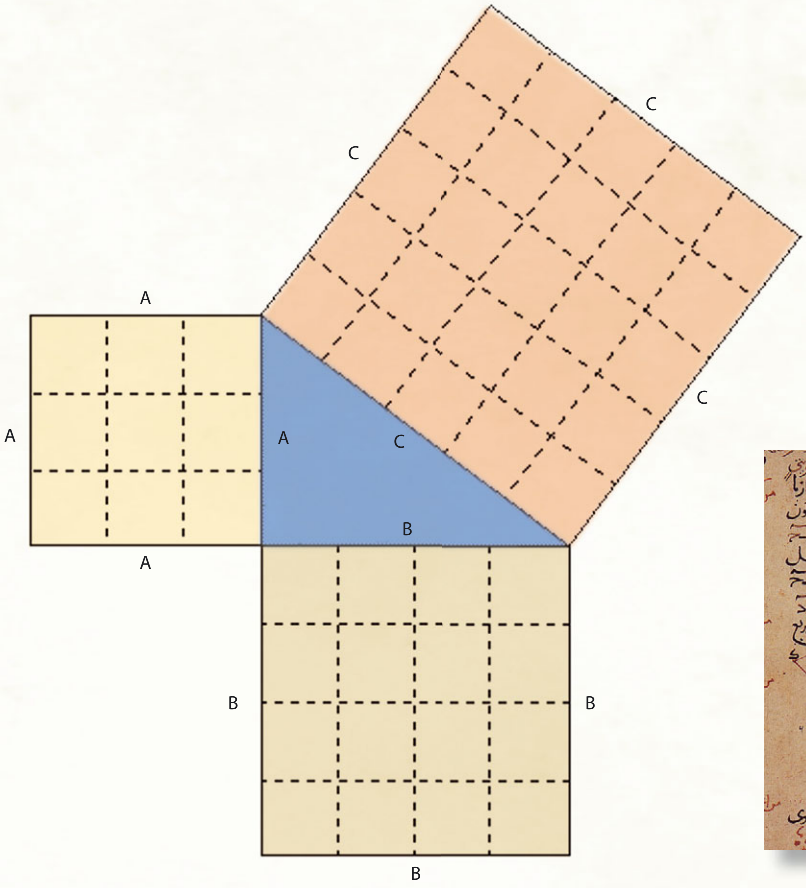
Но как точно измерить эту дистанцию: с помощью так называемой Манхэттенской мерки (сумме длин сторон прямоугольных кварталов, формировавших с улицами своего рода географическую решетку) или прямо по диагонали, в соответствии с теоремой Пифагора? Суд решил следовать простоте древнегреческого математика.

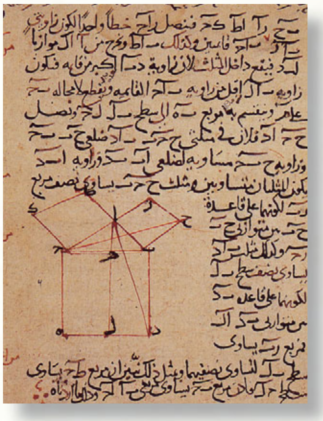
Иррациональная философия

Пифагор считал числа священными: все в природе могло быть описано в целочисленном выражении. Он привлек множество последователей и возглавил тайное общество математиков, посвятивших свою жизнь поиску абсолютной истины чисел. Однако теорема, увековечившая Пифагора как математика, уничтожила его философскую систему. Философ-пифагореец Гиппас заметил, что в случае, если стороны треугольника равны 1 мере длины, то длина гипотенузы составит √2. Значение этого квадратного корня составлял бесконечный ряд чисел. Его нельзя было выразить целым числом, значит, оно не имело точного целочисленного значения (такие числа называются *иррациональными*). Легенда гласит, что Пифагор, получив такой мощнейший удар по своим постулатам, пригласил Гиппаса на рыбалку, а на берег вернулся уже в одиночку…

ПИФАГОРЕЙЦЫ

Рожденный на острове Самос, расположенном у западных берегов современной Турции, большую часть жизни Пифагор провел в Кротоне — греческой колонии в южной Италии. Его последователи-пифагорейцы напоминали квазирелигиозную секту. Пифагорейцами становились лишь немногие избранные — скорее всего те, кто обладал достаточными навыками в математике — проходя через тайную систему обрядов и инициаций. Жизнь пифагорейцев регулировали так называемые золотые строфы, среди которых были, например, такие: «Ищи справедливую меру, которой является та мера, что не причиняет боли», или «Будь добр со словами и полезен в делах». Пифагорейцы придавали каждому числу особое значение: 1 символизировало причину; 2 — неопределенный женский дух; 3, как сумма 1 и 2 и, таким образом, обозначала мужественность; 5 (сумма 2 и 3) была самым мощным числом. Однако прославились пифагорейцы и куда более странными идеями. Говорили, что они боялись белых петухов и никогда не дотрагивались до бобов. Со временем пифагорейцы лишились поддержки со стороны населения Кротона, и враги Пифагора собрались убить его. Говорят, что они сумели его настичь только потому, что великий ученый отказался пересечь бобовое поле. Не желая причинить вред посевам, он предпочел принять смерть.





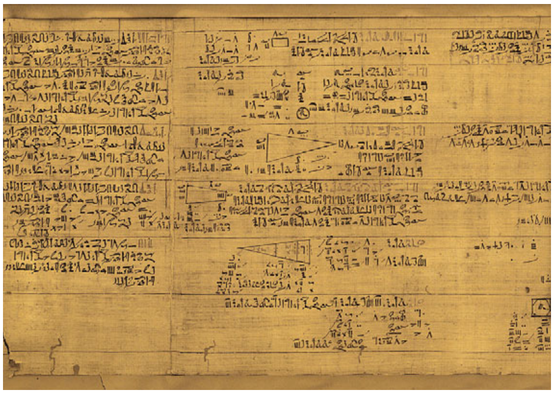
Эта простая схема демонстрирует взаимосвязь между квадратами длин сторон прямоугольника. Такая же изображена в древней арабской книге. В XIX в. поиск более хитроумного способа превратить фигуры A и B в фигуру C стал популярным развлечением в математических кругах.

5

Математический папирус Ахмеса

Ахмес утверждал, что двухметровый папирус обеспечивал «точные методы счисления для решения задач и знание всех вещей… всех тайн».

Папирус Ахмеса, также известный как папирус Райнда — в честь Генри Райнда, который приобрел его в Луксоре в 1858 г., — дает нам возможность взглянуть на математический мир древних египтян. Папирусом Ахмеса его называют в честь писца, скопировавшего его между 1650 и 1500 г. до н. э. с текста, написанного двумя веками раньше.



Этот древний документ представляет собой справочные таблицы, предназначенные для помощи в вычислениях и решении более 80 математических задач, встававших перед египетскими чиновниками примерно в 1650 г. до н. э. — таких, например, как расчет объема зернохранилища. Кроме того, папирус демонстрирует, что египтяне умели рассчитывать площадь круга, используя формулу, в которой числу π присваивалось значение, приблизительно равное 3,1605. Подобно другим цивилизациям того времени, египтяне находили значение числа π, сравнивая замеренные длины диаметров и окружностей.

6

Ноль

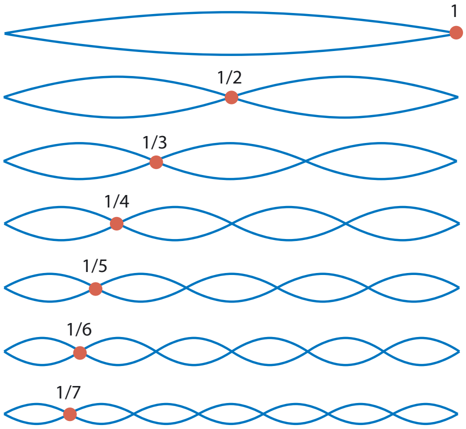
Ноль обозначается точкой или кружком в греческих, индийских и китайских текстах.

Сегодня мы можем принять ничто — ноль — за нечто само собой разумеющееся, но было время, когда этого «ничто» не существовало вовсе. Вавилоняне использовали его в качестве знака-«заглушки» более 3000 лет назад. Со временем индийцы сделали ноль полноправным числом и полноправной цифрой.

То, что мы сейчас называем нолем, впервые появляется среди вавилонских чисел в виде пары наклонных клиньев. Этот ноль обозначал отсутствие численного значения внутри большого числа (так в числе 404 ноль означает отсутствие десятков). Ноль того же типа появляется в системе счисления майя. Греки располагались гораздо ближе к вавилонянам, но в их математике, основанной на геометрии, необходимости в ноле не возникало до тех пор, пока во II в. до н. э. он не пригодился Гиппарху для астрономических вычислений. Через тысячелетие индийские математики сделали ноль таким же числом, как и все остальные, показав, что тот является результатом некоторых математических выражений. Это революционное открытие проложило дорогу к отрицательным числам — тем, которые меньше ноля.

7 Математика музыки

МАТЕМАТИКИ ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ ВЕЗДЕ ВИДЕЛИ КОМБИНАЦИИ ЧИСЕЛ — и не без причины. Музыка, это гармоническое подмножество звуков, как оказалась, покоится на надежной математической основе.



Вибрация струны приводит в движение воздух, создавая звуковую волну — аналоговый звук, который мы и слышим. «Деление» волны на целые доли создает серию гармоник, звуковая комбинация которых формирует тембр.

Легенда гласит, что греческий математик Пифагор остановился послушать, как работают кузнецы, и обнаружил, что звук удара молота, весящего вдвое меньше, чем его аналог, был на октаву выше.

Эта история вполне может быть вымыслом, зато точно известно, что Пифагор экспериментировал с различными объектами в поисках соотношения между их размерами и высотой звука, который они производили. Среди объектов его экспериментов были и струны разной длины, которые он дергал, и наполненные разным количеством воды сосуды, по которым он стучал. Так он извлекал различные ноты. Так он установил математическое соотношение между объектом и звуком.

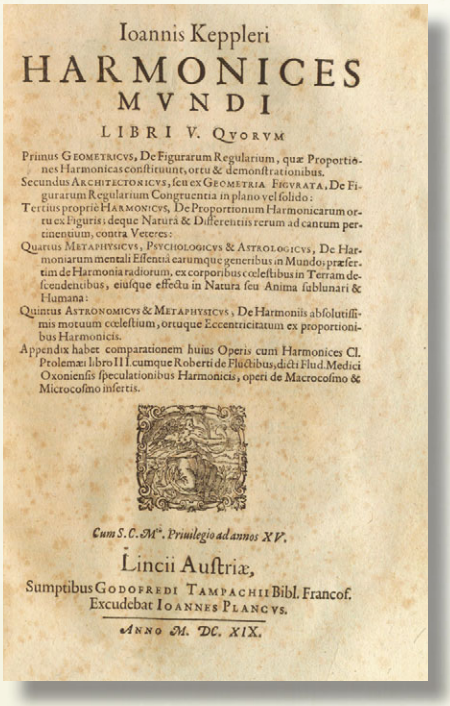
Гармоники

Возьмите две одинаково натянутые струны, сделанные из одного материала, одна из которых вдвое длиннее другой. Дерните за них — и короткая струна будет вибрировать вдвое чаще, чем длинная. То есть частота ее колебаний будет выше вдвое, а звук — выше на октаву (восемь тонов — от латинского слова *octāva,* «восьмая»), чем у длинной. Пифагор определил октавное соотношение как 2 к 1. Если одна струна составляет треть от другой, соотношение составит 3 к 2. При этом интервал — разница тонов между извлеченными звуками — составит одну пятую (квинту). Соотношение 4 к 3 (если взять струну вчетверо короче эталонной) соответствует одной четверти (кварте). Одновременное звучание интервалов октавы и квинты или октавы и кварты рождает гармоничный звук, приятный для уха, — музыкальный аккорд.

Впервые природное явление — звук — было описано в численных терминах. Раньше такого не делали никогда. Пифагор считал, что принципы музыкальной гармонии отражаются во всей Вселенной в целом, и что числа и их взаимосвязи могут объяснить все, что угодно.

МУЗЫКА СФЕР

Древние греки считали, что Луна, Солнце, планеты и звезды закреплены на прозрачных сферах, вращающихся вокруг Земли и сопровождающих это вращение музыкой. Согласно учению пифагорейцев, расстояния между планетами пропорциональны гармоническим музыкальным интервалам между нотами, извлекаемыми из струн. Ближние сферы производят низкие тона, дальние — более высокие, поскольку они движутся быстрее*. Сливаясь, эти тона формируют музыку сфер, наполняющую небеса.



Ioannis Keppleri
HARMONICES
MVNDI
LIBRI V. QVORVM
Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas conſtituunt, ortu & demonſtrationibus.
Secundus ARCHITECTONICVS, ſeu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel ſolido:
Tertius propriè HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Naturâ & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:
Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Eſſentiâ earumque generibus in Mundo; præſertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœleſtibus in Terram deſcendentibus, eiuſque effectu in Natura ſeu Anima ſublunari & Humana:
Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis abſolutiſſimis motuum cœleſtium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.
Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro III. cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud. Medici Oxonienſis ſpeculationibus Harmonicis, operi de Macrocoſmo & Microcoſmo inſertis.

Cum S.C.M^{te}. Priuilegio ad annos XV.

Lincii Auſtriæ,
Sumptibus GODOFREDI TAMPACHII Bibl. Francof.
Excudebat IOANNES PLANCVS.

ANNO M. DC. XIX.

В книге «Гармония мира», опубликованной в 1619 г., Иоганн Кеплер представил относительные высоты тона планет — своего рода «планетарную гамму».

---

* Дальнейшие исследования Иоганна Кеплера показали, что все наоборот — чем ближе к Солнцу планета, тем быстрее она движется — *прим. ред.*

8 Золотое соотношение

ЧАСТО ГОВОРЯТ, ЧТО В МАТЕМАТИКЕ ЕСТЬ СВОЯ КРАСОТА, НО УЖЕ К СЕРЕДИНЕ V В. ДО Н. Э. ИЛИ ДАЖЕ ГОРАЗДО РАНЬШЕ было известно, что в красоте много математики.

Золотое соотношение — это число, у которого, по всей вероятности, больше имен, чем у любого другого. Его называют золотым сечением, божественной пропорцией или попросту — *фи* (φ). Это число обозначает весьма приятную — обычно — пропорцию, возникающую при делении чего-либо на две неравные части. Чаще всего золотое соотношение можно встретить при взгляде на памятники искусства и архитектуры любого исторического периода.

Свое имя число фи получило в честь греческого архитектора и скульптора Фидия, который, по утверждению некоторых исследователей, активно использовал этот принцип для украшения самого своего знаменитого творения — Парфенона, возведенного в 440 г. до н. э. Древнейшее сохранившееся до наших дней описание принципа золотого соотношения было сделано Эвклидом около 300 г. до н. э. в его труде «Начала».

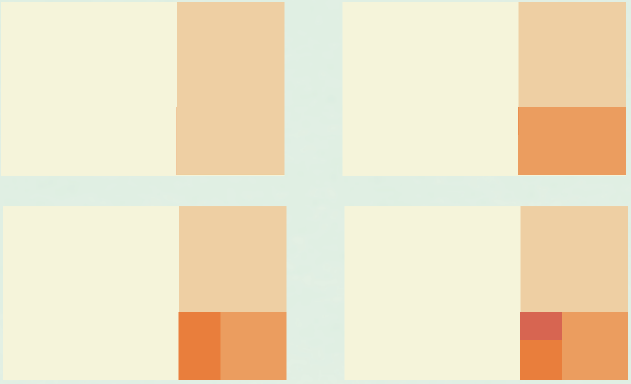
Однако самое восхитительное в числе фи — не его реальное или кажущееся присутствие в созданных человеком объектах (от кредитных карточек до рисунка Леонардо да Винчи «Витрувианский человек»), но его проявления в природе (рост цветов и ракушек, например).

Пропорции соседних сегментов раковины моллюска наутилуса приближаются к золотому соотношению.

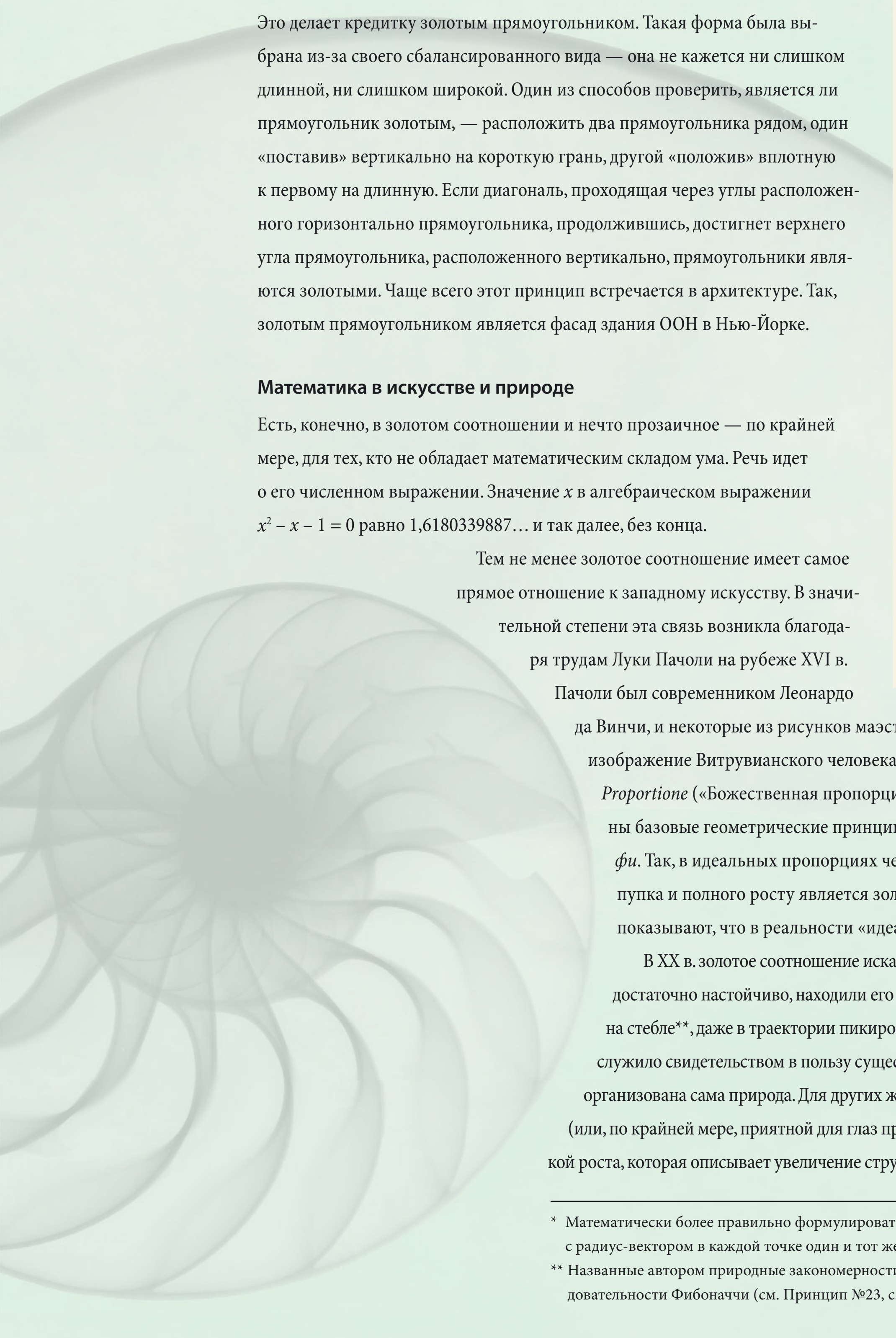
Несмотря на то, что свое обозначение золотое соотношение получило в честь Фидия, он не руководствовался этим принципом при разработке проекта Парфенона. Храм несколько высоковат для того, чтобы его пропорции строго соответствовали стандарту золотого сечения — то ли из-за ошибки в расчетах, то ли потому, что Фидию так больше нравилось.

Вычисление золотого соотношения

Существует много способов математически выразить золотое соотношение, и во всех этих способах есть своя определенная простота, точность и обаяние. Эвклид описывал его как «сечение в крайнем и среднем отношении». Более «математичное» выражение выглядит так: если золотое соотношение равно x, то $x^2 - x - 1 = 0$. Или так: $x/1 = 1/x^{-1}$. Словами же золотое соотношение определяют как пропорцию, в которой «длина всей линии относится к большей ее части так же, как та — к меньшей».



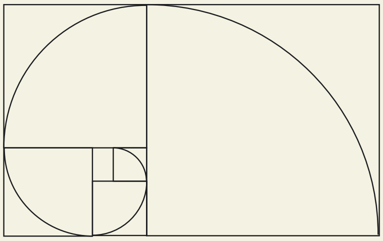
Золотые прямоугольники можно разделить на бесконечное количество уменьшающихся в размерах золотых прямоугольников, «отрезая» от них части по кратчайшей линии. В терминологии греческих геометров такое свойство делает золотой прямоугольник гномоном — объектом, способным сохранять форму по мере роста (или уменьшения).



Хороший пример золотого сечения — кредитная карточка, имеющая одинаковые стандартные размеры во всем мире. В соответствии с принципами золотого соотношения, отношение ее короткой стороны к длинной такое же, как отношение длинной к сумме длин короткой и длинной сторон. Это делает кредитку золотым прямоугольником. Такая форма была выбрана из-за своего сбалансированного вида — она не кажется ни слишком длинной, ни слишком широкой. Один из способов проверить, является ли прямоугольник золотым, — расположить два прямоугольника рядом, один «поставив» вертикально на короткую грань, другой «положив» вплотную к первому на длинную. Если диагональ, проходящая через углы расположенного горизонтально прямоугольника, продолжившись, достигнет верхнего угла прямоугольника, расположенного вертикально, прямоугольники являются золотыми. Чаще всего этот принцип встречается в архитектуре. Так, золотым прямоугольником является фасад здания ООН в Нью-Йорке.

ЗОЛОТАЯ СПИРАЛЬ

Спираль, разворачивающуюся в соответствии с принципом золотого соотношения, можно построить с помощью серии золотых прямоугольников. Это частный случай логарифмической спирали, расходящейся от осевой точки под постоянным углом*. Эту спираль соотносят с именем Якоба Бернулли (хотя первым описал ее Декарт), главным исследователем ее свойств. Бернулли даже пожелал, чтобы такую спираль выгравировали на его надгробии, однако недостаточно подкованный в геометрии каменщик изобразил там Архимедову спираль с более пологой траекторией расхождения.



Верно изобразить золотую спираль непросто. Наиболее легкий способ — провести закругленные дуги между углами квадратных сегментов внутри каждого золотого прямоугольника, на основе которых строится спираль (на рисунке их пять).

Математика в искусстве и природе

Есть, конечно, в золотом соотношении и нечто прозаичное — по крайней мере, для тех, кто не обладает математическим складом ума. Речь идет о его численном выражении. Значение x в алгебраическом выражении $x^2 - x - 1 = 0$ равно 1,6180339887… и так далее, без конца.

Тем не менее золотое соотношение имеет самое прямое отношение к западному искусству. В значительной степени эта связь возникла благодаря трудам Луки Пачоли на рубеже XVI в. Пачоли был современником Леонардо да Винчи, и некоторые из рисунков маэстро — включая наиболее распространенное изображение Витрувианского человека — появляются в книге Пачоли *De Divina Proportione* («Божественная пропорция»), изданной в 1509 г. В этой книге заложены базовые геометрические принципы красоты, а вдохновлялся автор числом *фи*. Так, в идеальных пропорциях человеческого тела соотношение роста до пупка и полного росту является золотым. К сожалению, фактические измерения показывают, что в реальности «идеальных» тел практически нет.

В XX в. золотое соотношение искали в естественных формах. Те, кто делал это достаточно настойчиво, находили его в пропорциях листьев, распределении бутонов на стебле**, даже в траектории пикирования охотящегося ястреба. Для кого-то это служило свидетельством в пользу существования некоего плана, согласно которому организована сама природа. Для других же это означало, что наше восприятие красоты (или, по крайней мере, приятной для глаз пропорциональности) продиктовано математикой роста, которая описывает увеличение структур в размерах без потери ими общей формы.

---

* Математически более правильно формулировать так: кривая, касательная к которой образует с радиус-вектором в каждой точке один и тот же угол — *прим. пер.*

** Названные автором природные закономерности скорее примерно подчиняются принципу последовательности Фибоначчи (см. Принцип №23, с. 35) — *прим. пер.*

9 Платоновы тела

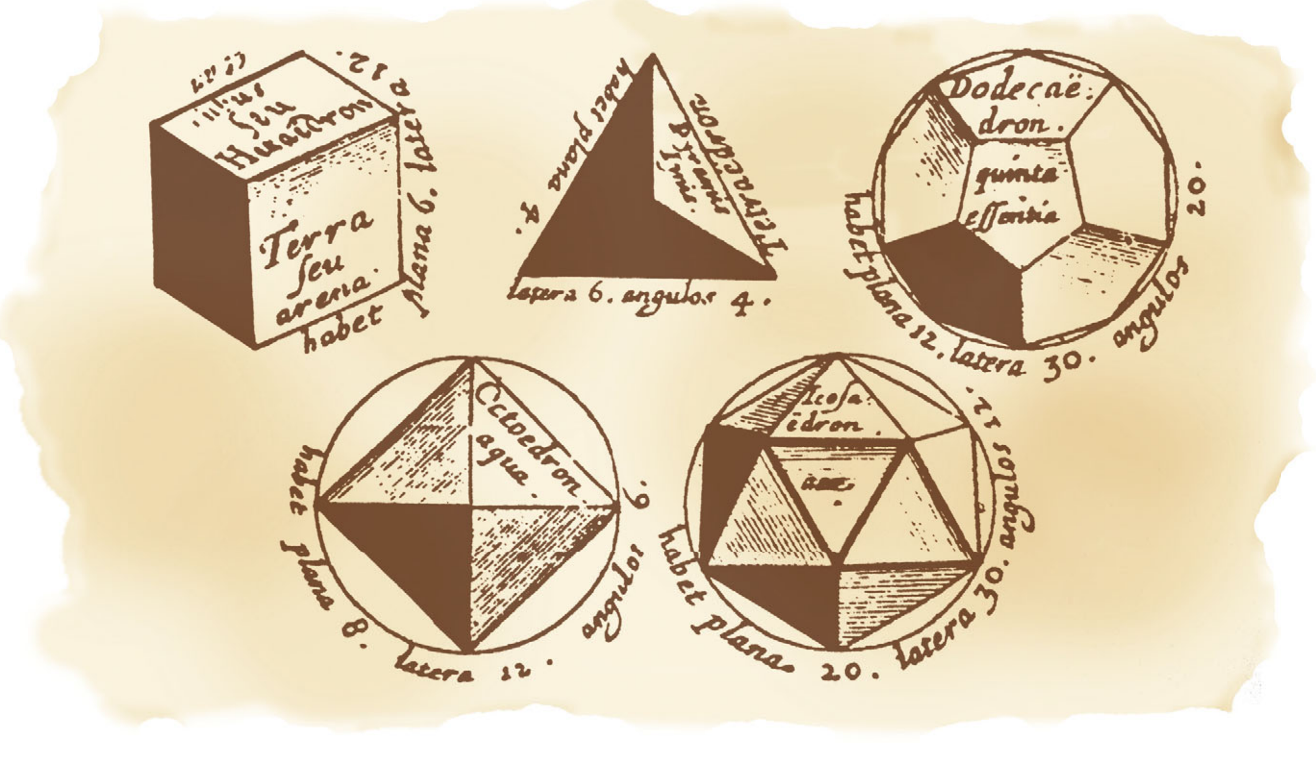
Математики Древней Греции считали числа священными, исполненными духовными, мистическими качествами. Число пять было особенно знаменательным. Пятерка была символом плодородия, суммой страсти и разума. В основе этой веры лежал факт: максимальное количество возможных правильных многогранников — пять.

В IV в. до н. э. числа были одушевленными, как бы странно это ни звучало с точки зрения современной математики, и даже самые простые вычисления были наполнены глубоким мистическим смыслом. Эта концепция великой школы пифагорейцев V в. до н. э. была унаследована следующим поколением математиков, неоспоримым лидером которого был Платон, выдающийся афинский философ.

В трактате «Тимей» (360 г. до н. э.) Платон описал пять правильных многогранников, или полиэдров. «Правильные» означает, что все их ребра были одинаковой длины, все сходились под одним углом и все их грани были одинаковыми, тоже правильными, многоугольниками. В число этих фигур входят: тетраэдр (пирамидка из четырех треугольных граней), куб (шестигранник, состоящий из квадратов), октаэдр (8-гранник из правильных треугольников), додекаэдр (12-гранник из правильных 5-угольников) и икосаэдр (20-гранник из правильных треугольников). Платон называл первооткрывателями полиэдров своих предшественников-пифагорейцев, хотя октаэдр и икосаэдр, скорее всего, открыл его современник — Теэтет.

Утверждение Платона о том, что эти пять полиэдров являются единственными возможными правильными многогранниками, само по себе было лишь констатацией и без того достаточно широко известного факта. Важно то, что Платон придал этим фигурам метафизическую суть, отведя им место первоэлементов — базовых «строительных материалов» природы. В результате с тех пор мы называем полиэдры Платоновыми телами.

Изображение Платоновых тел в книге Philosophia Pyrotechnia *шотландского химика Уильяма Дэвисона, изданной в 1635 г., — одной из первых книг о естественных материях. Сегодня Платоновы (или «космические») тела не более чем математические диковины.*



10 Логика

Математика не может существовать без четкого представления о том, каким образом мы получаем ответы на задаваемые вопросы. За это отвечает дисциплина под названием «логика» — первая формализованная версия которой описана Аристотелем в IV в. до н. э. Значительная часть математики и сегодня отталкивается от аристотелева способа мышления.

ARISTOTELIS
LOGICA
EX ACCVRATA RECOgnitione Nicolai Gruchij ad Ioachimi Perionij & ſuam interpretationem.
Eiuſdem Gruchij in ſingulos libros argumenta & nota, cum eiuſdem diſputatione de nomine Dialectices & Logices, & quò ſinguli libri organi Ariſtotelis pertineant.
IN VIRTVTE, ET FORTVNA
LVGDVNI,
APVD GVLIEL. ROVILLIVM,
SVB SCVTO VENETO.
M. D. LXX.

Перевод трактата Аристотеля о логике на латынь, сделанный в 1570 г. Аристотель определил восемь форм действительных силлогизмов, в которых вывод формулируется из двух посылок. В XIX в. Джордж Буль доказал, что два из них на самом деле — софизмы.

Создавая математическое уравнение, мы принимаем, что все его элементы будут взаимодействовать друг с другом ясным, заранее определенным способом. Таким образом, получаемый результат будет повторяемым — независимо от того, сколько раз мы осуществляем вычисления, он будет одним и тем же. То же самое будет происходить и при решении любой подобной задачи при условии, что мы опираемся на тот же набор предположительно верных допущений. Таким образом, краеугольным камнем математики является положение о том, что если какая-либо причина или взаимодействие приводит к определенному результату, при сохранении исходных условий этот результат останется неизменным.

Правила математической логики были сформулированы почти 2400 лет назад Аристотелем, определившим основные принципы этой философской дисциплины в серии трудов под общим названием «Органон» («инструмент», «метод»). Центральным положением аристотелевой логики была дедукция. По определению самого Аристотеля, дедукция — это «высказывание (логос), в котором при утверждении чего-либо из него необходимо вытекает нечто отличное от утвержденного и (именно) в силу того, что это (первоначальное утверждение) есть»*. То, что утверждается при дедукции, есть ее посылки (аксиомы или гипотезы), а то, что необходимо вытекает из этих утверждений, есть выводы, или теоремы. Если верны посылки, то верны и выводы. Такой процесс называется силлогизмом (от греческого слова «вывод», «заключение»). Силлогизмы, приводящие к неверным выводам, называются логическими уловками, или софизмами. Аристотель привел 256 возможных типов софизмов.

Труды Аристотеля были утрачены в период Темных веков**, но оригинальные греческие тексты его работ сохранились в Византийской империи. Около 750 г. н. э. они были переведены на арабский язык, и заново открылись для Европы в XI в. К XIX в. развитие математической логики постепенно начало выводить ее за рамки аристотелевых силлогизмов, показывая их ограниченность. Тем не менее они остаются центральной частью теории множеств, которая имеет отношение практически ко всем разделам математики — от статистики до концепции бесконечности.

АНАТОМИЯ СИЛЛОГИЗМА

Базовая структура силлогизма имеет три части: большая посылка (термин), меньшая посылка (термин) и заключение (вывод). Например:

- Все млекопитающие имеют шерсть (волосы): большая посылка
- Все люди — млекопитающие: меньшая посылка
- Все люди имеют волосы (вывод)

Как большая, так и меньшая посылки связаны с выводом. Больший термин (млекопитающие) — это сказуемое, меньший термин (люди) — подлежащее или субъект силлогизма. Шерсть (волосы) — так называемый промежуточный термин.

Силлогизмы также оперируют количествами. В нашем примере это «все», но таким количеством может быть «несколько» или «ничего» («никто»). Различные комбинации показателей числа (кванторов) в посылках могут привести как к универсальным заключениям, которые применимы всегда, так и к частным, остающимся истинными только при определенных условиях.

Как любое дедуктивное мышление, силлогизм может привести к логической ошибке или софизму, поскольку истинность заключения зависит от истинности исходных посылок. Даже одна ошибка приведет к целой цепи неверных заключений.

---

* Знаменитая дедукция Шерлока Холмса не является аристотелевой. С точки зрения логики Шерлок Холмс демонстрирует индуктивное мышление — способность восстановить утраченные звенья в цепочке уже существующих логических связей — *прим. пер.*

** Темные века — распространенное, но с точки зрения исторической науки уже устаревшее название периода раннего Средневековья в Европе (с VI по X в.) — *прим. пер.*

11 Геометрия

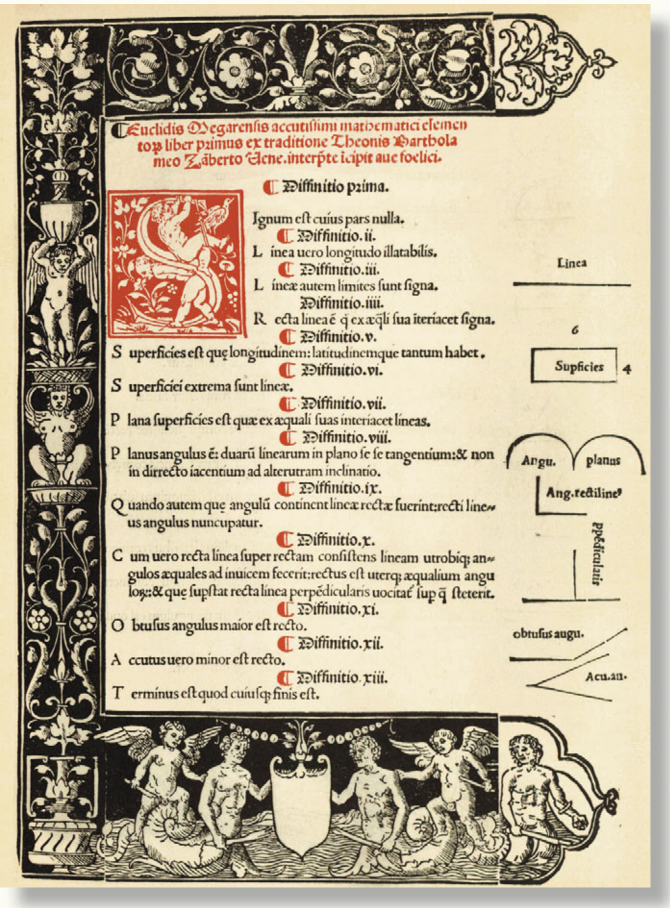
Возможно, геометрию изобрели не древние греки — примерно в то же время китайские ученые самостоятельно разрабатывали ее отдельные элементы — однако греки, безусловно, сформулировали многие базовые геометрические принципы, теоремы и их доказательства.

Слово «геометрия» восходит к греческим «Земля» (*гео*) и «измерение» (*метри*). Как следует из названия этой дисциплины, грекам было необходимо измерять элементарные природные формы. Практическое значение геометрии лежит в области землемерия и картографии, математических методов определения длины, площади и объема. Помимо этого, греческие ученые быстро поняли, что любые формы подчиняются определенным закономерностям и правилам.

Около 300 г. до н. э. греческий математик Эвклид из Александрии собрал и подробно описал принципы геометрии в труде «Начала», состоящем из 13 книг. В нем он представил набор определений, аксиом, теорем и математических доказательств, ставших основой геометрии как научной дисциплины.

На изложенные в «Началах» положения опираются все математические дисциплины, развившиеся из геометрии. Вклад Эвклида в математику настолько велик и глубок, что его называют «отцом геометрии».

«Начала» Эвклида — книга, которую переводили на другие языки, копировали и издавали чаще всех остальных светских книг. На этом рисунке — страницы «Начал», датируемые эпохой Возрождения.



¶ Euclidis Megarensis acutissimi mathematici elementorum liber primus ex traditione Theonis Bartholameo Zaberto Vene. interpte icipit aue foelici.

¶ Diffinitio prima.

Signum est cuius pars nulla.

¶ Diffinitio. ii.

Linea uero longitudo illatabilis.

¶ Diffinitio. iii.

Lineæ autem limites sunt signa.

Diffinitio. iiii.

Recta linea ē q̄ ex æq̄li sua iteriacet signa.

¶ Diffinitio. v.

Superficies est quę longitudinem: latitudinemque tantum habet.

¶ Diffinitio. vi.

Superficiei extrema sunt lineæ.

¶ Diffinitio. vii.

Plana superficies est quæ ex æquali suas interiacet lineas.

¶ Diffinitio. viii.

Planus angulus ē: duarũ linearum in plano se se tangentium: & non in dirrecto iacentium ad alterutram inclinatio.

¶ Diffinitio. ix.

Quando autem quę angulũ continent lineæ rectæ fuerint: recti lineus angulus nuncupatur.

¶ Diffinitio. x.

Cum uero recta linea super rectam consistens lineam utrobiq; angulos æquales ad inuicem fecerit: rectus est uterq; æqualium angulorũ: & quę supstat recta linea perpẽdicularis uocitať sup q̄ steterit.

¶ Diffinitio. xi.

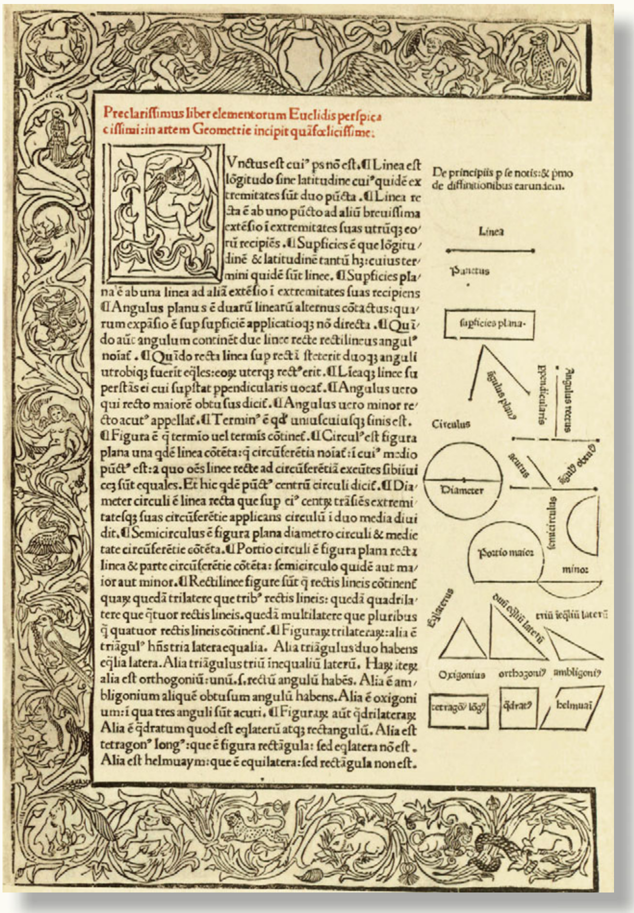
Obtusus angulus maior est recto.

¶ Diffinitio. xii.

Accutus uero minor est recto.

¶ Diffinitio. xiii.

Terminus est quod cuiusq; finis est.



Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quã fœlicissime:

Punctus est cui⁹ ps nõ est. ¶ Linea est lõgitudo sine latitudine cui⁹ quidẽ extremitates sũt duo pũcta. ¶ Linea recta ē ab uno pũcto ad aliũ breuissima extẽsio i extremitates suas utrũq; eorũ recipiẽs. ¶ Supficies ē que lõgitudinẽ & latitudinẽ tantũ hȝ: cuius termini quidẽ sũt linee. ¶ Supficies plana ē ab una linea ad aliã extẽsio i extremitates suas recipiens ¶ Angulus planus ē duarũ linearũ alternus cõtactus: quarum expãsio ē sup supficiẽ applicatioq; nõ directa. ¶ Quãdo aũt angulum continẽt due linee recte rectilineus angul⁹ noiať. ¶ Quãdo recta linea sup rectã steterit duoq; anguli utrobiq; fuerit eq̄les: eoꝝ uterq; rect⁹ erit. ¶ Lieaq; linee superstãs ei cui supstat ppendicularis uocať. ¶ Angulus uero qui recto maiorẽ obtusus diciť. ¶ Angulus uero minor recto acut⁹ appellať. ¶ Termin⁹ ē qđ uniuscuiusq; finis est. ¶ Figura ē q̄ termio uel termis cõtineť. ¶ Circul⁹ est figura plana una qdẽ linea cõtẽta: q̄ circũferẽtia noiať: i cui⁹ medio pũct⁹ est: a quo oẽs linee recte ad circũferẽtiã exeũtes sibiiuicẽ sũt equales. Et hic qdẽ pũct⁹ centrũ circuli diciť. ¶ Diameter circuli ē linea recta que sup ei⁹ centꝝ trãsiẽs extremitatesq; suas circũferẽtie applicans circulũ i duo media diuidit. ¶ Semicirculus ē figura plana diametro circuli & medietate circũferẽtie cõtẽta. ¶ Portio circuli ē figura plana recta linea & parte circũferẽtie cõtẽta: semicirculo quidẽ aut maior aut minor. ¶ Rectilinee figure sũt q̄ rectis lineis cõtinenť quaꝝ quedã trilatere que trib⁹ rectis lineis: quedã quadrilatere que q̄tuor rectis lineis. quedã multilatere que pluribus q̄ quatuor rectis lineis cõtinenť. ¶ Figuraꝝ trilateraꝝ: alia ē triãgul⁹ hñs tria latera equalia. Alia triãgulus duo habens eq̄lia latera. Alia triãgulus triũ inequaliũ laterũ. Haꝝ iteꝝ alia est orthogoniũ: unũ. s. rectũ angulũ habẽs. Alia ē ambligonium aliquẽ obtusum angulũ habens. Alia ē oxigonium: i qua tres anguli sũt acuti. ¶ Figuraꝝ aũt q̄drilateraꝝ Alia ē q̄dratum quod est eqlaterũ atq; rectangulũ. Alia est tetragon⁹ long⁹: que ē figura rectãgula: sed eqlatera nõ est. Alia est helmuaym: que ē equilatera: sed rectãgula non est.

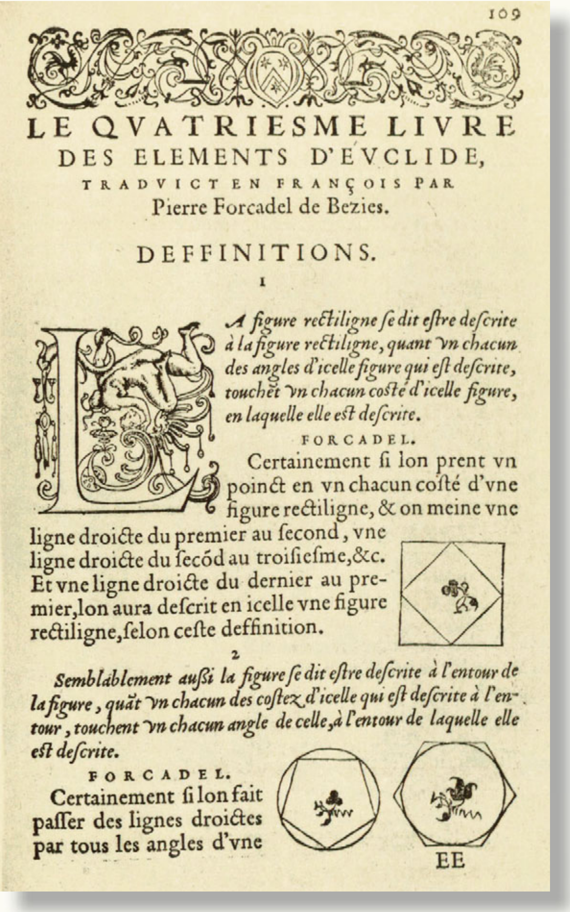
De principiis p se notis: & pmo de diffinitionibus earundem.

Постулаты и аксиомы

Многие теоремы, приведенные в «Началах», были сформулированы не Эвклидом. Его вклад заключался в том, чтобы привести их к единому стандарту изложения и единому набору первоначальных предположений или аксиом. В их число входят пять знаменитых универсальных аксиом Эвклида: 1) величины, равные одному и тому же, равны и между собой; 2) если к равным величинам прибавляются равные, то и целые величины будут равны; 3) если от равных величин отнимаются равные, то остатки будут равны; 4) совмещающиеся (совпадающие) друг с другом величины равны между собой; 5) целое больше части.

Пять постулатов Эвклида звучат более «геометрически»: 1) от всякой точки до всякой точки можно провести участок прямой; 2) участок прямой можно непрерывно продолжать по прямой; 3) из любой начальной точки участка прямой всяким радиусом может быть описана окружность, при этом эта точка станет ее центром; 4) все прямые углы конгруэнтны (т. е. могут быть преобразованы друг в друга); 5) если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых углов (равных 90°), то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых углов.

Пятый постулат известен как постулат о параллельности. Позднее было доказано, что он недоказуем, что привело к появлению новых форм геометрии, основанных на ином наборе аксиом.



109

LE QVATRIESME LIVRE
DES ELEMENTS D'EVCLIDE,
TRADVICT EN FRANÇOIS PAR
Pierre Forcadel de Bezies.

DEFFINITIONS.

1

LA figure rectiligne ſe dit eſtre deſcrite à la figure rectiligne, quant vn chacun des angles d'icelle figure qui eſt deſcrite, touchẽt vn chacun coſté d'icelle figure, en laquelle elle eſt deſcrite.

FORCADEL.

Certainement ſi lon prent vn poinct en vn chacun coſté d'vne figure rectiligne, & on meine vne ligne droicte du premier au ſecond, vne ligne droicte du ſecõd au troiſieſme,&c. Et vne ligne droicte du dernier au premier,lon aura deſcrit en icelle vne figure rectiligne,ſelon ceſte deffinition.

2

Semblablement auſsi la figure ſe dit eſtre deſcrite à l'entour de la figure, quãt vn chacun des coſtez d'icelle qui eſt deſcrite à l'entour, touchent vn chacun angle de celle,à l'entour de laquelle elle eſt deſcrite.

FORCADEL.

Certainement ſi lon fait paſſer des lignes droictes par tous les angles d'vne

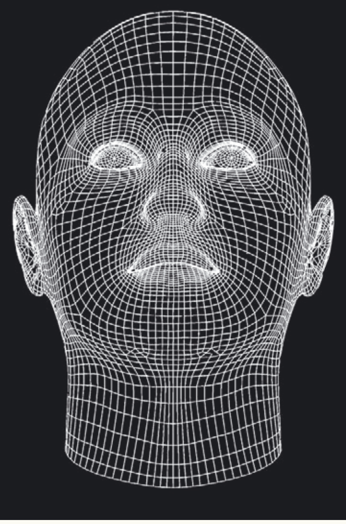
EE

Человек и его труд

«Начала» — самый влиятельный учебник из когда-либо написанных. Его продолжают издавать 23 века. Он дошел до нашего времени благодаря Теону Александрийскому, издавшему «Начала» в своей редакции в IV в. н. э. «Началами» вдохновлялись такие ученые, как Коперник, Галилей Ньютон и другие великие мыслители, изменившие наш мир. О самом же Эвклиде не известно ничего, кроме редких упоминаний о нем современников и утверждения Прокла* в его «Комментариях к “Началам”» — лишь эти обрывочные сведения позволяют нам предположить, что человек по имени Эвклид действительно написал «Начала».

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

Компьютерная анимация (CGI) преображает сложные природные формы (такие, как лицо) в набор простых форм. Таким образом, сложный объект формируется за счет комбинации простейших объектов и может меняться в результате изменения их геометрии. В основе этой идеи — исследования математиков, в частности, французско-американского ученого Бенуа Мандельброта, который в 1974 г. показал, что естественные формы подчиняются правилам фрактальной размерности и в рамках традиционной эвклидовой геометрии могут быть измерены лишь приблизительно.



---

* Прокл Диадох — античный философ V в. н. э. — *прим. пер.*

12

Магические квадраты

Нет, пожалуй, ничего удивительного в том, что так много математических открытий совершено благодаря головоломкам. Она из древнейших — магический квадрат — описана в классическом китайском труде. Благодарить за эту головоломку мы должны одну весьма сведущую в математике речную черепаху.

Магический квадрат четвертого порядка на гравюре Альбрехта Дюрера «Меланхолия», созданной в 1514 г. Так художник демонстрировал свои способности в математике.

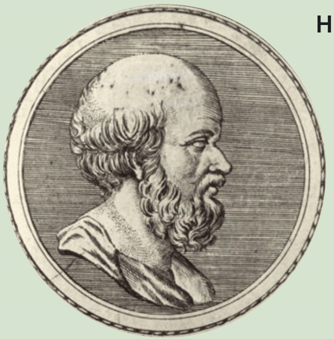
4	9	2
3	5	7
8	1	6

Согласно китайскому трактату III в. до н. э. «Математика в девяти книгах», первый магический квадрат преподнесла людям речная черепаха*. Так называемый квадрат Ло Шу («речной свиток» в переводе с древнекитайского) представляет собой квадратную таблицу из 9 полей размером 3 на 3 поля, в каждом из которых числа от 1 до 9. Как и во всех магических квадратах, числа не повторяются, и сумма чисел во всех рядах, столбцах и двух диагоналях, проходящих через центр квадрата, одинакова — это и есть «магическая константа». Ло Шу — нормальный магический квадрат третьего порядка, в нем используется 3^2 чисел. Магический квадрат первого порядка тривиален — он состоит из одного числа. А магических квадратов второго порядка не существует. Квадратов более высокого порядка бесконечное число, где площадь порядка n заполняется числами от 1 до n^2. Магическая константа (сумма чисел в рядах, столбцах и диагоналях) таких квадратов вычисляется по формуле $n(n^2+1)/2$

13

Простые числа

Простые числа для математика — сверкающие драгоценные камни среди бесконечных песков числительных. Простое число — это число, которое нельзя нацело поделить ни на какое другое, кроме единицы и его самого. Другие целые числа — составные, они состоят из различных комбинаций друг с другом.



Эратосфен — изобретатель первого простого теста на простоту числа — был главным хранителем Великой Александрийской библиотеки.

Количество простых чисел бесконечно, и до сих пор — несмотря на многие миллионы потраченных впустую человеко-часов — никто не нашел способа предсказать их появление в числовом ряду. Если такая закономерность и существует, мы не можем ее найти. Приходится выискивать каждое простое число отдельно. Сама идея простого числа достаточно проста, но, очевидно, для того, чтобы доказать, что некое число является простым, его нужно последовательно разделить на все подряд числа, которые меньше его, чтобы убедиться, что во всех случаях нацело (без остатка) оно не делится. Это упражнение вполне подходит для тех нескольких простых чисел, что проходят в школе, но более крупные числа требуется делить десятки, сотни, даже миллиарды раз, прежде чем мы сможем подтвердить, что они являются простыми.

---

* Изображение этого магического квадрата было найдено на панцире черепахи (датируется оно 2200 г. до н. э.) — *прим. пер.*

Древний алгоритм

Сегодня этот поиск ведут высокоскоростные суперкомпьютеры, но процесс перебора чисел-кандидатов, который они используют, был сформирован давным-давно.

Простые числа также лежат в основе алгоритмов шифрования данных, применяемых для обеспечения безопасности в телекоммуникациях, но и наши предки были знакомы с ними. Похоже, простые числа использовались уже 20 000 лет назад для создания древнейшего математического инструмента - кости Ишанго, обнаруженной на территории современного Конго.

В «Началах» Эвклид показал, что количество простых чисел бесконечно, но это не отвращает людей от их поисков. «Решето Эратосфена» — древний метод обнаружения простых чисел, изобретателем которого считают древнегреческого математика и астронома, жившего в III в. до н. э.

Это алгоритм — серия пошаговых инструкций, — который выявляет все простые числа в заданном множестве чисел, всегда начинающемся с двойки. Во-первых, необходимо исключить все числа, кратные 2, первому простому числу. Это будут все четные числа; все остальные простые числа — нечетные. Следующим шагом необходимо исключить все числа, кратные 3, потом — 5 (число 4 уже исключено), затем 7. Если множество чисел, среди которых мы ведем поиск, меньше 100, этих шагов достаточно, чтобы обнаружить все 25 простых чисел. С более крупными множествами процесс исключения кратных необходимо продолжать, отталкиваясь от новых простых чисел по мере их появления. Этому алгоритму 2300 лет, но он до сих пор остается лучшим способом поиска небольших простых чисел, до отметки 100 000 000 или около того.

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА ПРОТИВ ХИЩНИКОВ

Периодические цикады проводят бо́льшую часть своей жизни в виде бескрылых куколок, питающихся соками из скрытых в почве корней деревьев. Для размножения они должны выбраться на поверхность земли и превратиться в крылатую взрослую особь. Тысячи куколок превращаются в бабочек одновременно, представляя прекрасный пир для любого подстерегающего их хищника. Однако превращение цикад происходит один раз в 13 или 17 лет. Этот выраженный простым числом период между поколениями цикад делает невозможным для хищников синхронизацию их жизненных циклов с жизненным циклом цикад.

Маленькая теорема с большими проблемами

Пьер де Ферма, выдающийся математик XVII в., создал свой инструмент для поиска простых чисел. Самая известная «шутка» Ферма состояла в том, что он не сообщил миру решение своей «последней (или Великой) теоремы». Его малая теорема о простых числах менее знаменита.

Впервые он сообщил о своей малой теореме в письме Бернару Френкилю де Бесси в 1640 г. Ферма писал, что результатом уравнения $a^p - a$, где p — простое число, а a — любое, всегда будет число, кратное p. Верный себе, Ферма не привел этого решения, оставив де Бесси задачу найти его самостоятельно. Но ни де Бесси, ни кому-либо другому это не удавалось. Ферма унес ответ (если он у него был) с собой в могилу. Потребовалось еще почти сто лет, чтобы швейцарский математик Леонард Эйлер доказал эту теорему (это доказательство — одно из многих его блестящих достижений).

Малая теорема Ферма используется в качестве первого шага в продолжающемся поиске простых чисел. Сегодня эта теорема формулируется так: $a^p - 1 = b$, если деление b на p дает в остатке единицу. Значение переменной a произвольно, и если результат вычислений остается верным, число p признается «вероятно простым числом». Однако достаточно одного значения b, при котором решение становится неверным, чтобы показать, что в данном конкретном случае p — составное число.

Цветовой код «решета» показывает простые числа меньше 100. Цвета соответствуют множествам чисел, кратных простым от 2 и более.

○ кратные 2
○ кратные 3
○ кратные 5
○ кратные 7
○ простые числа

	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

14 Пи

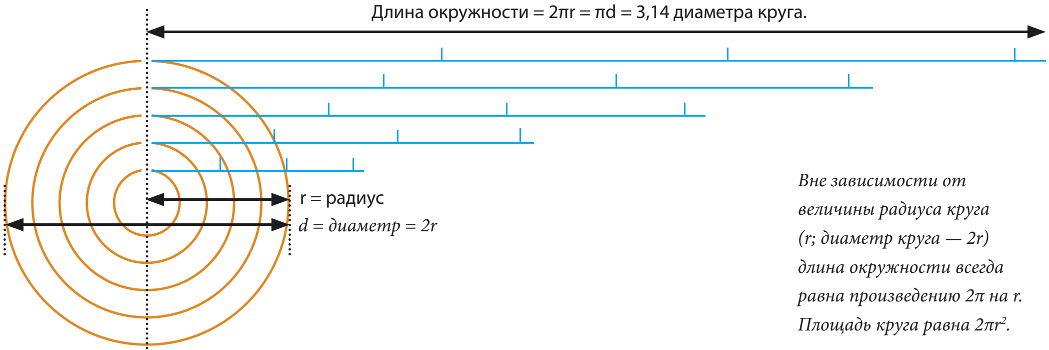
ОТНОШЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЕ ДИАМЕТРУ НАЗЫВАЕТСЯ ПИ. Это название греческой буквы π, которая используется для символьной записи этого числа. Число π считается самым знаменитым в мире числом — и не без причины.

Для простых вычислений значение числа π обычно принимается за 3,14, но для того, чтобы с уверенностью говорить о том, что даже такое короткое приблизительное значение этого числа верно, потребовалось много лет. Сложность в том, что его можно вычислять с точностью до бесконечности знаков после запятой. Как бы старательно мы ни считали, мы все равно не можем получить точное значение числа π.

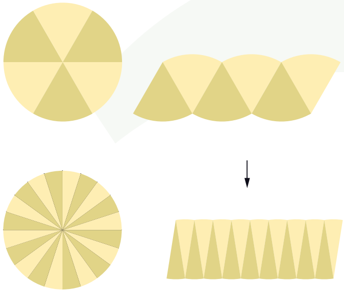
Вероятнее всего, число π несколько раз открывали разные математики независимо друг от друга. О нем, несомненно, знали вавилоняне, у них π равнялось 3,125, что достаточно точно, но как именно они его вычислили, нам толком неизвестно. Египетский папирус Ахмеса гласит: «Отнимите 1/9 от диаметра и от остатка постройте квадрат; он будет иметь ту же площадь, что и круг». Такой подсчет позволяет получить еще более точное значение числа π — 3,1605.

Классические вычисления

Древнегреческие математики V в. до н. э. Антифон и Бризон вычисляли значение π, вписывая в круг и описывая вокруг него правильные многоугольники.



Вне зависимости от величины радиуса круга (r; диаметр круга — 2r) длина окружности всегда равна произведению 2π на r. Площадь круга равна $2\pi r^2$.



Архимед вычислял значение π, разделяя круг на множество правильных секторов, а затем преобразуя их в линейную фигуру с закругленными краями. Длина этой фигуры вычислялась геометрическими методами и составляла приблизительно половину длины окружности. Полученное значение приближалось к истинному тем более, чем на большее количество секторов разбивался круг — увеличение их числа снижало ошибку, возникавшую вследствие того, что края секторов оставались закругленными.

МНЕМОНИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ЧИСЛА π

С числом π связано возникновение любопытного литературного феномена — стихотворений и фраз, предназначенных для запоминания его значения. Количество букв в каждом слове соответствует значению цифры в числовой записи π.

	Как	я	хочу	и	желаю	надраться
π =	3,	1	4	1	5	9

Площадь, занимаемая кругом, оказывалась между площадями, занимаемыми внутренним и внешним многоугольниками. Увеличивая число сторон многоугольников, математик достигал максимально возможного приближения к площади круга.

Антифон и Бризон пытались решить одну из величайших проблем классической геометрии — проблему квадратуры круга. Другими словами, они пытались построить квадрат, площадь которого была бы равна площади круга, пользуясь только слепой линейкой и циркулем. Веками математики пытались справиться с этой задачей, до тех пор пока в 1882 г. Карл Линдеманн не доказал, что π является трансцендентным числом. Это означает, что π не только состоит из бесконечного числа знаков после запятой, но и то, что ни один знак или последовательность знаков в этой цепи нельзя предсказать. Таким образом, квадратура круга — концепция, противоречащая законам математики.

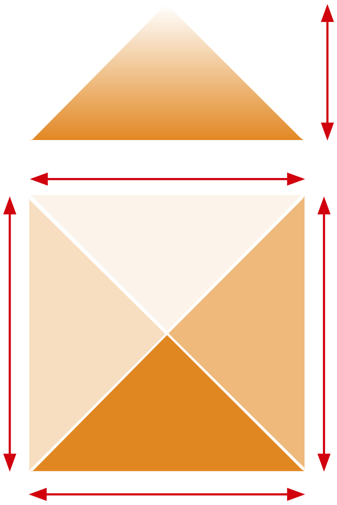
Отношение длины периметра пирамид Гизы к их высоте приблизительно равно числу π. Мы можем лишь предполагать, было ли число π основой расчетов древнеегипетских архитекторов, или им просто почему-то нравилось такое соотношение.

В III в. до н. э. великий ученый и инженер Архимед из Сиракуз пошел другим путем. Он подсчитывал длину окружности через длину периметра многоугольников. Начав с шестиугольника, он четырежды удвоил количество сторон, остановившись на 96-угольниках, вписанных в круг и описанных вокруг него. Полученное Архимедом значение π находилось между 3,140845 и 3,142857.

В дальнейшем этот метод совершенствовался. В III в. китайский математик Лю Хуэй вычислил значение π, равное 3,141592104, на основе многоугольника с 3072 сторонами. В Индии 250 лет спустя математик Арьябхата получил значение в 3,1416, используя 384-сторонний многоугольник.

Современные оценки

Использование компьютеров позволяет рассчитать значение числа π с невероятной точностью. В 2011 г. Сигэру Кондо и Александр Йи за 191 день непрерывной работы специально созданного компьютера подсчитали значение π с точностью до десяти триллионов знаков после запятой. Для того чтобы хотя бы приблизительно представить это, стоит учесть, что точности π до 39 знака после запятой достаточно, чтобы вычислить диаметр всей известной человечеству Вселенной настолько точно, что уровень погрешности составит значение, меньшее, чем радиус атома водорода.



Отношение длины периметра Пирамиды Хеопса к ее высоте составляет 22 : 7, то есть 3,142.

до	чертей	после	сих	тупых	вопросов,	наводящих	тяжёлую	депрессию!*
2	6	5	3	5	8	9	7	9

---

* Это, вероятно, на сегодня самый близкий к оригиналу *(How I need a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics!)* из существующих переводов. Известный ученый и популяризатор науки Яков Перельман предложил иную, более «математическую» фразу: *«Учи и знай в числе известном за цифрой цифру, как удачу примечать!»* Правда, она позволяет запомнить лишь 12 цифр числа π, а не 15, как приведенные в книге фразы — *прим. пер.*

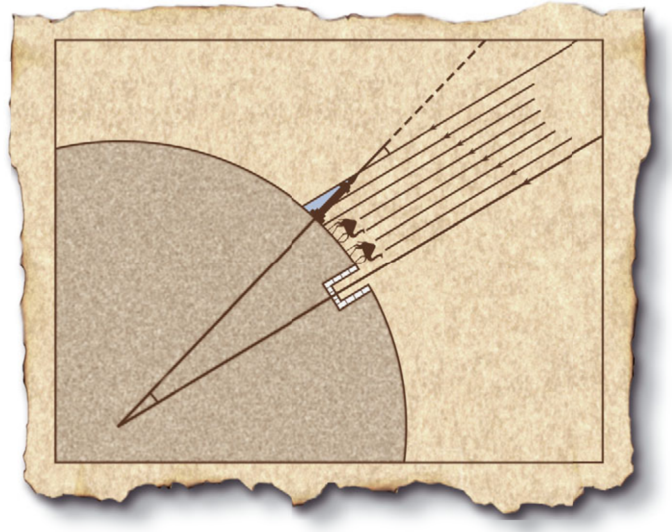
15

Измерения Земли

Сегодня для того, чтобы измерить планету или звезду, мы используем картографические спутники или мощные телескопы. Математикам же древности для измерения размера Земли было достаточно тени, отбрасываемой столбом, и тригонометрии.

В конце III в. до н. э. древнегреческий математик разработал необычайно простой способ расчета размера Земли. Для такого расчета ему потребовалось сделать только одно измерение. Используя дедуктивную логику и инструменты эвклидовой геометрии, хранитель Великой Александрийской библиотеки Эратосфен оценил размер Земли с точностью почти 99%!

В начале классической эпохи Древней Греции в VII в. до н. э. мир считали круглым, но сплюснутым, подобно диску. В 580 г. до н. э. Анаксимандр Милетский предположил, что мир имеет форму цилиндра, на вершине которого находится плоская суша, а вокруг нее простирается бурный океан. Наблюдательные моряки видели кривизну Земли невооруженным глазом: по мере приближения другого корабля вначале над линией горизонта показывались его мачты, а лишь потом — корпус. К V в. до н. э. философы уже предполагали, что Земля имеет форму сферы.



В колодец города Асуан, который якобы использовал Эратосфен для своих расчетов, до сих пор в день летнего солнцестояния заглядывает солнце. Эратосфен понял, что угол, под которым падает полуденная тень в Александрии, был равен углу между Сиеной (древнее название Асуана) и Александрией, вершиной которого был центр Земли.

Блестящая идея

То, что солнце в разных частях мира поднимается на разную высоту над горизонтом, было широко известно еще в древности. Узнав, что в полдень летнего солнцестояния в Александрии предметы отбрасывают тень, а в Сиене (город к югу от Александрии, современный Асуан) солнце находится строго в зените и теней нет, Эратосфен увидел возможность вычислить длину окружности Земли. Он исходил из того, что лучи солнца распространяются параллельно. На Сиену они падали строго вертикально, а на Александрию — под углом, что и приводило к появлению теней.

Для того чтобы подсчитать угол падения солнечных лучей в Александрии, Эратосфен измерил длину тени, отбрасываемой столбом в полдень летнего солнцестояния. Дальше в дело вступила геометрия. Угол падения солнечных лучей был равен углу между двумя сторонами воображаемого треугольника, на сторонах которого находились Александрия и Сиена, а вершина совпадала с центром Земли — 7° 12', что составляло 1/50 сферы в 360°. Расстояние между городами составляло 5000 стадий (мера длины в Древней Греции). Полученный результат Эратосфен округлил до 252 000 стадий.

Точность этого результата зависит от того, какую именно стадию использовал Эратосфен в расчетах — греческую (185 м) или местную, египетскую (157,5 м). В первом случае погрешность составляет 16%, во втором — 39 690 км, менее 2%!

Век спустя Гиппарх опубликовал первые тригонометрические таблицы, показывающие отношение между углами треугольника и длинами его сторон. С помощью этих таблиц он измерил расстояние до Луны и Солнца. Дальнейшим развитием тригонометрия обязана трудам мусульманских ученых. Через 1100 лет после Гиппарха ученый из Хорезма аль-Бируни тригонометрическими методами вычислил радиус Земли, получив 6339,9 км, что лишь на 16,8 км меньше современного значения!

16

Степени 10

НЕТ, ПОЖАЛУЙ, НИЧЕГО УДИВИТЕЛЬНОГО В ТОМ, ЧТО С РАЗВИТИЕМ ЦИВИЛИЗАЦИИ, ПО МЕРЕ ТОГО КАК ГОСУДАРСТВА ВЫРАСТАЛИ В ИМПЕРИИ, росли числа, которые необходимо было считать и записывать. Сотни лет человечество пыталось справиться с неудобными цифрами, пока китайский ученый не нашел простой способ поправить положение.

Мега-, гига- и наноединицы, которыми мы сегодня небрежно разбрасываемся в разговорах, — современный метод вербализации математического понятия «степени 10» для передачи сверхкрупных и сверхмелких значений.

Самым большим числом Древней Греции был *мириад* (10 000). Мириад мириадов составлял сто миллионов, но любое число, немного превосходившее это значение (или бывшее немного меньше) было невероятно сложно записать — не говоря уже о том, чтобы подсчитать. В 190 г. до н. э. китайские математики придумали, как использовать показатели степени числа 10, чтобы упростить математические операции. Любое число можно было записать с достаточной степенью точности всего несколькими цифрами, а затем умножить его на десять столько раз, сколько было необходимо, чтобы передать его значение. Так, 72×10^5 равно 7 200 000, или 72 пятикратно умноженное на 10, или на *десять в пятой степени*. Возведение десятки в бóльшие степени позволяет выражать значения чисел, превосходящих самое смелое воображение. Таким же образом можно выражать и сверхмалые числа: деление на 10 превращает числа в десятые (10^{-1}), сотые (10^{-2}), тысячные (10^{-3}) доли и т. д. Впрочем, для твердого усвоения действий с десятичными дробями человечеству потребовалось еще полторы тысячи лет.

Префикс	**Символ**	**Множитель**	**Степень**
иотта	И (Y)	1 000 000 000 000 000 000 000 000	10^{24}
зетта	З (Z)	1 000 000 000 000 000 000 000	10^{21}
экса	Э (E)	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}
пета	П (P)	1 000 000 000 000 000	10^{15}
тера	Т (T)	1 000 000 000 000	10^{12}
гига	Г (G)	1 000 000 000	10^{9}
мега	М (M)	1 000 000	10^{6}
кило	к (k)	1 000	10^{3}
гекто	г (h)	100	10^{2}
дека	да (da)	10	10^{1}
деци	д (d)	0,1	10^{-1}
санти	с (c)	0,01	10^{-2}
милли	м (m)	0,001	10^{-3}
микро	мк (μ)	0,000 001	10^{-6}
нано	н (n)	0,000 000 001	10^{-9}
пико	п (p)	0,000 000 000 001	10^{-12}
фемто	ф (f)	0,000 000 000 000 001	10^{-15}
атто	а (a)	0,000 000 000 000 000 001	10^{-18}
зепто	з (z)	0,000 000 000 000 000 000 001	10^{-21}
иокто	и (y)	0,000 000 000 000 000 000 000 001	10^{-24}

17

Современный календарь

Природа обеспечила нас тремя очень удобными циклами для измерения времени — днем, годом и лунным месяцем. Проблема в том, что они не совпадают и не согласуются друг с другом. В результате создание календарей всегда подразумевало математические компромиссы, что всегда неизменно к противоречиям.

Раньше всего календарь применялся для ведения сельского хозяйства, сбора налогов, религиозных празднеств. В Древнем Египте использовали даже два календаря одновременно. Один из них, состоящий ровно из 365 дней, использовался в целях государственного управления, но, поскольку год на самом деле состоит из 365 с четвертью дней, он постепенно отставал от хода реального времени. Основой второго календаря были лунные циклы*, он использовался в религиозных целях. Египетские астрономы пристально наблюдали за звездами, чтобы корректировать календари соответствующим образом.

Аве, Цезарь!

Римляне славились своей любовью к порядку, но к I в. до н. э. их календарь представлял собой полный кавардак. Некоторые его элементы нам вполне знакомы: 12 месяцев, начинающихся с януария (января), февраль — самый короткий месяц. Но месяцы все так же старались следовать лунному циклу, поэтому время от времени римлянам приходилось вводить в «расписание» новые месяцы, чтобы привести календарь в соответствие с ходом реального времени.

Став единоличным правителем Рима в 46 г. до н. э., Юлий Цезарь задался целью исправить календарь раз и навсегда. Эта идея могла прийти к нему в голову во время египетской военной кампании предыдущего года. В то время Египтом правила греческая династия, основателем которой был ближайший соратник Александра Македонского Птолемей, а греки давно знали, что год составляет примерно 365 дней с четвертью. Еще раньше, в 238 г. до н. э., греческие правители Египта даже попытались вычислить точную длину года, предложив ввести високосные годы из 366 дней каждые четыре года, но местное население к такой инновации отнеслось без энтузиазма.

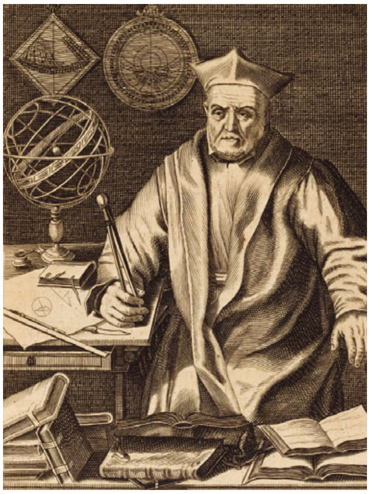
По совету своего астронома Созигена Александрийского, Цезарь возродил идею високосных годов, а также модифицировал длину месяцев. К тому времени старый римский календарь опережал реальное время на три месяца, и Цезарь желал вернуть январь на его законное место — сразу после зимнего солнцестояния. По его указу год, который мы ныне называем 46 г. до н. э., получил два дополнительных месяца и продолжался 445 дней. Так время вернулось в «календарные рамки».

Календарная реформа Цезаря пережила своего инициатора (Цезарь был убит через два года после введения нового календаря), хотя умер он до того, как настал первый високосный год. После этого хранители календаря по ошибке начали добавлять високосный год каждые три года вместо четырех. Однако преемник Цезаря, Август исправил положение, и новый юлианский

Юлий Цезарь был убит в день мартовских ид (день, приходившийся на середину месяца) в 44 г. до н. э. Иды традиционно были связаны с поклонением богу войны Марсу, поэтому прекрасно подходили для покушения. Если бы Цезарь к этому времени не провел свою календарную реформу, он бы дожил до начала июня.

---

* Лунный цикл — период смены фаз луны, периодически меняющихся в зависимости от характера освещения ее Солнцем, от новолуния до новолуния, составляющий примерно 29,5 суток — *прим. пер.*



Немецкий математик Христофор Клавдий был главным разработчиком григорианского календаря, оставаясь при этом убежденным геоцентристом, считавшим, что Солнце обращается вокруг Земли, а не наоборот.

календарь исправно функционировал в Европе на протяжении следующих 1600 лет.

Григорианский календарь

Цезарь, возможно, вполне отдавал себе отчет в том, что его календарь недостаточно совершенен, чтобы оставаться безупречным навсегда. В его эпоху астрономы уже умели измерять длину года с достаточно высокой точностью, наблюдая положение солнца в день весеннего равноденствия, случавшийся раз в году. Эти наблюдения позволили установить, что в среднем год короче, чем 365,25 дней примерно на 11 минут. Это означало, что юлианский календарь накапливает ошибку в один день за 128 лет, отставая на этот день от реального хода времени.

К концу Средневековья в Европе юлианский календарь отставал уже на неделю, что доставляло особенно много неприятностей священнослужителям, которым нужно было определять дату Пасхи. Папу заваливали петициями с требованиями изменить календарь. Наконец в 1578 г. Папа Григорий XIII решил действовать. Он привлек ученых-консультантов и объявил о небольшой, но весьма эффективной модификации юлианской системы високосных годов: годы, кратные 100 (1700, 1800 и т. д.), считались високосными только в том случае, если они одновременно были кратны 400 (1600, 2000 и т. д.). В остальных случаях в них оставалось 365 дней.

Подобно Цезарю, Папа Григорий XIII желал вернуть время «на круги своя», чтобы Пасха снова приходилась на весну. Он объявил, что в год введения нового календаря, 1582-й, из октября будут изъяты 10 дней, так что после 4 октября сразу наступит 15-е (11-е потом тоже пришлось изъять). Эти изменения были самыми заметными последствиями календарной реформы для обычных людей. Некоторые авторы говорят даже о бунтах, которыми была встречена эта реформа, но подобные сообщения недостаточно достоверны.

Небольшие изменения, внесенные в календарь Папой Григорием XIII, сделали его очень точным. Ошибка в один день в этом календаре накопится только к 3719 году.

ПРИНЯТИЕ КАЛЕНДАРЯ

Первыми на григорианский календарь перешли католические страны — Испания и Польша, ведь Папа Григорий XIII был главой именно католической церкви. В странах, где доминировала протестантская, реформа шла медленнее. Швеция изымала из своего календаря 11 дней постепенно, в течение 40 лет, используя свою, уникальную календарную систему. Страны, входившие в Британскую империю (включая ее американские колонии) перешли на григорианский календарь в 1752 г. Однако даты финансового календаря остались без изменений, и даже сегодня компании Великобритании платят налоги, исходя из того, что финансовый год начинается 6 апреля. А Турция использовала юлианский календарь вплоть до 1929 года.

Сатирическая гравюра Уильяма Хогарта «Предвыборный банкет» высмеивает британских политиков середины 50-х гг. XVIII в. В нижнем правом углу гравюры — плакат «Верните нам 11 дней», аллюзия на политические баталии между тори и вигами, которые не могли сойтись друг с другом даже по поводу календарных дат.*

Луч Солнца, падающий на 44-метровый бронзовый меридиан, установленный в церкви Санта-Мария-дельи-Анджели в Риме в 1702 г., указывает на дату весеннего равноденствия, с которой начинается отсчет дней католической Пасхи (приходящейся на первое воскресенье после следующего за весенним равноденствием полнолуния).

---

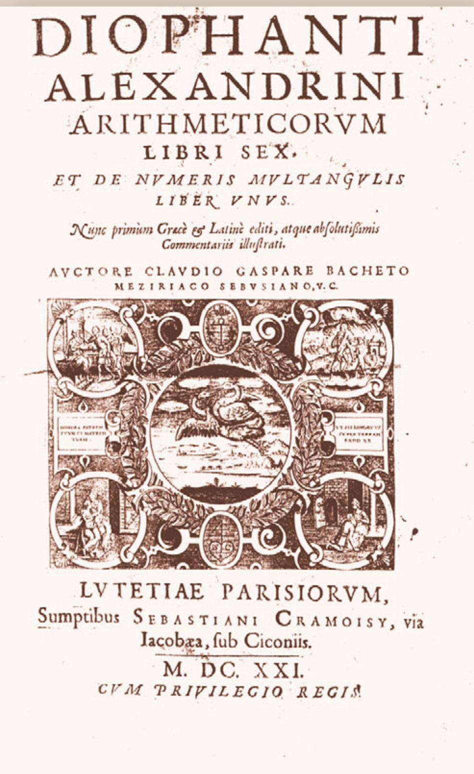
* Тори — прозвище консервативной партии в Англии, виги — прозвище либеральной оппозиции. Термины возникли в середине XVII в. и остаются элементом политического жаргона до сих пор — *прим. пер.*

18

Диофантовы уравнения

В III в. до н. э. Диофант из Александрии опубликовал работу под названием «Арифметика», что переводится как «наука чисел». Этот древний труд стал краеугольным камнем теории чисел — раздела математики, изучающего целые числа, связанные и сходные с ними объекты.

«Арифметика» содержала 130 уравнений, названных впоследствии «Диофантовыми». Диофантовым считается уравнение, в котором переменными могут быть только целые числа. В современной математике выделяется небольшое особенное (более широкое) множество алгебраических или полиномных уравнений. Полином — математическое выражение с двумя или более алгебраическими компонентами, как минимум один из которых является неизвестной переменной, обычно обозначаемой как x. Другое название полинома — многочлен. Диофанта величают «отцом алгебры»*, хотя современное понимание алгебры с ее «буквенной» системой счисления и записи, а также многие связанные с этой системой концепции сформировались много позже.



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primum Græcè & Latinè editi, atque abſolutiſsimis
Commentariis illuſtrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.

LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, ſub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Оригинальный текст «Арифметики» Диофанта состоял из 13 томов, но сохранились из них лишь шесть. На рисунке — издание «Арифметики» на латыни, вышедшее в 1621 г.

Примером диофантового уравнения может быть такое: «Возраст отца на 1 меньше удвоенного возраста сына. Если записать возраст отца как *AB*, то возраст сына выражается обратным порядком символов. Сколько лет отцу и сыну?» Единственный возможный ответ: 73 и 37. Во многих случаях такие уравнения решаются методом подбора (также известным как метод проб и ошибок), однако после нахождения ответа его верность подтверждается ретроспективным математическим доказательством.

Диофант осторожно ограничил себя рассмотрением только тех проблем, решение у которых, как он считал, может быть единственным. Он рассматривал только положительные ответы — отрицательное число не считалось верным решением. По этой причине иногда диофантовы уравнения отвергались математиками, как несерьезные загадки, но некоторые из них не находили своего решения столетиями.

Пьер де Ферма, сформулировавший знаменитую «последнюю (или Великую) теорему» изучал как раз эти самые загадки, когда задумался над диофантовым уравнением, не имеющим решения. На полях страницы 85 своей копии «Арифметики» Диофанта он оставил заметку: «Если целое число n больше двух, то не существует таких чисел, для которых равенство $x^n + y^n = z^n$ было бы верным». Доказательства своей теоремы Ферма не оставил. Подтверждения ее верности пришлось ждать до 1994 г.

ЗАГАДКА ДИОФАНТА

Даже эпитафия на могиле Диофанта содержит алгебраическое уравнение, где неизвестным является возраст математика. В переводе эпитафия звучит так:

Прах Диофанта гробница покоит; дивись ей и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком.
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругой он обручился.
С нею, пять лет проведя, сына дождался мудрец;
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил.
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,
Тут и увидел предел жизни печальной своей**.

(Ответ: 84).

---

* «Отцом алгебры» также называют Франсуа Виета — см. Принцип № 27 на с. 40 — *прим. пер.*

** Перевод С. Н. Боброва — *прим. пер.*

19 Индо-арабская система записи цифр

Десятичная система счисления, используемая сегодня во всем мире, зародилась в Индии в VI в. н. э. Каким бы удобным и практичным нам ни казался привычный ряд чисел от ноля до девятки, мир привыкал к нему целую тысячу лет.

Брахми		—	=	≡	+	𑁫	𑁬	𑁭	𑁮	𑁯
Индийская	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
Арабская	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Европейская средневековая	o	I	2	3	ጸ	ϥ	6	ʌ	8	9
Современная	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Эволюцию системы записи цифр можно проследить от древнеиндийской письменности брахми, сложившейся около III в. до н. э. Символ ноля появился примерно в то же время в вавилонской шестидесятеричной системе счисления, но внес неоценимый вклад в развитие индо-арабской системы.

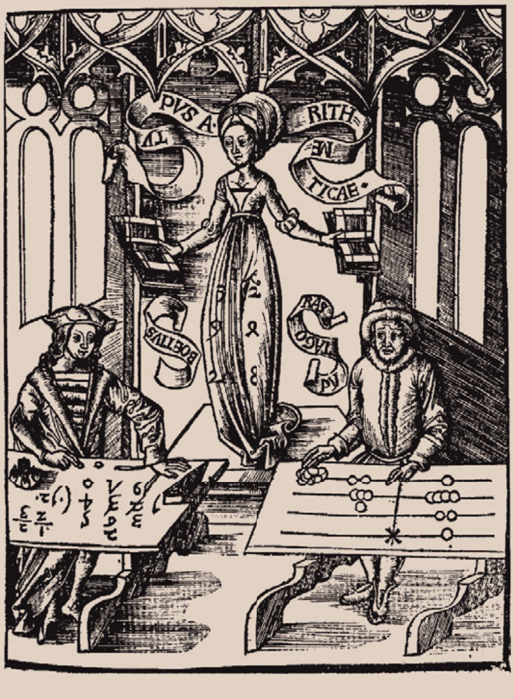
Пока Западный мир возился с римскими числами, неудобными для записи, чтения и счета, Индия и Китай пользовались всеми преимуществами позиционных систем счисления, похожих на современную. Разница была в том, что десятки (числа 10, 20 и т. д.) записывались отдельными специальными символами. В VI в. в систему записи добавился 0, что позволило избавиться от «лишних» символов, ограничившись десятью универсальными. Мусульманские завоевания VII в. н. э. способствовали быстрому распространению этой системы от Кордобы до Калькутты. В результате весь мир сегодня использует индо-арабскую систему счисления и записи.

Книга абака

Однако даже в XII в. европейцы все еще считали римскими цифрами. Торговцы, пересекавшие Средиземное море для торговли с Африкой, были потрясены скоростью, с которой их арабские коллеги-конкуренты считали и объявляли последние цены. Одним из таких путешественников был молодой итальянец Леонардо Пизанский, сегодня более известный под именем Фибоначчи. Он сопровождал своего отца в путешествии в арабские земли, где увлекся местной системой счисления и обучился ею пользоваться.

В 1202 году он собрал свои знания и опыт в книге под названием *Liber Abaci*. Дословно это название переводится «Книга счетов», но речь в ней шла не о примитивном вычислительном устройстве, а о революционной идее новой системы счисления. Леонардо привел новую систему и методы быстрого счета как практичный инструмент для купцов. С помощью этой книги Леонардо вытащил европейскую математику из Темных веков и заложил основы западной культуры коммерции, которая сделала Европу мощнейшим мировым центром на многие века.

Индо-арабская система записи цифр спровоцировала горячие споры между ее поборниками «алгористами» и противниками «абакистами». Их противостояние растянулось в Европе на несколько веков. Абакисты настаивали на том, что римские цифры и счетная доска превосходили письменные способы счисления алгористов. В конце концов, в XVI в., когда римские цифры вышли из активного употребления, спор сошел на нет.



20

Алгоритмы

Алгоритм — это пошаговая процедура решения задач, направленная на исключение метода проб и ошибок в процессе. Происхождение слова «алгоритм» — арабское, а своим возникновением оно обязано грандиозному прорыву, совершенному исламскими учеными в IX в. н. э. Тем не менее этой методикой люди пользовались за тысячелетие до этого.

Список заслуг Аль-Хорезми обширен. Он повлиял на внедрение десятичного разделителя в европейскую математическую традицию, был пионером тригонометрии, а также известнейшим картографом своего времени.

Сегодня слово «алгоритм» чаще всего ассоциируется с компьютерами, благодаря, например, тем же боевикам, сюжет которых частенько строится на разработке некоего зловещего алгоритма для собранного по последнему слову техники компьютера, готового обратить весь мир в хаос. Однако, как бы тривиально это ни звучало, алгоритм — это просто набор инструкций. Если их выполнить в верном порядке, вы наверняка получите необходимый результат. Проще (сильно проще) говоря, все компьютерные программы являются алгоритмами.

Возможно, первый в истории человечества алгоритм был сформулирован самим Эвклидом в его эпохальном труде «Начала» еще 2300 лет назад. Однако Эвклид не использовал этот термин. Слово «алгоритм» восходит к латинизированному произношению имени Мухаммада ибн Муса Аль-Хорезми, персидского математика IX в. до н. э.

АЛГОРИТМ ЭВКЛИДА

Процесс, называемый сегодня «алгоритмом Эвклида», предназначен для нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух чисел. Иными словами, это самое большое число, на которое можно разделить два заданных числа без остатка. Заданные числа должны быть составными (т. е. не простыми, поскольку простые числа не имеют общих делителей). Первый шаг — деление большего числа на меньшее, результатом которого будет частное и остаток. Далее меньшее из заданных чисел делится на остаток первого деления с тем же результатом — частное и остаток. Остаток предыдущего деления делится на этот полученный остаток и так далее до тех пор, пока в остатке не останется 0 (т. е. до тех пор, пока не произойдет деления нацело).

Задача: найти НОД 4433 и 1122.
Решение:
4433 : 1122 = 3, в остатке — 1067;
1122 : 1067 = 1, в остатке — 55;
1067 : 55 = 19, в остатке — 22;
55 : 22 = 2, в остатке — 11;
22 : 11 = 2, в остатке — 0.
Ответ: наибольшим общим делителем 4433 и 1122 является 11.

Формальный процесс

Связь между именем Аль-Хорезми и алгоритмом обеспечивает его книга «Китаб аль-Джебр ва-ль-Мукабаля» («Краткая книга восполнения и противопоставления»). В ней он описал стандартный процесс решения линейных и квадратных уравнений с использованием многих положений и методик *алгебры*. Разработанная им формальная процедура позволяла решить любую задачу. Она подразумевала сведение их к одной из шести стандартных форм, а затем исключение отрицательных значений, корней и квадратов.

После исключения метода проб и ошибок из методики решения математических задач, алгоритмы стали инструментом для автоматизации принятия решений. В 1840 г. Ада Лавлейс* разработала алгоритмический процесс (говоря сегодняшними словами, программное обеспечение) для простейшего компьютера Чарльза Бэббиджа (правда, компьютер этот так и не был построен). Через 1100 лет после Аль-Хорезми алгоритмы оставались основополагающим принципом машины Тьюринга — мысленного эксперимента, ставшего предтечей цифрового вычисления.

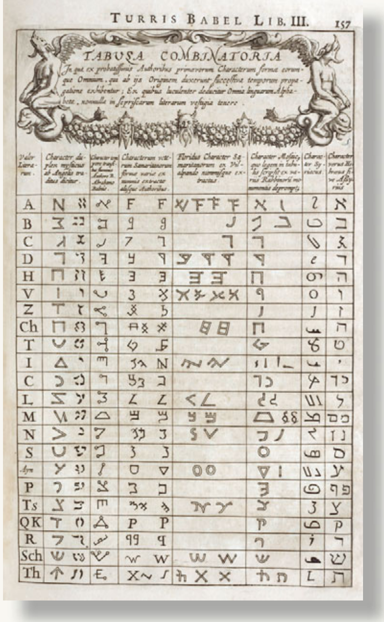
---

* Об Аде Лавлейс см. Принцип №53, с. 69 — *прим. пер.*

21

Криптография

Шифры и коды — явление столь же древнее, сколь и секреты, а по пятам за способами создания шифров шли методы их взлома. Поначалу шифры создавались без помощи математики. Однако в XI в. н. э. арабский философ разработал математический метод расшифровки скрытых значений.



TURRIS BABEL LIB. III. 157

TABULA COMBINATORIA

Лингвистическая таблица XVII в. приводит буквы из алфавитов основных языков мира. Книга под названием Turris Babel *(«Вавилонская башня») немецкого ученого и изобретателя Афанасия Кирхера помимо этого содержала и подробности об их использовании в криптографии.*

Строго говоря, код — это способ скрыть истинное значение сообщения, изменяя слова целиком. Поэтому для передачи закодированного сообщения порой достаточно одного «кодового слова». Так, сегодня каждый знает, что такое «День “Д”»*, но, к счастью, накануне самой высадки союзников в Нормандии мало кто понимал смысл этого кодового обозначения.

Кодом часто называют (что неверно) шифр — ряд бессмысленных букв, цифр или других символов. Для создания зашифрованного сообщения необходим ключ — система, преобразующая оригинальный текст («открытый текст» на жаргоне криптографов) в нечто нечитаемое.

Ключ и есть самое слабое звено в системе обеспечения безопасности при обмене зашифрованной информацией. Без него криптоаналитикам-дешифровщикам приходится «ломиться силой», перебирая все возможные комбинации символов. До открытия, сделанного в XI в., это вполне работало, хотя и требовало массу времени. Наиболее распространенным методом шифрования был подстановочный — буквы «открытого текста» заменялись другими в соответствии с заранее определенной схемой.

Ученый-энциклопедист из Багдада Аль-Кинди сделал криптографию настоящей наукой, разработав частотный анализ. Этот метод основан на том, что некоторые буквы в тексте употребляются чаще, чем другие. Наиболее употребимая буква английского языка — *e*, поэтому метод расшифровки будет выстроена на предположении, что наиболее часто встречающийся символ в тексте — это на самом деле буква *e*. Если она не сработает, за основу ключа будет выбрана буква *t*, следующая по частотности.

Чем длиннее зашифрованное сообщение, тем более вероятным будет соответствие распределения букв в нем среднему значению. Даже самые изощренные подстановочные системы с легкостью расшифровывались методом Аль-Кинди. Жертвой этого метода стала, например, Мария Стюарт, шифровавшая свои письма при помощи уникальных символов. Частотный анализ ее переписки позволил выявить признаки измены, и она была казнена по указу королевы Елизаветы I в 1587 г.

IGKYGX IUJK

ШИФР ЦЕЗАРЯ

Этот простой шифр назван по имени Юлия Цезаря, использовавшего его для шифрования своих приказов. Ключ, который вы видите ниже, позволит легко расшифровать заголовок этой статьи (правда, для этого потребуется знание английского). Ключ этого конкретного шифра — 7; на такое количество позиций сдвинуты буквы алфавита, заменяющие буквы оригинального текста. Однако, несмотря на то что военачальники Цезаря постоянно меняли ключи, такой шифр нельзя считать достаточно надежным. Впрочем, против малограмотных варваров, не говорящих на латыни, с которыми воины Цезаря чаще всего встречались в битвах, он работал исправно.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F

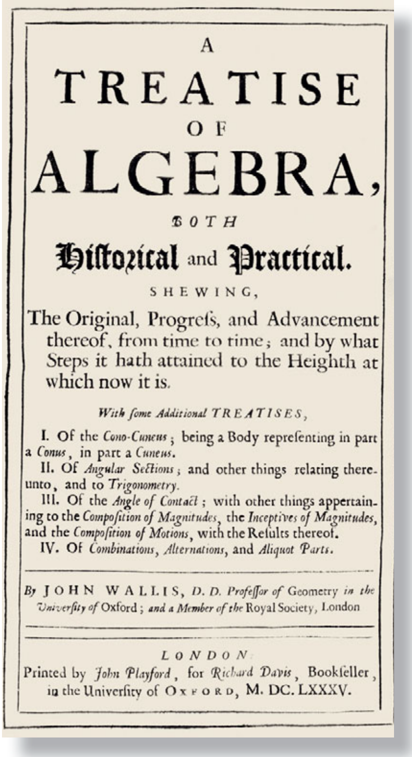
---

* День «Д» *(англ. D-Day)* — кодовое обозначение начала любой военной операции, общепринятое в армии США. Самый известный «День “Д”», который и имеет в виду автор, — день высадки союзных войск в Нормандии 6 июня 1944 г. Сама операция носила кодовое имя «Нептун» — *прим. пер.*

22

Алгебра

Ни один мультфильм об ученых не обходится без грифельной доски, заполненной головоломными уравнениями. Но алгебра — это не столько кратчайший путь к математическим абстракциям, сколько основополагающий принцип математики, грамматика, формирующая основные правила математического языка.



A
TREATISE
OF
ALGEBRA,
BOTH
Hiſtorical and Practical.
SHEWING,
The Original, Progreſs, and Advancement thereof, from time to time; and by what Steps it hath attained to the Heighth at which now it is.

With ſome Additional TREATISES,

I. Of the *Cono-Cuneus*; being a Body repreſenting in part a *Conus*, in part a *Cuneus*.
II. Of *Angular Sections*; and other things relating thereunto, and to *Trigonometry*.
III. Of the *Angle of Contact*; with other things appertaining to the *Compoſition of Magnitudes*, the *Inceptives of Magnitudes*, and the *Compoſition of Motions*, with the Reſults thereof.
IV. Of *Combinations*, *Alternations*, and *Aliquot Parts*.

By JOHN WALLIS, *D. D. Profeſſor of* Geometry *in the Univerſity of* Oxford; *and a Member of the* Royal Society, London

LONDON:
Printed by *John Playford*, for *Richard Davis*, Bookſeller, in the Univerſity of OXFORD, M. DC. LXXXV.

С 1685 г. «Трактат об алгебре» Джона Валлиса был и практическим пособием по алгебраическим методам своего времени, и путеводителем по истории алгебры.

Термин «алгебра» — еще одно наследство Мухаммада ибн Муса Аль-Хорезми, исламского ученого, возглавлявшего славный Дом мудрости — академию в Багдаде. Это было непревзойденное собрание интеллектуалов, достигших вершин в математике, астрономии, алхимии, медицине, астрологии, зоологии и географии. Арабские ученые популяризировали индийские числительные и десятичный разделитель.

В своем эпохальном труде 820 г. н. э. Аль-Хорезми впервые употребил термин *аль-джебр*, означающий «восполнение». От этого слова и берет начало понятие «алгебра». Аль-Хорезми не был первым, кто использовал буквенные обозначения неизвестных величин, но он формализовал процесс решения уравнений. Четыре века спустя, в начале XIII в., итальянский математик Леонардо Пизанский (Фибоначчи) познакомил с алгеброй европейцев, все еще оперировавших римскими цифрами.

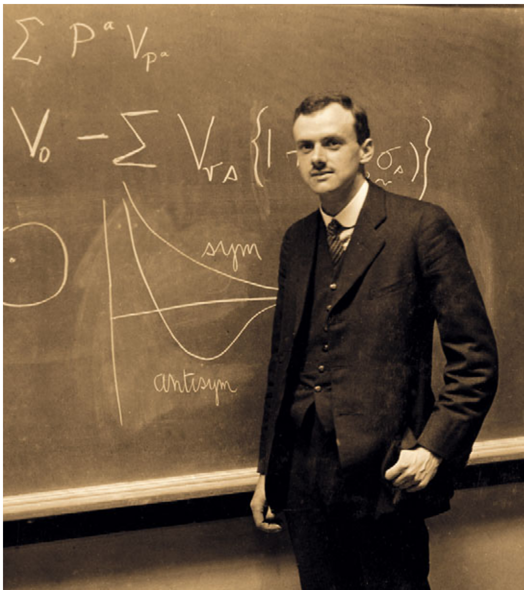
Зачем нужна алгебра

Алгебра позволяет описать «мировые проблемы» математическим языком. Аль-Хорезми использовал ее для решения квадратных уравнений (в которых переменная возведена в квадрат). Алгебраические выражения, подобные $2x - 3 = 5$, называются уравнениями, в отличие от равенств ($2 + 2 = 4$) и функциональных зависимостей ($F = ma$). Привычные нам сегодня символы x и y появились гораздо позже: Аль-Хорезми описывал задачу и способ ее решения не формулами, а словами. Преобразуя уравнения, он исходил из принципа подобия: если какое-либо действие производилось с одной его частью, то же действие производилось и с другой.

Возможности алгебры простираются гораздо дальше поиска неизвестных величин. Замена цифр символами позволяет математическому выражению описывать не частный случай, а общий принцип. Уравнения универсальны и не зависят от подставляемых в них чисел — они объясняют, почему конкретное решение является верным.

В начале XVII в. французский математик Рене Декарт связал алгебру с геометрией, найдя способ отображать функциональные зависимости на сетке координат. Этим способом (каждому значению x соответствует определенное значение y) любую функцию можно нанести на координатную сетку (т. е. выразить в графическом виде) и проанализировать. Такой подход позволяет вывести геометрию в другие измерения.

Поль Дирак, английский физик-теоретик, использовал алгебру для описания свойств электрона, в процессе чего открыл антиматерию. Для этого ему понадобились только алгебраические формулы.



23

Последовательность Фибоначчи

Имя Леонардо Пизанского не из тех, что входят в историю, а вот прозвище — Фибоначчи — осталось в веках. Влияние этого итальянца XIII в. на развитие математики неизмеримо. Он не только научил европейцев считать по-другому, он открыл одну из самых удивительных числовых последовательностей в истории математики.

Семена подсолнечника в околоплоднике закручиваются наружу по часовой стрелке или против часовой стрелки. Число закручиваний в любую из сторон всегда соответствует ряду Фибоначчи. Количество спиралей, закрученных по часовой стрелке, всегда будет предыдущим или следующим числом в последовательности относительно спиралей, закрученных против часовой стрелки.

На страницах «Книги счетов» Фибоначчи упоминается на первый взгляд тривиальная проблема предсказания приплода скота. Однако так называемая проблема кроликов позволила выявить закономерность в постоянном проявлении схожего численного ряда в математике роста, пропорций и даже красоты: «*Сколько пар кроликов мы получим через год, если мы начнем с одной пары, которая производит потомство — другую пару — каждый месяц, которая, в свою очередь, входит в репродуктивный период через два месяца*».

На первый взгляд, сформулированная Фибоначчи задача достойна уровня разве что старшей школы. Попробуем ее решить. Итак, начнем с первой пары. Через месяц у нас все еще одна пара, хотя самка беременна; на второй месяц у нас уже две пары; на третий — три (свежий приплод еще не способен к размножению); на четвертый — пять пар; на пятый — восемь. К концу года у нас будет 144 кролика.

Если рассмотреть эту последовательность внимательно, мы обнаружим, что каждое число является суммой двух предыдущих. Эта последовательность, сегодня известная как ряд Фибоначчи, обнаруживается в форме цветков, а также в других структурах — как в природе, так и в искусстве.

ЗОЛОТОЕ СОГЛАСОВАНИЕ

Ряд Фибоначчи удивительным образом связан с золотым соотношением (числом фи), несмотря на то, что выстраивается совершенно иным образом. Как бы то ни было, если разделить последовательные числа из ряда Фибоначчи на те, что им предшествуют, частное будет стремиться к числу фи. Результаты деления никогда не составят точное значение этого числа, однако уже десятое число в ряду при делении дает результат, отстающий от «золотого» менее чем на одну тысячную. Чем дальше по ряду Фибоначчи, тем ближе к числу фи будут результаты деления.

Положение в ряду	Число	Частное от деления на предыдущее число Фибоначчи	Разница с числом фи
1	1		
2	1	1,000000000000000	-0,618033988749895
3	2	2,000000000000000	+0,381966011250105
4	3	1,500000000000000	-0,118033988749895
5	5	1,666666666666667	+0,048632677916772
6	8	1,600000000000000	-0,018033988749895
7	13	1,625000000000000	+0,006966011250105
8	21	1,615384615384615	-0,002649373365279
9	34	1,619047619047619	+0,001013630297724
10	55	1,617647058823529	-0,000386929926365
11	89	1,618181818181818	+0,000147829431923
12	144	1,617977528089888	-0,000056460660007
13	233	1,618055555555556	+0,000021566805661
14	377	1,618025751072961	-0,000008237676933
15	610	1,618037135278515	+0,000003146528620
16	987	1,618032786885246	-0,000001201864649
17	1597	1,618034447821682	+0,000000459071787
18	2584	1,618033813400125	-0,000000175349770
19	4181	1,618034055727554	+0,000000066977659
20	6765	1,618033963166707	-0,000000025583188

РЕНЕССАНС И ЭПОХА ПРОСВЕЩЕНИЯ

24 Начертательная геометрия

Линейная (или геометрическая) перспектива — это способ создать иллюзию глубины на рисунке. Методы реалистичной передачи трехмерных объектов на двумерной плоскости впервые разработаны в Италии в XV в.

Линейная перспектива основана на том, что по мере удаления объектов от наблюдателя они кажутся меньше, а параллельные линии и плоскости «сходятся» в одной, исчезающей точке. Художник XIII в. н. э. Джотто часто создавал видимость глубины на картинах, используя наклонные линии. Те, что находились выше линии взгляда зрителя, были скошены вниз, те, что находились ниже линии взгляда, — вверх. От краев картины линии устремлялись к центру.

Первым математическое понимание перспективы продемонстрировал итальянский зодчий

Книга Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt *«Руководство к измерению циркулем и линейкой» Альбрехта Дюрера 1522 г. была сборником практических рекомендаций по созданию перспективных изображений в живописи. На приведенной здесь гравюре из этой книги показан процесс создания чертежа лютни.*

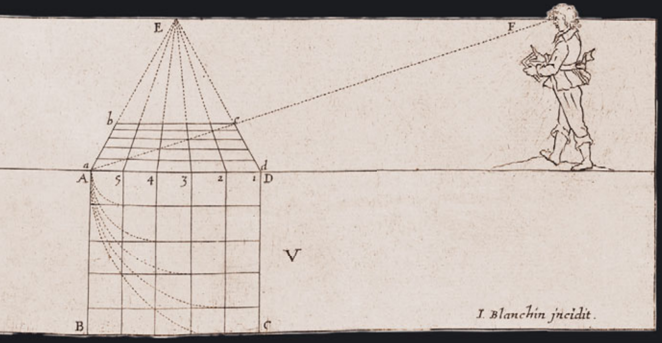


Диаграмма французского монаха, художника и математика XVII в., Жана-Франсуа Нисерона, показывает, как в перспективном изображении параллельные прямые сходятся в исчезающей точке.

Филиппо Брунеллески (одна из его работ — купол кафедрального собора Флоренции Санта-Мария-дель-Фьоре, или Дуомо). Он рассчитал соотношение между фактической длиной объекта и тем, как изменяется воспринимаемая длина по мере удаления от наблюдателя.

Шедевры

Другой великий итальянский архитектор Леон Баттиста Альберти первым записал свои идеи о линейной перспективе в трактате 1435 г. *Della Pittura* («О живописи»). Альберти разработал идею визуальной пирамиды. Начальная ее точка — апекс (вершина) — находится «в глазу» наблюдателя, а стороны вытянуты вовне от апекса по «краям» поля зрения. Картину можно представить как плоскость, пересекающую визуальную пирамиду, а ее апекс — идеальной точкой для наблюдения.

Исчезающая точка схождения линий «за» картиной представляется удаленной от плоскости картины настолько же, насколько от нее удален апекс, находящийся перед ней. Художники должны были представлять свой холст своего рода окном, сквозь которое наблюдатель видит визуализируемое пространство. Линия горизонта пересекает полотно на уровне глаз наблюдателя, а точка схождения находится примерно посередине этой линии. Такая техника называется «прямой перспективой», или перспективой, сведенной в одну точку.

Наиболее «математическое» описание свойств перспективы в эпоху Ренессанса (XV в.) дал Пьеро делла Франческа, ведущий математик и выдающийся художник своего времени. Он вывел математические формулы для расчета размеров объекта на холсте в зависимости от его удаления от наблюдателя. Кроме того, он разработал систему отображения сложных объектов, используя две линейки: одну — для измерения ширины, другую — для измерения высоты. По сути, он создал систему координат, в соответствии с которой художник размещал фигуры на холсте.

ИЗМЕНЕНИЕ ПЕРСПЕКТИВЫ

Ганс Гольбейн был выдающимся мастером искусства перспективы. На его картине «Послы» (1533 г.) изображены два человека, окруженные атрибутами искусства и науки. Сама картина выглядит непревзойденной демонстраций способности художника реалистично передать изображение предметов и людей. Однако на переднем плане Гольбейн поместил странный, искаженный объект. Только если посмотреть на него под правильным углом (с крайней правой стороны картины), становится понятно, что это изображение человеческого черепа. Прием, использованный здесь Гольбейном, называется «анаморфоз» — намеренное искажение перспективы, позволяющее верно рассмотреть объект только с определенной позиции.

25 Нелинейные уравнения

Графиком линейного уравнения является прямая линия. Отец Галилео Галилея, музыкант, в 80-х гг. XVI в. обнаружил, что зависимость может быть и нелинейной.

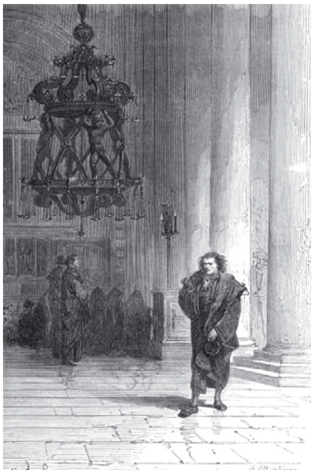
Винченцо Галилей был композитором и лютнистом. Его старший сын стал ученым, а младший, Микеланджело, был музыкантом-виртуозом.

Открытая Пифагором зависимость высоты музыкально тона от длины струны, из которой этот тон извлекают, линейная. Веками считалось, что линейной является и зависимость высоты тона от натяжения струны (чем сильнее она натянута, тем выше тон). Однако Винченцо Галилей продемонстрировал, что эта зависимость не линейна, а пропорциональна: интервал (шаг изменения высоты тона) пропорционален квадрату натяжения струны. Для духовых инструментов, таких как флейта, интервал был пропорционален возведенному в куб объему воздуха, вибрирующего в инструменте. Так, чистую квинту (интервал в 5 тонов) можно было взять либо на одинаковых струнах с соотношением длины 3:2, либо на одинаковых струнах, натяжение которых соотносится как 9:4, или за счет колонн воздуха, объем которых соотносится как 27:8*.

26 Закон маятника

Говорят, что Галилео Галилей открыл принцип маятника еще студентом, в 1582 г., будучи на мессе в соборе города Пиза. Как гласит легенда, он заметил, что подвешенная к потолку лампа раскачивается туда-сюда.

Подвесная раскачивающаяся лампа в соборе Пизы до сих пор носит имя Галилея.



Раскачал лампу служка, зажегший в ней свечи. Галилей замерил время раскачивания, используя свой пульс в качестве хронометра, и понял, что, хотя амплитуда качаний с каждым разом уменьшалась, каждое полное колебание лампы всегда совершалось за одно и то же время.

Правда это или нет, но известно, что Галилей начал систематически изучать маятники несколькими годами позже, примерно в 1602 г. Его исследования показали, что период колебаний простого маятника пропорционален квадратному корню его длины. Изменение массы груза маятника не влияет на период — маятник с более массивным грузом колеблется с той же частотой, что и более легкий.

Открытие этого свойства маятника, называемого изохронностью (или синхронностью, что означает «равное время»), привело к созданию первых точных механических часов. Одну из схем маятниковых часов разработал сам Галилей, но часы по его схеме так и не были созданы.

---

* Это не лучший пример нелинейной зависимости, ибо изучается поведение разнородных сред (а для этого используются разнородные принципы). Нелинейную (квадратичную) зависимость лучше демонстрирует маятник (см. следующий раздел) — увеличение длины подвеса в 2 раза увеличивает период колебаний вчетверо; в 3 раза — вдевятеро — *прим. пер.*

Дедушка часов

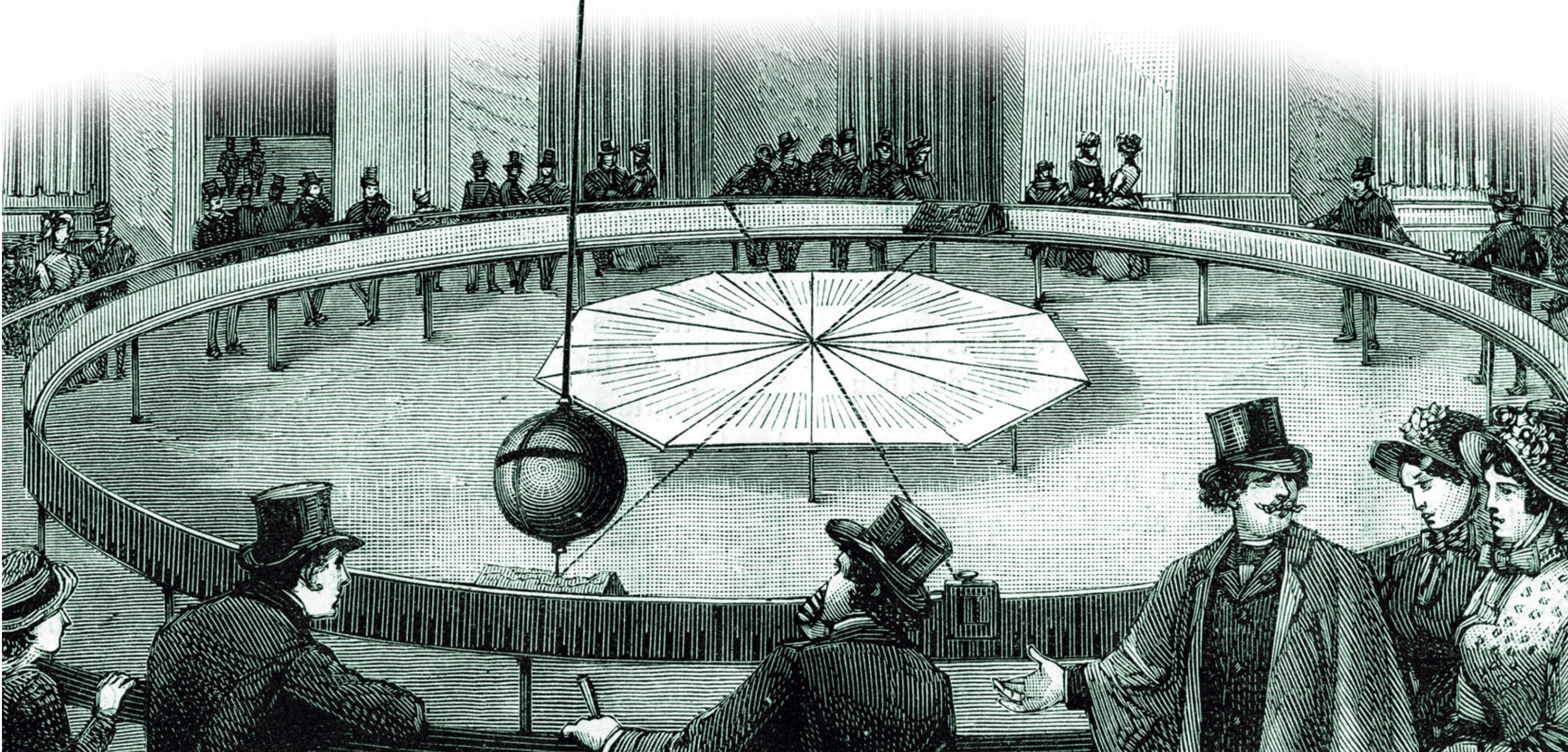
Голландский ученый Христиан Гюйгенс сконструировал первые часы с маятником в 1656 г. Механические часы появились еще в начале XIV в. — самые древние, о которых нам известно, были установлены в Милане в 1335 г. В движение их механизм приводился за счет постепенного контролируемого опускания груза с определенной скоростью. Ошибка хода таких часов составляла 15 минут и более в день. Механизм поворота стрелки в часах Гюйгенса копировал существовавшие ранее, но ход маятника обеспечивал сконструированный Гюйгенсом особый якорь. Смещение груза по оси маятника позволяло регулировать частоту колебаний (т. е. скорость хода часов). В часах Гюйгенса она равнялась ровно одной секунде.

Хотя эти часы были довольно точными (ошибка хода в них составляла всего несколько секунд в день), Гюйгенс продолжал совершенствовать конструкцию. Анализируя движения маятника, он нашел, что если его движения абсолютно изохронны, вне зависимости от точки начала движения, груз (материальная точка) должен следовать циклоиде — кривой в форме арки. Однако маятник описывает дуги, поэтому время, приходящееся на каждое колебание, немного меняется в зависимости от угла, на который маятник отклоняется при движении.

В случае с часами маленький угол отклонения означает, что любыми различиями в периоде колебаний можно пренебречь, но при этом маятник не развивает достаточного усилия, чтобы привести в действие механизм часов. В 1673 г. Гюйгенс сконструировал часы, верхняя часть маятника которых была сделана из гибкой проволоки, скользившей при качании по искривленной металлической поверхности, что немного изменяло общую длину маятника при качании, исправляя разницу в периодах его колебаний благодаря изменению их угла. Это позволило повысить мощность маятника (за счет увеличения угла колебаний), чтобы он мог приводить в действие часовой механизм.

Исследования Гюйгенса позволили Роберту Гуку и другим сформулировать математическую основу для теории колебаний, описывающей любые колебания, вплоть до вибраций атомов.

Копия маятниковых часов, созданных по модели Галилея в XVII в.



В 1851 г. Леон Фуко построил большой маятник в Париже для того, чтобы представить первое доказательство вращения Земли, не основанное на движении небесных тел. Маятник сохранял траекторию своих колебаний, в то время как Земля вращалась под ним. Поэтому за несколько часов раскачиваний маятника постоянно менявшаяся плоскость его колебаний совершила полный оборот и вернулась к своей первоначальной позиции.*

---

* В часах маятник Фуко, разумеется, не используется — *прим. пер.*

27

x и *y*

Франсуа Виета иногда называют «отцом алгебры», несмотря на то что «изобрел» алгебру не он. Однако без него такие знакомые нам сегодня уравнения были бы неузнаваемы.

Впервые знак равенства (=) появился в книге The Whetstone of Witte — математическом труде, опубликованном англичанином Робертом Рекордом в 1559 г.

Вклад французского математика XVI в. в науку заключался в том, что он ввел в запись уравнений буквы для обозначения известных констант — согласные, и неизвестных величин — гласные. Подход Виета позволил ему разрешить несколько проблем, перед которыми спасовали прежние ученые. Кроме того, этот метод позволил математикам анализировать взаимоотношения между значениями коэффициентов исходного уравнения и его решениями. Виету удалось расшифровать шифр из более 500 символов, использованный королем Филиппом II Испанским во время войны с французскими гугенотами. Король Филипп был настолько уверен в надежности своего шифра, что, обнаружив, что все его планы оказались известны французам, обратился с жалобой к Римскому Папе, обвиняя Виета в использовании сатанинской черной магии.

28

Эллипсы

Эллипс — кривая, похожая на сплющенную окружность, — был хорошо известен математикам Древней Греции. Такие кривые получались при сечении («нарезании») конусов, что было достаточно сложной, но вполне выполнимой геометрической задачей. В XVII в. математические принципы, связанные со скромным эллипсом, полностью перевернули представление человечества о Земле и Вселенной.

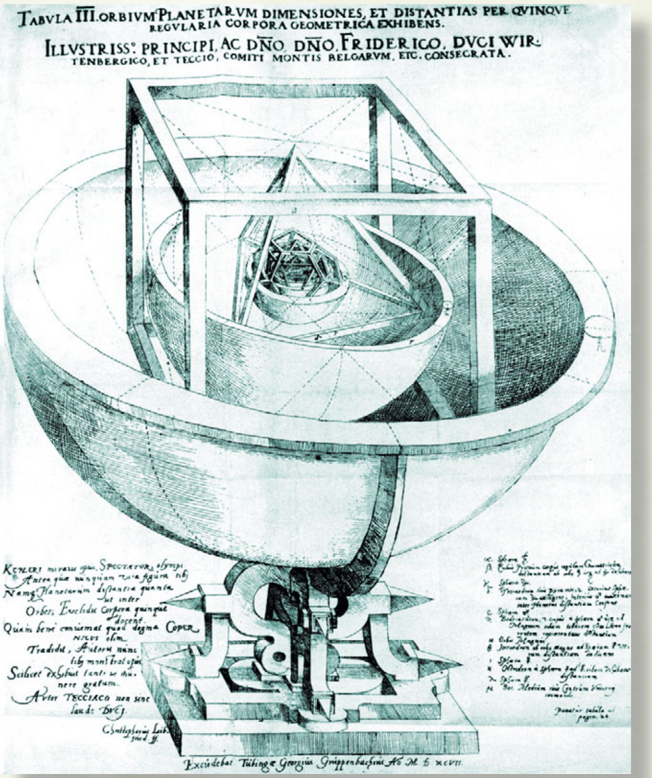
Веками люди верили, что Земля является центром Вселенной, а все звезды и планеты закреплены на сферах, обращение которых вокруг Земли порождает музыку. Около 260 г. до н. э. греческий астроном Аристарх Самосский предположил, что Земля обращается вокруг Солнца, но для людей того времени такая идея была слишком смелой. Потребовалось почти 1800 лет для того, чтобы в 1543 г. польский астроном Николай Коперник хорошенько встряхнул дремавший до того астрономический мир, доказав, что Аристарх Самосский все-таки был прав. Самым простым способом объяснить наблюдаемое движение планет было предположить, что они все обращаются вокруг Солнца, а Земля — лишь одна из шести космических тел, совершающих сходную эволюцию.

Немец Иоганн Кеплер пошел еще дальше, тщательно проанализировав труды своего наставника, датского астронома Тихо Браге. Тот провел тщательные наблюдения за движениями Марса. После шести лет утомительных расчетов Кеплер пришел к заключению, что результаты наблюдений Браге полностью опровергают предположение о том, что Марс описывает *окружность* вокруг Солнца. Единственным подходящим маршрутом для Марса был эллипс.

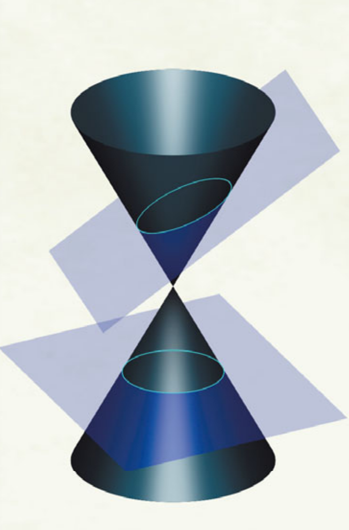
Смена фокуса

Окружность имеет только одну точку фокуса внутри себя — центр. Сплющенная окружность, то есть эллипс, имеет внутри себя две точки фокуса, находящиеся на равном расстоянии от центра по главной (она же самая длинная) оси фигуры. Сумма расстояний от любой точки периметра эллипса до точек фокуса постоянна. С увеличением расстояния между точками фокуса эллипс «вытягивается» вдоль своей главной оси, становясь менее «округлым». Окружности и эллипсы относятся к семейству кривых конического сечения, так как они образуются за счет сечения конусов плоскостью.

Вывод Кеплера об эллиптической траектории орбиты позволил ему сформулировать свой первый закон движения небесных тел в 1609 г. (так совпало, что именно в том году Галилей начал наблюдать в свой телескоп небо и обнаружил там луны Юпитера). Иногда этот закон Кеплера называют законом эллипсов: он гласит, что все планеты обращаются вокруг Солнца по траектории, образующей эллипс, в одной из точек фокуса которого и находится Солнце.



Кеплер придерживался древнегреческой концепции о том, что Вселенная математически гармонична. Он потратил много лет в поисках способа расположить орбиты шести известных в его время планет в пределах сфер, вписанных в или описанных вокруг пяти платоновых тел.*



Эллипсы составляют часть семейства «конических сечений» — кривых, образованных сечением конуса плоскостью под разными углами. Наравне с эллипсами и окружностями, сечения конуса образуют параболы (слева) и гиперболы (справа).

Движущая сила

Кеплер задался вопросом, что заставляет планеты двигаться. Он предположил, что это должна быть некая магнитная сила, которая притягивает планеты к Солнцу на одной части их орбиты и отталкивает на другой. Кеплер знал, что гравитационное притяжение Луны вызывает приливы и отливы на Земле, но не сумел связать это знание с орбитальным движением. Причиной этой ошибки стала его вера в то, что сила, заставляющая планеты двигаться по орбитам, должна быть постоянной. Объяснение того, почему планеты движутся по эллиптическим, а не круговым орбитам, появилось спустя еще 80 лет, после открытий Исаака Ньютона в области силы тяготения и движения.

---

* О платоновых телах см. Принцип № 9, с. 18 — *прим. пер.*

29

Логарифмы

До появления калькуляторов и компьютеров лучшими «механизмами» для вычислений были логарифмы. Их изобрел шотландский барон Джон Непер, 8-й лэрд Мерчистона, эксцентричный аристократ, редко появлявшийся на публике без своего ручного петуха и паука.

Логарифмы — это хитроумный способ упростить умножение, превратив его в сложение. Это достигается за счет потрясающего свойства перемножения чисел, возведенных в степень: для того чтобы перемножить между собой одинаковые числа, достаточно сложить между собой показатели степени, в которую они возводятся. Так, умножим 2^2 на 2^3. Получим (2×2) × (2×2×2) = 2×2×2×2×2 = 2^5. В результате получается 2^5, поскольку мы перемножили двойку на двойку 3+2=5 раз. То же самое происходит и с десятками. 100×1000 = 10^2×10^3 = 10^5 = 100 000.

MIRIFICI

Logarithmorum
Canonis deſcriptio,

Ejuſque uſus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logiſtica Mathematica,
Ampliſsimi, Facillimi, &
expeditiſsimi explicatio.

Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchiſtonii,
&c. Scoto.

EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopôlæ, CIↃ. DC. XIV.

Титульный лист книги Непера Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio («Описание удивительной таблицы логарифмов»), опубликованной в 1614 г.

Джон Непер решил выразить все числа как показатели степени других чисел, то есть как значения, в которые нужно возвести искомое число, чтобы получить исходное. При этом сами показатели степени выражались дробными числами. На первый взгляд это довольно запутанно, но квадратный корень любого числа можно представить как основание в степени ½ или 0,5: так, 5^2 = 25^1. Следовательно, $25^{0,5}$ = 5. Свои идеи Непер изложил в опубликованном в 1614 г. труде, скромно озаглавленном *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (*«Описание удивительной таблицы логарифмов»*). Термин «логарифм» он сконструировал из греческих корней «логос» («слово», «основание», «причина») и «аритмос» («число»).

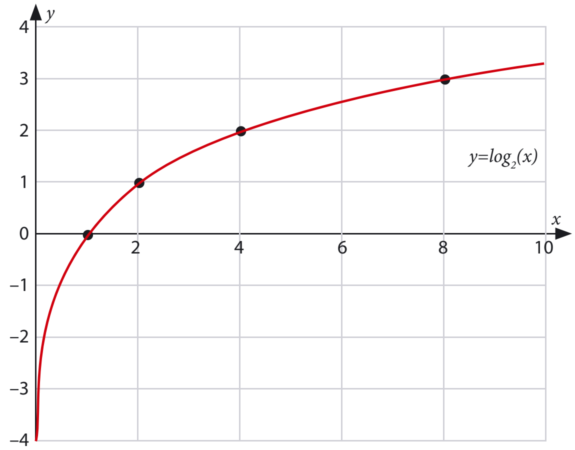


График показывает, как удвоение (умножение на 2) нормального числа увеличивает его двоичный логарифм (логарифм по основанию 2 или $\log_2$) на единицу.*

Десятичные логарифмы

Логарифмы Непера были довольно громоздкими, поскольку основывались на степени числа $1–10^{-7}$, т. е. 0,9999999. Коллега Непера, известный английский математик Генри Бриггс, предложил свою версию таблицы логарифмов, основой которой было число 10. Согласно его системе, логарифм — это показатель степени, в которую надо возвести 10, чтобы получить искомое число. Так, логарифм 100 по основанию 10 равен 2 (записывается это так: $\log_{10}100=2$), поскольку 10^2=100. Кроме того, Бриггс разработал

Таблица линейных значений (верхний ряд таблицы) и их двоичных логарифмов — степеней числа 2 (нижний ряд таблицы).

1	2	4	8	16	32	64	128	256
0	1	2	3	4	5	6	7	8

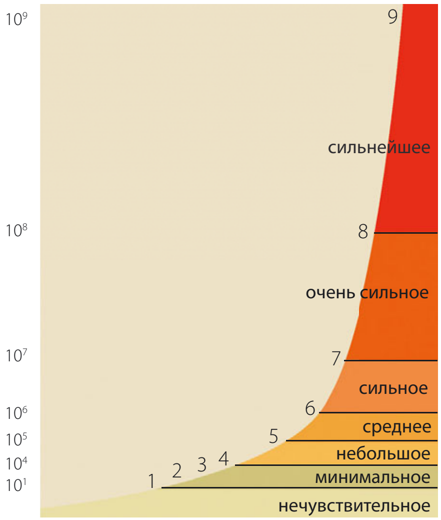
---

* Нормальное число — математическая абстракция, восходящая к понятию вещественного числа (см. Принцип №65, с. 81) — *прим. пер.*

первые таблицы логарифмов, опубликованные в 1624 г. Они стали превосходным инструментом, невероятно облегчившим вычисления. Ученые и инженеры использовали таблицы Бриггса почти 250 лет, до распространения карманных калькуляторов в 70-х гг. XX в.

Другим превосходным расчетным инструментом, широко применяемым практически в то же время, была логарифмическая линейка, принцип действия которой, как легко догадаться, основан на применении логарифмов. Для того чтобы перемножить числа с помощью таблицы логарифмов, необходимо найти значения логарифмов этих чисел в таблице и сложить их. Полученный результат в таблице *антилогарифмов* даст искомое значение.

Математически логарифмы — значения, обратные экспонентам (показателям степени числа) и могут быть взяты по любому основанию. Так, $\log_2 8=3$, поскольку $2^3=8$. Сегодня в математике *натуральные* логарифмы — логарифмы по основанию e* — чаще всего используются для описания изменений численных характеристик природных явлений. Сходными характеристиками обладают и экономические данные, для изучения которых число e и было впервые использовано математиками.



Один из наиболее известных примеров логарифмической шкалы — шкала Рихтера, по которой измеряют силу землетрясений. В 1935 г. в Калифорнии Чарльз Рихтер разработал эту шкалу, положив в основу принцип десятичного логарифма. Повышение на одну условную единицу (магнитуду) шкалы соответствует десятикратному росту силы землетрясения. Таким образом, энергия землетрясения магнитудой в 5,0 в 10 раз больше энергии землетрясения магнитудой в 4,0 и в 100 раз больше землетрясения магнитудой в 3,0.

Логарифмы в целом

Логарифмические шкалы гораздо компактнее обычных линейных шкал (таких, как шкала обычного градусника, например) и гораздо удобнее их для работы с очень большими диапазонами величин. Так, шкала pH, с помощью которой измеряют уровень кислотности и щелочности растворов, основана на логарифме концентрации ионов водорода в растворе. В реальности уровень этой концентрации может колебаться от значений в 1,0 моль (концентрированная кислота) до около 0,00000000000001 моль (концентрированная щелочь). Иными словами, диапазон значений достигает 100 000 000 000 000 единиц измерения. На шкале pH весь этот диапазон сведен к показателям от 0 до 14 (моль, кстати, это единица измерения количества; так же, как дюжина — это 12, гросс — 144, моль равна $6{,}0221415 \times 10^{23}$)**.

Психологи обнаружили, что человек естественным образом воспринимает числа в виде шкалы, напоминающей логарифмическую. Изучавшие математику в школе представляют себе числа, расположенные на равном расстоянии в числовом ряду, подобно делениям на рулетке. Исследования же народности Мундуруку, изолированно проживающей в джунглях Амазонки, показали, что в представлении даже взрослых числа располагаются в числовом ряду неравномерно — чем числа больше, тем ближе они друг к другу на своеобразной «логарифмической шкале». В пределах первой десятки дальше всего друг от друга отстоят 1 и 2, а 9 и 10 располагаются ближе всего друг к другу. Так же воспринимают числа и дошкольники в более развитых обществах. Похоже, логарифмы точнее отражают наше восприятие, чем порядковый счет — от пятой подряд шоколадки мы получаем меньше удовольствия, чем от первой; чем больше нам лет, тем быстрее, на наш взгляд, летит время.

ДЕСЯТИЧНЫЙ РАЗДЕЛИТЕЛЬ

Изобретатель логарифмов Джон Непер приложил руку и к тому, чтобы десятичный разделитель стал привычным математическим инструментом. В очередном (уже посмертном) издании его «Описания удивительной таблицы логарифмов» 1619 года десятичные части числа от целой разделяла точка. Сама идея десятичных дробей была предложена еще раньше — фламандским математиком Симоном Стевином в 1585 г. Способ записи Непера был значительно проще и быстро стал общеупотребимым стандартом. Сегодня в большинстве европейских стран (в России в том числе) знаком десятичного разделителя является запятая, а не точка.

184.54290

184⓪5①4②2③9④0

Два типа записи десятичных дробей: сверху современный, разработанный Джоном Непером; снизу — метод Стевина. Цифры в кругах показывают отрицательные степени десятки для чисел, что следуют за ними.

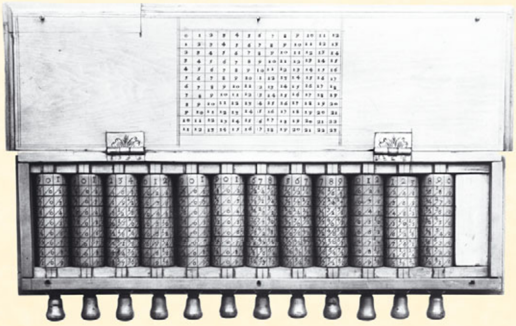
---

* Иррациональное число е подробно описано в Принципе №42 — *прим. пер.*

** *Гросс* — староанглийская мера количества, восходящая, как и дюжина, к 12-ричной системе счисления. Сегодня употребляется достаточно редко. *Моль* — единица измерения количества вещества в Международной системе единиц (СИ). Ее числовое значение соответствует количеству атомов в куске чистого изотопа углерода-12 массой 12 граммов — постоянной Авогадро, которая все время уточняется и на 2011 г. неофициально составляла $6{,}022\,140\,78(18) \times 10^{23}$ — *прим. пер.*

30 Палочки Непера

Джон Непер прославился многочисленными инновациями. Сегодня в его честь назван один из университетов Эдинбурга. Одно из самых известных его изобретений — простейший калькулятор.



Палочки Непера напоминают портативный набор таблиц умножения.

Он называется «Палочки Непера». Этот набор из десяти плашек позволяет осуществлять довольно сложные математические операции — «серийные» перемножения, деление — и даже извлекать квадратный и кубический корень. Плашки были пронумерованы в порядке от 0 до 9 (номер писался сверху). Далее по всей длине палочки снизу вверх располагались результаты умножения этих чисел в порядке возрастания. Положив эти плашки рядом в коробку, можно было считать результаты умножения. Пользователю этого калькулятора оставалось лишь дописать цифровое значение разряда. Принцип действия своей системы умножения Непер описал в последнем изданном им труде — *Rabdologiae*, опубликованном в 1617 г. Позднее он разработал еще более совершенный инструмент, назвав его *promptuary*.

31 Логарифмическая линейка

Тот, кто достаточно стар для того, чтобы помнить, как считать с помощью логарифмической линейки, скорее всего, вспоминает об этом с удовольствием. Элегантная простота этого прибора, позволявшего производить сложные расчеты за несколько секунд, практически не уступает удобству карманного калькулятора. Однако для того, чтобы пользоваться логарифмической линейкой, требуется помнить значения вычислений и следовать их процессу, а не просто давить на клавиши.

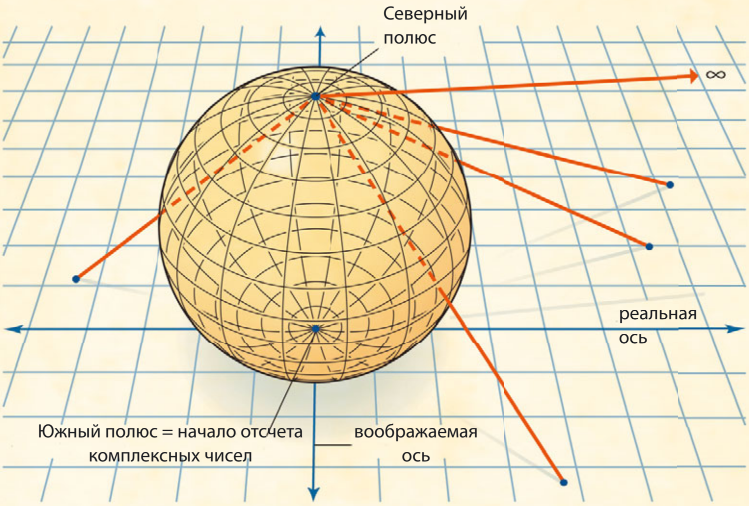
Логарифмическую линейку часто называют первым аналоговым компьютером, поскольку по самому простому определению компьютер — это прибор (или человек), производящий расчеты — как правило, сложные.

Таблицы логарифмов позволяют перемножать числа, складывая табличные значения, на логарифмической линейке эти значения нанесены на шкалу. Умножение осуществляется за счет сложения длин отрезков этой шкалы. Первый прибор такого типа, где логарифмические шкалы были нанесены на сдвигающиеся относительно друг друга плашки, был изобретен английским математиком Уильямом Отредом в 1622 г. Вскоре логарифмическая линейка завоевала репутацию самого совершенного калькулятора своего времени, и появилось множество ее вариаций. Сегодня она уже не используется, но считается, что с 1700 по 1975 год все без исключения технологические инновации были сделаны с ее помощью.

32

Комплексные числа

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА ПОДЧИНЯЮТСЯ ОПРЕДЕЛЕННОМУ НАБОРУ ПРАВИЛ, В ЧИСЛО КОТОРЫХ ВХОДЯТ И ТЕ, ЧТО УСТАНОВЛЕНЫ АКСИОМАМИ ЭВКЛИДА. Одно из них гласит, что при перемножении двух отрицательных чисел результат всегда будет положительным. Отсюда следует, что все квадраты целых чисел положительны по определению. Однако возникает естественный вопрос: каков квадратный корень из отрицательного числа?



В 1806 г. Жан-Робер Арган сформулировал идею компле́ксной плоскости, известной также как диаграмма Аргана. В этой плоскости реальные и воображаемые компоненты отображались на перпендикулярных осях. Приведенная здесь схема представляет трехмерную сферу Римана, содержащую все комплексные числа, меньшие, чем бесконечность (на рисунке помещена на «Северном полюсе»).

Квадратный корень из 4 ($\sqrt{4}$) равен 2 ($2^2 = 4$). Однако, $\sqrt{4}$ может быть равен и −2, ибо $-2^2 = 4$. На всякий случай напомним, что $2\times-2=-4$, и этот результат умножения не является квадратным числом, ибо он получен в результате действия с двумя *разными* величинами.

Как бы то ни было, к XVI в. решения сложных уравнений требовали операций с квадратными и кубическими корнями из отрицательных величин, и математикам пришлось соображать, как такое может быть.

В двух частях

В 1545 г. итальянский математик Джироламо Кардано обнаружил, что хотя квадратный корень из отрицательного числа не имеет реального числового значения, он может иметь воображаемое, или, как сам Кардано его называл, «мнимое» значение. Вскоре Рафаэль Бомбелли определил, как выражать решения некоторых уравнений в форме, которая впоследствии была названа комплексным числом.

Комплексное число состоит из двух компонентов: один из них — «реальный», основанный на вещественном числе 1 (оно же $\sqrt{1}$) или единице измерения, а другой — мнимый, основанный на числе i. В математический обиход оно вошло благодаря Леонарду Эйлеру, сократившему до одной буквы термин *imaginary* («воображаемый», «мнимый»), введенный Рене Декартом.

Это мнимое число i «работает» так же, как и обычная единица (1): $i + 2i = 3i$, но оно формирует основу для целого множества совершенно других чисел, абсолютно отличных от тех, что называются вещественными. Эти множества не пересекаются, но в остальном они идентичны. Так, комплексное число может выглядеть таким, например, образом: $1+i$; или таким: $3+2i$. Складывая или вычитая комплексные числа, действия производят над каждой частью этих чисел (вещественной и комплексной) отдельно. При умножении множитель применяется к обеим частям. Сам термин «комплексное число» предложил в 1831 г. Карл Фридрих Гаусс, назвав его «тенью теней», так как считал, что целые комплексные числа* — самые простые в иерархии мнимых величин. В 1843 г. Уильям Роуэн Гамильтон показал, что комплексные числа являются подмножеством кватернионов, системы гиперкомплексных чисел, используемых для описания четвертого измерения.

$$i^2 = -1$$

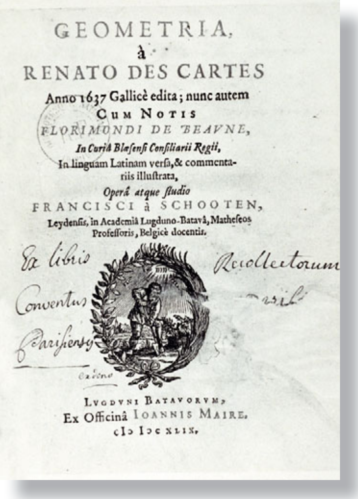
---

* Целое комплексное число — см. с. 124 — *прим. пер.*

33 Декартова система координат

Рене Декарт (Картезий — Cartesius — для тех, кто предпочитает латынь) широко известен своим популярным афоризмом «Я мыслю, следовательно, существую», однако славен он еще и тем, что создал систему координат, с помощью которой вы, осознав свое существование, можете определить, где именно вы существуете. При этом изначально Декарт вовсе не рассчитывал внести вклад в картографию и навигацию — он пытался объединить геометрию и алгебру.

Как самый настоящий «ботаник»-интроверт, Рене Декарт крепким здоровьем не отличался, поэтому большую часть юности провел в постели. Учителя разрешали ему оставаться там до ленча, но он не просто пролеживал бока. Напротив, он был одним из лучших учеников иезуитского колледжа. Правда, привычка подолгу нежиться в постели осталась с ним надолго — она не из тех, от которых просто избавиться. Большинство математических идей Декарта, вошедших в его знаменитую книгу *Discours de la Methode* («Размышление о методе»), опубликованную в 1637 г., пришли ему в голову 20 годами раньше, когда он служил в голландской армии (по-прежнему не вылезая из постели)*.



GEOMETRIA,
à
RENATO DES CARTES
Anno 1637 Gallicè edita; nunc autem
Cum Notis
FLORIMONDI DE BEAVNE,
In Curiâ Blæsensi Consiliarii Regii,
In linguam Latinam versa, & commentariis illustrata,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
Leydensis, in Academiâ Lugduno-Batavâ, Matheseos
Professoris, Belgicè docentis.
Ex libris Recollectorum
Conventus
Parisiensis
LVGDVNI BATAVORVM,
Ex Officinâ IOANNIS MAIRE.
cIɔ Iɔc XLIX.

Издание «Геометрии» Декарта на латыни, опубликованное в качестве приложения к его Discours de la Methode *(«Размышлению о методе») в 1637 г. Эта работа оказала огромное влияние на развитие математики, приведя, по сути, напрямую к разработке Исааком Ньютоном дифференциального и интегрального исчисления.*

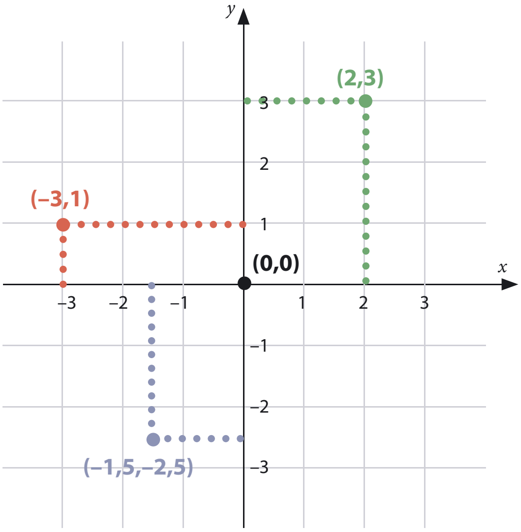
Муха на стене

Рассказывают, что как-то утром, глубоко задумавшись, Декарт случайно взглянул на муху, переползающую со стены на потолок. Он понял, что путь движения мухи — и фигуры, которые образует его траектория, — можно передать двояко: геометрически, если отслеживать его непрерывно, и алгебраически, фиксируя каждую точку пройденного пути. Для того чтобы описать эти точки на плоскости, он разработал координатную сетку на основе двух перпендикулярных числовых прямых — осей.

Декарт обозначал их буквами a и b, но сегодня мы обозначаем горизонтальную ось буквой x, а вертикальную — буквой y. Пьер де Ферма, часто жестко критиковавший Декарта, независимо от него сформулировал трехмерную систему координат, имевшую три оси. На случай, если вы не догадались, сегодня эта третья ось, используемая, в частности, для того, чтобы задавать и определять координаты на комплексной плоскости, обозначается буквой z.

Картографические координаты — хорошо известный способ использования системы Декарта. Но кроме того с ее помощью можно преобразовать алгебраические выражения в линии, а формы и фигуры описать алгебраически. Простейший пример — формула прямой линии (или график линейного уравнения) $y = kx + m$, где k — угловой коэффициент (степень наклона) прямой, или необходимый для получения требуемого значения y множитель показателя x; а m означает точку, в которой y равен 0, а прямая пересекает координатную ось.

Декартовы координаты всегда записываются в форме (x,y). Точка пересечения координатных осей называется точкой начала координат и имеет координаты (0,0).



---

* Военная биография Рене Декарта была достаточно бурной. По сути, он избрал карьеру наемника, поучаствовав не только в Тридцатилетней войне (уже на стороне Католической лиги), но и в осаде Ля Рошели — *прим. пер.*

34

Законы падения

Труды Галилео Галилея ознаменовали рождение новой традиции: полномасштабное применение математики к естественнонаучным исследованиям. Это шло вразрез с существовавшей в его время практикой, основанной на учении Аристотеля. Количественные методы объяснения природных процессов — таких, например, как падение — почитались спорными. Галилей стал одним из первых мыслителей, утверждавших, что законы природы написаны языком математики.

$$x = at^2$$

Закон падения, сформулированный Галилеем, постулирует, что дистанция, пройденная падающим объектом любой массы, пропорциональна квадрату времени его падения: за две секунды падения мяч пройдет вчетверо большее расстояние, чем тот же мяч за одну секунду. Величина в приведенном выше уравнении — постоянная; позднее было доказано, что она является ускорением свободного падения.*

Описывая движение в терминах точных математических законов, Галилей полагался на эксперименты, наблюдения и измерения. Такой подход, возможно, был самым революционным из всех открытий Галилея в естественных науках, стяжавших ему славу великого ученого. При этом идея «закона квадрата» о том, что расстояние, пройденное свободно падающим под воздействием силы тяжести телом, пропорционально времени падения, выдвигалась и более ранними исследователями. До Галилея было известно и то, что тела продолжают движение и после того, как к ним перестают применять силу, приводящую их в движение.

Галилей полностью отказался как от положения о том, что причиной сохранения движения тел является полученный ими ранее импульс, так и от идеи Аристотеля о том, что более тяжелые предметы падают быстрее, поскольку в них больше «земного начала».

Вместо этого он кропотливо проводил множество экспериментов, а свои умозаключения формулировал как математические законы. Он не только окончательно подтвердил верность «закона квадратов» для падающих тел, он показал, что скорость их падения прямо пропорциональна его времени. Кроме того, он вычислил, что траектория брошенного под углом к горизонту объекта будет параболической (сечением конуса) — в результате его постоянного горизонтального движения и меняющегося вертикального.

Наиболее полное изложение математических законов физики, сформулированных Галилеем, содержится в его книге *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* («Беседы и математические доказательства двух новых наук»), увидевшей свет в 1638 г. К тому времени Галилей находился под домашним арестом, наложенным на него в 1633 г. за распространение еретической идеи о том, что Земля движется вокруг Солнца. Поэтому для издания его труд пришлось контрабандой переправить в Нидерланды.

ГАЛИЛЕЙ И ПИЗАНСКАЯ БАШНЯ

Один из самых распространенных мифов о Галилее состоит в том, что он демонстрировал свои опыты с падением предметов, сбрасывая шары разного размера и веса с Пизанской башни. Маленький шар падал на землю одновременно с большим, и это мгновенно опровергало господствовавшую тогда теорию Аристотеля о том, что более тяжелые объекты падают быстрее.

Скорее всего, это был мысленный эксперимент, проведенный в уме ученого, а не на публике. Записей о таком опыте у самого Галилея нет, упоминается он только в биографии ученого, составленной его учеником Винченцо Вивиани. Однако возможно и то, что подобный эксперимент проводили и до Галилея — для опровержения аристотелевой картины мира требовалось гораздо больше, чем одна демонстрация противоречащего ей события.

---

* Более точная запись закона свободного падения выглядит так: $d = 1/2gt^2$, где d — пройденное расстояние, g — ускорение свободного падения (равное у поверхности Земли 9,8 м/с^2, t — время падения) — *прим. пер.*

35 Калькуляторы

Началом компьютерной эры можно посчитать многие даты, но первой вехой на этом пути, пожалуй, была «Паскалина» — механическая счетная машина, пользователям которой не нужно было понимать сути происходящих процессов: все расчеты выполнялись автоматически.

Вращая наборные колесики, в «Паскалину» можно было вводить любые числа вплоть до шестизначных. Ввод следующего числа автоматически суммировал его с предыдущим.

Слово «компьютер» родом из Англии. Впервые оно было записано в 1613 г., означало «вычислитель» и применялось по отношению к человеку, чья работа состояла в проведении сложных подсчетов. Таким «человеком-компьютером» был, например, отец Блеза Паскаля, которому поручили провести реорганизацию системы налогообложения одной из провинций во Франции. Юный Паскаль быстро сообразил, насколько полезной может быть вычислительная машина, и в 1642 г. начал работу над созданием устройства, впоследствии получившего имя «Паскалина». Он сконструировал 50 опытных образцов, прежде чем в 1654 г. наконец получил совершенную модель. После этого он создал еще примерно 20 машин, 9 из которых сохранились до наших дней. Общество никогда не сомневалось в правильности такого выбора — сегодня за нас ведут подсчеты кассовые аппараты, динамические таблицы и множество других автоматических вычислителей.

Пользовательский интерфейс

«Паскалину» можно было настроить на выполнение сложения или вычитания. Умножение производилось путем многократного сложения. Числа вводились в счетную машину поворотом наборных колесиков на требуемый угол. Набираемое число отображалось в окошке над наборным колесиком. Ввод нового числа автоматически суммировал его с уже введенным. Система зубчатых колес и анкеров автоматически повышала разряд полученного в результате вычисления числа, сдвигая соседнее колесико. Для того чтобы вычитать на «Паскалине», необходимо было сдвинуть специальную планку в соответствующую позицию*. На некоторых машинах база была не десятеричной — денежная система Франции того времени была довольно запутанной, а система мер (длины, в частности) — весьма архаичной, и вести финансовые или топографические расчеты в десятеричной системе было бессмысленно.

ХРОНОЛОГИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ

XX век
Счеты
комбинация счетных палочек и счетного стола

1600
Палочки Непера
счетное устройство Джона Непера

1633
Логарифмическая линейка
усовершенствования Уильяма Отреда

1642
«Паскалина»
первое механическое вычислительное устройство

1673
Калькулятор Лейбница
Готфрид Лейбниц изобретает свой механический калькулятор

1822
Разностная машина
изобретение Чарльза Бэббиджа; так никогда и не построенный первый компьютер

1853
Машина вычислений Шутца
первый печатающий калькулятор

1874
Арифмометр Однера
его система используется во всех более поздних механических калькуляторах

1961
Anita Mk 8
первый массовый электронный калькулятор

1971
Busicom 141-PF
первый калькулятор, оснащенный микрочипом

1974
Hewlett Packard HP65
первый портативный программируемый калькулятор

---

* Все имеющиеся описания различных модификаций «Паскалины» говорят о том, что вычитание осуществлялось методом дополнения до девяти (учета числа, необходимого, чтобы после сложения его с исходным получилось 9), а окошки над колесиками, в которых отображались цифры, служили как раз для облегчения этого процесса — *прим. пер.*

36 Треугольники Паскаля

Эти треугольники похожи на детские пирамидки из кубиков со случайным набором чисел, но Блез Паскаль (и многие другие) собирали их для того, чтобы исследовать взаимоотношения между биномиальными коэффициентами (тот самый бином Ньютона!). Это числа и их сочетания, которые изучаются теорией множеств, а подобные треугольники подобны математическим калейдоскопам, бесконечные сочетания элементов в которых позволяют заглянуть в самую суть чисел.


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

Внешняя «оболочка» треугольника Паскаля составлена из единиц, а под ними находятся натуральные числа (мы используем их при порядковом счете). Можно также представить, что вокруг треугольника лежит бесконечное число ячеек с нолем.

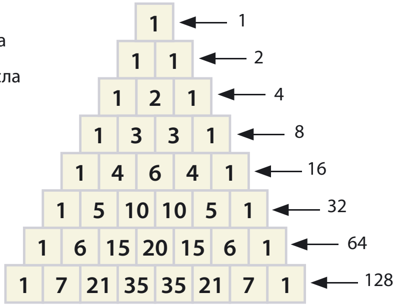
Блез Паскаль не был изобретателем этой треугольной фигуры, но его исследования в 50-х гг. XVII в. были настолько важными, что им присвоили имя этого французского математика. Вероятнее всего, впервые такой треугольник был собран китайским ученым Цзя Сянем в XI в. В принципе, собрать такой треугольник несложно (здесь и сейчас обсуждать бином Ньютона мы не будем). Сумма двух соседних чисел дает число под ними. Единицы, из которых формируются внешние грани треугольника, не имеют соседей (0 + 1 = 1). Вторую диагональ треугольника образуют натуральные числа — каждое из них является суммой предыдущего числа и единицы.

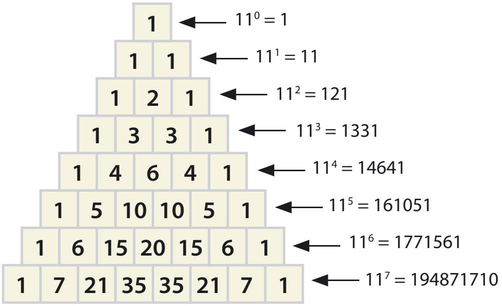
От простого к сложному

В треугольниках скрыто множество других числовых последовательностей. Самое интересное начинается с третьей диагонали. Члены этой последовательности — 1, 3, 6, 10 и т. д. — являются треугольными числами. На их основе можно составлять правильные треугольники на плоскости. Числа четвертой диагонали — тетраэдральные, представляющие пирамиду, в основании которой лежит треугольник (то есть трехмерный треугольник). Пятая диагональ состоит из пентатопных чисел, формирующих гиперпирамиды (четырехмерные пятиячеечники) — и так далее; каждая последующая диагональ добавляет в численный ряд одно пространственное измерение. Более того, сдвинув ряды треугольника так, чтобы диагонали превратились в колонки и добавив их «новые» диагонали, мы получим последовательность Фибоначчи!

Треугольник содержит несколько удивительных числовых последовательностей. Сумма чисел в каждом ряду вдвое больше, чем в предыдущем. Каждый ряд также содержит степени числа 11.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1


1 ← 1
1 1 ← 2
1 2 1 ← 4
1 3 3 1 ← 8
1 4 6 4 1 ← 16
1 5 10 10 5 1 ← 32
1 6 15 20 15 6 1 ← 64
1 7 21 35 35 21 7 1 ← 128


1 ← $11^0 = 1$
1 1 ← $11^1 = 11$
1 2 1 ← $11^2 = 121$
1 3 3 1 ← $11^3 = 1331$
1 4 6 4 1 ← $11^4 = 14641$
1 5 10 10 5 1 ← $11^5 = 161051$
1 6 15 20 15 6 1 ← $11^6 = 1771561$
1 7 21 35 35 21 7 1 ← $11^7 = 194871710$

37

Вероятность

Люди играли в азартные игры, пытаясь поймать удачу, с доисторических времен. Однако до тех пор, пока два великих французских математика, которые никогда не встречались лично, не вступили в переписку друг с другом в 1654 г., удачу (или вероятность) математически изучать даже не пытались.

Историки-математики недоумевают, почему изучение законов вероятности началось так поздно. Азартные игры с кубиками или другими объектами (можете представить себе игроков, азартно мечущих козлиные бабки?) велись уже в глубокой древности. Очевидно, такие элементы азартных игр, как элемент случайности (например, жребий), использовались в гадательных практиках — для того, чтобы понять «волю богов» и предсказать будущее.

Возможно, где-то в глубине души люди считали, что искать какие-то закономерности или законы в такой деятельности в чем-то неправильно, или попросту считали, что будущее невозможно предсказать рациональными способами.

Одна из ключевых концепций вероятности в том, чтобы принять, что каждое событие — бросок кубика, например, — происходит независимо от тех, что были раньше или произойдут позже.

Начиная со Средних веков, стали появляться редкие записи на этот счет — список 36 результатов бросков двух кубиков, например. Даже Галилей написал статью о проблеме бросков кубиков. Но никогда не публиковал ее. Только французские математики Блез Паскаль и Пьер де Ферма вывели размышления по поводу вероятностей на новый уровень.

Переписка

Поводом для появления известной серии писем, которыми обменялись Паскаль и Ферма, были проблемы, которые поставил перед Паскалем его друг — известный писатель и игрок Шевалье де Мере*. Главной из них он назвал «проблему очков», которую описал так: двое играют в кости; выигрывает тот, кто выиграет определенное количество раундов; однако они решают прерваться раньше, причем один выигрывает у другого небольшое количество раундов. Как верно разделить между ними поставленные на кон деньги?

Сложность описанной задачи в том, что необходимо точно оценить все возможные результаты бросков, которые могли бы быть сделаны, если бы игра продолжалась. Как и со многими другими задачами, связанными с вероятностями, здесь очень легко прийти к быстрому, но неверному ответу. Из переписки видно, с какими трудностями столкнулся Паскаль, пытаясь решить задачку друга, и как Ферма, обладавший более ясным умом, обнаружил правильный ответ.

Письма получили широкое хождение в среде интеллектуалов, посещавших парижский салон, завсегдатаем которого был Паскаль. Публика сразу заметила, что появился новый раздел математики, ожидающий своего развития. Более того, стало ясно, что если для

ПРОБЛЕМА ШЕВАЛЬЕ ДЕ МЕРЕ

Шевалье де Мере заключил пари о том, что он выбросит хотя бы один раз шестерку за четыре броска кубика. Он знал, что шанс сделать это в одном броске равен 1/6.

Исходя из этого, он подсчитал, что шанс выбросить шестерку за четыре броска равен (1/6)×4 = 2/3. Иными словами, он скорее сумеет это сделать, чем не сумеет. Однако подсчеты де Мере были не совсем точны.

Общее количество возможных результатов при четырех бросках кубика составляет 6^4:

$(6\times6\times6\times6)=6^4=1296$.

Общее количество возможных проигрышных бросков (выпавших чисел от 1 до 5 включительно) при четырех бросках кубика составляет 5^4:

$(5\times5\times5\times5)=5^4=625$.

Таким образом, общее количество возможных выигрышных бросков составит:

1269 – 625 = 671.

Поскольку 671 больше, чем 625, количество выигрышных исходов выше, чем проигрышных, но незначительно. Значит, общая вероятность Шевалье де Мере выиграть пари была несколько ниже, чем ему представлялось.

---

* Шевалье (кавалер) де Мере — псевдоним и литературное альтер-эго французского салонного писателя Антуана Гомбо — *прим. пер.*

решения некоторых проблем вполне хватало ясной головы и аккуратного подсчета вероятностей, другие задачи были гораздо сложнее, так что для их решения требовалось разработать новые математические методы.

Уровень доверия

Первый из многих трактатов по этому предмету был написан практически немедленно голландским ученым-математиком Христианом Гюйгенсом. Вдохновлялся он перепиской Паскаля с Ферма. Следующим был Якоб Бернулли, старший брат в знаменитой семье швейцарских математиков, в чьей книге «Искусство предположений», изданной посмертно в 1713 г., слово «вероятность» впервые употреблялось в современном значении. До этого оно означало всего лишь «уровень доверия».

Есть только один способ проверить, насколько подбрасывание монетки для принятия решения приносит действительно случайные результаты — подбросить ее тысячи раз.

Вскоре после этого француз Абрахам де Маувр показал, как часто природные явления (точнее, вероятность их возникновения) распределяются по колоколообразной кривой. Позже Карл Гаусс, которого часто величают «князем математики» назвал эту закономерность «равномерным распределением».

Большинство ранних компонентов теории вероятности были чисто математическими или в лучшем случае относились к азартным играм, которые и без того были уже достаточно изучены. Однако уже вскоре последовали попытки применить вероятностные закономерности к сложным системам и процессам реального мира. В их числе были и прогнозы средней продолжительности жизни для страховых компаний, производство которых началось, как только появились первые надежные демографические данные. Однако до конца XIX в. в полном масштабе теория вероятностей для анализа статистических данных не использовалась. Сегодня же это одно из наиболее частых ее практических применений.

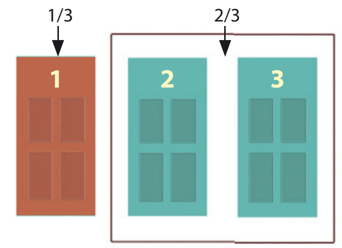
Вероятность составляет…

В XX в. математическая теория вероятностей была переформулирована в более строгой форме. С распространением компьютеров практическое применение получил совершенно новый подход к изучению вероятностей — так называемый Байесовский метод. Сегодня он широко используется в управлении рисками и принятии решений.

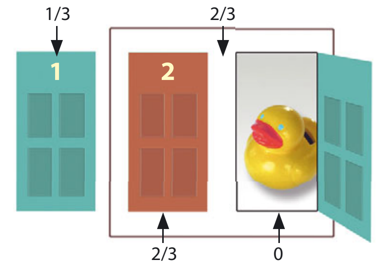
Однако теория вероятностей и сегодня сохраняет крепкую связь со своими корнями — играми и пари. Правительства используют ее, например, для проверки «честности» игровых автоматов. Часто она служит основой математических головоломок, где еще может преподнести большие сюрпризы.

ПРОБЛЕМА МОНТИ ХОЛЛА

Название этой проблеме дало имя ведущего игрового ТВ-шоу. В нем участники должны были угадать, за какой из трех закрытых дверей находится главный приз (за другими дверями находились утешительные). Участник выбирал одну дверь, которая оставалась закрытой. Ведущий открывал одну из двух оставшихся, демонстрируя утешительный приз, и предлагал участнику изменить его первоначальный выбор. Здравый смысл подсказывает, что от этого ничего не меняется — придерживайся первой двери или выбери новую, шансы все равно составляют 50 на 50. Однако, как ни удивительно, теория вероятностей подтверждает, что участник всегда должен менять свой первоначальный выбор, чтобы повысить шансы на выигрыш.



Вероятность успеха первого выбора (дверь №1) составляет 1/3. Две закрытые двери (дверь №2 и дверь №3) вместе составляют общую вероятность в 2/3.



Открытие двери №3 (с утешительным призом) не понижает общую вероятность, поэтому дверь №2 по-прежнему имеет 2/3 шанса оказаться верной. Всегда меняйте свое решение.

38

Принцип индукции

Дедукция позволяет, следуя общим правилам, делать выводы о частных деталях, а индукция позволяет выявлять общее, полагаясь на частности. В математике индукция — одна из форм доказательства, такая же строгая, как любая другая.

$$0+1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Индукция доказывает, что приведенное здесь утверждение, обозначенное как P(n), показывает, что сумма всех целых чисел меньше или равных n будет равна приведенной выше формуле.

Термин «индукция» ввел в 1655 г. английский математик Джон Валлис*, но сама идея индуктивного доказательства восходит к временам еще античной Греции. В 1654 г. французский математик Блез Паскаль с использованием метода математической индукции доказывал свойства структуры, известной сегодня как «треугольник Паскаля». Идея доказательства по индукции состоит в том, чтобы показать, что если математическое утверждение или уравнение верно для данного целого числа, его можно распространить и на все остальные целые числа, бóльшие данного.

Обычно доказательство ведется так: демонстрируется, что некое выражение является верным для некоторого количества начальных целых чисел (обычно 0, 1 или 2). Далее формируется гипотеза о том, что данное выражение справедливо для любого целого числа (назовем его, допустим, n). Потом алгебраически показывается, что если данное выражение справедливо для n, тогда оно должно быть справедливо и для следующего за ним числа ($n + 1$). Это означает, что, если выражение справедливо для начального числа, оно также должно быть верным и для следующего — и для следующего за этим, и так далее до бесконечности.

39

Дифференциальное и интегральное исчисление

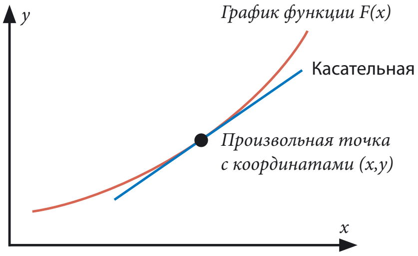
Дифференциальное и интегральное исчисление было названо «наиболее эффективным инструментом научного анализа, когда-либо созданным математиками». Вопросы, которые можно решить с помощью этого метода, волновали математиков со времен Древней Греции, но до определенного времени получить удавалось лишь частичные ответы. Однако потом в течение всего нескольких лет два великих ума независимо друг от друга предложили решения проблемы.

Создателями дифференциального и интегрального исчисления были Исаак Ньютон в Англии и Готфрид Вильгельм Лейбниц в Германии. Математически методы обоих ученых были равно эффективны, а вот подходы существенно различались.

Скрытое открытие

Ньютон в основном интересовался оценкой изменения скорости в кратчайшие единицы времени — иными словами, бесконечно малыми величинами. Его конечной целью было понять принципы движения планет, меняющих скорость перемещения по орбитам. Ньютон был превосходным математиком — прежде чем заняться этой проблемой, он уже добился существенных успехов в области сложения бесконечных рядов. Разрабатывая свой метод исчисления, названный *флюксией***, Ньютон вполне

Разрабатывая свою систему дифференциального и интегрального исчисления, Ньютон опирался на геометрические методы, анализируя свойства касательных — точное значение тангенсов угла наклона кривой в произвольной точке.

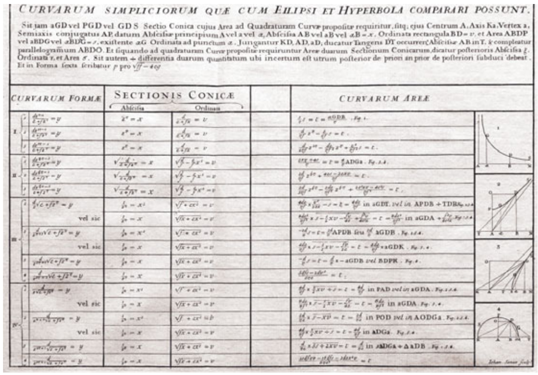


---

* Фамилию Джона Валлиса (John Wallis) точнее передавать, конечно, «Уоллис». Однако написание «Валлис» уже устоялось в математике — *прим. пер.*

** По определению Ньютона, флюксия — это производная непрерывной функции. Ньютон, по всей видимости, осмысливал математические методы лишь как инструментарий для изучения механики, поэтому «привязывал» свои определения к физическим свойствам объектов. «Флюксия» (fluxion) дословно означает «течение» или «прилив» — *прим. пер.*

отдавал себе отчет в том, что существует логическая проблема, связанная с бесконечно малыми величинами — как вообще они могут существовать, если они бесконечно малы? Это затруднение, похоже, послужило причиной того, что Ньютон, разработав свой метод дифференциального и интегрального исчисления, по всей вероятности, к концу 1665 г., не спешил обнародовать результаты. Даже в изданных 20 лет спустя знаменитых «Началах»*, Ньютон не привел развернутого описания метода флюксий, упомянув вместо этого метод «первых и последних отношений» — идею, тождественную более поздней концепции математического *предела***. Возможно, осторожность Ньютона была оправданна, поскольку логически безупречную основу для анализа бесконечно малых величин создали лишь в середине XIX в.



CURVARUM SIMPLICIORUM QUÆ CUM ELLIPSI ET HYPERBOLA COMPARARI POSSUNT.

Sit jam aGD vel PGD vel GDS Sectio Conica cujus Area ad Quadraturam Curvæ propoſitæ requiritur, ſitq; ejus Centrum A, Axis Ka, Vertex a, Semiaxis conjugatus AP, datum Abſciſſæ principium A vel a vel α, Abſciſſa AB vel aB vel αB = x. Ordinata rectangula BD = v, et Area ABDP vel aBDG vel αBDG = s, exiſtente αG Ordinata ad punctum α. Jungantur KD, AD, aD; ducatur Tangens DT occurrens Abſciſſæ AB in T. & compleatur parallelogrammum ABDO. Et ſiquando ad quadraturam Curvæ propoſitæ requiruntur Areæ duarum Sectionum Conicarum, dicatur poſterioris Abſciſſa ξ, Ordinata τ, et Area σ. Sit autem ÷ differentia duarum quantitatum ubi incertum eſt utrum poſterior de priori an prior de poſteriori ſubduci debeat. Et in Forma ſexta ſcribatur p pro $\sqrt{ff-4eg}$

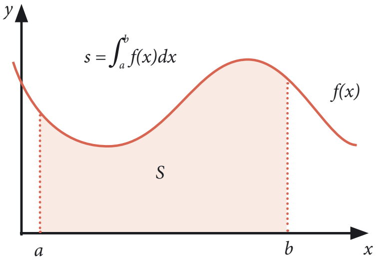
CURVARUM FORMÆ	SECTIONIS CONICÆ			CURVARUM AREÆ
	Abſciſſa	Ordinata		

Опубликованная в 1779 г. таблица сравнивает графики различных простых функций, применяемых в интегральном и дифференциальном исчислении, и эллиптические и гиперболические кривые, получаемые при сечении конуса.

Во всеуслышание

Лейбниц поначалу был вовсе не ученым, а дипломатом и философом. Оптимистичный до абсурда доктор Панглосс — персонаж повести «Кандид» — вольтеровская карикатура на Лейбница. Всерьез математикой он заинтересовался позднее, в начале 70-х гг. XVII в. Для Лейбница бесконечно малые величины были абсолютно реальны, поэтому, в отличие от Ньютона, он не испытывал сомнений, публикуя свой метод исчисления в 1684 г. С самого начала Лейбниц сосредоточился на анализе не скорости изменения значений функции, а на том, как измерить точное значение площади фигур, ограниченных отрезками кривых. Метод аппроксимации (подсчета приблизительного значения), основанный на заполнении искомой площади все более мелкими фигурами, площадь которых легко подсчитывается арифметическими методами, был известен еще со времен Архимеда, но Лейбниц предложил долгожданное общее решение этой задачи. Кроме того, он ввел и определения, применяемые в новом виде исчисления: *dy/dx* для обозначения непрерывного изменения переменной величины функции — дифференциала — и ∫ (как вытянутая латинская буква *s*) для обозначения аналога суммы последовательности бесконечно малых (площади графика функции) — интеграла.

Методика Лейбница была основана на процессе интегрирования различных функций для определения значений площади и объема. На рис. внизу график функции f(x) обозначен красной линией. Площадь S под графиком является интегралом функции f(x) в интервале «a»–«b». Значение этой площади определяется как разность между интегралом функции x=b и x=a.



Общая основа

Несмотря на некоторые различия в подходах, Ньютон и Лейбниц оба пришли к одной и той же фундаментальной теореме анализа (ее называют формулой Ньютона—Лейбница), смысл которой сводится к тому, что математическая суть суммирования бесконечно малых величин и степени приближения графика функции к прямой близки настолько, что фактически являются взаимно обратными процессами. Представим, например, машину, набирающую скорость с места до максимума. Быстрота изменения ее местоположения это, конечно, скорость; быстрота изменения скорости — ускорение. С другой стороны, интегрирование функции изменения скорости по времени (за все время перемещения машины) даст общее значение пройденного расстояния. Интегрирование же всех значений ускорения даст конечную скорость. Способность точно математически определить взаимоотношения между различными меняющимися характеристиками обеспечивает дифференциальному и интегральному исчислению (вместе их называют анализом) широчайшее поле применения.

СПОР О ПРИОРИТЕТЕ

Спор между Ньютоном и Лейбницем о том, кто изобрел дифференциальное и интегральное исчисление, был, вероятно, самым горячим в истории математики. Ньютон не обнародовал свои идеи до 1704 г., но его записи показывают, что сформулировал он их на пару десятков лет раньше своего оппонента. Этот спор разделил британских и европейских математиков на два непримиримых лагеря. Обращение Лейбница в Лондонское королевское общество (академию наук) пропало втуне — президентом общества был Ньютон (см. рис. снизу). Первенство в создании анализа принадлежит, конечно, Ньютону, но пользуемся мы все же системой Лейбница.

---

* Автор имеет в виду *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica («Математические основы натуральной философии»)*, то есть, на современном языке, «Математические основы физики» — *прим. пер.*

** В математике различают два предела: *предел (предельное значение) функции* в заданной точке — величина, к которой стремится значение рассматриваемой функции при стремлении ее аргумента к данной точке; и *предел последовательности* — объект, к которому члены последовательности в некотором смысле стремятся или приближаются с ростом номера. Эти понятия практически неразрывно связаны — *прим. пер.*

40 Математика тяготения

Большинство из нас слышало историю о том, как яблоко упало на Ньютона, заставив его задуматься, почему Луна не падает на Землю подобно яблоку. Было ли это на самом деле, не так важно, важно гениальное озарение Ньютона, понявшего, что сила, заставляющая Луну двигаться по орбите и «удерживающая» ее там, — та же самая сила, что притягивает яблоко к земле.

На все объекты во Вселенной действует гравитационная сила, которая притягивает объекты друг к другу. Эта сила (также называемая силой тяготения) определяет траектории движения звезд, планет и других тел, которые движутся в пространстве. Изучая труды Галилея о метании предметов, Ньютон предположил, что Луну — да и вообще любое тело на орбите — можно представить как некое падающее тело, метательный снаряд. Такой объект движется по кривой, так как гравитационная сила притягивает его к Земле. Но поверхность Земли также является кривой, поэтому если такое тело летит достаточно быстро, его траектория будет повторять кривизну Земли. Тело при этом продолжает падать, но падать уже вокруг Земли, так что этот объект превратится в ее спутник. Если его скорость возрастет еще более, траектория его полета примет форму эллипса. Таким образом, планеты на орбите фактически непрерывно падают на Солнце (и вокруг него).

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Гравитационная сила (сила тяготения) F между двумя массами (центрами масс) — это произведение обеих масс m, деленное на расстояние между ними r, умноженное на гравитационную постоянную G, она же — постоянная Ньютона.

Закон обратных квадратов

Ньютон знал, что сила тяготения заставляет падающие объекты, находящиеся неподалеку от поверхности Земли (такие, например, как то самое знаменитое яблоко), двигаться по направлению к поверхности с ускорением в 9,8 м/с^2. Ему также было известно, что Луна падает на Землю с ускорением в 0,00272 м/с^2. Если принять, что на яблоко и Луну действует одна и та же сила, то Ньютону пришлось бы искать правдоподобное объяснение такой большой разнице в ускорениях. Какое свойство силы тяготения делало ускорение Луны в 3600 раз меньше, чем ускорение яблока?

Очевидно, что сила тяготения уменьшалась в зависимости от расстояния между объектами. Оставалось найти формулу, которая бы описывала это. Объект, близкий к поверхности Земли, примерно в 60 раз ближе к ее ядру, чем Луна (от поверхности Земли до ее центра приблизительно 6350 км, а орбита Луны отстоит от поверхности Земли на 384 000 км).

Сила тяготения, действующая на Луну, составляет 1/3600, или 1/(60)^2 от той, что действует на яблоко. Ньютон понял, что сила тяготения подчиняется закону обратных квадратов (6350×60 ≈ 386).

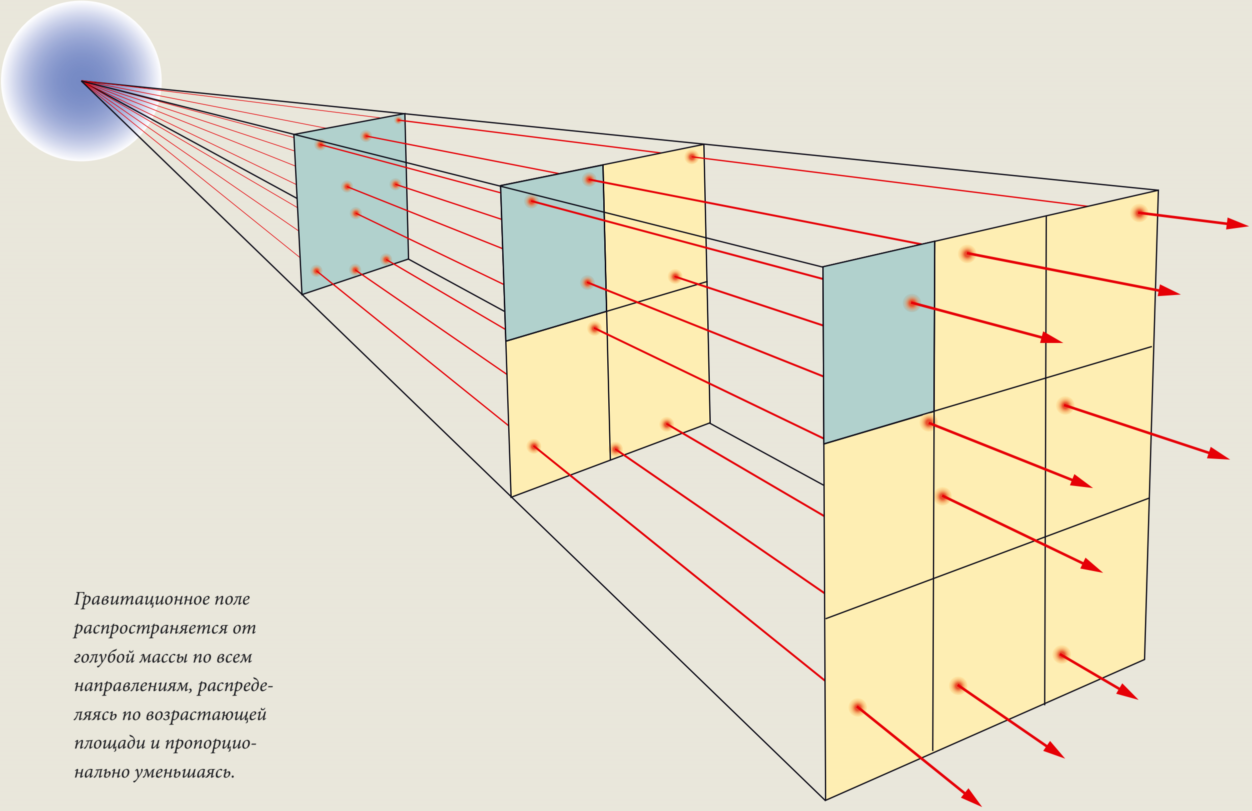
Рассказ о Ньютоне и яблоке — вероятно, один из самых известных в истории науки. Сам великий ученый, известный своей закрытостью, едкостью, а порой и откровенной грубостью, особенно по этому поводу не распространялся, пока к концу жизни его натура несколько не смягчилась.

Сила тяготения, действующая на два объекта, обратно пропорциональна квадрату расстояния между центрами масс этих объектов — будь то Земля и яблоко, Земля и Луна, Солнце и Марс. Удвойте дистанцию между объектами — и сила уменьшиться в четыре раза, утройте — сила уменьшиться вдевятеро и т. д. Кроме этого сила определяется массами самих объектов — чем больше масса, тем больше сила тяготения. Таким образом, гравитационная сила пропорциональна произведению масс притягивающихся тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними (точнее, между центрами их масс). Постоянная составляющая этой пропорциональности обычно называется гравитационной постоянной.

Понимание природы силы тяготения позволяет нам делать невероятные вещи. Например, взвесить Землю — то есть измерить ее массу. В 1798 году Генри Кавендишу в результате тщательного эксперимента удалось точно определить значение гравитационной постоянной G — $6{,}67\times10^{-11}$. Согласно ньютоновой теории всемирного тяготения, G определяет силу притяжения между любыми двумя объектами во вселенной, обладающими массой. Это означало, что массу Земли можно вычислить. На поверхности Земли масса, равная 1 кг, находится примерно в 6 300 000 метрах от ее центра, и воздействующая на нее сила тяготения равна примерно 10 ньютонам. Подставив эти цифры в уравнение тяготения, мы получим приблизительное значение массы Земли — 6×10^{24} кг.

ПЛЕЧИ ТИТАНОВ

Признавая свой долг перед учеными-предшественниками, Ньютон заметил: «Если я и видел дальше других, то потому, что стоял на плечах гигантов». Считается, что Ньютон имел в виду Галилея и Кеплера. Галилей доказал, что движение брошенного тела определяется двумя компонентами — постоянным ускорением, действующим на брошенное тело вертикально, и горизонтальным перемещением. Ньютон подчеркнул, что «вертикальное» ускорение брошенного тела должно быть результатом действия на него силы (тяготения), иначе тело падало бы с постоянной скоростью. Есть, однако, и другая трактовка этой знаменитой фразы Ньютона. Она могла быть и едкой отповедью в адрес Роберта Гука (справа), требовавшего от Ньютона признать свой вклад в развитие его теорий. Дело в том, что Гук был очень маленького роста.



Гравитационное поле распространяется от голубой массы по всем направлениям, распределяясь по возрастающей площади и пропорционально уменьшаясь.

41

Бинарные числа

Слово «цифровой» сегодня на каждом шагу. Пожалуй, его используют даже слишком часто. Оно давно приобрело оттенок некой престижности, «продвинутости» — от некогда модных цифровых часов до невероятно чистого цифрового радиосигнала. Тем не менее «цифровой» означает всего лишь «использующий цифры», чаще всего — две: 0 и 1. Добро пожаловать в мир бинарных чисел — двоичную систему счисления.

В 1672 г. Готфрид Лейбниц потряс математический мир своей версией дифференциального и интегрального исчисления. Сделанное им через семь лет фундаментальное предложение о переходе на бинарную систему счисления вызвало не меньше шума, хотя и было менее спорным.

Двоичная позиционная система счисления использует всего два числа в отличие от привычной нам десятеричной. Что может быть проще? Кажется, что счет до двух выучить гораздо проще, чем до десяти, но применять ее в практических целях не очень удобно — пересчитывая пальцы одной руки в двоичной системе, мы получим число 110 (не «сто десять», а «один-один-ноль»). Количество полевых игроков во время футбольного матча (22 — если вы далеки от спорта) в двоичной системе даст число 10110. Добавьте трех судей — получите 11001. Подсчет в двоичной системе, очевидно, не слишком понятен интуитивно. Так зачем вообще занимать ею свое время?

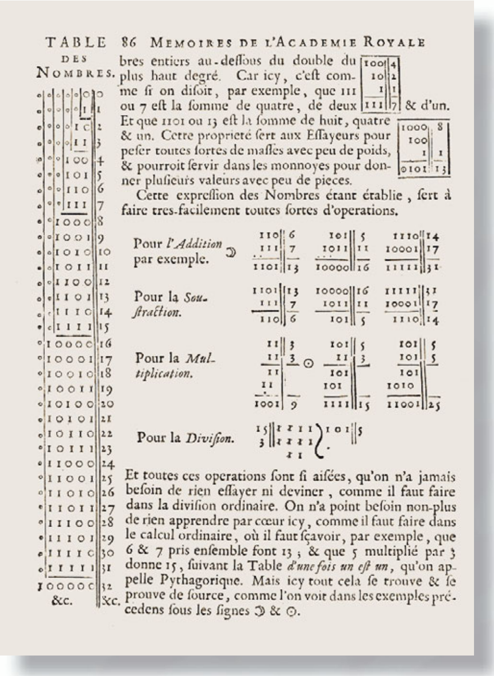


TABLE DES NOMBRES. 86 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15
10000	16
10001	17
10010	18
10011	19
10100	20
10101	21
10110	22
10111	23
11000	24
11001	25
11010	26
11011	27
11100	28
11101	29
11110	30
11111	31
100000	32
&c.	&c.

bres entiers au-deſſous du double du plus haut degré. Car icy, c'eſt comme ſi on diſoit, par exemple, que 111 ou 7 eſt la ſomme de quatre, de deux & d'un. Et que 1101 ou 13 eſt la ſomme de huit, quatre & un. Cette proprieté ſert aux Eſſayeurs pour peſer toutes ſortes de maſſes avec peu de poids, & pourroit ſervir dans les monnoyes pour donner pluſieurs valeurs avec peu de pieces.

```
 100 | 4        1000 | 8
  10 | 2         100 |
   1 | 1           1 | 1
 111 | 7        1101 | 13
```

Cette expreſſion des Nombres étant établie, ſert à faire tres-facilement toutes ſortes d'operations.

Pour *l'Addition* par exemple. ☽

```
  110 | 6       101 | 5      1110 | 14
  111 | 7      1011 | 11    10001 | 17
 1101 | 13    10000 | 16    11111 | 31
```

Pour la *Souſtraction.*

```
 1101 | 13    10000 | 16    11111 | 31
  111 | 7      1011 | 11    10001 | 17
  110 | 6       101 | 5      1110 | 14
```

Pour la *Multiplication.*

```
   11 | 3   ⊙    101 | 5      101 | 5
   11 | 3         11 | 3      101 | 5
   11            101          101
  11            101          1010
 1001 | 9       1111 | 15    11001 | 25
```

Pour la *Diviſion.*

```
 15 | 1 1 1 1 )  1 0 1 | 5
  3 | 1 1 1 1 (
        1 1
```

Et toutes ces operations ſont ſi aiſées, qu'on n'a jamais beſoin de rien eſſayer ni deviner, comme il faut faire dans la diviſion ordinaire. On n'a point beſoin non-plus de rien apprendre par cœur icy, comme il faut faire dans le calcul ordinaire, où il faut ſçavoir, par exemple, que 6 & 7 pris enſemble font 13; & que 5 multiplié par 3 donne 15, ſuivant la Table *d'une fois un eſt un*, qu'on appelle Pythagorique. Mais icy tout cela ſe trouve & ſe prouve de ſource, comme l'on voit dans les exemples precedens ſous les ſignes ☽ & ⊙.

Описание двоичной системы Лейбницем в его статье Explication de l'Arithmetique Binaire («Разъяснение бинарной арифметики»), опубликованной в 1703 г. С тех пор описание не сильно изменилось.

Двойственные решения

Преимущества двоичной системы счисления наиболее ярко очевидно проявляются в мире машинных кодов и киберпространстве. Первым это заметил еще в 1605 г. невероятно прозорливый Фрэнсис Бэкон. В свободное от основной работы придворным английского двора и нечистоплотным юристом* время Бэкон занимался философией и науками и преуспел во многом. Среди прочих его достижений не последнее место занимает разработка научного метода познания, ставшего основой научной революции XVII в.** Потенциал двоичной системы счисления он увидел, обнаружив, что весь латинский алфавит можно зашифровать, используя ряды из бинарных (двоичных) символов: в латинском алфавите 26 букв, а общее количество комбинаций из 5 символов равно 32 (2^5)***.

Гений Бэкона блистательно раскрылся в объяснении того, что такие коды не ограничены письменной формой — их можно передавать любым методом, при котором сигнал интерпретируется лишь двумя способами: «ударами колокола и сигналами фанфар, светом и факелами, выстрелами из мушкетов или любыми иными похожими инструментами»****. Телеграфный код Самюэля Морзе («Азбука Морзе»), состоящий из точек и тире, несомненно, восходит к этой идее, а современные транзисторы в микропроцессоре воспроизводят этот двоичный процесс — «включено–выключено».

---

* Фрэнсис Бэкон в разное время был хранителем большой королевской печати английского двора, лорд-канцлером; по обвинению во взятке предстал перед судом, был осужден и лишен всех должностей, позднее помилован королем — *прим. пер.*

** Суть научной революции XVII в. — постепенное распространение эмпирического (т. е. основанного на опыте) метода познания, изменившего само мышление, подход к тому, как нужно изучать окружающий мир. Важнейшим шагом на этом пути стал «Новый органон» Бэкона — сочинение, обосновывающее необходимость перехода от дедуктивной (от общего к частному) к индуктивной (от частного — к общему) методике умозаключений — *прим. пер.*

*** Т. е. количество комбинаций из пяти символов избыточно — их больше, чем букв латинского алфавита, а из четырех символов — недостаточно. При этом для некоторых языков (русского, в частности) пяти символов также будет недостаточно — *прим. пер.*

**** Автор цитирует отрывок из книги *Advancement of Learning* («Развитие наук»), входящей в «Новый органон». Бэкон имел в виду, что основой подобной системы шифра может быть любая бинарная система сигналов (работающая по принципу «есть сигнал — нет сигнала»), различимая на глаз или на слух — *прим. пер.*

Единицы и ноли

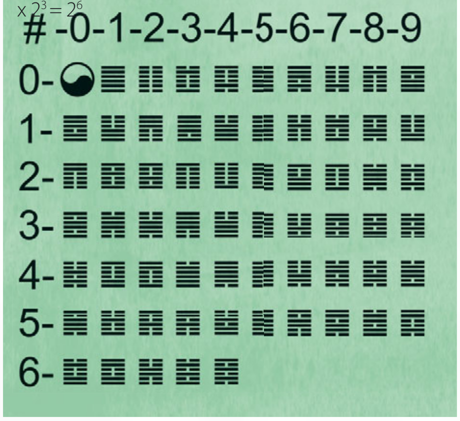
В «шифре Бэкона» использовались не цифры, а буквы *a* и *b* — буква «А» обозначалась как *aaaaa* — но принцип оставался тем же. За появление современной системы записи двоичного счисления мы должны благодарить другую суперзвезду науки. Готфрид Лейбниц, один из изобретателей интегрального и дифференциального исчисления, в 1679 г. пришел к идее использовать в такой системе цифры 1 и 0, и в 1703 г. изложил свои мысли в статье под названием «Разъяснение бинарной арифметики».

Разработанная Лейбницем система на самом деле не особенно отличается от привычной нам десятеричной и остается такой же, какой он ее описал. Тем не менее для того, чтобы пользоваться двоичной системой, требуется изрядная практика.

Если прочесть десятичное число — скажем, 31 — справа налево, то первая его цифра означает количество единиц (1), а вторая — количество десятков (3). Разряды десятичных чисел возрастают к сотням, тысячам и так далее. Внимательный наблюдатель заметит, что каждая числовая позиция соответствует степени числа 10: единицы — множители числа 10^0 (равного 1), десятки — 10^1, сотни — 10^2, тысячи — 10^3. В двоичной системе 10 просто заменяется на 2.

ГЕКСАГРАММЫ КНИГИ ПЕРЕМЕН

Готфрид Лейбниц искренне и всерьез интересовался Востоком — мистика и загадки восточных цивилизаций занимали его всю жизнь. Подобно многим другим, разделявшим тот же интерес, он глубоко изучал «И Цзин» — «Книгу перемен», один из древнейших памятников китайской литературы, датируемой как минимум 1000 г. до н. э. Содержание «И Цзин» составляют гадательные практики, основанные на различных комбинациях символов — триграмм и гексаграмм. Восемь триграмм, которыми часто окружают изображение китайской монады — символа *инь-ян* — составлены из трех линий, а изображенные ниже 64 гексаграммы — из шести. Сплошная линия символизирует начало *ян*, прерывистая — *инь*. Эти символы обозначают бинарные (взаимные) противоположности единого сущего в китайской космогонии. Лейбниц видел в них аналоги нолей и единиц. Таким образом, численное значение гексаграмм составляло 64, или 2^6. Триграмм, соответственно, 8 (2^3). Фактически гексаграммы — это удвоенные триграммы: $2^3 \text{ x } 2^3 = 2^6$



Число также начинается с единиц: 2^0 или множители единицы. На следующей позиции — 2^1, что в десятичной системе соответствует просто двойке, а в двоичной — десятке. Следующие позиции — 2^2, 2^3, 2^4, т. е. четверки, восьмерки и шестнадцатые. Таким образом, число 31 в двоичной записи выглядит как 11111.

После Лейбница в системе двоичного счисления появилось единственное дополнение. Касалось оно любой системы счисления, основанием которой не является 10. Основание (или база) системы счисления — это количество уникальных символов, которые в ней используются (включая ноль). Так, основание десятичной системы счисления — 10, а символы, которые в ней используются, — «базовая десятка».

Основание двоичной системы счисления — естественно, двойка. Для облегчения восприятия основание используемой в данном случае системы счисления обычно пишут в нижнем регистре после числа. Таким образом, $11111_2 = 31_{10}$. После десятки и двойки наиболее распространенное основание системы счисления — 16. В шестнадцатеричной системе счисления используются цифры от 0 до 9 и латинские буквы от A до F. $F_{16} = 15_{10}$, $DEC0DE_{16} = 14\,598\,366_{10}$.

Числа десятеричной системы счисления	Числа двоичной системы счисления
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111
16	10000
17	10001
18	10010
19	10011
20	10100

Бинарная конвертация

Для того чтобы перевести число из двоичного «формата» в десятеричный, необходимо заменить каждую цифру степенью двойки, соответствующей занимаемой этой цифрой позиции, а затем сложить полученные результаты. Первая цифра справа соответствует 2^0, следующая (налево) — 2^1, следующая — 2^2 и так далее. Так, число 1010101 двоичной системы преобразуется в: $1 \text{ x } 2^0 + 0 \text{ x } 2^1 + 1 \text{ x } 2^2 + 0 \text{ x } 2^3 + 1 \text{ x } 2^4 + 0 \text{ x } 2^5 + 1 \text{ x } 2^6 = 1 + 0 + 4 + 0 + 16 + 0 + 64 = 85_{10}$.

Для перевода из десятеричной записи в двоичную число нужно последовательно делить на 2 до тех пор, пока в результате деления не получится 0 целых (т. е. 0,5), записывая остаток от деления справа налево. Так, 50_{10} соответствует 110010_2: 50/2 дает 25 (в остатке 0); 25/2 — 12 (в остатке 1); 12/2 — 6 (в остатке 0); 6/2 — 3 (в остатке 0); 3/2 — 1 (в остатке 1); 1/2 — 0 (в остатке — 1). На этом деление заканчивается. Первый остаток дает количество единиц (2^0), за ним по позициям следуют остальные: $0 \text{ x } 2^0 + 1 \text{ x } 2^1 + 0 \text{ x } 2^2 + 0 \text{ x } 2^3 + 1 \text{ x } 2^4$ и, наконец, $1 \text{ x } 2^5$. Итого получаем 110010_2.

НОВЫЕ ЧИСЛА, НОВЫЕ ТЕОРИИ

42

e

Впервые это число появилось в таблице логарифмов в книге Джона Непера, однако считается, что первым число е для вычислений с натуральными логарифмами применил другой английский математик — Уильям Отред.

Математическая константа *e* — относительный новичок в семействе чисел. Причем новичок дерзкий, смело потеснивший ранее господствовавшие древние π и φ (золотое соотношение). Сегодня это удивительное число составляет самую основу математики.

Число *e*, которое еще называют числом Эйлера, обозначает константу экспоненциального роста. Это всего лишь число, но оно явно выделяется из общего ряда остальных чисел хотя бы по количеству и разнообразию определений. Это число иррациональное (и даже трансцендентное), оно представляет собой бесконечно длинный ряд цифр после десятичной запятой. При этом, как ни странно, оно применяется для анализа несчетного количества совершенно реальных ситуаций и процессов. Чаще всего оно используется в связи с функциями роста, процессами, подобными ядерному распаду, при расчете накопления капитала, в эпидемиологии, исследовании роста бактериальных колоний. Кроме того, число Эйлера с непостижимым постоянством возникает при фундаментальных математических исследованиях. Почему оно проявляется в таком количестве случаев и в таких невероятных местах, остается одной из главных загадок — и прелестей — числа *e*.

«Прирожденный» логарифм

Если число π долго ассоциировалось с развитием геометрии, то число е неразрывно связано с появлением современной математики. Первые следы е обнаруживаются еще в 1618 г. — их можно найти, если тщательно порыться в приложении к труду Джона Непера о «естественных» (натуральных) логарифмах. Методика Непера сделала подсчет при сложных умножениях пустяковым делом — логарифмы позволяли отобразить умножение в сложение ($\log_n(xy) = \log_n(x) + \log_n(y)$). Новый способ подсчета был восторженно принят математиками.

Число *e* — часть структуры так называемого натурального логарифма, его основание с фиксированным постоянным значением. Натуральный логарифм самого числа *e* равняется 1. Натуральный логарифм любого числа *x* — это показатель степени, в которую надо возвести основание логарифма, чтобы получить число *x*. Иными словами, $\ln(e^x) = x$, а $\ln(e) = 1$, поскольку $e^1 = e$.

Эта логарифмическая функция «натуральна» с точки зрения математики потому, что она определена однозначно и возникает автоматически. Как вы видите, число е является «публичным пред-

Первые пятьдесят знаков числа е после запятой. Всего их гораздо больше, чем вы видите здесь, — их бесконечно много.

2,71828182845904523536028747

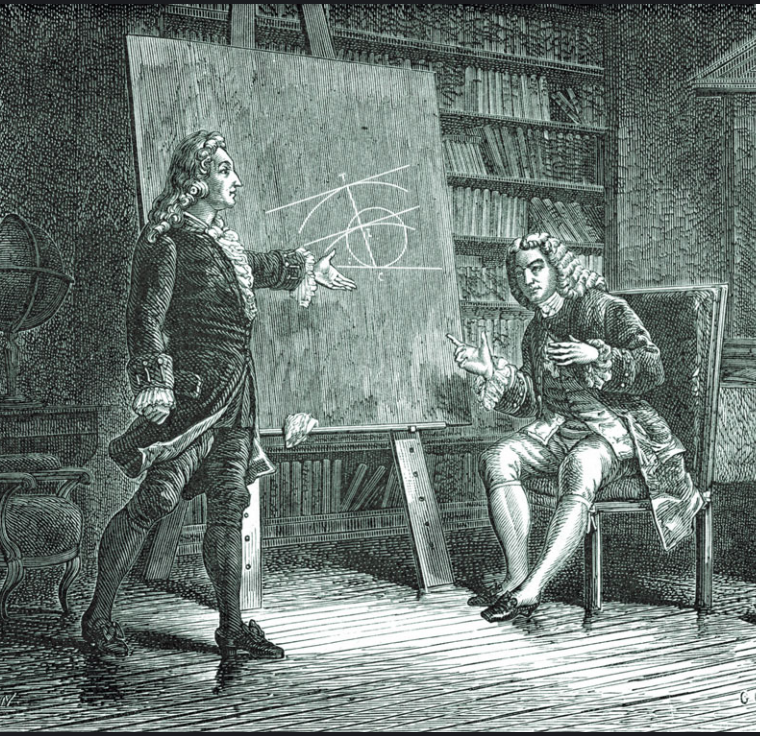
ставителем» показательной (или экспоненциальной) функции, e^x, где x=1. Натуральный логарифм и экспоненциальная функция — близнецы, две стороны одной монеты: e^x это противоположность ln(x), а *e* — противоположность ln(1).

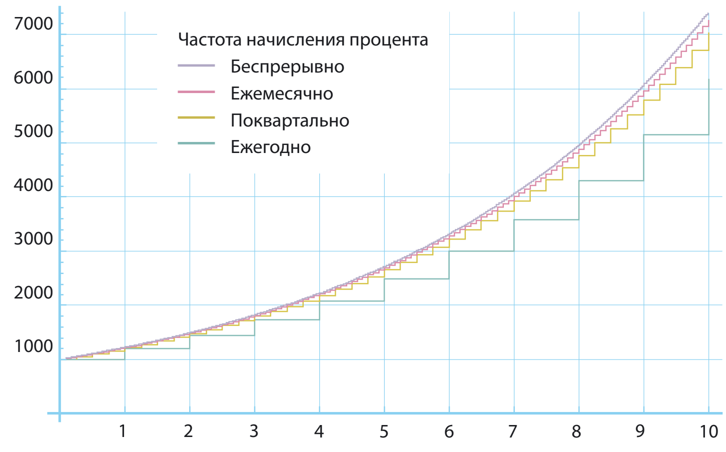
Экспоненциальную функцию можно также представить как бесконечный ряд: Σ [∞] [n=0] $x^n/n! = x^0/0! + x^1/1! + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \ldots = e^x$ (символ «Σ» означает «сумма», символ «!» — факториал, то есть последовательное произведение всех натуральных чисел в составе данного числа)*. Уникальное свойство этого ряда состоит в том, что при дифференцировании ни один из его элементов не пропадает и повторяется до бесконечности. Экспоненциальная функция, таким образом, является собственной производной, и график функции e^x описывает ее собственную производную. Эта уникальная универсальность экспоненты объясняет, почему число *e* столь всеобъемлюще и настолько вездесуще в математике, и почему оно играет такую важную роль в математическом анализе.

Вычисление *e*

Первым значение числа е определил во второй половине XVII в. швейцарский математик Якоб Бернулли, исследуя природу капитализации процентов**. Простое ежегодное начисление 100% на капитал означает, что сумма в абсолютном выражении из года в год будет удваиваться. Однако, если распределить эти 100% по более коротким периодам, это принесет в конце года больший результат, начиная с третьего года. Бернулли вычислил размер предполагаемых выплат, если бы проценты на капитал начислялись беспрерывно за бесконечно малые периоды времени (попробуйте предложить такую сделку *своему* банку) — их размер возрастал бы ежегодно в 2,71828…— в *e* — раз. Это же соотношение возникает и в связи с другими процессами, связанными с ростом и распадом — радиоактивностью, бактериальными инфекциями, эпидемиями и т. д.

Члены семьи математиков Бернулли в XVII–XVIII вв. были известны как Короли Базеля. Их работы охватывали такие разделы математики, как гидро- и газодинамика, математический и вероятностный анализ. Приведенный здесь рисунок изображает, как Якоб объясняет число е своему младшему брату Иоганну.





Скорость роста накоплений пропорциональна частоте начисления процента

---

* В отечественной математической традиции принята запись вида:
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ — *прим. пер.*

** Капитализация процента (сложный процент или проценты на процент) — финансовый термин, означающий начисление процентов на проценты от первоначального капиталаа — *прим. пер.*

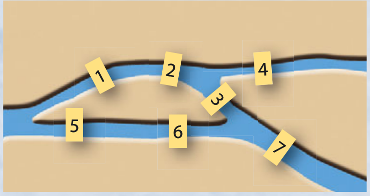
1352662497757247093699995…

43

Теория графов

Этот раздел математики возник практически на пустом месте в XVIII в. Тем не менее, он вскоре создал мост между геометрией и более эзотерическими сферами науки — топологией, комбинаторикой и теорией множеств, используя свойства объектов для того, чтобы вскрыть их глубинную суть.

Гравюра XVI в. с видом Кёнигсберга. На ней изображены шесть из семи мостов. Седьмой еще предстояло построить — за парой, изображенной в правом нижнем углу.



Основоположником теории графов, что неудивительно, был Леонард Эйлер. Вообще говоря, она возникла только благодаря его отпуску в прибалтийском Кёнигсберге. Базовой посылкой этой теории стала классическая статья Эйлера «Семь мостов Кёнигсберга», вышедшая в 1736 г.

Не сжигая мостов

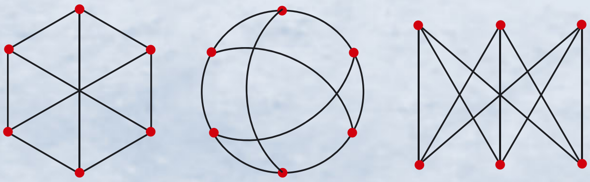
Популярным развлечением жителей Кёнигсберга (в то время это был прусский город, сейчас это русский Калининград, расположенный в российском анклаве между Польшей и Литвой) были прогулки по городу, в процессе которых они пытались пройти по каждому из семи городских мостов всего один раз. Возможно, Эйлер и сам пытался это сделать. Возможно, он сразу осознал, что это математически невозможно.

Найти такой маршрут по двум островам и обоими берегами реки, который бы позволил это делать, не удавалось никому. Многим это казалось невозможным. Но если это действительно было невозможно, тому должна была быть причина — и доказательство. Как выразился Эйлер, проблема «казалось заслуживающей внимания, поскольку ни геометрия, ни алгебра, ни искусство подсчета не могли ее разрешить».

Графический язык

Догадка Эйлера состояла в том, что ключ к решению задачи заключался в количестве мостов, соединявших каждый район, а их размеры или точное значение длины маршрута не имеют значения. В контексте этой теории граф — не отрезок на декартовой плоскости; координаты не имеют значения. Граф — это совокупность точек или вершин (узлов), соединенных линиями или гранями (ребрами, дугами). Если этим граням задана длина, граф называется взвешенным, а если для них определено направление, то они называются направленными дугами.

«Проблема мостов Кёнигсберга» имеет четыре вершины (количество соединенных мостами районов)



Три очень разные фигуры — три одинаковых графа. Пересчитайте количество вершин (точек) и граней (линий).

Карты-схемы метро — один из реальных примеров графов. Для пассажира важно, какими линиями станции соединены между собой, а не как далеко они друг от друга отстоят.

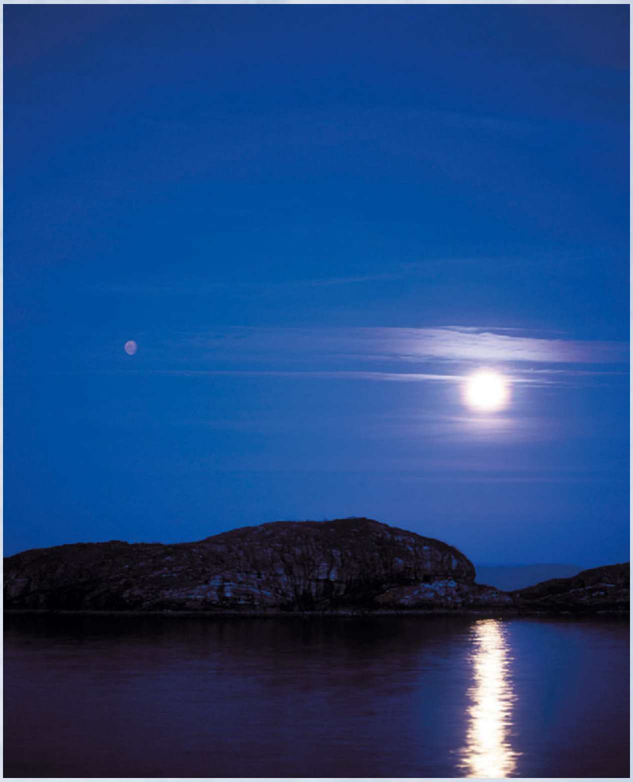
и семь ребер (сами мосты), соединяющих эти вершины. Эйлер показал, что маршрута, соединяющего все четыре точки единственный раз, не существует, поскольку в графе количество нечетных вершин (вершин, к которым ведет нечетное число ребер — количество ребер, ведущих к вершине, также называют ее порядком) нечетно.

Таким образом, решения задача о мостах Кёнигсберга не имела. История же на время устранила причину для поиска такового — во время Второй мировой войны несколько мостов Кёнигсберга были разрушены. Часть из них восстанавливать не стали, построив новые. Большой безымянный мост, по которому идет Ленинский проспект, проходит как раз над островом, ранее располагавшимся как раз в географическом центре проблемы. Впрочем, сегодня мостов в этом районе Калининграда снова семь.

«Проблема мостов Кёнигсберга» служит введением в теорию, формирующую ныне математический аппарат для компьютерных программ распознавания лиц и отпечатков пальцев. Кроме того, эта теория используется для оптимизации производственных процессов, а также для поиска оптимальных маршрутов или разработки физических сетей (в том числе Интернета). Используется теория графов и для анализа ходов в играх — благодаря в том числе и ей компьютер обычно обыгрывает вас в шахматы.

44

Задача трех тел



Бесконечная баталия вокруг сил, взаимно действующих на Солнце, Землю и Луну, стала одним из факторов, подтолкнувших разработку теории хаоса.

Закон тяготения Ньютона прекрасно работает для двух объектов. Но стоит ввести в это уравнение третий, как немедленно возникают огромные сложности.

Подсчитать взаимное гравитационное воздействие трех тел на удивление сложно. Фактически задача трех тел в принципе неразрешима. В 1747 г. было обнаружено приблизительное ее решение. В его рамках Солнце считалось неподвижным объектом, что позволяло рассчитать характеристики движения Земли и Луны, поскольку оба этих небесных тела обращались вокруг Солнца вместе. Жозеф-Луи Лагранж нашел пять особых точек в системе Земля — Луна — Солнце, где гравитационные силы взаимно уравновешивают друг друга. Объект, помещенный в одну из этих точек, будет вращаться вокруг Солнца, сохраняя при этом свое положение относительно системы Земля — Луна.

45

Тождество Эйлера

В 2004 году читателей журнала *Mathematical Intelligencer* попросили назвать «самую красивую теорему математики». Победителем — с огромным отрывом — стало тождество Эйлера:

$$e^{i\pi}+1=0$$

Тождество Эйлера, записанное в виде равенства.

Леонард Эйлер родился в немецкоязычном кантоне Швейцарии, но бо́льшую часть своей творческой жизни провел в России, в Санкт-Петербурге.

Названная именем своего создателя (Эйлер сформулировал ее в 1747 г.), эта теорема примечательна тем, что она использует пять важнейших констант математики: ноль (0); единицу (1); экспоненту (иррациональное число $e \approx 2{,}718\ldots$), описывающую рост и распад; число $\pi \approx 3{,}142$ … — отношение длины окружности к своему диаметру; число i — основное мнимое число, возведение которого в квадрат давало бы -1, если бы это число было реальным (оно «нереально» с математической точки зрения потому, что не является ни положительным, ни отрицательным, ни равным нолю, поскольку квадрат любого положительного и отрицательного числа — всегда положительное число, а квадрат нуля равен нолю).

Масштаб личности

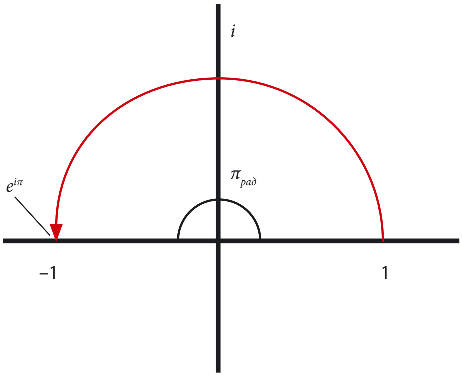
Вне академических кругов Леонард Эйлер не так известен, как «суперзвезды» математики, вроде Ньютона, Лейбница, Гаусса или даже братьев Бернулли, время от времени становившихся наставниками Эйлера. Тем не менее влияние Эйлера, известного под прозвищем Волшебник, заметно и в теории чисел, и в математическом анализе, и в графике. Он ввел в обращение множество математических терминов и символов. Заглавная буква «сигма», Σ, обозначает сумму с легкой руки Эйлера. Он же первым использовал символы e и i, популяризировал запись числа «пи» в виде символа π. Тождество Эйлера объединяет все эти понятия с непревзойденной простотой.

Формула Эйлера описывает свойства комплексных чисел: комплексное число есть комбинация ординарного — или вещественного — и мнимого чисел. Математики без особенного успеха пытались экспериментировать с этими числами пару веков, а тождество Эйлера позволило использовать их в функциональном анализе*.

Простейшее доказательство

Комплексные числа могут быть определены как координаты на плоскости, где вертикальная координата задается величиной мнимой части числа, а горизонтальный отрезок — величиной вещественного числа. Для того чтобы достичь желаемой точки, можно вращать этот отрезок против часовой стрелки вокруг его горизонтальной позиции, проходящей через угол x. В этом случае положение точки задается формулой: $\cos(x) + i\sin(x)$. Выразив это соотношение через число е, получим e^{ix}. Если угол x равен полукругу (т. е. π радиан), то результат будет $e^{i\pi} = -1$, или $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Выражение e^{ix}, спроецированное на комплексную плоскость, где $x = \pi$, углу полукруга, выраженного в радианах.



---

* Функциональный анализ — раздел высшей математики, в котором изучаются бесконечномерные топологические векторные пространства и их отображения — *прим. пер.*

46 Теорема Байеса

На первый взгляд, сформулированная преподобным Томасом Байесом теорема его имени, опубликованная уже после его смерти, в 1763 г., — достаточно простая формула. Она вычисляет, насколько вероятность того, что некое событие произойдет, зависит от появления новой информации*. Однако то, что эта теорема рассказывает при этом об окружающем мире, всегда неожиданно, а иногда очень спорно.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Теорема Байеса соотносит вероятность наступления события A при условии, что произошло событие B [P(A|B)], с вероятностью того, что события A и B произойдут независимо друг от друга, а также условную вероятность того, что произойдет событие B, если событие A произошло.

Предположим, что разразилась эпидемия гриппа, и примерно 1 из 100 человек болен. Следовательно, вероятность того, что больны именно вы, составляет 1%. Проснувшись наутро с головной болью, вы обнаруживаете на медицинском сайте информацию о том, что 90% заболевших испытывают головную боль. Значит, вам, похоже, не повезло, и вы подцепили вирус.

Однако накануне вечером вы были на вечеринке — стало быть, вероятность того, что вы и так проснулись бы с головной болью, составляет примерно 10%, что не очень вероятно, но определенно возможно. Так какова же точная вероятность того, что вы заболели с учетом головной боли? Все еще 90%? Или 80%, учитывая возможное похмелье? Согласно теореме Байеса, эта вероятность составляет всего чуть более 8%. Скорее всего, вы все-таки здоровы. А пить надо меньше.

Нескончаемый спор

Теорема Байеса вызвала среди математиков дискуссию, продолжающуюся по сей день. Спорящие разделились на два лагеря — «байесианцев» и «частотников». Оспаривается не верность теоремы, а ее применимость в тех или иных конкретных случаях — тогда, когда определение априорных вероятностей зависит от веры человека.

В нашем примере с гриппом такой спор невозможен: априорная вероятность составляет 1% того, что вы больны еще до того, как почувствовали головную боль. Однако установка априорных вероятностей совсем не такое простое дело. Допустим, по ощущениям врача, шанс того, что вы все же больны, составляет 1 к 10. Соответствует ли статус этих 10% изначальному положению о том, что болен 1 человек из 100? «Байесианец» с этим утверждением согласится, но «частотник» не сделает этого до тех пор, пока не будет зафиксировано и проанализировано статистически достаточное количество подобных случаев***.

ПОНЯТЬ ВЕРОЯТНОСТЬ

Во время суда над предполагаемым насильником в Великобритании в 1990 г. жертва не смогла опознать обвиняемого среди предложенных ей нескольких людей. По ее утверждению, ни один из них не соответствовал возрасту и описанию напавшего. Тем не менее обвиняемый был осужден на основании теста ДНК. Присяжным сказали, что лишь один из 20 млн человек может иметь такой ДНК. Во время апелляционных слушаний защита обратилась к теореме Байеса, задав присяжным вопрос: «Если бы обвиняемый действительно был нападавшим, какова вероятность того, что жертва сказала бы, что он совершенно на нападавшего не похож? И если бы он не был нападавшим, какова вероятность того, что жертва сказала бы, что он совершенно на нападавшего не похож?» Расчет был на то, что присяжные решат, что вторая ситуация более вероятна. Однако сила статистических данных по ДНК все же убедила присяжных. Подсудимый был вновь признан виновным.

*Идентификация по ДНК основана на вероятности**. Правомерность этого подхода в суде в последнее время все чаще оспаривается, поскольку присяжным редко разъясняют возможность того, что данный образец ДНК может также принадлежать родственникам обвиняемого.*

---

* Более строгая формулировка теоремы гласит, что формула Байеса позволяет определить вероятность какого-либо события при условии, что произошло другое статистически взаимозависимое с ним событие — *прим. пер.*

** Вообще говоря, *любые* измерения — вероятностный процесс — *прим. пер.*

*** По сути, этот спор ведется не столько о верности самой теоремы, сколько о взаимосвязи исходных данных и уровня и качества их влияния на конечный результат — *прим. пер.*

47

Маскелайн и «уравнение наблюдателя»

Также Невил Маскелайн известен расчетом плотности Земли. Для этого он измерял уклонения отвеса (под действием силы тяжести) вблизи горы Шихэлиен в Шотландии. Полученный им результат составил 80% от современного значения.

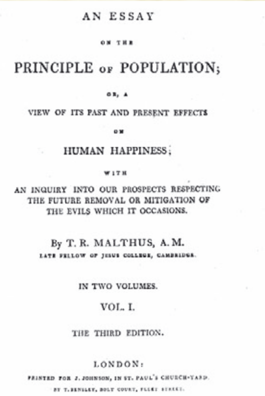
Когда Королевский астроном Невил Маскелайн в 1796 г. уволил своего ассистента за нерадивость при наблюдении звезд, он совершил гораздо более важное деяние, чем намеревался. Сам того не желая, он поставил важнейший вопрос о том, насколько личные особенности наблюдателя влияют на качество наблюдений и измерений.

Во времена Маскелайна астрономы наблюдали звезды в телескоп, одновременно прислушиваясь к тиканью часов. Так они пытались фиксировать события, занимавшие доли секунд. Маскелайн посчитал, что его ассистент практически постоянно запаздывал примерно на полсекунды. Свое мнение он опубликовал вместе с неоднозначными результатами наблюдений. Однако после смерти Маскелайна эти результаты проанализировал немецкий астроном Фридрих Бессель. Он обнаружил, что разница между результатами наблюдений любых двух его коллег была регулярной и измеримой. Этот феномен и получил название «уравнения наблюдателя». Для астрономов это было прежде всего практической проблемой, но позже, в XIX в., это уравнение стимулировало подробное исследование скорости реакции в рамках новой науки — экспериментальной психологии. Постепенно эта фраза стала обиходной; ее начали использовать для описания любого влияния человеческого фактора на развитие любой ситуации*.

48

Мальтузианство

Имя Томаса Мальтуса неразрывно связано с его теорией о том, что неконтролируемый рост населения обязательно приведет к глобальной катастрофе в связи с голодом, эпидемиями и отчаянной войной за выживание.



AN ESSAY
ON THE
PRINCIPLE OF POPULATION;
OR, A
VIEW OF ITS PAST AND PRESENT EFFECTS
ON
HUMAN HAPPINESS;
WITH
AN INQUIRY INTO OUR PROSPECTS RESPECTING
THE FUTURE REMOVAL OR MITIGATION OF
THE EVILS WHICH IT OCCASIONS.

By T. R. MALTHUS, A. M.
LATE FELLOW OF JESUS COLLEGE, CAMBRIDGE.

IN TWO VOLUMES.

VOL. I.

THE THIRD EDITION.

LONDON:
PRINTED FOR J. JOHNSON, IN ST. PAUL'S CHURCH-YARD.
BY T. BENSLEY, BOLT COURT, FLEET STREET.

Томас Мальтус опубликовал свои идеи анонимно в 1798 г. в этой книге.

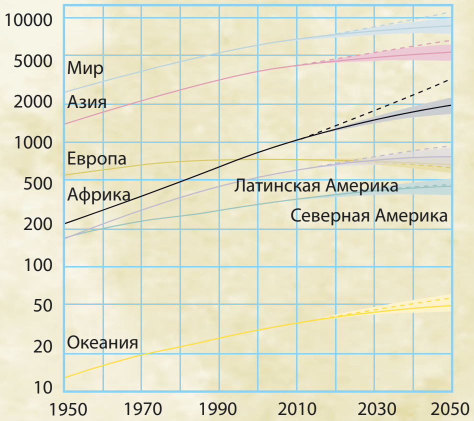
Сформулировал свою теорию преподобный Мальтус в 1798 г.: поскольку население растет в геометрической прогрессии, а производство продуктов питания — лишь в арифметической, со временем оно окажется неспособно себя прокормить. В результате начнется период невзгод и смертей, который будет длиться до тех пор, пока количество людей не уменьшится до приемлемого уровня. Геометрическая прогрессия — это последовательное умножение на определенное число (знаменатель прогрессии): 1, 2, 4, 8, 16…, а арифметическая — последовательное добавление определенного числа: 1, 2, 3, 4, 5…

Мальтус утверждал, что принятые незадолго до этого в Англии Законы о бедных, закладывавшие основы системы государственных пособий, были ошибочным решением. Согласно этим законам, размер выплат зависел от количества детей в семье.

---

* Любое наблюдение оказывает влияние на наблюдаемый объект, изменяя тем самым его состояние так или иначе. Поэтому фактически мы наблюдаем состояние объекта, отличное от того, что было до начала наблюдения — *прим. пер.*

С точки зрения Мальтуса, эти законы, во-первых, стимулировали бедноту заводить как можно больше детей — столько, сколько они могли прокормить. Рост числа рабочих рук снижал стоимость рабочей силы, что в итоге еще больше ухудшало положение бедноты. Во-вторых, в ответ на государственное субсидирование бедных производители продуктов и услуг подняли бы цены, чтобы получить дополнительную выгоду.



Логарифмическая природа вертикальной оси (в миллиардах) делает графики прироста населения более пологими. Тем не менее население всех регионов, кроме Европы, возрастает. Ученые предсказывают, что распространение методик планирования семьи приведет к тому, что графики станут практически ровными к середине XXI в.

Идеи Мальтуса возникли на почве его споров с отцом относительно того, насколько «совершенным» может и должно быть общество. Мальтус полагал, что попытки улучшить условия жизни для беднейших слоев обречены на провал, поскольку такое улучшение ускорило бы рост населения так, что за ним не угнался бы никакой рост производства еды. По разумению Мальтуса, такой исход делал идею «совершенного» общества нереализуемой в принципе.

Будущее не так мрачно

Однако будущее оказалось не «мальтузианским» — во всяком случае, пока. Мальтус не мог предсказать изменения, произошедшие в результате промышленной революции. Технологическое развитие повысило эффективность производства продуктов питания и урожайность — на тех же и даже меньших площадях стало можно производить гораздо больше пищи, чем можно было мечтать в XVIII в.

Не мог предусмотреть Мальтус и влияния систем здравоохранения и планирования семьи на темы роста населения. Сегодня население Европы уменьшается, поскольку, вопреки предсказаниям Мальтуса, рост благосостояния, похоже, ведет к снижению рождаемости. В среднем по миру темпы прироста населения составляют примерно 1,14%. Если они сохранятся, население удвоится примерно через 61 год. Однако темп роста населения непостоянен — в пиковые 60-е гг. XX в. он составлял 2,2%, что, сохранись он на том же уровне, привело бы к удвоению населения через 35 лет.

49 Основная теорема алгебры

Основная теорема алгебры гласит, что поле комплексных чисел алгебраически замкнуто, иными словами, не существует многочлена с комплексными коэффициентами, у которого не было бы хотя бы одного корня (x_n) в поле комплексных чисел.

Труды Карла Гаусса, начиная с доказательства основной теоремы, сделали его ведущим авторитетом в области статистики, теории вероятностей, теории чисел и астрономии.

Вынеся за скобки $x–x_n$, получим полином степени* $n–1$. Как сказал Карл Гаусс, «каждое полиномиальное уравнение степени n с комплексными коэффициентами имеет n корней в комплексных числах». На случай, если вы забыли, комплексные числа состоят из двух компонентов — вещественного числа и мнимого (на основе числа i, квадратного корня из –1). Вещественный числа, с которыми мы все хорошо знакомы, являются подмножеством комплексных чисел (каждое вещественное число имеет мнимую часть, равную $0i$, т. е. 0).

Больше, чем наитие

Первым заявил, что у уравнения n-ной степени с n корнями всегда есть n решений, фламандский математик Альбер Жирар в 1629 г., но он не рассматривал возможность того, что решения могут существовать вне множества комплексных чисел. В 1637 г. философ Рене Декарт отметил, что для каждого уравнения n-ной степени можно представить n корней, но эти воображаемые корни не соотносились ни с каким реальным количеством. Первая серьезная попытка доказать эту фундаментальную теорему была предпринята Жаном д’Аламбером в 1746 г. Несмотря на некоторую слабость аргументов — в частности, он использовал неподтвержденные утверждения, истинность которых зависела от доказуемости самой основной теоремы, — его идеи оказались полезными.

Королевское доказательство

Считается, что первым доказал основную теорему алгебры немец Карл Фридрих Гаусс. Он представил свое доказательство в 1799 г. — ему едва исполнилось 22 года. Позднее Гаусс стал самым влиятельным математиком своего поколения, заслужив почетный титул «короля математиков». Работа Гаусса позволила выделить фундаментальные ошибки, которые сводили на нет предыдущие попытки доказательства, но даже его версия содержала некоторые пробелы, и современные математики не считают доказательство Гаусса достаточно строгим. Интересно, что сам Гаусс никогда не заявлял, что оно является абсолютно верным. Он называл его «новым» и признавал ценность работы д’Аламбера.

ПРИЗНАНИЕ СКВОЗЬ ЗУБЫ

Конкуренция среди математиков так высока, что полного признания правоты доказательства Гаусса заставило себя ждать довольно долго — если оно вообще состоялось. Во время празднования двухсотлетия со дня рождения Леонарда Эйлера в 1907 г. в Базеле математик Фердинанд Фробениус сказал: «Эйлер представил наиболее алгебраическое доказательство существования корней уравнения. Оно основано на предположении, что каждое вещественное уравнение в четной степени имеет вещественный корень. Я считаю несправедливым приписывать доказательство основной теоремы алгебры исключительно Гауссу, который всего лишь нанес окончательные штрихи».

---

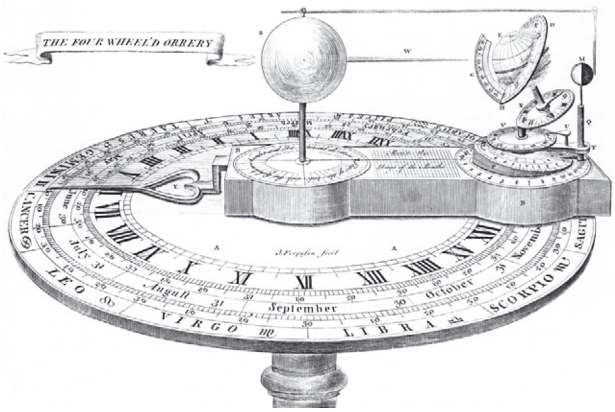
* Степенью полинома (многочлена) называется максимальная из степеней составляющих его элементов-одночленов. Т. е., если одна из переменных возведена, допустим, в квадрат, а другая — в куб, то это будет полином третьей степени — *прим. пер.*

В 1814 г. швейцарский бухгалтер Жан Робер Арган опубликовал одно из самых простых доказательств основной теоремы, основанное на идеях д'Аламбера. Доказательство Аргана принадлежит к так называемому неконструктивному типу доказательств. Такое доказательство демонстрирует существование математического объекта косвенным образом, не приводя конкретного примера такого объекта (в 1940 г. Хельмут Кнезер представил конструктивный вариант доказательства Аргана, сумев найти для него конкретные примеры). Через два года после Аргана, в 1816 г., Гаусс опубликовал полное доказательство, основанное на ранних работах Леонарда Эйлера 40-х гг. XVIII в. Во втором доказательстве Гаусс использовал неопределенные переменные особого типа, обозначающие только себя, в то время как Эйлер оперировал корнями, которых могло не существовать вовсе.

50

Теория возмущений

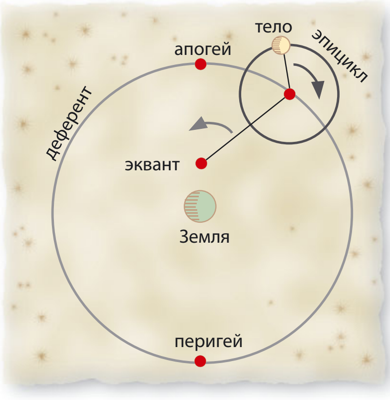
В XVII в. в рамках ньютоновой физики бытовало убеждение в том, что любое движение во Вселенной поддается математическому описанию, в основе которого лежала система исчисления, которую мы сегодня называем математическим анализом.



Основой механических моделей планетарных систем был механизм работы ньютоновой вселенной, сходный с часовым.

Ньютон нашел практический подход к разрешению таких ситуаций: очевидно, что основное воздействие на Луну оказывает Земля, поэтому остальные эффекты можно рассматривать в качестве возмущений этого воздействия. Отсюда следовала смена подхода: от «каков результат взаимодействия между Землей, Луной и Солнцем» к более поддающемуся вычислению «какие изменения вносит Солнце во взаимодействие Земли и Луны». Фактически такой подход применялся и раньше, в дополнение к эпициклам круговых орбит, которые использовали уже Птолемей и другие для аппроксимации измеренных и расчетных траекторий планет; но в том случае возмущения принимались реально существующими, а не вспомогательным средством для облегчения вычислений.

Приемы теории возмущений были использованы для объяснения наблюдаемого движения всех небесных тел вокруг Земли через комплексную систему эксцентрических окружностей и эпициклов.



Теория возмущений применяется и во множестве других областей. Одно из ее величайших достижений было опубликовано в 1799 г. Пьером-Симоном Лапласом. Внося небольшие изменения на основе возмущений в разработанную им модель солнечной системы, Лаплас установил, что она остается стабильной, подтвердив, что модель достаточно устойчива, чтобы адекватно отражать реальность**.

---

* См. принцип №44 — *прим. пер.*

** Речь идет о так называемом демоне Лапласа, способном воспринять положение и скорость любой частицы во Вселенной в любой момент времени, сообщить ее эволюцию в будущем и прошлом, а также восстанавливать элементы системы и знать их прошлое и будущность, т. е. об «идеальном решении». Сверка данных, полученных от «демона Лапласа», и тех, что получены путем математических вычислений, определяет истинность или ложность решения или степень наших знаний о системе. При этом сам Лаплас верил в неизменность орбит космических тел — *прим. пер.*

51

Центральная предельная теорема

Нормальное или гауссово распределение (имеющее вид колоколообразной кривой) имеет большую ценность для статистиков, поскольку часто встречается в природе. Но это не единственное такое распределение.

Пьер-Симон Лаплас был непревзойденным ученым, но после его смерти оказалось, что размер его мозга был меньше среднего.

В 1812 г. французский аристократ и ученый (ставший, разумеется, уже имперским ученым) Пьер-Симон Лаплас сформулировал теорему о центральном пределе в книге *Théorie Analytique des Probabilités* («Аналитическая теория вероятностей»). Эта теорема лежит в основе статистического распределения вероятностей. События, не имеющие протяженности в нормальном смысле — такие, как несчастные случаи или удары молнии, — попадают не в нормальное распределение, а в распределение Пуассона*, получившего имя другого французского математика, разработавшего этот метод еще через четверть века.

Распределение, описывающие события только с двумя возможными исходами (например, бросок монетки), называется биномиальным. Тем не менее в определенном смысле оба эти распределения — вкупе со многими другими — относятся к гауссовому. Если провести несколько экспериментов или попыток измерить что угодно, не все ответы будут одинаковы. При достаточном количестве попыток и сравнении полученных результатов эти результаты распределятся в соответствии с нормальным распределением.

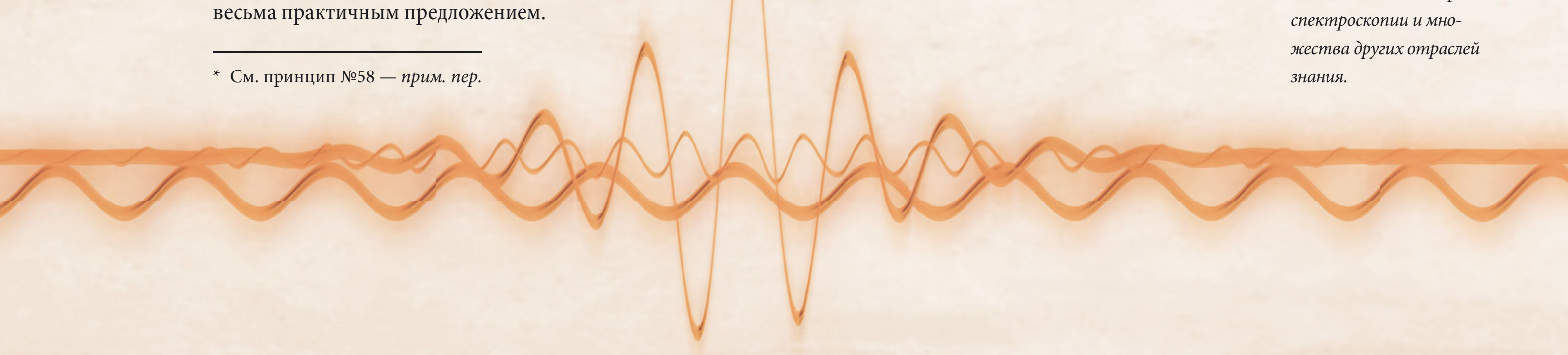
52

Гармонический анализ

Волны возникают во всех областях природных явлений — от акустики до квантовой механики. Обычно волны — весьма сложная материя, но гармонический анализ (также называемый анализом Фурье) дает возможность описать их математически.

В 1822 г. французский математик Жан Батист Жозеф Фурье в поисках математического описания распространения тепла совершил знаменательное открытие. Он считал, что он может доказать, что абсолютно любую волну можно разбить на серию синусоид, и поэтому любую волну можно представить математически через серию простых выражений. Однако его подход оказался не таким всесильным, как считал Фурье. Недостаток гармонического анализа в том, что фактическое вычисление коэффициентов может занимать чрезвычайно много времени, даже при помощи мощных компьютеров. Тем не менее разработка в 70-х гг. XX в. алгоритма быстрого преобразования Фурье резко ускорила такие вычисления, сделав гармонический анализ в реальном времени весьма практичным предложением.

Гармонический анализ — мощнейший инструмент. Он является ключевым элементом современной системы обработки сигналов, конструкции музыкальных инструментов, квантовой теории, спектроскопии и множества других отраслей знания.



---

* См. принцип №58 — *прим. пер.*

53

Механический компьютер

Компьютер в современном понимании — это гораздо больше, чем просто умный калькулятор. Это инструмент, которому можно поручить практически любую работу при условии, что инструкция — т. е. программа — составлена корректно. В начале XIX в. уровень технологий был, конечно, далек от сегодняшнего, но спрос на сложные математические расчеты значительно способствовал технологическому прогрессу.

Первым программируемым инструментом была совсем не расчетная машина, а ткацкий станок, изобретенный французом Жозефом Мари Жаккаром для производства узорчатой ткани. Первые механические ткацкие станки ткали быстрее людей, но были неспособны «запомнить» тканые узоры. Суть изобретения Жаккара состояла в том, чтобы закодировать узоры в виде отверстий, пробитых в карте, которую считывала машина. Перфокарты использовались в качестве инструмента программирования компьютеров вплоть до 80-х гг. XX в.

АДА ЛАВЛЕЙС

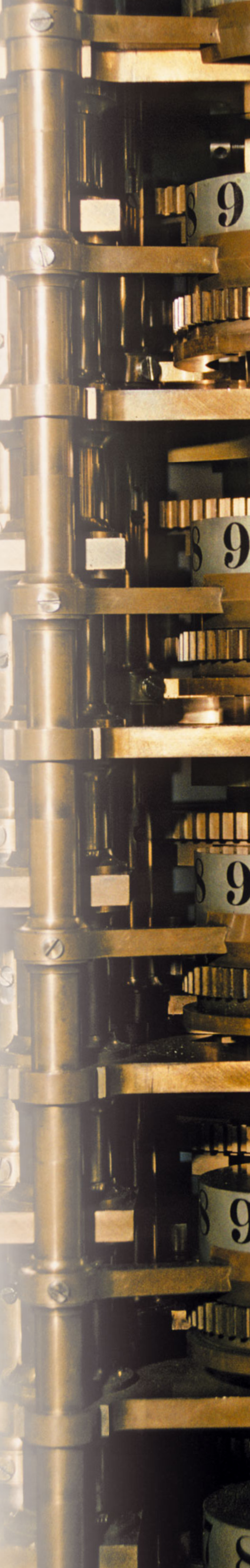
Леди Августа Ада Кинг Лавлейс (1815–1852) — единственная законнорожденная дочь английского поэта Джорджа Гордона Байрона. В 40-х гг. XIX в. она работала вместе с Бэббиджем над созданием аналитической машины для автоматического вычисления чисел Бернулли. Несмотря на то, что эта машина так и не была построена, Ада Лавлейс считается первым в истории программистом. Она ввела в обиход термины «цикл» и «рабочая ячейка». В ее честь назван язык программирования «Ада».

Поворот колеса

Станок Жаккара не был вычислительной машиной, но он вдохновил английского математика Чарльза Бэббиджа, которого многие считают провозвестником компьютерной эпохи, хотя бы с точки зрения «железа». В 1822 г. Бэббидж создал прототип вычислительной машины, который он использовал для тестирования следующей, более крупной модели, названной разностной машиной.

Она с помощью системы зубчатых колес подсчитывала данные из математических таблиц. При этом она оказалась слишком дорогой для Бэббиджа — он так и не смог ее построить. В 40-х гг. Бэббидж разработал еще более сложную аналитическую машину, которая считается первым настоящим компьютером, — она оснащалась запоминающим устройством, и ее можно было программировать.

В 70-х гг. XIX в. английский ученый лорд Кельвин* создал аналоговый вычислитель для предсказания высоты приливов. Основной деталью этой машины была система зубчатых колес. Положениям «включено» и «выключено» (функционал, аналогичный работе компьютерного коммутатора, при которой промежуточное положение невозможно), соответствовал подъем или опускание колес в системе, подобно постоянному движению воды при приливе и отливе. Механизм приводился в движение вручную, а движение более десятка колес фиксировало высоту прилива и переносило данные на вращающийся бумажный барабан. Машины лорда Кельвина были настолько точны, что использовались вплоть до 70-х гг. XX в.



Полноразмерная модель разностной машины Бэббиджа воссоздана в 1991 г. сотрудниками Музея науки в Лондоне по оригинальным чертежам изобретателя.

---

* Лорд (впоследствии барон) Кельвин, пэр Англии — титул британского физика и математика Уильяма Томсона (26.06.1824 — 17.12.1907), известного своими работами в области механики, термодинамики и электродинамики — *прим. пер.*

54

Функции Бесселя

Одна из важнейших областей применения математики — анализ и моделирование проблем в физике, в частности, при изучении электричества или гравитации. Пьер-Симон Лаплас в XVIII в. разработал очень удобный для таких исследований инструмент, который впоследствии совершенствовали многие математики. Главным из них был Фридрих Бессель.

Фридрих Бессель также известен своими наблюдениями звездных параллаксов для расчета расстояний до звезд.*

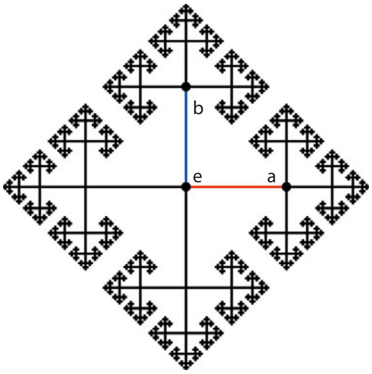
Изучая картину окружающего мира, физика особое внимание уделяет полям — магнитным, электрическим, гравитационным. Даже гидродинамика, изучающая состояние и поведение жидкостей, имеет дело с полем — определенным состоянием среды. Иными словами, в физике поле — некая динамическая величина, определенная во всех точках пространства.

В отсутствие источников такого поля (таких, например, как точечные заряды или массы), свойства полей обычно описываются уравнением Лапласа $\Delta f = 0$, где Δf — комбинация вторых производных от f. Это одна из самых универсальных, фундаментальных формул для изучения свойств полей.

Спектр ее использования охватывает такие явления, как теплопередача (процесс передачи и распространения тепловой энергии), протекание электрического тока, диффузия молекул газа, движение объектов в поле тяготения и т. д. Для того чтобы применять эту формулу, в каждом конкретном случае необходимо решить уравнение Лапласа для этого случая. Решения уравнения Лапласа называются гармоническими, или силовыми, функциями. Первым их определил Даниил Бернулли, а подробно исследовал Бессель. Они позволяют решать уравнения Лапласа в цилиндрических и сферических координатах, могут описать, например, вибрации барабанной мембраны, а также многие процессы распространения волн в различных средах, поэтому широко применяются при изучении электромагнетизма, акустики и гидродинамики.

55

Теория групп



Артур Кэли разработал и такие групповые диаграммы-графы (см. рис. выше), которые используют геометрический принцип отображения взаимосвязей между группой и множеством, которое создает эту группу. В его честь их называют «графы Кэли».

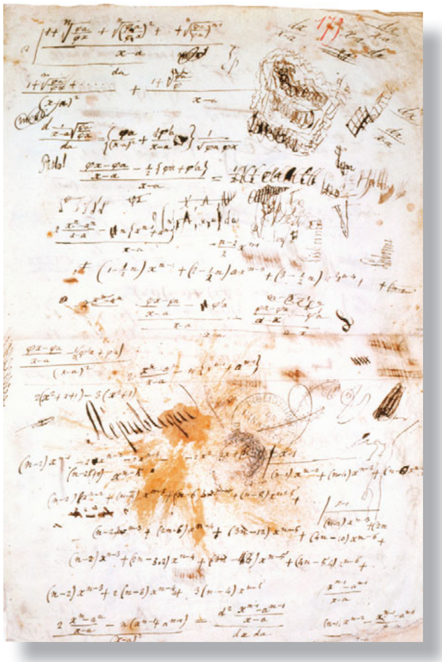
Язык математики отличается от повседневного языка, и слово «группа» — хороший тому пример. На языке математики группа — не просто некий комплект чего бы то ни было, а множество, с которым связана некая операция, определяющая, как можно комбинировать участников этого множества для того, чтобы их было еще больше.

x	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

Пример математической группы — слагаемые (снабженные операцией сложения) целые числа. Утверждение, что сумма двух целых чисел дает третье целое число, всегда будет верным. При этом снабженные операцией деления целые числа группой не являются, поскольку утверждение о том, что при делении целого числа на целое число всегда получается третье целое число — не верно (1 : 2 = 0,5, т. е. не целое число).

---

* Параллакс — изменение видимого положения объекта относительно удаленного фона в зависимости от точки наблюдения — *прим. пер.*

Некоторые группы (как, например, целые числа, снабженные операцией сложения) бесконечны, но некоторые имеют и свои пределы — как, например, числа –1, 0, 1, снабженные операцией умножения. Для того чтобы перечислить все члены конечной группы, можно создать таблицу Кэли, подобную той, что изображена слева (см. рис. на с. 70).

Рукопись 18-летнего Эвариста Галуа с фрагментами его исследований по теории групп. Блестящие перспективы Галуа были обращены в ничто неким офицером-артиллеристом, застрелившим 20-летнего математика на дуэли.

Обнаружение групп

Зачатки теории групп созданы в 20-х гг. XIX в. Первым заметным применением этой теории было, вероятно, доказательство Эвариста Галуа (который тогда еще учился в школе) о том, что некоторые типы полиномных (алгебраических) уравнений решения не имеют.

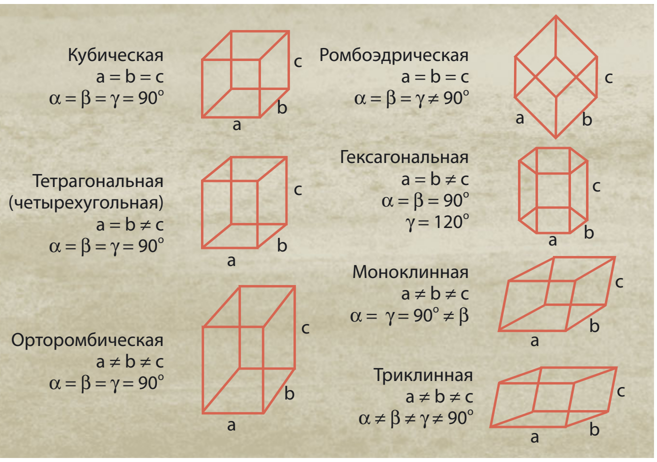
Применяется теория групп и при анализе симметрии. Так, равносторонний треугольник можно повернуть на 120° по часовой стрелке или отразить через вертикальную линию, проведенную через его центр, — при всех этих трансформациях он будет выглядеть одинаково. Однако существуют и такие трансформации (включая комбинации поворотов и отображений), которые изменяют форму. Таблица Галуа может наглядно показать две подгруппы трансформаций (симметричную и асимметричную), но ее главное достоинство в том, что она демонстрирует, как группы выходят за пределы простых описаний. Так, закономерность, обнаруживающаяся в симметрии треугольника, может проявляться в других областях математики, которые с треугольниками не имеют ничего общего.

Если некоторые группы можно разделить на более простые подгруппы, некоторые из них невозможно упрощать далее. Такие группы называются простыми (порой кажется, что математики используют слово «простой» совсем не в том значении, что остальные люди) — применяются они в квантовой физике и космологии.

Быстрое развитие теории групп в середине XIX в. ознаменовало начало фундаментальных изменений в постижении математики. До этого уравнения воспринимались в целом как упрощенная или сокращенная запись множества «настоящих вычислений», где бесконечное количество возможных чисел заменялось буквами или другими символами (т. е. переменными). Но с развитием теории групп точка зрения поменялась — и уравнения и другие математические структуры из инструмента превратились в отдельный и самостоятельный объект исследования.

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ И СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ

Теория групп применяется для решения многих практических вопросов. Одним из первых успехов ее практического применения стало определение максимального возможного количества кристаллических структур — 230. На основе этого результата была построена модель, описывающая формы природных кристаллов, осевая симметрия которых обычно ограничена определенным количеством типов. В основе кристаллической симметрии (согласно предсказанию, сформулированному на основе теории групп) лежат 32 базовые формы, сгруппированные в 7 систем — см. рис. справа.



56

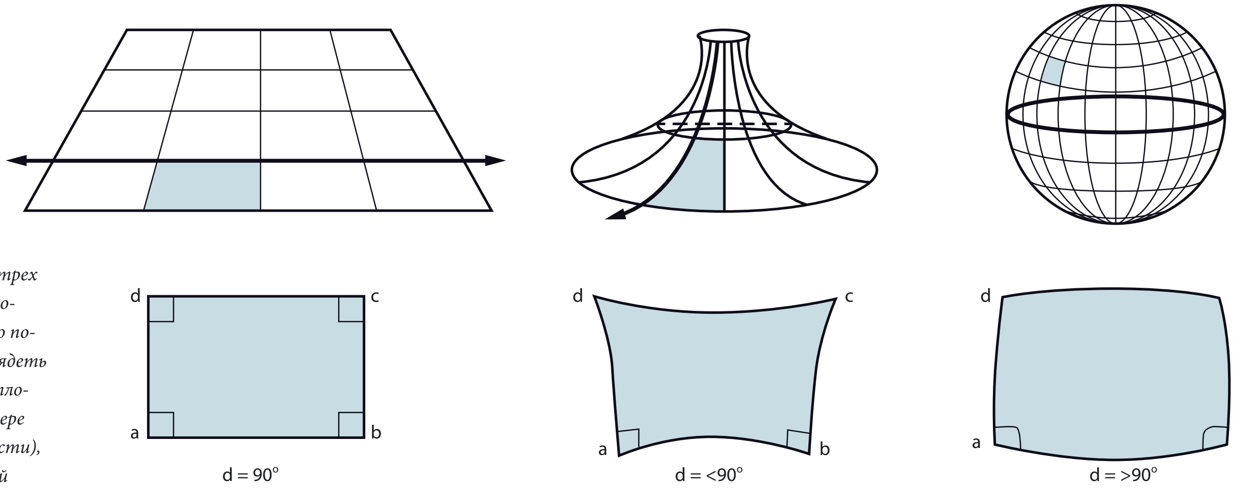
Неэвклидова геометрия

Фраза о том, что «Начала» Эвклида издавались столь же часто, что и Библия, давно стала расхожей. Веками труд этого древнегреческого математика почитался едва ли не священным. Однако математики никогда не отличались чрезмерным преклонением перед авторитетами, и к XIX в., измучившись сомнениями по поводу накопившихся противоречий в постулатах Эвклида, они предложили несколько странную новую геометрию, в которой прямые линии были... кривыми.

Геометрия Эвклида основана на точках, прямых и плоскостях — сегодня ее часто называют планиметрией. Точка не имеет размеров — это просто указатель местоположения; проходящая через точку прямая имеет лишь один размер — длину (ширина у нее отсутствует). Длина измеряется от одной точки до другой, находящейся на той же прямой. Свойства точек и прямых Эвклид описал в своих знаменитых пяти постулатах. Первые четыре непротиворечивы и приняты в качестве универсальных истин: 1) от всякой точки до всякой точки можно провести один (и только один) участок прямой; 2) участок прямой можно непрерывно продолжать по прямой; 3) из любой начальной точки участка прямой всяким раствором может быть описана окружность, при этом эта точка станет ее центром; 4) все прямые углы конгруэнтны (т. е. совпадают, если их совместить — например, наложить один на другой).

Проблемный постулат

Последний, пятый постулат эвклидовой геометрии оказался не таким очевидным. Гласит он следующее: если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых (равных 90°), то, продолженные неограниченно, эти две прямые неминуемо встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых углов.



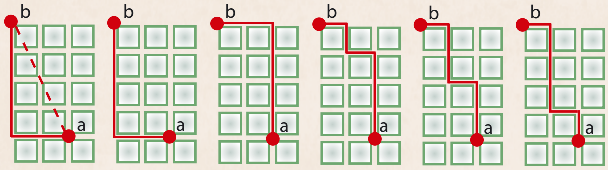
Простое сравнение трех разных геометрий показывает, насколько поразному будут выглядеть прямоугольники на плоскости, на псевдосфере (вогнутой поверхности), и на сфере (выпуклой поверхности).

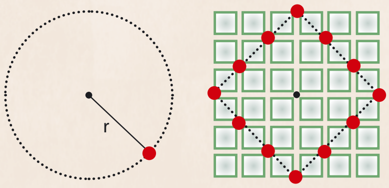
МАНХЭТТЕНСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Сетка прямых улиц, делящая город на однотипные прямоугольные кварталы, как в Манхэттене, сильно облегчает ориентирование на местности. Правда, при этом структура, состоящая исключительно из параллельных и перпендикулярных линий, создает собственную геометрию.

Каково в ней расстояние между точками A и B? Если вы — птица, или, допустим, гигантский Эвклид, вооруженный линейкой и теоремой Пифагора, дистанция измеряется по диагонали, а схема улиц попросту игнорируется. Итого выходит корень квадратный из 20 (условных единиц измерения длины), что составляет 4,47. Однако если вы все же идете по улице, то от точки A до точки B вам придется пройти 6 единиц длины, какой бы маршрут вы ни выбрали.

Реконструкция эвклидовых фигур с помощью *манхэттенской геометрии* приводит к неожиданным результатам. Окружность — фигура, все точки которой удалены на одинаковое расстояние (радиус) от ее центра — в условиях манхэттенской геометрии превращается в квадрат!





Радиус каждой из этих окружностей равен 3, вот только расстояние от центра до каждой точки на окружности справа измерено в соответствии с правилами манхэттенской геометрии, оперирующей только горизонтальными и вертикальными отрезками прямых.

Из этого постулата следовало, что, если эти самые внутренние углы в сумме составляют 180°, то те две прямые, что пересекают первую, не пересекутся никогда. Иными словами, они параллельны.

Веками громоздкий пятый постулат, исходивший к тому же из невысказанных (и недоказуемых) допущений, оставлял ощущение, что с ним что-то не так. Вообще, он больше похож на теорему, чем на постулат. Более того, он всегда представлялся обобщенным пересказом других разделов «Начал» Эвклида (например, постулата за номером 29 о том, что сумма внутренних углов треугольника составляет 180°) или даже самой теоремы Пифагора.

Кривые и прямые

Поколения математиков впустую потратили жизнь на поиск доказательства пятого постулата Эвклида. Среди них был и венгр Фаркаш Бойяи. Узнав о том, что его сын Янош также увлекся поисками, Фаркаш впал в отчаяние. Однако унывал он напрасно.

Янош был скрипачом-виртуозом, владел девятью языками (включая тибетский), слыл лучшим танцором (и фехтовальщиком) своего эскадрона. Однако слабое здоровье не позволило ему продолжать военную карьеру, и Янош вернулся к исследованиям пятого постулата.

В 1833 г. он опубликовал свои соображения в приложении к книге отца *Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheosos introducendi* («Опыт введения в основы чистой математики для обучающегося юношества»). К счастью, сегодня работа самого Яноша известна отдельно от этого монументального (хотя бы по названию) труда под гораздо более простым именем — «Приложение» (*Appendix*). Именно там описано революционное открытие, сделанное Яношем Бойяи, — пятый постулат независим от первых четырех, следовательно, его можно изменить и создать геометрию нового типа. Позднее стало известно, что к сходным выводам за несколько лет до Бойяи-младшего пришел русский математик Николай Лобачевский.

Лобачевский и Бойяи разработали геометрическую систему, в которой сумма внутренних углов треугольника была меньше 180°. Как и в эвклидовой геометрии, в геометрии Лобачевского и Бойяи кратчайшим расстоянием между двумя точками является прямая, но, в отличие от плоскостной геометрии Эвклида, прямые Лобачевского и Бойяи проложены по вогнутым (гиперболическим) поверхностям. В этой «гиперболической» геометрии прямые линии искривлены, а через одну точку могут проходить несколько прямых, параллельных заданной*.

Обратный изгиб

В середине 50-х гг. XIX в. Бернард Риман занялся исследованиями геометрии на выпуклых эллиптических поверхностях (сферах), где сумма углов треугольника превышала 180°. В геометрии Римана прямые также искривлены, но, в отличие от эвклидовой и геометрии Лобачевского — Бойяи, их длина не бесконечна — они замкнуты в окружности. А параллельных линий в геометрии Римана (которую также называют эллиптической) нет вообще.

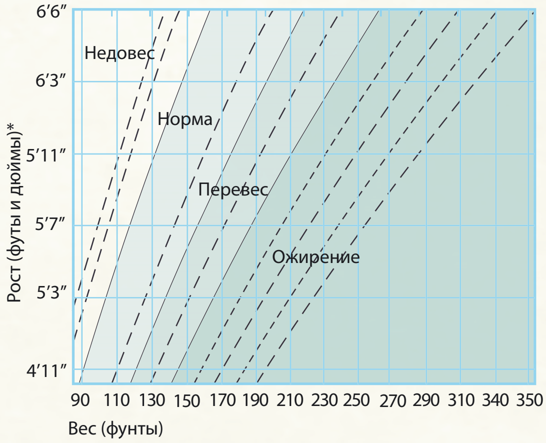
---

* Друг другу эти прямые, несмотря на едва ли не самое распространенное математическое заблуждение, параллельны не будут. Ни в эвклидовой геометрии, ни в геометрии Лобачевского и Бойяи параллельные прямые пересекаться не могут — *прим. пер.*

57

«Средний человек»

В ПРОИЗВОЛЬНО ВЫБРАННОЙ ГРУППЕ ЛЮДЕЙ КТО-ТО БУДЕТ ОЧЕНЬ ВЫСОКИМ, А КТО-ТО — КОРОТЫШКОЙ, но большинство будут примерно равного роста. Поместив значения роста на график, вы получите колоколообразную кривую, которую называют «нормальным распределением».



Карл Гаусс формализовал понятие «нормальное распределение» в начале XIX в. для описания изменчивых характеристик и свойств в пределах одной группы. В 1835 г. Адольф Кетле, объединив статистику и анализ вероятностей, получил *l’homme moyen* — «среднего человека». Сегодня его концепция применяется, в частности, при планировании в области общественного здравоохранения.

Исследования Кетле позволили выявить определенные закономерности и в поведении людей. Он сопоставил фактический рост 100 000 рекрутов с заявленными ими цифрами, проанализировав полученные ответы со статистически ожидаемым распределением данных. В результате обнаружилось, что число рекрутов с ростом немного ниже или выше установленных пределов превосходило ожидаемое количество. Ошибки в измерениях быть не могло: рекруты лгали, чтобы избежать солдатчины.

Индекс массы тела, необходимый для антропометрической классификации людей в соответствии с идеальным соотношением веса к росту, первоначально назывался индексом Кетле.

58

Распределение Пуассона

ВОКРУГ НАС ПРОИСХОДИТ МНОЖЕСТВО СОБЫТИЙ — ВКЛЮЧАЕТСЯ АВТОМОБИЛЬНАЯ СИГНАЛИЗАЦИЯ, ЗВОНЯТ ТЕЛЕФОНЫ, НА ЛУЖАЙКЕ РАСТЕТ ТРАВА — какие из них действительно случайны, а другие указывают на некие закономерности. Разработанная французским математиком Симеоном-Дени Пуассоном в 1837 г. формула стала важнейшим методом определения того, случайным или закономерным является то или иное событие.

Распределение Пуассона анализирует степень закономерности возникновения случайных событий. Возьмем, например, машины, проезжающие по шоссе в течение часа. Даже зная, сколько машин проедет в среднем за час, мы не можем сказать, что за каждую минуту этого часа по шоссе проедет определенное (и одинаковое) количество машин. Случись такое, мы бы даже заподозрили неладное. Гораздо более вероятно, что в данную минуту на шоссе не будет ни одной машины, а в следующую по шоссе проедут две. Все это зависит от случая.

Многочисленные заслуги Симеона-Дени Пуассона позволили ему занять почетное место среди 72 великих ученых Франции, чьи имена были выгравированы на Эйфелевой башне в 1889 г.

---

* Используя приведенные на этой схеме антропометрические данные, можно показать график распределения роста и веса по общему количеству измеренных рекрутов. Тогда мы и получим ту самую колоколобразную кривую Гаусса — *прим. пер.*

Формула Пуассона позволяет вычислить, за какое ожидаемое количество минут по шоссе проедут 0, 1, 2 или более машин, зная среднее количество проезжающих машин за единицу времени.

Таким образом, если фактический результат соответствует предсказанному, вероятнее всего, он случаен, если же нет — это означает, что происходящее испытывает влияние какого-либо внешнего фактора.

Толчком к исследованиям Пуассона послужил интерес математика к решениям, которые принимали суды присяжных. Популяризации распределения Пуассона немало способствовал русский математик польского происхождения Владислав (Ладислав) Борткевич, выпустивший в 1898 г. книгу *Das Gesetz der kleinen Zahlen* («Закон малых чисел»).

«Да» и «нет»

Распределение Пуассона применимо в самых различных областях: в науке и медицине, экономике и промышленности. Так, если станки на фабрике время от времени непредсказуемо выходят из строя, распределение Пуассона позволит предсказать вероятность того, что одновременно сломаются несколько станков — зная это, менеджмент сможет подготовиться к подобной ситуации.

Радиоактивный распад — пример природного процесса, протекающего в соответствии с распределением Пуассона. Сопоставление фактических данных с истинно случайными может обнаружить или исключить из рассмотрения скрытые факторы, влияющие на процесс. Является ли, например, концентрация случаев заболевания лейкемией в одном районе случайной или это результат действия внешнего вредоносного фактора? Ключевым методом поиска ответа на подобный вопрос будет статистический анализ, основанный на распределении Пуассона.

В книге Владислава Борткевича «Закон малых чисел» описано его классическое исследование случаев лягания солдат прусской армии лошадьми со смертельным исходом (число таких случаев невелико, но для мирного времени довольно значительно). Борткевич показал, что статистика «смертельных ляганий» соответствует распределению Пуассона, следовательно, эти смерти являются случайными.

59

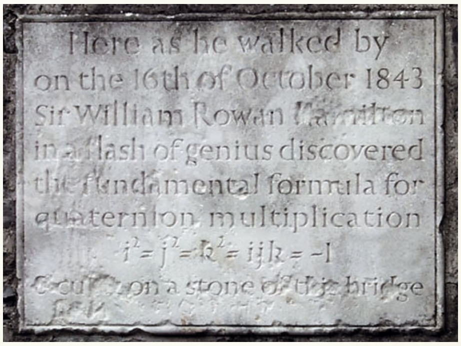
Кватернионы

Числа — не совсем то, чем они кажутся: целые являются подмножеством вещественных (действительных), а те — подмножеством комплексных. Но и это еще не все. Комплексные числа — подмножество кватернионов.

Действительные числа можно представить как точки на числовой оси, комплексные — как точки на координатной плоскости. Кватернионы же можно рассматривать как точки в трехмерном математическом пространстве. «Изобрел» кватернионы в 1843 г. сэр Уильям Роуэн Гамильтон. Поначалу их широко применяли в механике и при изучении электромагнитных явлений и работе с ними, но с появлением более простых и удобных методов они вышли из обращения. Однако еще через некоторое время кватернионы вновь оказались востребованы — они прекрасно подходили для описания вращения в пространстве. Сейчас кватернионы — непременный инструмент компьютерной графики, обработки сигналов, молекулярного моделирования, а также математического обеспечения космических полетов.

Главной проблемой, которую пришлось решить Гамильтону при разработке своей концепции, была задача «приспособить» кватернионы к обычным математическим операциям. Было неясно, например, как делить один кватернион на другой. Когда же решение осенило Гамильтона, он, чтобы ненароком не позабыть его, высек это решение на дублинском мосту, по которому проходил с женой.

Мемориальная табличка на мосту Брум Бридж в память о прогулке, вдохновившей Уильяма Гамильтона в 1843 г.



Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge

60

Трансцендентные числа

Математики подозревали это давно, но лишь в 1844 г. француз Жозеф Луивилль продемонстрировал, что десятичные записи некоторых чисел не только бесконечны, но и весь ряд цифр после запятой в таких числах выстраивается непредсказуемо, без какой-либо закономерности.

Рациональное число — это дробь вида p/q, числителем (*p*) и знаменателем (*q*) которой являются целые натуральные числа (т. е. 1, 2, 3, 4, 5 и т. д., ноль, а также отрицательные натуральные числа). Число, которое не может быть представлено в виде такой дроби, называется иррациональным (правда, далеко не все математики были с этим согласны — Пифагор, например, считал, что все числа имеют истинное целое значение, и не признавал существование иррациональных).

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

Все луивиллевы числа (x), т. е. те, что удовлетворяют приведенному выше выражению (где p *и* q *— положительные целые числа), трансцендентны. Они стали первыми примерами таких чисел.*

Забавно, что самым известным иррациональным числом является, пожалуй, как раз число π. Чуть менее известен квадратный корень из 2. Трансцендентные* числа — особый класс иррациональных. Действительное (вещественное) или комплексное трансцендентное число не может быть алгебраическим: оно не может быть корнем многочлена с рациональными коэффициентами (не равного тождественно нулю).

В поисках трансцендентности

Доказать, что некое число является трансцендентным, довольно сложно. Жозеф Луивилль так и не смог доказать трансцендентность числа *e*, но преуспел в описании бесконечного класса трансцендентных чисел через бесконечные дроби, а в 1851 г. представил пример трансцендентного числа, получившего имя константы (постоянной) Луивилля. Сегодня числа такого типа называют луивиллевыми.

Константа Луивилля в десятичной записи — бесконечная серия нулей после десятичного знака, «разбавленная» единицами на месте с номером, равным экспоненциальному факториалу (*n!*). Факториал *n!* — произведение всех натуральных чисел от 1 до *n*. Так, факториал 3 (3!) равен 1×2×3=6.

Таким образом, константа Луивилля равна 0,11000100000000000000000100…
В 1873 г. была доказана трансцендентность числа *e*, в 1882 — числа π. Фактически большинство иррациональных чисел трансцендентны — тех, в последовательности десятичных знаков которых наблюдается некая закономерность, очень мало.

ПАРАДОКС ЗЕНОНА

Идею о том, что числа не обязательно имеют точное и конечное значение, сформулировал в V в. до н. э. греческий философ Зенон. Свои соображения он изложил в серии парадоксальных мысленных экспериментов, основанных на посылке о бесконечной делимости пространства. Один из них, называемый «парадоксом дихотомии**», гласит: «Чтобы преодолеть путь, нужно сначала преодолеть половину пути, а чтобы преодолеть половину пути, нужно сначала преодолеть половину половины, и так до бесконечности. Поэтому движение никогда не начнется».

К этой мысли Зенон вернулся в знаменитом парадоксе об Ахиллесе и черепахе, утверждающем, что быстроногий воин никогда не догонит медленную рептилию, бесконечно долго продолжая сокращать расстояние до нее.

До разработки дифференциального и интегрального исчисления Ньютоном и Лейбницем такие парадоксы оставались неразрешимыми. Но применение анализа продемонстрировало, что бесконечные геометрические серии могут стремится к пределу, где бесконечное количество уменьшающихся «половин пути» уравновешивается бесконечным уменьшением времени, необходимого для их преодоления.

---

* Трансцендентность — философское понятие, описывающее нечто, недоступное опытному познанию или не основанное на опыте. Иными словами — нечто потустороннее — *прим. пер.*

** Дихотомия — от греческого «деление пополам» — *прим. пер.*

61

В поисках Нептуна

Настоящие возможности математики выясняются тогда, когда чисто теоретические расчеты приводят к открытиям в реальном, материальном мире. В 1846 г. выдающийся французский математик блестяще сделал это, предсказав местонахождение неизвестной до того планеты.

В 40-х гг. XIX в. самой удаленной от Земли планетой считался Уран, обнаруженный 60 годами ранее. Многие десятилетия наблюдений за этим объектом, едва видимым невооруженным глазом, показали, что его протяженная орбита (Уран совершает один оборот вокруг Солнца за 84 земных года), не вполне соответствует траектории, описываемой согласно ньютоновым законам тяготения. Возникло подозрение, что на Уран воздействует еще какое-то космическое тело, искажая его орбиту.

Задачу найти это тело возложили на математиков — и началась гонка. Работавший в парижской обсерватории Урбен Леверье преуспел в поисках, опередив на несколько дней своего коллегу-конкурента из Англии Джона Адамса. Отклонения орбиты Урана позволили Леверье обнаружить новую планету. Результаты своих наблюдений он переправил в Берлин Иоганну Галле. Немецкий астроном направил свой телескоп на предполагаемое местонахождение новой планеты через несколько часов после получения письма от Леверье. Она действительно оказалась там — голубая, как океан, восьмая планета Солнечной системы получила имя Нептун, в честь древнеримского бога морей.

Урбен Леверье (справа) рассказывает об открытии Нептуна Луи-Филиппу I, последнему королю Франции.

Мнимая находка

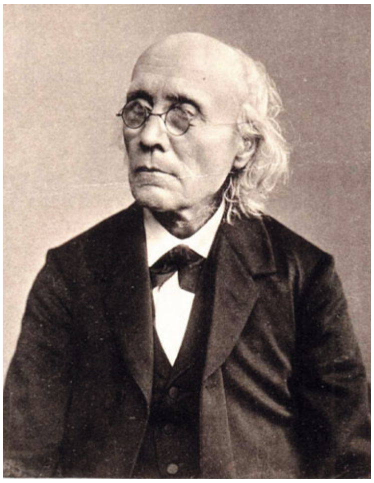
Через несколько лет Леверье предположил, что в Солнечной системе должно быть девять планет*. Девятая, по его мнению, должна была располагаться совсем рядом с Солнцем. На эту мысль его натолкнули возмущения в орбите Меркурия, и Леверье «разместил» между этой планетой и Солнцем еще одну — Вулкан, с периодом обращения всего в 19 дней. Полвека астрономы искали Вулкан, неоднократно даже «обнаруживая» его. Но, как оказалось, напрасно — «находки» были мнимыми, а в 1916 г. Альберт Эйнштейн с помощью разработанной им теории относительности сумел объяснить аномалии орбитального движения Меркурия. Вулкан для этого не потребовался.

---

* В настоящее время планет в Солнечной системе восемь — Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун. При этом поиски новых велись постоянно, и, что характерно, успешно: например, с 1930 по 2006 г. планет было девять — карликовый Плутон после своего обнаружения также считался планетой, пока в 2006 г. астрономы не уточнили определение понятия «планета» — *прим. пер.*

62 Закон Вебера — Фехнера

«Для роста интенсивности ощущения в арифметической прогрессии, раздражитель должен возрастать в геометрической»*, — гласит закон Вебера — Фехнера, математически описывающий чувственное восприятие и физическое стимулирование слуха и других чувств.



Немец Густав Фехнер — пионер экспериментальной психологии, основоположник психофизиологии и психофизики. Его имя носит открытая им оптическая иллюзия, эффект возникновения ощущения цвета при наблюдении определенных черно-белых узоров. Дополнения к работе Вебера о восприятии звука он представил в книге Elemente der Psychophysik («Начала психофизики»).

Органы чувств человека способны регистрировать сигналы в широчайшем диапазоне. Так, наше ухо может уловить звук, тихий настолько, что амплитуда колебаний барабанной перепонки не превысит при этом линейного размера одного атома. Вместе с тем мы способны услышать и звук в 10 триллионов (!) раз более мощный (превышение этого предела делает звук неприятным). Аналогично самая тусклая звезда, которую мы можем увидеть, примерно в 10 триллионов раз уступает в яркости Солнцу.

Какофония звуков уличного движения или гул пролетающего над головой самолета не мешают нам выделять из общей звуковой картины тихий разговор или звон упавшей монетки. Аналогичным образом, слушая музыку, мы улавливаем и различаем такие тихие пассажи, мощность звука в которых составляет менее одного процента от громкости самых звучных.

Бенефис математиков

С точки зрения математики, наши органы чувств реагируют не на абсолютное усиление раздражителя, а на его частичное усиление по сравнению с предыдущим уровнем. В 1846 г. Эрнст Генрих Вебер обнаружил, что разница в восприятии человеком весовой нагрузки пропорциональна логарифму ее изменения, таким образом, небольшие увеличения веса оставались практически незаметны. В случае со звуком десятикратное усиление раздражителя (увеличение громкости) на слух воспринималось лишь как двукратное. В 1860 г. Густав Фехнер развил идеи Вебера, дав свое имя получившейся концепции.

Один из способов проверить действие закона Вебера — Фехнера на практике — закрыть одно из открытых окон: если бы наш слух воспринимал изменение уровня шума линейно, то такое действие снизило бы этот уровень вдвое. Но, несмотря на то что фактически интенсивность звука (уровень шума) в комнате таким образом снижается в два раза, на слух разница между тем, что было, и тем, что стало, едва ощутима.

Даже в XIX в. город был не самым тихим и спокойным местом в мире.

---

* Более строгое математическое определение этого закона звучит так: интенсивность ощущения пропорциональна логарифму интенсивности раздражителя — *прим. пер.*

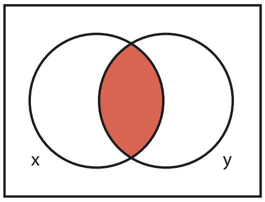
63

Булева алгебра

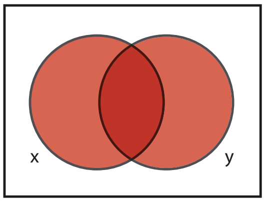
В ТРАДИЦИОННОЙ АЛГЕБРЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЯЮТ ЧИСЛА. МАШИНА, ИСПОЛЬЗУЮЩАЯ ОПРЕДЕЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ для решения подобных уравнений, — всего лишь калькулятор, счетчик. Но в 40-е гг. XIX в. английский математик Джордж Буль понял, что переменные могут быть чем-то бóльшим.

Вершиной работы Буля стала опубликованная в 1854 г. книга *An Investigation of the Laws of Thought* («Исследование законов мышления»). В ней он описал алгебру, оперирующую всего двумя числовыми единицами: 1 означало истину, 0 — ложь. Вместо сложения, деления и других действий, принятых в традиционной алгебре, *булевыми* операциями стали И, ИЛИ, и НЕ, также известные как конъюнкция, дизъюнкция и дополнительность (аналог отрицания). Обозначением конъюнкции служит символ ∧, это логический аналог умножения — присутствие в любом выражении с этим оператором ноля дает в результате 0 (т. е. ложь). Дизъюнкция, обозначением которой служит символ ∨, это аналог логического сложения, причем 1∨1 считается равным 1. Наконец, дополнительность, обозначаемая символом ¬, это обмен значениями — 0 вместо 1 и наоборот. Эти основные операторы можно выразить различными способами, в число которых входит таблица или решетка возможных результатов их применения. Эти сетки называются таблицами истинности. Другим способом их выражения стали простые диаграммы Венна, демонстрирующие возможные пересечения множеств x и y (различные группы единиц и нолей). Буль разработал и другие операции на основе трех базовых сочетаний.

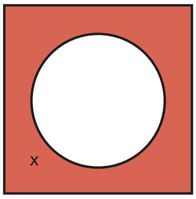
Целью булевой алгебры было расчленить причину на ее базовые логические составляющие и представить их в виде простых символов.



конъюнкция



дизъюнкция



дополнительность

На языке компьютера

Сегодня булева логика связана с компьютерным программированием, в частности, с составлением алгоритмов. Работы Буля оказали некоторое влияние на развитие механических счетных машин того периода, но его алгебра далеко опередила время. Ее звездный час настал через век с лишним, в эпоху компьютерной логики. В 30-х гг. XX в. американский математик и инженер-электрик Клод Шэннон начал применять уравнения Буля при разработке коммутационных релейно-контактных схем. Эти уравнения позволяли контролировать включения и выключения, как во всей схеме в целом, так и в разных ее частях по отдельности. Так появились первые логические затворы, ставшие одним из краеугольных элементов цифрового компьютерного вычисления (как мы помним, «цифровой» на самом деле означает всего лишь «использующий числа», причем сейчас речь как раз идет о числах 0 и 1 из переменных Буля).

В принципе, «логический затвор» — это любое действие (включение/выключение) коммутирующего устройства в электрической схеме компьютера: от электровакуумных диодов на заре компьютерной эры до сегодняшних миллионов транзисторов, умещающихся в одном микрочипе. Теоретически логический затвор в качестве входного сигнала может использовать все, что угодно, — от бильярдного шара до разогнанного фотона.

64

Распределение Максвелла — Больцмана

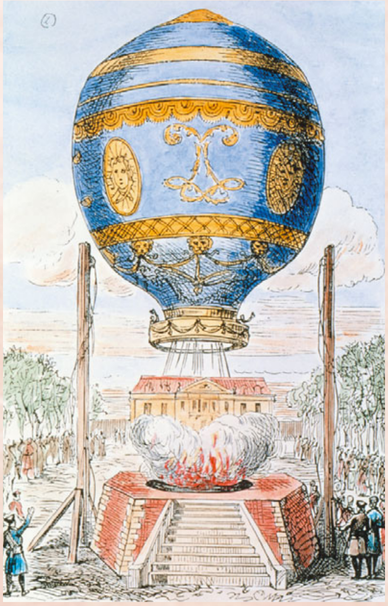
Наряду с развитием математического инструментария, описывающего движение молекул газа, Джеймс Клерк Максвелл внес значительный вклад в развитие математического аппарата электромагнетизма.

Распределение Максвелла — Больцмана — это результат независимых исследований двух физиков XIX в. — Джеймса Клерка Максвелла и Людвига Больцмана. Они впервые применили статистические методы к изучению физических явлений, а их труды способствовали появлению новой отрасли физики — статистической механики.

В середине XIX в. термодинамика (учение о теплоте) была уже достаточно развитой отраслью науки, но идея о том, что вся материя состоит из атомов, все еще считалась некоторыми учеными спорной. Неприятие коллегами исходной идеи статистической механики о том, что материя состоит из отдельных частиц, приводило к многочисленным спорам и, возможно, стало одной из причин самоубийства Больцмана в 1906 г. Всего через несколько лет существование атомов было не только признано научным сообществом, но и начались поиски их внутренней структуры.

Идея о том, что тепло — это движение частиц, составляющих материю, была предложена более чем за столетие до Максвелла и Больцмана швейцарским математиком Даниилом Бернулли. Согласно кинетической теории строения газов, постоянное движение молекул определяет такие макрохарактеристики газов, как температура и давление. Именно с ними имеет дело термодинамика.

Физика полета на тепловом воздушном шаре братьев Монгольфье в 1783 г. впервые была целиком объяснена только благодаря распределению Максвелла — Больцмана, описавшего, как в результате нагрева плотность заполняющего шар воздуха снижается по мере увеличения объема вследствие увеличения скорости движения его частиц.



Ветер, ветер, ты могуч…

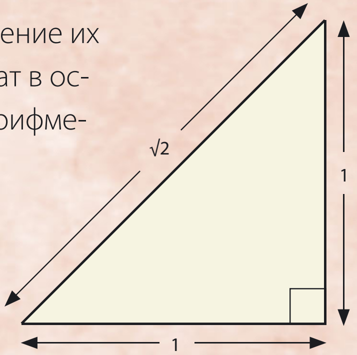
В 1859 г. Максвелл сформулировал закон, описывающий скорость частиц в газе. Поскольку таких частиц слишком много, чтобы описывать их по отдельности, нужен был статистический закон. Некоторые ученые считали, что столкновения частиц выровняют их скорости, но Максвелл настаивал на том, что скорости будут разными в определенном диапазоне. На следующий год теория Максвелла корректно предсказала, что вязкость газа не зависит от давления. Работы Максвелла вдохновили Больцмана, бывшего тогда студентом Венского университета, и в 1871 г. он обнародовал более общую версию закона Максвелла, выразив его в терминах энергии, а не скорости. Она и стала известной как распределение Максвелла — Больцмана.

65

Рационализация иррационального

Честь открытия иррациональных чисел принадлежит древнегреческой школе пифагорейцев. Такое открытие поставило под сомнение их собственную веру в то, что числа и отношения между ними лежат в основе всего сущего. Эти неудобные величины были изгнаны из арифметики и оставались уделом геометров вплоть до XIX в.

Как обнаружили пифагорейцы, некоторые величины оказались «несоизмеримы» между собой. Иными словами, их невозможно было выразить в виде рационального отношения одного к другому. Это означало, что до формализации десятичной записи, распространившейся в XVI в., эти величины нельзя было даже нормально записать в численной форме. Даже при десятичной записи их точное значение указать было невозможно, поскольку цифры после запятой в их записи никогда не заканчивались.



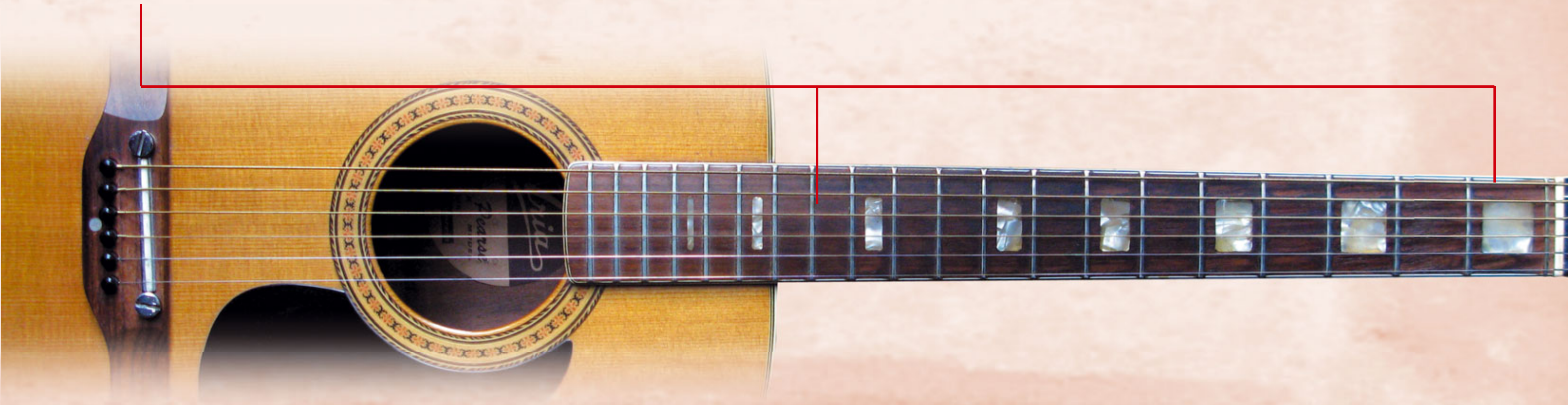
В множество иррациональных чисел входит отношение длины диагонали квадрата к длине его стороны (например, квадратный корень из двух — см. рис. сверху) или отношение длины стороны куба к длине стороны другого, вдвое большего по объему куба (кубический корень из двух).

«Рассечение» иррационального узла

В IV в. до н. э. Евдокс из Книда решал эту проблему с помощью изощренного определения, разделяющего величины на те, что можно сравнить, и те, что нельзя. Некоторые историки полагают, что работа Евдокса, включенная в «Начала» Эвклида, не уступает лучшим на сегодня определениям иррациональных чисел, к которым пришел в 70-х гг. XIX в. немецкий математик Рихард Дедекинд.

Определение иррациональных чисел было необходимо для перевода математического анализа с геометрической базы, где его оставили создатели дифференциального и интегрального исчисления в XVII в. на полностью арифметическую (числовую). Дедекинд жаловался: «Часто утверждается, что дифференциальное исчисление имеет дело с непрерывными величинами, но эта непрерывность нигде не объясняется». Непрерывность невозможно выразить исключительно рациональными числами. На числовой оси каждое рациональное число представлено точкой, хотя не каждая точка на этой оси соотносится с рациональным числом — некоторые из них представляют иррациональные. Между точками, соотносящимися с рациональными числами, всегда будут оставаться «зазоры».

Определение Дедекинда включало все *вещественные* числа — как рациональные, так и иррациональные. Дедекинд предложил метод, сегодня известный как «Дедекиндово сечение», согласно которому числовая прямая делится на две части: каждое вещественное число можно определить через сечение, разделяющее числа на два подмножества — числа, бóльшие, чем данное число, и те, что меньше его. Так, квадратный корень из двух есть сечение между числами, квадраты которых меньше двух, и тех, квадраты которых больше двух.

Интервалы между порожками ладов гитары, сконструированной под равномерно темперированный строй, расположены согласно приближениям (аппроксимациям) к иррациональному числу — корню 12 степени из 2.

66 Бесконечность

Для древних понятие бесконечности было табуированным. Бесконечность находилась в ведении богов и, согласно лучшим определениям того времени, не поддавалась описанию. Такой подход превращал основанный на математике рационализм в хаос. Сложно представить, как бы они отреагировали на сформулированные Георгом Кантором в 1874 г. открытия о том, что может быть несколько типов бесконечностей, и некоторые из них больше, чем другие.

Математический символ бесконечности — ∞ — ввел в обращение английский математик Джон Валлис в 1655 г.

МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

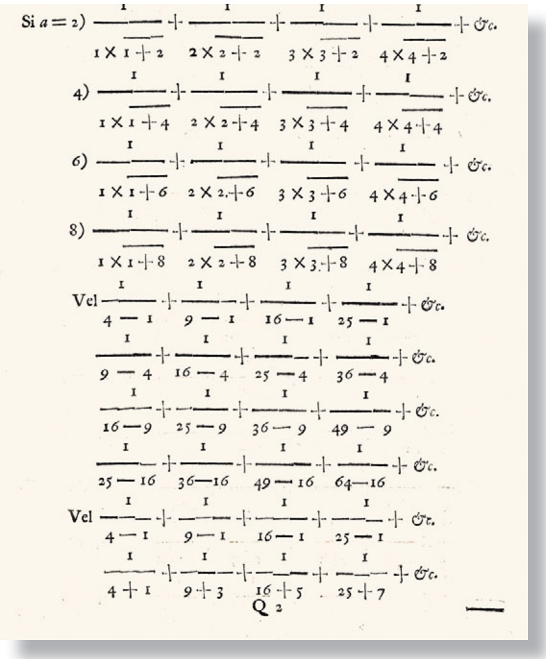
Кантору требовалось определить разницу между различными типами бесконечностей, которые он обнаружил. Он сумел сделать это через понятие мощности множества — то есть количества элементов в нем. Таким образом, множества (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) и (красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый) обладают одинаковой мощностью — 7. Это подтверждается тем, что каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого множества, при этом определено обратное отображение, которое обладает тем же свойством. Этот метод прямого и обратного отображения членов можно применять и к бесконечным множествам. Наименьшей мощностью из них обладают счетные — такие, например, как множество натуральных чисел: 0, 1, 2, 3 (и т. д.). Несмотря на то, что досчитать до конца их невозможно, очевидно хотя бы, как это можно делать, как начать считать. Мощность множества натуральных чисел обозначают знаком $\aleph_0$ (алеф-ноль). Различные виды бесконечных множеств имеют разную мощность.

Обычно бесконечность считают очень большим числом, но это не лучший способ описать ее. Каким бы большим ни было число, оно все равно не может приблизиться к бесконечности. Возьмем, например, странное число гугол — 10^{100}, единицу с сотней нулей. Это очень большое число — в миллиарде, например, всего девять нулей, в триллионе — 12. Имя этому числу придумал девятилетний Милтон Сиротта, племянник Эдварда Каснера, который в 1920 году обратился к ребенку за советом. Это же число вдохновило компанию Google в поисках своего имени. Штаб-квартира этой интернет-империи, расположенная в Санн-Хосе, Калифорния, называется «Гугл-плекс» — не путать с гуглоплексом. Гуглоплекс — это число, равное 10 в степени гугол ($10^{\text{гугол}}$), то есть единица с гуголом нолей. Известный популяризатор науки Карл Саган заметил, что кусок бумаги, достаточно большой, чтобы записать на нем число гуглоплекс, не поместится в известных нам пределах Вселенной, «тем не менее оно настолько же далеко от бесконечности, как и единица».

Все и ничего

Концепция бесконечности исполнена парадоксов, и во многом оставалась прерогативой философии, пока люди пытались вообразить нечто бесконечно малое или бесконечно большое. Так, изобретатель знака бесконечности — ∞ — Джон Валлис считал, что отрицательные числа не меньше ноля (он полагал, что это невозможно), но просто бесконечно малы.

Великий немецкий математик Давид Гильберт объяснял своим студентам парадоксальность бесконечности, предлагая им представить себя регистратором отеля с бесконечным числом номеров. Даже если каждая комната «отеля Гильберта» занята*, в него всегда можно вселить



Этот текст Пьера Ремона де Монморта, написанный в XVIII в., посвящен проблеме бесконечных числовых рядов — последовательностей чисел, получаемых в результате определенных математических операций, но не имеющих определенного конечного значения.

$$\text{Si } a = 2)\ \frac{1}{1\times\overline{1+2}} + \frac{1}{2\times\overline{2+2}} + \frac{1}{3\times\overline{3+2}} + \frac{1}{4\times\overline{4+2}} + \&c.$$

$$4)\ \frac{1}{1\times\overline{1+4}} + \frac{1}{2\times\overline{2+4}} + \frac{1}{3\times\overline{3+4}} + \frac{1}{4\times\overline{4+4}} + \&c.$$

$$6)\ \frac{1}{1\times\overline{1+6}} + \frac{1}{2\times\overline{2+6}} + \frac{1}{3\times\overline{3+6}} + \frac{1}{4\times\overline{4+6}} + \&c.$$

$$8)\ \frac{1}{1\times\overline{1+8}} + \frac{1}{2\times\overline{2+8}} + \frac{1}{3\times\overline{3+8}} + \frac{1}{4\times\overline{4+8}} + \&c.$$

$$\text{Vel } \frac{1}{4-1} + \frac{1}{9-1} + \frac{1}{16-1} + \frac{1}{25-1} + \&c.$$

$$\frac{1}{9-4} + \frac{1}{16-4} + \frac{1}{25-4} + \frac{1}{36-4} + \&c.$$

$$\frac{1}{16-9} + \frac{1}{25-9} + \frac{1}{36-9} + \frac{1}{49-9} + \&c.$$

$$\frac{1}{25-16} + \frac{1}{36-16} + \frac{1}{49-16} + \frac{1}{64-16} + \&c.$$

$$\text{Vel } \frac{1}{4-1} + \frac{1}{9-1} + \frac{1}{16-1} + \frac{1}{25-1} + \&c.$$

$$\frac{1}{4+1} + \frac{1}{9+3} + \frac{1}{16+5} + \frac{1}{25+7} + \&c.$$

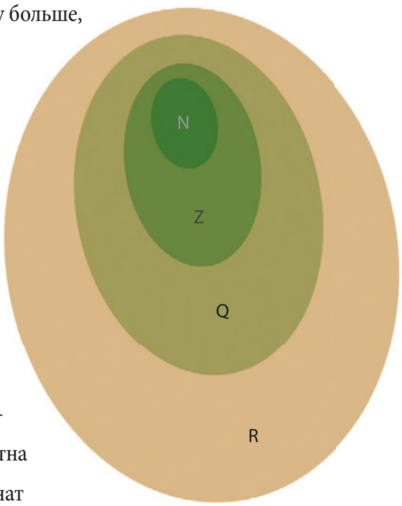
Q 2

---

* Ключевой момент формулировки парадокса Гильберта заключается в правильном использовании слов. В отеле занята именно ***каждая*** комната, а не ***все*** комнаты — во втором случае изначальные условия задаются неверно и парадокс не имеет смысла — *прим. пер.*

нового постояльца, предложив уже поселившимся переехать в комнату, номер которой на единицу больше, чем та, которую он занимает. Таким образом, новый постоялец поселяется в комнате номер 1.

Если вслед за ним одновременно прибудет бесконечное число постояльцев, регистратора это тоже не смутит — в этом случае он предложит «старым» постояльцам переселиться в комнаты с номерами, вдвое большими, чем те, что они занимают в данный момент. Как только они это сделают, «занятая» ими ранее бесконечность номеров освободится для вновь прибывших.



🟩 *Счетные бесконечности*
🟫 *Несчетные бесконечности*

N — бесконечное множество натуральных чисел; Z — множество целых чисел (включая отрицательные); множество Q включает все рациональные числа; R — множество вещественных чисел.

Бесконечности Кантора

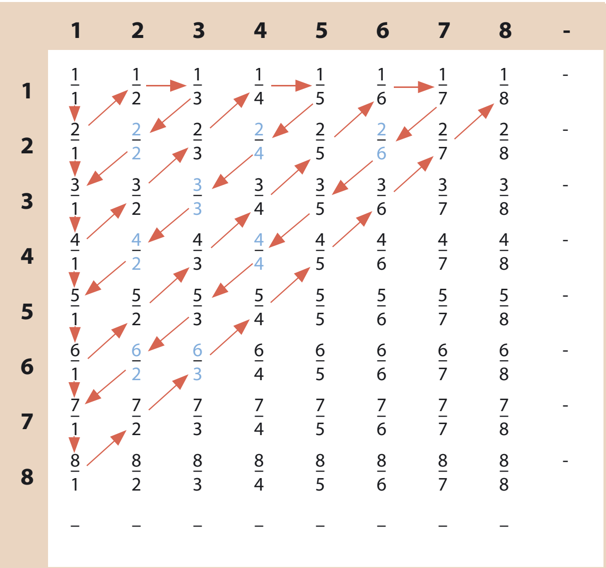
История «отеля Гильберта» часто была прелюдией к лекции о работах другого немецкого математика — Георга Кантора, который в 1870-х гг. подвел под понятие «бесконечность» надежную математическую основу. В частности, он обнаружил, что существует не одна вероятность, как можно было бы подумать, а бесконечное их количество. Первая бесконечность нам всем хорошо известна и понятна. Это бесконечность натуральных счетных чисел — 1, 2, 3… и т. д. Подобно номерам комнат «отеля Гильберта», их можно подсчитывать вечно, прибавляя к предыдущему единицу. Кантор назвал это бесконечное множество чисел *счетным*, имея в виду, что его можно подсчитать (если вы располагаете бесконечным запасом времени). Все натуральные числа рациональны — их можно выразить в виде дробей. Однако большинство дробей натуральными числами не являются. Тем не менее хотя натуральные числа являются подмножеством рациональных чисел, оба этих множества бесконечны и счетны. В терминах Кантора, *мощность* их одинакова.

Ближе к реальности

Кантор, скорее всего, был знаком с опубликованным десятилетием ранее трудом Ричарда Дедекинда об иррациональных числах. Поэтому он знал, что бесконечность рациональных чисел является лишь подмножеством вещественных чисел, оставшаяся часть которых — иррациональные — не может быть выражена в виде дробей, а представляет собой бесконечно длинные бессистемные ряды цифр после десятичного знака. В отличие от бесконечности рациональных чисел, полное множество вещественных невозможно подсчитать, даже если бы вам этого очень хотелось и вы располагали бы бесконечным запасом времени. Поэтому Кантор назвал бесконечное множество такого типа несчетным. Согласно его описанию, это множество имеет гораздо бóльшую мощность, чем бесконечное множество счетных чисел.

Однако история на этом не кончается. Кантор определил подмножества во множестве вещественных чисел. Некоторые иррациональные числа (а также некоторые рациональные) представляют собой те, что еще Эвклид описал как конструктивные — их можно получить с помощью геометрических действий. Например, весьма иррациональное число √2 конструктивно — его можно получить, проведя диагональ квадрата. Кантор продемонстрировал, что конструктивные числа составляют счетное бесконечное множество. Все конструктивные числа алгебраичны — их можно выразить через алгебраические выражения, а бесконечность алгебраических чисел также является счетной бесконечностью. Однако бесконечность неалгебраических иррациональных чисел — они же трансцендентные — несчетна. На этом мы остановимся, ибо подобный процесс может стать бесконечным.

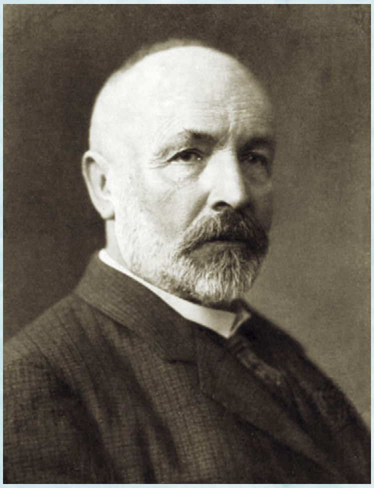
Доказательство парных взаимных отображений Кантора демонстрирует, что бесконечное множество дробей обладает той же мощностью, что и бесконечное множество натуральных чисел.



	1	2	3	4	5	6	7	8	-
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	-
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	-
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	3/8	-
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	4/8	-
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	5/8	-
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	6/8	-
7	7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	7/8	-
8	8/1	8/2	8/3	8/4	8/5	8/6	8/7	8/8	-
	–	–	–	–	–	–	–	–	

67 Теория множеств

ОДНОЙ ИЗ САМЫХ РАСПРОСТРАНЕННЫХ КОНЦЕПЦИЙ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦЕПЦИЯ МНОЖЕСТВА. Все, что угодно, можно классифицировать и описать как часть одного или нескольких множеств, а теория множеств изучает то, как соотносятся различные множества и подмножества, в том числе и то, как их можно (или нельзя) преобразовать из одного в другое.



Отец-основатель теории множеств — Георг Кантор. Тем не менее его основополагающая работа сегодня известна как «Наивная теория множеств» из-за множества парадоксальных ошибок, обнаруженных в ней позднее.

Число 4 является членом нескольких множеств — множества целых чисел; квадратов; четных чисел; множества чисел, английская запись которых содержит количество букв, равное значению числа; множества чисел менее 20… и так далее. Множество четных чисел — пример подмножества, поскольку каждый его член является членом множества целых чисел. Наиболее, пожалуй, наглядно демонстрируют образование подмножеств при взаимодействии множеств диаграммы Венна — метод, созданный на заре развития теории множеств английским логиком Джоном Венном в 1880 году.

При этом возможности множеств не исчерпываются классификацией — с помощью множеств очень удобно отображать суть концепции функции. Грубо говоря, функция — это правило, по которому одно число (или несколько) зависит от другого (или других)*. Примените функцию к числу, и вы получите другое: возведите 4 в квадрат и получите 16. Таким образом, возведение в квадрат — функция. Примените ее ко множеству {-1, 0, 1} и получите множество {1, 0, 1}. Квадратичная функция записывается так: $f(x)=x^2$.

Начала без конца

Комбинация множеств и функций привела к далеко идущим фундаментальным изменениям в математике. Их частью были исследования бесконечных множеств Кантором в 70-х гг. XIX в. Основополагающим моментом его теории было представление о том, что некоторые множества конечны (например, «числа от 1 до 7»), а некоторые — бесконечны (например, «целые числа»). В некоторых случаях члены одного множества строго соответствуют членам другого (и наоборот). Такое соответствие существует, например, между множеством «официальных» (по крайней мере, согласно Ньютону) цветов радуги и множеством целых чисел от 1 до 7.

Любые два разных множества могут — или не могут — взаимно отображаться друг на друга (т. е. иметь одинаковое количество членов, которые взаимно соответствуют друг другу). Кантор задал вопрос, который только выглядит невинным: «Должны ли бесконечные множества обязательно отображаться друг на друга таким же образом?» Ответ, что удивительно, был однозначным. И отрицательным. Множество целых чисел бесконечно, однако между любыми двумя целыми числами

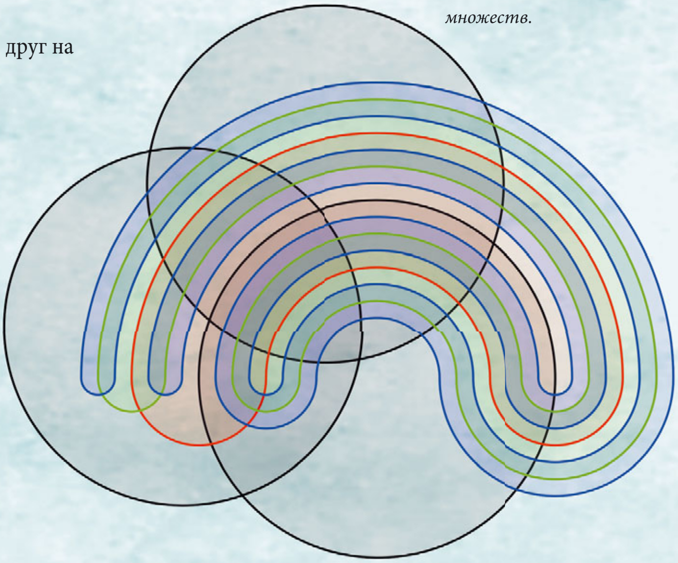


Диаграмма Венна (внизу) демонстрирует шесть взаимно пересекающихся множеств.

---

* В контексте приведенного ниже примера это определение вполне верно. Однако оно (по определению же) противоречит фундаментальным принципам математики — хотя бы потому, что вполне подходит и для описания арифметических действий. Функция не превращает одно число в другое — она определяет принцип, согласно которому одной величине (значению) строго соответствует другая — *прим. пер.*

$$\text{let } \mathrm{R} = \{x \mid x \notin x\}, \text{ then } R \in R \Leftrightarrow R \notin R$$

Парадокс Рассела, внутреннее противоречие теории чисел, описывается приведенной выше формулой, где R — «множество множеств» — универсальное множество, содержащее все объекты и все множества.*

находится бесконечное количество вещественных чисел (таких, как 0,1; 1/3; √2 или π). Таким образом, эти два множества не отображаются друг на друга.

А это означает, что бесконечное множество трансцендентных чисел в некотором смысле больше, чем бесконечное множество целых чисел.

Скрытая системная ошибка

Возможности теории множеств велики — как в рамках математики, так и вне их — поэтому, когда в 1901 г. британец Бертран Рассел поставил под сомнение ее состоятельность, разразилась настоящая буря. Ход мыслей Рассела был, как и выкладки Кантора, обманчиво прост. Прежде, чем озвучить получившийся в результате парадокс, проследим за этим ходом.

1. Некоторые множества (такие, как «множество множеств») содержат себя в качестве своего же элемента.
2. Большинство множеств не содержат себя в качестве своего элемента. «Множество целых чисел» не является числом — таким образом, не является элементом самого себя.
3. Представим список всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента, и обозначим этот список литерой К.

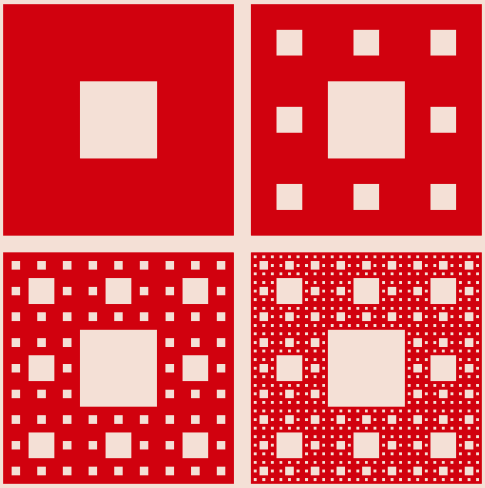
Вопрос, озадачивший Рассела, звучал так: «Содержит ли множество К себя в качестве своего же элемента?» Допустим, да — К является элементом К. Но этого не может быть, ведь К — множество множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Значит, К не является элементом К. Но этого также не может быть, ведь — по определению — К есть множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве элемента, и, значит, должно содержать и себя!

В обыденной речи парадокс Рассела звучит как загадка, известная в нескольких формулировках. Одна из них называется «загадкой брадобрея»: в некой деревне брадобрей бреет только тех, кто не бреется сам — кто же тогда бреет брадобрея? Переведя эту загадку на язык теории множеств, мы получим такую формулировку проблемы: все население деревни подразделяется на два множества — тех, кто бреется сам, и тех, кого бреет брадобрей. Применительно к этой ситуации парадокс Рассела звучит так: «Какому множеству принадлежит брадобрей? Он не может принадлежать первому, ибо бреет только тех, кто не бреется сам, следовательно, сам он не бреется; таким образом, он должен принадлежать ко второму множеству — тех, кого бреет брадобрей; но это также неверно, так как он сам себя не бреет».

Этот парадокс нанес смертельный удар теории множеств Кантора, однако, к счастью, из ее пепла родилась более основательная теория. Современная теория множеств избегает подобных парадоксов за счет набора аксиом — в частности, правила о том, что множества не могут быть элементами самих себя, или о том, что набор ***всех*** элементов может считаться множеством. Таким образом, парадоксы типа расселовских исключаются из рассмотрения — они противоречат установленным правилам.

КОВЕР СЕРПИНСКОГО

Среди множества применений теории множеств — возможность определять формы и их свойства. Одно из таких множеств названо именем Кантора за вклад в его исследования в 1883 г. (хотя он и не был первым, кто определил это множество). Множество Кантора обладает удивительными свойствами. Его элементами являются точки участка прямой (отрезка). Это множество можно использовать и для описания плоских поверхностей. Получающиеся в результате узоры (см. рис. ниже) называются «ковром Серпинского» (в честь польского математика Вацлава Серпинского). Этот узор, впервые описанный в 1916 г., стал одним из первых примеров фракталов, поскольку он складывается из бесконечно повторяющихся одинаковых (самоподобных) элементов.



---

* Чаще всего в математике универсальное множество обозначается символом *U*, реже — *E* — *прим. пер.*

68 Аксиомы Пеано

Сформулированный в 1889 году набор фундаментальных правил, известный как аксиомы Пеано, определяет положения, необходимые для того, чтобы установить существование натуральных чисел.

Как это ни удивительно, арифметика, со всеми ее простыми операциями вроде сложения или вычитания, не была окончательно формализована до конца XIX века. Девять аксиом итальянского математика Джузеппе Пеано сделали для арифметики то же, что аксиомы Эвклида — для планиметрии (геометрии плоскости), определив ее базовые концепции.

Первая аксиома Пеано утверждает существование хотя бы одного элемента множества натуральных чисел — первого натурального числа. Сначала Пеано выбрал единицу, но потом остановился на нуле. Следующие несколько аксиом* выражают натуральные числа через фундаментальное свойство *следования*. Это показывает, что аксиомы Пеано применимы ко всей последовательности натуральных чисел. Со времени Пеано формулировки аксиом изменились очень незначительно — внесенные в них впоследствии некоторые модификации лишь сделали их математическую логику строже.

Помимо математики Пеано занимался изучением языков и других систем записи. Он ввел в обращение несколько новых математических символов. Его труды настолько заполнены символами и настолько скупы на слова, что некоторые комментаторы утверждали, что работы Пеано по виду напоминают обои.

ПЕРВЫЕ АКСИОМЫ ПЕАНО

1. 0 является натуральным числом.

Следующие четыре аксиомы описывают категории равенства — условия, при которых числа равны друг другу.

2. Для каждого натурального числа x x=x.
3. Для каждого натурального числа x и y если x=y, то y=x.
4. Для каждого натурального числа x, y и z если x=y и y=z, то x=z.
5. Для любых чисел a и b, если a является натуральным числом и a=b, то b также является натуральным числом.

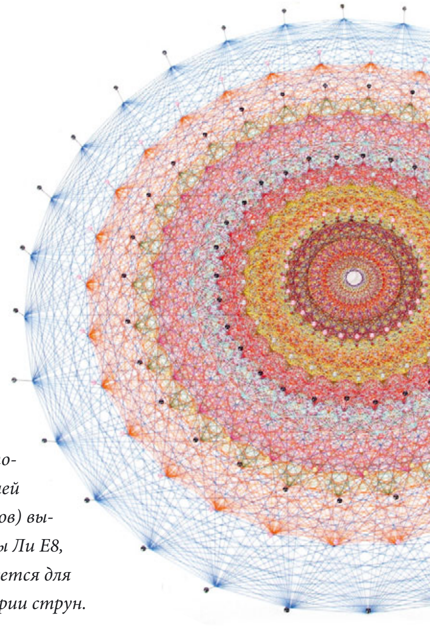
Еще четыре аксиомы описывают арифметические свойства натуральных чисел.

69 Простые группы Ли

В 1888 году немецкий математик Вильгельм Киллинг опубликовал работу, предлагавшую новый масштабный научный проект — полную классификацию простых групп Ли.

Не чуждый, возможно, некоторых преувеличений физик Эй. Джей. Коулман заявил, что это предложение Киллинга было «лучшей математической работой всех времен». Пример группы Ли (название дано в честь норвежского математика Софуса Ли) — это группа симметрий круга: множество поворотов и отображений, которые можно применить к кругу так, чтобы при этом на вид он не изменялся. Симметрия свойственна и другим формам и пространствам (включая и те, что находятся в других измерениях — в топологии они называются многообразиями). Группы Ли описывают симметрию таких многообразий.

Простые группы Ли — это те, которые нельзя разделить на подгруппы. Их используют для описания элементов и частиц, представляющих основные силы природы: силу тяжести, электромагнитную силу, сильное взаимодействие (которое удерживает атомные ядра от распада) и слабое взаимодействие (которое отвечает, в частности, за радиоактивное излучение).



Эта фигура, состоящая из 6720 граней и 240 вершин (углов) выводится из группы Ли E8, которая используется для исследования теории струн.

---

* Первоначально вслед за первой аксиомой следовали четыре (приведенные на плашке выше) общих утверждения о равенстве, определявшие внутреннюю логику аксиоматики. Из современного состава аксиом они исключены как очевидные — *прим. пер.*

70 Методы статистики

Слово «статистика» имеет два значения. Оно означает как сбор данных, которые можно представить в виде графиков или таблиц, так и научный метод математического анализа этих данных.

Бурный рост населения и промышленности в индустриальную эпоху XIX в. потребовал от математики решения гораздо более масштабных задач. Порой цифры говорили сами за себя. Однако часто важная информация была скрыта, и до нее приходилось буквально докапываться. Особенно преуспели в разработке и развитии статистических методов трое британских ученых. Фрэнсис Голтон, богатый кузен Чарльза Дарвина, посвятил жизнь исследованию того, как физические и умственные особенности человека могут передаваться по наследству. Голтон стал пионером новых методов обработки и анализа данных и в 1888 г. опубликовал основополагающую работу о *корреляции* — изучении взаимосвязей между двумя различными величинами. Голтон любил измерения: среди величин, которые он измерял, были производительность труда рабочих и градации женской красоты в зависимости от города (сомнительная пальма первенства города уродок досталась шотландскому Абердину).

FINGER PRINTS

BY

FRANCIS GALTON, F.R.S., ETC.

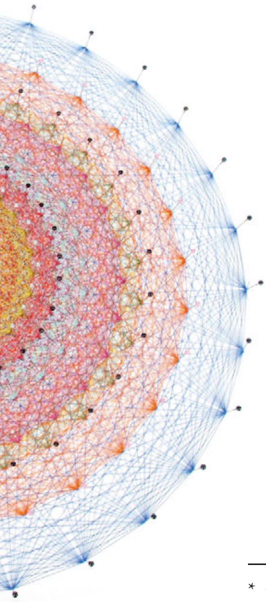
Фрэнсис Голтон математически обосновал, что совпадение отпечатков пальцев у людей практически невозможно. Это стало наилучшим обоснованием для использования дактилоскопии в криминалистике.

Среди других открытий Голтона был так называемый коллективный разум (или «мудрость толпы»). Оказалось, что коллективная оценка при большой статистической выборке оценщиков обладает в среднем достаточно высокой точностью. Так, усредненное значение 800 предположений о весе коровы, сделанных разными людьми на сельской ярмарке, было ближе к точному значению, чем любое их предположений по отдельности.

Дальнейшее развитие

Вдохновленный достижениями Голтона, Карл Пирсон подвел под статистику основательную математическую базу, включая разработанный им в 1900 г. «критерий согласия», предназначенный для проверки соответствия фактических данных теоретическим выкладкам. Пирсон, как и Голтон, увлеченно занимался евгеникой — деятельностью, направленной на улучшение человеческой природы при помощи селекции (евгеникой увлекались многие — включая нацистов — однако со временем такую деятельность признали аморальной).

Дальнейшим развитием статистические методы обязаны трудам сэра Рональда Эйлмера Фишера, разработавшего приемы анализа различий в экспериментальных средних значениях — дисперсионного анализа. Этот анализ позволяет выявить, насколько серьезное влияние независимые переменные оказывают на зависимую. Задолго до появления компьютеров Фишер разработал тесты статистической значимости, позволявшие выбирать из многочисленных результатов нужные, не решая громоздких математических задач.



ЛЕДИ СТАТИСТИКА

Флоренс Найтингейл прославилась как сестра милосердия — как создатель самой профессии, ни больше, ни меньше. Основой ее успеха стали ее статистические навыки. Во время Крымской войны (1853–1856) она собрала и изучила данные о смертности пациентов жуткого полевого госпиталя в Скутаре, на окраине Стамбула. Ее выкладки показали, что введенный ею там режим гигиены позволил избежать множества смертей. Ее доклад перед лондонским начальством был оформлен диаграммами характерного вида — «диаграммами-розами»* своего изобретения. Сегодня они называются секторными диаграммами.

Флоренс Найтингейл за работой в полевом госпитале в Скутаре.

---

* Отсюда известный метеорологический термин — «роза ветров» — *прим. пер.*

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

71 Топология

Математику пространств и деформаций — топологию — еще называют «изогнутой геометрией». Считается, что возник этот раздел науки в XVIII в. благодаря трудам Леонарда Эйлера, но уже в 1676 г. Готфрид Лейбниц говорил о необходимости разработки «новой геометрии положений».

В топологии, в отличие от классической геометрии, самое главное — организация пространства. Тот, кто попытается освоить эту головоломную науку, должен забыть о расстояниях, углах и измерениях — вообще, обо всех инструментах эвклидовой геометрии. В топологии значимые величины — это относительное положение тел, их взаимосвязь и организация.

Топология развилась из теории графов, сформулированной Эйлером в его классической работе 1736 г. «Семь мостов Кёнигсберга». Вдохновила этот труд головоломка, связанная с географическими особенностями города-порта на Балтике — можно ли найти маршрут, который позволит пересечь все семь городских мостов лишь один раз? Многие пытались, и почти все считали, что это невозможно. Но Эйлер задумался над тем, почему это невозможно. Он точно установил, что ключевым фактором этой задачи является количество мостов — или связей — а не расстояние или направление. Далее он показал, что проблема семи мостов не имеет решения — вам придется или пропустить один из мостов, или пройти по любому из них дважды.

*Исследования взаимосвязей топологических пространств французом Анри Пуанкаре в XIX в. привели к возникновению славной своей непостижимостью гипотезы**. В 2002 г. ее верность доказал российский математик Григорий Перельман.*

Бутылка Клейна, впервые описанная Феликсом Клейном в 1882 г., — это неориентируемая (односторонняя) двумерная поверхность. Подобно ленте Мёбиуса, она имеет только одну сторону. Однако, в отличие от ленты, для того чтобы сформировать такую бутылку, ее нужно переместить через четвертое пространственное измерение. Естественно, таких измерений только три.*

---

* Бутылку Клейна вполне можно сформировать и в трехмерном пространстве. Для этого понадобятся два дополнительных отверстия в обычной бутылке — в донышке и в боку. Горлышко бутылки вытягивается, изгибается и через отверстие в боку соединяется с отверстием в дне. Единственное отличие трехмерной «эвклидовой» бутылки Клейна от четырехмерной состоит в том, что четырехмерной бутылке отверстие в дне не нужно — *прим. пер.*

** Действительно, даже суть первоначальной ее формулировки: «всякое односвязное компактное трехмерное многообразие без края гомеоморфно трехмерной сфере» — поймет далеко не каждый — *прим. пер.*

С точки зрения топологии бублик и кружка с ручкой — это один и тот же объект. Оба предмета имеют сквозное отверстие, а разницей в деформациях поверхностей каждого можно пренебречь.

Топологическая эквивалентность

Следуя методу, заложенному Эйлером для решения проблемы семи мостов, топологи превращают каждый объект в совокупность вершин и ребер — «связей», свойств объектов, которые остаются неизменными вне зависимости от деформаций объекта. Даже совершенно различные по своей формы объекты для тополога могут быть идентичными — *топологически эквивалентными* или *гомеоморфными*. Гомеоморфизм проверяется тем, насколько точно объекты могут быть трансформированы друг в друга.

Легко представить, что футбольный и регбийный мячи гомеоморфны — достаточно как следует надуть яйцеобразный мяч для регби, чтобы он превратился в сферу. А если дать волю воображению и надуть человека? Он превратится в тор — бублик — из-за пищеварительной системы (глотки, пищевода и желудочно-кишечного тракта, который формируют в человеке сквозное отверстие).

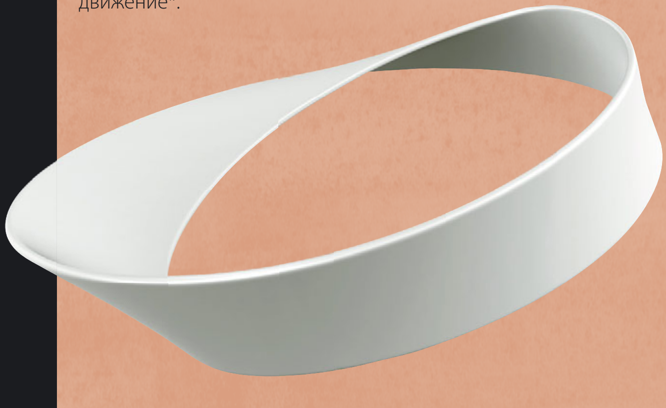
Проблемы реальные и нереальные

Выражаясь более формально, топологическая эквивалентность определяется понятиями гомологии и гомотопии, в основе которых лежит теория множеств. Интуитивно более понятная гомология обращается к отверстиям в объектах. Более сложная для понимания гомотопия имеет дело с информацией, которая содержится в пространствах и объектах, а также определяет, как непрерывно деформировать их свойства. Оба этих понятия подчиняются основополагающему принципу топологии о том, что анализируются скорее качественные, а не количественные характеристики предметов исследования.

Другие разделы топологии изучают, как геометрические свойства могут переплетаться и расплетаться, изучая геометрию узлов и многомерных поверхностей, которые называются многообразиями. Топологи любят проделывать совершенно невозможные трюки, вроде выворачивания сферы наизнанку, но при этом топология имеет множество практических применений. В частности, с помощью топологии можно распознавать типы и виды объектов, игнорируя их точные формы или размеры — это огромное поле для реальной работы. Объединенные в единую коммуникационную сеть небольшие автономные «ройные» роботы с помощью топологических пространств ориентируются в окружающей обстановке. Топологические расчеты определяют оптимальную конфигурацию расположения ретрансляторов сотовой сети для того, чтобы достичь идеального покрытия. Геоинформационные системы классифицируют и картографируют элементы ландшафта как топологические области и границы, позволяя пользователям ориентироваться среди объектов реального мира, избегая ошибок, вызванных неточностью измерений или масштабирования.

ЛЕНТА МЁБИУСА

Лента Мёбиуса — уникальная поверхность, имеющая только одну сторону и одну кромку. Лист бумаги, ножницы и клей (или клейкая лента) — и вы сами можете попасть в это странное измерение геометрии. Возьмите полоску бумаги и, придерживая один конец, перекрутите другой на 180°, после чего склейте концы. Получившаяся петля называется неориентированной, так как у нее нет ни внутренней, ни внешней поверхностей. Если предположить, что толщина бумаги равна нулю, это многообразие будет иметь только одну сторону. Если муравей поползет вдоль по ленте Мёбиуса, он пройдет всю поверхность и окажется на «стороне», противоположной той, откуда он начал движение*.



---

* Путь муравья по ленте Мёбиуса можно отследить и при помощи карандаша, проведя черту вдоль по ленте. Карандаш, оставляя за собой непрерывный след, вернется в исходную точку (если вы поставите карандаш на середину ленты; если же вы отступите примерно на треть от края, то таких следов будет два — карандаш «пропутешествует» по ленте Мёбиуса дважды, вернувшись в итоге в исходную точку) — *прим. пер.*

72 Новая геометрия

Когда XIX век подходил к концу, Давид Гильберт затеял немыслимое — он собрался заменить эвклидову геометрию, «спинной хребет» математики.

Как вполне можно ожидать от человека, способного расправиться с системой Эвклида, немец Давид Гильберт был — и остается — весьма влиятельным математиком. Это влияние проявилось в топологии и философии математики.

Более 2000 лет геометрия Эвклида считалась неоспоримым шедевром. Однако с течением времени в ней начали находить все больше слабых мест. Многие из его определений оказались не такими уж четкими и однозначными и требовали новых допущений. Квинтэссенцией критики эвклидовой геометрии стали опубликованные в 1899 г. «Основания геометрии» Давида Гильберта. Основной причиной ошибок Эвклида Гильберт обоснованно посчитал тот факт, что древнегреческие аксиомы и постулаты формулировались на основе объектов и свойств реального мира: реальных точек, реальных линий, реальных кривых и реальных форм. Таким образом, ошибка в этих аксиомах была скрытой, ибо математика работала поверхностно, хотя в математической реальности эти аксиомы не были полностью корректно определены.

Диаграммы Эвклида только обострили проблему, поскольку они порой заставляли казаться истинными такие вещи, истинность которых на самом деле подтверждена не была. Так, постановка точки (2) на отрезке (части прямой) означала, что эта точка (2) лежит где-то между точками (1) и (3) — концами отрезка. Однако сама концепция «нахождения между» требует гораздо более точного определения, чем то, что существовало тогда.

Гильберт решил использовать подход, абсолютно противоположный эвклидовым принципам. Геометрия по Гильберту вместо изучения и объяснения свойств форм, точек и линий должна была стать дисциплиной, изучающей логические связи между символами, вне зависимости от того, отображали ли эти символы линии или что-либо еще — даже если они вообще ничего не отображали. Этот новый, формалистский подход Гильберт и его последователи применяли во многих областях математики, сделав его вскоре стандартной практикой.

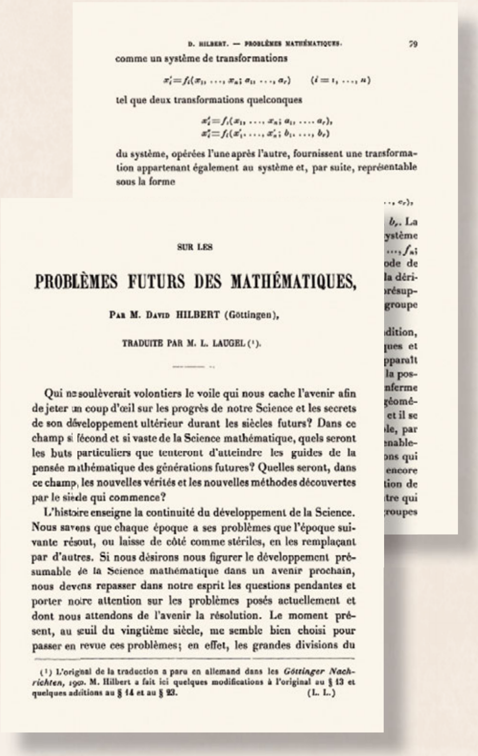
73 23 проблемы Гильберта

На первом Международном конгрессе математиков XX века Давид Гильберт определил самые насущные задачи для современников и будущих коллег. На проходившей в Париже в 1900 году конференции он сформулировал 10 наиболее актуальных неразрешенных к тому времени проблем, которые будут занимать умы математиков в грядущем веке, а также обрисовал еще 13 областей перспективных исследований. Выбор Гильберта был обусловлен задачами развития математики как науки, расширения ее возможностей и областей применения. К концу XX века только три из них остались неразрешенными.

23 ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА

1. Проблема мощности континуума, описанная Кантором. Существует ли «промежуточное» трансфинитное (бесконечное) множество между счетным бесконечным множеством (например, числительных) и континуальным (мощностью множества всех вещественных чисел)? Исследуя эту проблему, Гёдель и Коэн пришли к выводу о том, что ответ на этот вопрос зависит от конкретной версии теории множеств, в рамках которой она рассматривается; в частности, в рамках системы аксиом Цермело (включая его аксиому выбора, сформулированную в 1904 г.). В 1963 г. Коэн показал, что аксиома выбора, постулирующая возможность выбора единственного точного значения из бесконечного множества, не зависит от остальных аксиом теории множеств. Однако не все математики согласны с тем, что это и есть решение проблемы континуума.

2. Противоречивы ли аксиомы арифметики? Ответить на этот вопрос пытались Рассел и Вайтхед, однако теорема Гёделя о неполноте показала, что доказать непротиворечивость аксиом арифметики невозможно (исходя только из аксиом арифметики). Любая система, способная сформулировать собственную непротиворечивость, может ее и доказать, даже если на самом деле она противоречива. Консенсуса среди математиков по поводу того, решена эта проблема, или нет, не существует.



D. HILBERT. — PROBLÈMES MATHÉMATIQUES. 79

comme un système de transformations

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

tel que deux transformations quelconques

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r),$$
$$x''_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n; b_1, \ldots, b_r)$$

du système, opérées l'une après l'autre, fournissent une transformation appartenant également au système et, par suite, représentable sous la forme

SUR LES

PROBLÈMES FUTURS DES MATHÉMATIQUES,

PAR M. DAVID HILBERT (Göttingen),

TRADUITE PAR M. L. LAUGEL (¹).

Qui ne soulèverait volontiers le voile qui nous cache l'avenir afin de jeter un coup d'œil sur les progrès de notre Science et les secrets de son développement ultérieur durant les siècles futurs? Dans ce champ si fécond et si vaste de la Science mathématique, quels seront les buts particuliers que tenteront d'atteindre les guides de la pensée mathématique des générations futures? Quelles seront, dans ce champ, les nouvelles vérités et les nouvelles méthodes découvertes par le siècle qui commence?

L'histoire enseigne la continuité du développement de la Science. Nous savons que chaque époque a ses problèmes que l'époque suivante résout, ou laisse de côté comme stériles, en les remplaçant par d'autres. Si nous désirons nous figurer le développement présumable de la Science mathématique dans un avenir prochain, nous devons repasser dans notre esprit les questions pendantes et porter notre attention sur les problèmes posés actuellement et dont nous attendons de l'avenir la résolution. Le moment présent, au seuil du vingtième siècle, me semble bien choisi pour passer en revue ces problèmes; en effet, les grandes divisions du

---

(¹) L'original de la traduction a paru en allemand dans les *Göttinger Nachrichten*, 1900. M. Hilbert a fait ici quelques modifications à l'original au § 13 et quelques additions au § 14 et au § 23. (L. L.)

3. Проблема равносоставленности многогранников: можно ли разрезать два тэтраэдра (или любых других многоугольника) равного объема на конечное число равных частей-многогранников — так, чтобы из одного можно было составить другой. Уже на следующий год после обнародования этой проблемы Макс Ден показал, что правильный многогранник всегда можно разрезать на конечное число меньших, но конгруэнтных друг другу (имеющих один размер) многогранников.

4. Существуют ли геометрии, наиболее близкие к эвклидовой, при условии, что действуют аксиомы упорядоченности (принцип точек и прямых) и инцидентности (принцип «прохождения через» или пересечения). Для решения этой задачи необходимо расширить аксиомы конгруэнтности (определяющие тождественность или разность форм) и опустить постулат о параллельности (пятый постулат Эвклида). Ученик Гильберта Георг Хамель предложил решение этой проблемы, но большинство математиков (включая самого Гильберта) посчитали саму ее формулировку недостаточно строгой.

5. Общее решение функционального уравнения Коши — все ли непрерывные группы являются группами Ли? Эта проблема решена лишь частично.

6. Можно ли разложить физику — и таким образом любую науку — на группы фундаментальных аксиом подобно математике? В общем, ответ на этот вопрос положительный, но полноценного доказательства не существует до сих пор.

7. Если число *a*, отличное от 0 или 1, является алгебраическим, а число *b* — иррациональным, то является ли число a^b трансцендентным? Если число *b* также является алгебраическим, то ответ — да. Для неалгебраического (т. е. трансцендентного) числа *b* проблема все еще остается нерешенной.

8. Доказать гипотезу Римана: вещественная (действительная) часть любого «нетривиального ноля» дзета-функции Римана равна ½. Эта проблема не решена до сих пор и входит в список «Задач тысячелетия».

9. Доказательство общего закона взаимности в любом числовом поле. Решена для поля алгебраических чисел.

10. Существует ли универсальный алгоритм решения диофантовых уравнений? Коротко говоря, нет. В 1970-х гг. Юрий Матиясевич с помощью последовательности Фибоначчи показал, что количество решений возрастает по экспоненте, таким образом, положительный ответ на вопрос №10 невозможен в принципе.

11. Исследования квадратичных форм с произвольными алгебраическими числовыми коэффициентами. Решена частично.

12. Распространить теорему Кронекера — Вебера с рациональных чисел на произвольные алгебраические поля. Эта проблема частично решена при помощи теории круговых полей.

13. Доказать невозможность решения общего уравнения седьмой степени с помощью функций, зависящих только от двух переменных. Частично решена.

14. Всегда ли алгебраическая группа, действующая на кольцо многочленов, производит конечное количество инвариантов? Безусловно, нет.

15. Предоставить строгое обоснование исчислительной теоремы Шуберта. Задача решена частично.

16. Исследовать топологию вещественных алгебраических кривых и поверхностей. Проблема находится в стадии изучения.

17. Представимы ли определенные рациональные функции в виде сумм квадратов? Проблема была решена в 1927 г. Эмилем Артином, а в 1984 г. Чарльз Дельзелл предложил ее алгоритмическое решение. Был определен также верхний предел таких квадратов, нижний же пока не найден.

18. Сформировать пространства из конгруэнтных многогранников для того, чтобы найти оптимальный способ упаковки сфер и трехмерных анизоэдрических плиток. Решена в 1998 г.

19. Всегда ли решения задач вариационного исчисления аналитические? Решена в 1957 г.

20. Все ли вариационные задачи с определенными граничными условиями имеют решения?

21. Соответствуют ли линейные дифференциальные уравнения определенным группам монодромии (многозначности)? Некоторые да, но в целом нет, согласно доказательству Болибруха 1989 г.

22. Найти униформность аналитических функций. Решена.

23. Развитие методов вариационного исчисления. В процессе решения.

74

Энергия массы

В конце XIX века считалось, что Солнце обеспечивает энергией гравитация, что огромное газопылевое облако, формирующее светило, становится горячее, сжимаясь под действием силы тяжести. Однако Эйнштейн заявил, что все дело в $E=mc^2$ — возможно, самом известном в мире уравнении.

$$E=mc^2$$

Это уравнение вытекает их сформулированной Эйнштейном в 1905 г. специальной теории относительности. Оно утверждает, что энергия (E) *и масса* (m) *пропорционально зависимы (эквивалентны), с учетом возведенного в квадрат постоянного множителя* (c) *— скорости света.*

Гравитационная теория солнечной энергии развалилась, когда было подсчитано, что если бы Солнце уменьшалось в размерах примерно на 50 м в столетие, оно бы просуществовало всего около 100 млн лет. При этом геологические свидетельства говорили о том, что Земле несколько миллиардов лет. Для разрешения этого казуса потребовался гений. В 1905 г. Альберт Эйнштейн сформулировал специальную теорию относительности, перевернув наше понимание пространства, времени, материи и энергии. Одним из его заключений был постулат о том, что скорость света гранична и недостижима — мы можем лишь приблизиться к этому пределу. Но никогда не сможем превзойти его. Следствием этой теории стало самое известное из уравнений: $E=mc^2$.

АТОМНАЯ БОМБА

Масса преобразуется в энергию в том числе и в процессе ядерного распада. Этот процесс составляет суть ядерного взрыва и обеспечивает мощь ядерного оружия. Каждая атомная бомба, сброшенная США на Японию в конце Второй мировой войны, конвертировала в энергию примерно по половине грамма ядерного материала*. Происходившие при этом взрывы превращали в руины целые города.

Массивные открытия

Формула $E=mc^2$ утверждает, что энергия и масса эквивалентны, а небольшая масса соответствует гигантскому количеству энергии. Источник энергии Солнца — реакция термоядерного синтеза: четыре атома водорода (протоны) сливаются, образуя атом гелия. Однако масса одного атома гелия меньше, чем совокупная масса четырех атомов водорода. Простой расчет подсказывает, что каждую секунду 4,2 млрд килограммов Солнца превращаются в энергию.

Точность уравнения Эйнштейна была подтверждена в 2008 г. Сейчас мы знаем, что протоны и нейтроны в атомах сами формируются из более мелких частиц — кварков. Однако кварки составляют лишь примерно 5% массы атома. Где остальное? Расчеты, проведенные на суперкомпьютере во французском Центре теоретической физики, показали, что недостающую массу составляет энергия, связанная с движением и взаимодействием субатомных частиц. Так верность теории Эйнштейна была подтверждена на субатомном уровне.

---

* Непосредственно в ядерную реакцию вступила масса 600–800 граммов высокоочищенного урана из 64 килограммов, составлявших боевой заряд бомбы (т. е. примерно 1,4%). Остальная масса урана была просто разметана взрывом. Сила взрыва составила от 13 до 18 тысяч тонн в тротиловом эквиваленте — *прим. пер.*

75 Цепи Маркова

Основанные на исследованиях 1907 г. русского математика Андрея Маркова, цепи Маркова — статистические модели, нашедшие широчайшее применение в теории информации.

Андрей Андреевич Марков начал свою карьеру в качестве финансового менеджера русской княгини.*

Термин *цепи* относится к процессу или процессам, протекающим определенное время или занимающим счетное количество циклов. Каждый этап этого процесса случаен и «не запоминается». Это значит, что каждый последующий шаг зависит только от текущего, а не от предыдущих (в таких известных случайных процессах, как, скажем, бросок монетки или кубика, каждый последующий шаг полностью независим).

Цепи Маркова очень чувствительны и сильно зависят от начальных условий, предсказать состояние процесса в данной конкретной точке цикла вообще невозможно. Тем не менее общие статистические свойства системы вполне предсказуемы, что делает их хорошими моделями для использования в реальной жизни. Цепи Маркова используются для моделирования широкого спектра физических процессов — колебаний рыночных цен, активности ферментов, эволюции химических систем. Используются они и известной формуле PageRank, с помощью которой Google ранжирует (измеряет важность — т. е. количество ссылок) интернет-страницы.

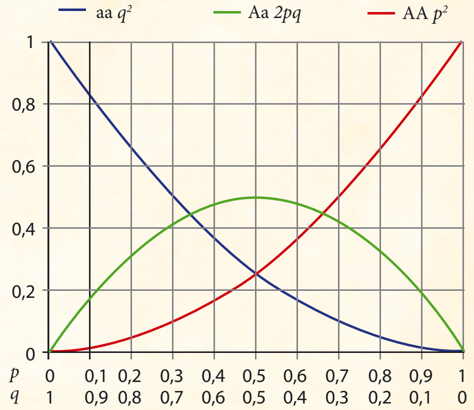
76 Популяционная генетика

В 1908 г. молодая наука генетика находилась еще в зачаточном состоянии. Идея гена уже формировалась, но ученые еще не понимали, как гены распределяются по популяции. На помощь пришли математики.

Каждый ген имеет несколько форм — *аллелей*. В наших клетках на каждый ген приходится две аллели, по одной от каждого родителя. Их часто обозначают двумя буквами — заглавной и строчной, а *генотип* записывают в виде таких «формул»: АА, Аа или аа. Некоторые аллели являются доминантными, другие — рецессивными, при этом генотип Аа имеет те же характеристики, что и Аа (так как доминантная аллель подавляет или маскирует характеристики рецессивной). Казалось логичным, что количество доминантных аллелей неминуемо будут возрастать с каждым поколением.

Однако в 1908 г. математик Годфри Харолд Харди и физик Вильгельм Вайнберг показали, что в популяции формируется баланс между доминантными и рецессивными аллелями. Математика предоставила генетикам «контрольную точку», с которой они могли сравнивать реальные данные по популяциям. Обнаружив, что аллели в популяции разбалансированы, они знали, что популяция подвергается воздействию какой-либо внешней силы — естественного отбора, к примеру.

Графическое отображения закона Харди — Вайнберга показывает, как частотность генотипов (аа; Аа и АА) соотносится с частотностью аллелей (p=A; q=a) в популяции.



---

* Не совсем ясно, откуда автор взял эту информацию. Карьера А. А. Маркова была сугубо академической — известно лишь, что он, будучи еще студентом, некоторое время «подтягивал» по математике свою будущую жену, дочку вдовы дворянина Ивана Дмитриевича Вальватьева, у которой управляющим служил его отец — А. Г. Марков. Возможно, автор просто перепутал отца с сыном (они были тезками), но Екатерина Вальватьева княгиней не была. Наиболее близко к роли «финансового менеджера» А. А. Марков подошел, когда принимал деятельное участие в расчетах Эмеритальной кассы Министерства юстиции при ее основании и обзорах ее действий для практической проверки действенности своих математических моделей — *прим. пер.*

77

Основы математики

Бертран Рассел известен как философ математики, но он занимался также и лингвистикой, исследуя логику языков.

КАК ДОКАЗАТЬ ИСТИННОСТЬ ЛЮБОГО РАЗДЕЛА МАТЕМАТИКИ? ОБЫЧНАЯ МЕТОДИКА СОСТОИТ В ДЕМОНСТРАЦИИ ВЕРНОСТИ БОЛЕЕ ПРОСТЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УТВЕРЖДЕНИЙ, ЛЕЖАЩИХ В ОСНОВЕ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ. НО КАК ДОКАЗАТЬ ВЕРНОСТЬ ПРОСТЕЙШИХ ПОЛОЖЕНИЙ МАТЕМАТИКИ?

Для начала, как доказать, что 1+1=2? Этой проблеме и был посвящен объемный трехтомный труд, выходивший по частям между 1910 и 1913 годами. Он назывался *Principia Mathematica* — «Принципы (или Начала) математики», недвусмысленно намекая на знаменитый труд Исаака Ньютона, опубликованный в XVII в. Амбициозной целью этой работы было доказать истинность фундаментальных основ математики методами чистой логики. Авторами были авторитетные английские философы Бертран Рассел и Альфред Норт Уайтхед.

Первый том вводил и обосновывал подходы и методы, которые будут использоваться в последующих, а именно — логическую *теорию типов*. Согласно теории типов, каждый математический объект занимал определенное (формальное) место в иерархии типов, а каждый тип являлся подмножеством множеств других типов, которые и образовывали иерархию. Этот метод применяется для того, чтобы избежать парадоксов, постоянно возникающих при попытках применять чисто логические подходы к математике.

Второй том посвящен исследованию чисел (и действительно доказывает, что 1+1=2), а третий — множествам и измерениям. Эта работа была шедевром, но вскоре теорема Гёделя показала, что попытка Рассела и Уайтхеда — как и любая другая — логически доказать истинность всего корпуса математических утверждений и положений сама по себе невозможна как раз с точки зрения логики.

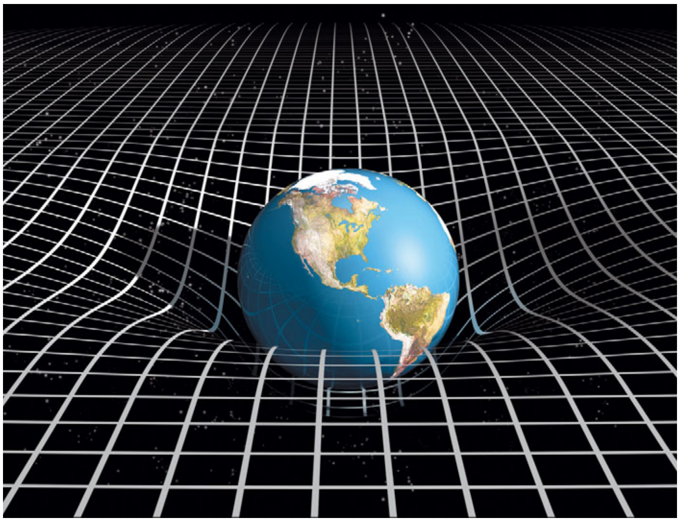
Альберт Эйнштейн делится шуткой с Артуром Эддингтоном. Кто-то как-то обронил, что лишь три человека в мире понимают теорию относительности. Когда об этом рассказали Эддингтону, добавив, что он — второй, он, помедлив, спросил: «Интересно, кто третий?»

78

Общая теория относительности

К 1916 Г. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ АЛЬБЕРТА ЭЙНШТЕЙНА ОПИСЫВАЛА ВСЕЛЕННУЮ В ТЕРМИНАХ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ — комбинации четырех измерений, требовавшей применения неэвклидовой геометрии.

Теория относительности 20 лет находилась в центре внимания мирового научного сообщества. Она принесла Альберту Эйнштейну Нобелевскую премию и навсегда сделала его архетипом ученого. Среднеевропейский акцент и эксцентричная прическа — это все, что было необходимо для того, чтобы создать образ гениального ученого. Гениальность же самой теории заключалась не только в установлении связи между энергией и массой, но в приведении всех трех известных измерений в единый пространственно-временной континуум. Ньютоновых законов механики, как и эвклидовой геометрии, оказалось далеко недостаточно для адекватного описания законов Вселенной.



Пространство-время можно представить как гибкую резиновую плоскость, изгибающуюся и вытягивающуюся в «гравитационные колодцы» под воздействием масс. Бо́льшие массы создают более глубокие колодцы и более сильные гравитационные поля.

Оказалось, что прямые линии, проведенные сквозь пространство-время, иногда становились кривыми — как в гиперболической (Лобачевского — Бойяи) или эллиптической (Римана) геометриях. В 1921 г. сам Эйнштейн объяснял: «Я считаю эти [неэвклидовы] интерпретации геометрии очень важными; если бы я не владел ими, я бы не смог разработать теорию относительности».

Искривляя пространство и время

Пространство-время «изогнуто» из-за воздействия масс, то есть любых объектов — от атома до гигантских звезд. Искривления вызваны воздействием гравитационных сил, возникающих между этими массами. В результате кратчайшее расстояние между двумя точками в пространстве-времени — прямая — становится кривой или частью геодезической окружности. Наблюдения показывают, что свет распространяется по прямой — на этом факте основана оптика. Но в гигантских масштабах Вселенной, с ее огромными расстояниями и колоссальными массами, искривления в пространстве и времени становятся заметными. Путь распространения света существенно искривляется — это искривление можно измерить — когда свет проходит рядом с объектами, масса которых сравнима со звездной. Наблюдения за тем, как наше Солнце искривляет пространство вокруг себя, в 1919 г. стали первыми экспериментальными подтверждениями теории относительности.

Сжатие пространства

Неэвклидова геометрия необходима и для описания того, как сжимается пространство-время, когда массы путешествуют по нему. Теория гласит, что такое сжатие совсем невелико до тех пор, пока скорость объекта не приблизится к скорости света. На таких скоростях линейные размеры объекта уменьшаются, а масса — увеличивается, по мере того как его скорость приближается к максимально возможной.

Объекты изменяют форму также и под воздействием приливных сил гравитации — гравитация воздействует сильнее на ближайшие точки объекта, «вспучивая» его (подобно тому, как ведет себя океан в высшей точке прилива). В черной дыре — сверхмалой и сверхмассивной точке, где действует наивысшая гравитационная сила во Вселенной, — приливные силы настолько огромны, что способны воздействовать даже на мельчайшие объекты. Нога человека «провалится» в черную дыру раньше, чем его голова, заставляя тело растянуться. Вместе с воздействием сжатия пространства на тело, с нарастающей скоростью устремляющееся к центру черной дыры, это вызовет «эффект спагеттификации» (т. е. вытягивания), в результате которого тело растянется в тонкую «макаронину».

«ДОКАЗАТЕЛЬСТВО» 1919 ГОДА

Общая теория относительности утверждала, что траектория распространения света со звезд, расположенных за Солнцем — или, по крайней мере, расположенных «вокруг» его «краев», — искривлена из-за прохождения через пространство, искривленное Солнцем. Поэтому видимое положение этих звезд отличается от истинного. Обычно свет этих звезд приглушен сиянием Солнца, но в 1919 г. Артур Эддингтон измерил позиции периферийных звезд, когда они стали видны во время солнечного затмения. Полученные им результаты подтвердили верность теоретических выкладок, что принесло Эйнштейну мировую славу. Позднее тщательная проверка показала, что расчеты Эддингтона были недостаточно точными, но последующие эксперименты все равно подтвердили правоту Эйнштейна.

79

Математика квантовой физики

250 ЛЕТ ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ И ТЯГОТЕНИЯ, СФОРМУЛИРОВАННЫЕ НЬЮТОНОМ, ОПИСЫВАЛИ И ПРЕДСКАЗЫВАЛИ, КАК ДВИЖУТСЯ ОБЪЕКТЫ ВО ВСЕЛЕННОЙ. Надежность этих инструментов два с половиной столетия не вызывала сомнений. Но в начале XX века стало ясно, что ньютоновские законы совсем не универсальны.

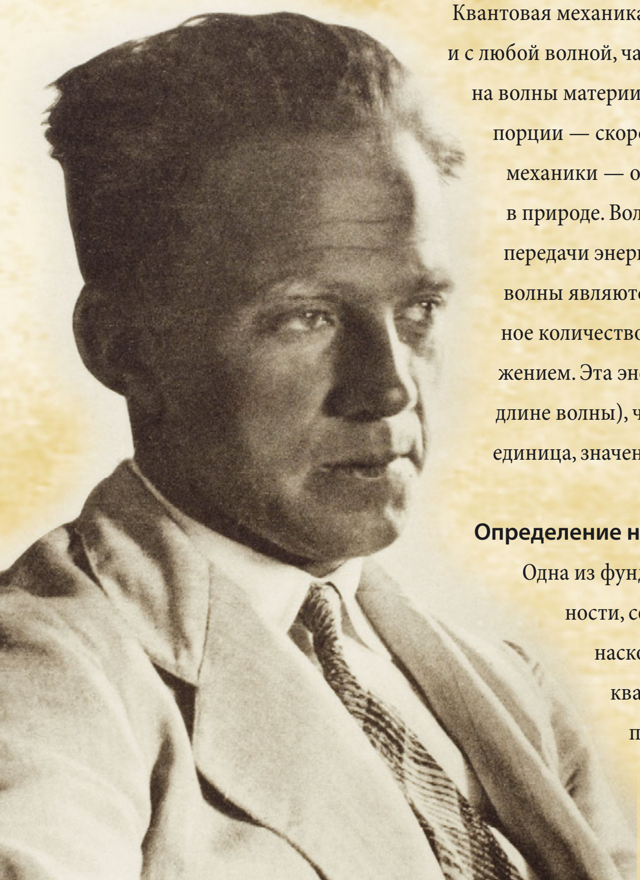
В 1927 году Вернер Карл Гейзенберг сформулировал принцип неопределенности, носящий его имя. Неопределенность — свойство Вселенной, а не некая аномалия, которую мы неспособны обнаружить. Вне зависимости от уровня развития технологий, мы никогда не сможем разработать детектор, способный распознать все свойства квантовых частиц полностью.

$$\Delta p \, \Delta x \geq \frac{1}{2} h$$

Одна из задач, перед которыми пасуют законы и уравнения Ньютона, — это адекватное описание того, как себя ведут атомы и субатомные частицы. Вопреки здравому смыслу, свойства материи и энергии, похоже, передаются от частиц волнам и наоборот в зависимости от того, как мы их измеряем. Мы даже не можем быть точно уверены, где именно находится частица и куда именно она движется. Для решения таких задач требовалась абсолютно новая физика, основанная на вероятностной математике. Из всей этой неопределенности и появилась квантовая механика.

Основы основ

Квантовая механика описывает поведение материи и как волны, и как частицы. Как и с любой волной, частота колебаний универсально пропорциональная длине волны — длина волны материи с высокой частотой, соответственно, короче. Постоянная этой пропорции — скорость распространения волны. Для излучения — в терминах квантовой механики — она считается равной скорости света, максимально возможной скорости в природе. Волны, испускаемые атомами и молекулами, являются главным способом передачи энергии между частицами материи. Благодаря Эйнштейну, мы знаем, что эти волны являются потоком частиц, называемых фотонами. Фотон переносит определенное количество энергии — квант, определяемое несложным математическим выражением. Эта энергия пропорциональная частоте (и универсально пропорциональна длине волны), что дает нам формулу $E=hf$, где h — постоянная Планка, универсальная единица, значение которой определил физик Макс Планк в 1900 г.



Определение неопределенного

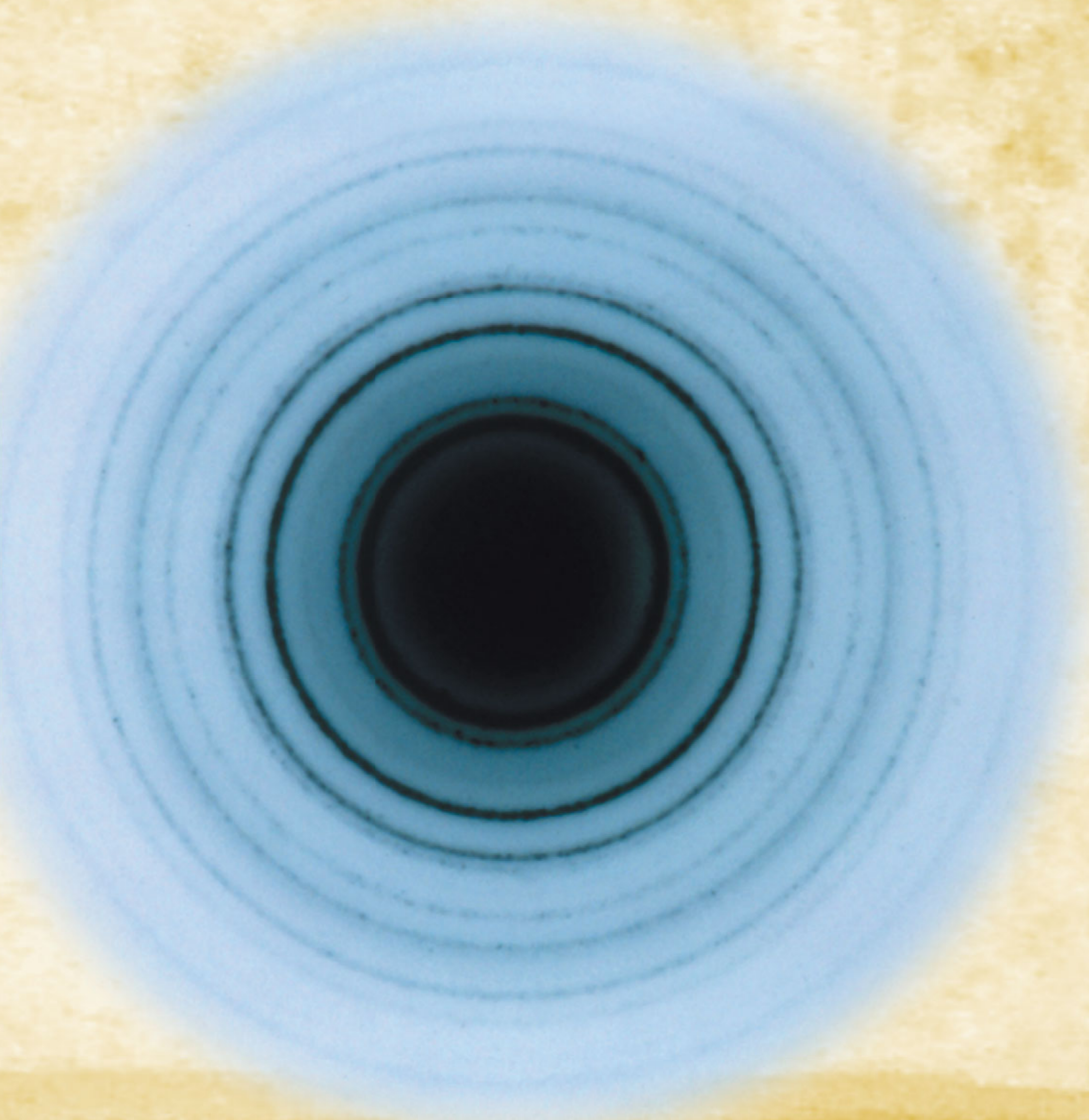
Одна из фундаментальных идей квантовой механики — принцип неопределенности, сформулированный Вернером Гейзенбергом. Вне зависимости от того, насколько чувствительной аппаратурой мы располагаем, волновая природа квантов не дает нам возможности одновременно точно определить все позиции и моменты движения микроскопических частиц.

В пределах атома также неверно воспринимать частицы, подобные электрону, в качестве разрозненных тел, находящихся в определенных местах. Их необходимо воспринимать как облако вероятностей — мы можем сказать, где электрон может оказаться с той или иной степенью вероятности, но мы не можем точно сказать, где именно он находится. Квантовая механика описывает состояние любого объекта при помощи математических волновых функций, в рамках которых можно вычислить возможные результаты всех мыслимых измерений. В общем, квантовую систему лучше всего воспринимать как множество «суперпозиций» всех возможных состояний до начала измерений. Волновые функции являются решениями уравнения Шрёдингера, названного по имени Эрнста Шрёдингера.

«Полумертвая» кошка

Но не уравнения принесли Шрёдингеру наибольшую известность, а его воображаемая кошка. Он предложил Эйштейну провести мысленный эксперимент, в котором в коробку помещали кошку и один радиоактивный атом. При распаде атом запускал некий прибор, выделяющий смертельный яд, убивавший кошку. Мы не можем предсказать, когда начнется распад: все, что мы знаем, что вероятность начала распада составляет 50 на 50. Сказать, жива кошка или нет, невозможно. Согласно квантовой теории, волновые функции атома представляют его как распавшийся и нераспавшийся одновременно. Только открыв коробку, мы *нарушим* волновые функции атома, зафиксировав его текущее состояние. До тех пор, пока мы не увидели кошку, математический аппарат квантовой физики описывает ее как живую и мертвую одновременно.

Похожая на рябь картинка образована интерференцией электронов, проходящих сквозь кристаллическую решетку. Интерференция — одно из главных свойств волн.



КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВОЙ ДУАЛИЗМ

Мы считаем, что свет и другие формы электромагнитного излучения ведут себя как волны — мы говорим о длине волны света, микроволн и радиоволн. Однако мы можем при этом измерить электромагнитное излучение как поток заряженных частиц — фотонов. Электромагнитное излучение демонстрирует явление корпускулярно-волнового дуализма — двойственную природу, способность проявлять свойства волны и частицы одновременно.

В 1923 г. Луи де Бройль огласил революционную идею: корпускулярно-волновой дуализм свойственен не только энергии, но и материи. Ключевой момент его идеи состоял в том, что каждая частица материи обладает соответствующей волновой формой (отличной от электромагнитной волны). Чем быстрее движется частица, тем короче длина связанной с ней волны. Некоторые физики подняли идею Бройля на смех, но эксперименты с пучками электронов показали, что они ведут себя как волны, в точном соответствии с предсказаниями Бройля. Позже обнаружилось, что такие свойства есть и у протонов, нейтронов, атомов и молекул. Больше не было сомнений в том, что корпускулярно-волновой дуализм — свойство материи и энергии.

80 Теорема Гёделя

Немногие современные математические теоремы привлекли столько внимания со стороны далеких от математики людей, как та, что носит имя Курта Гёделя. С ее помощью пытаются доказать самые смелые утверждения: и то, что ум человека «лучше», чем компьютер, и то, что доказать «по-настоящему» нельзя ничего, и то, что Бог существует, — и то, что его нет.

Теорема Гёделя не имеет никакого отношения ко всем этим спорам, однако предложенная им концепция поразительна и весьма влиятельна — по крайней мере, в некоторых областях математики и философии. Вообще-то, опубликованная в 1931 г. статья Гёделя содержала даже две теоремы о том, насколько и почему математическая логика *неполна*. Обе они относятся к любым формальным системам, в которых можно определить базовые арифметические понятия, и в которых можно доказать некоторые базовые законы арифметики. И это касается практически всей математики. Первая теорема утверждает, что если существует непротиворечивая система — т. е. та, в рамках которой ни одно утверждение не может быть одновременно истинным и ложным, — то в ней существует как минимум одно утверждение, невыводимое и неопровержимое в рамках этой системы. Вторая теорема утверждает, что неопровержимость такой системы не может быть доказана в ее же рамках. Ключ к теоремам Гёделя — старинный парадокс лжеца: некий человек утверждает: «Это утверждение ложно!» Если его утверждение истинно, то, как оно и гласит, оно… ложно! Ну а если оно ложно, то, следовательно, оно должно быть… истиной! Теорема Гёделя анализирует подобное же утверждение, соотносящееся с самим собой, но подразумевающее, скорее, математическую вероятность, а не истину.

ТЕОРЕМА №1

Любая теория, способная определить элементарную арифметику, не может быть ни непротиворечива, ни полна. В частности, для любой непротиворечивой формальной теории, доказывающей базовые арифметические истины, существуют истинные арифметические утверждения, недоказуемые в рамках этой теории.

ТЕОРЕМА №2

Если формальная эффективно разработанная теория, включающая базовые арифметические истины, а также определенные истины о формальной вероятности, включает утверждение собственной непротиворечивости, то она противоречива и неполна.

Считается, что теорема Гёделя ограничивает математику таким же образом, как принцип неопределенности Гейзенберга — квантовую физику.

МАШИНА ВРЕМЕНИ ГЁДЕЛЯ

Некоторые математики и физики использовали общую теорию относительности Эйнштейна для создания теоретических моделей машин времени, способных перемещаться в прошлое. Считается, что первым такой «аппарат» разработал Курт Гёдель. Фундаментальным положением теории относительности является утверждение о том, что ничто не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света. Одна из причин, по которой на практике нельзя превысить скорость света, состоит в том, что масса объекта при достижении такой скорости увеличится до бесконечности, поэтому для того, чтобы разогнать такой объект до подобной скорости, потребуется бесконечный запас энергии. Однако, если допустить в уравнениях Эйнштейна возможность превышения скорости света, решение их показывает, что объект начнет двигаться обратно по шкале времени.

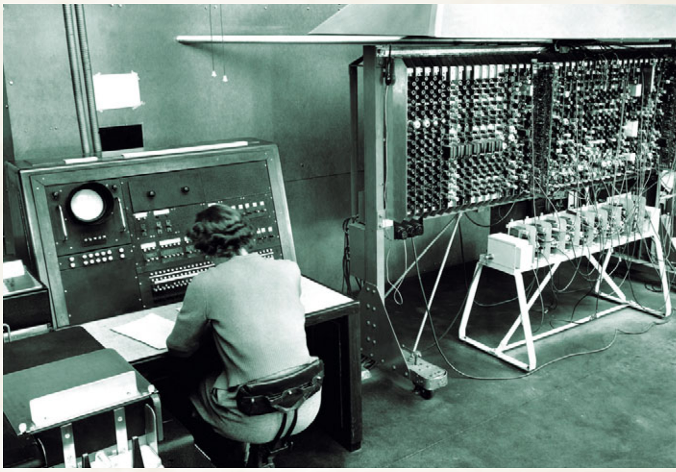
Гёдель нашел способ «обойти» барьер скорости света: быстро вращающийся объект искажает пространство и время вокруг себя таким образом, что свойства пространства и времени сближаются. При достаточно высоких скоростях перемещение в начальную точку движения в пространстве позволяет также совершить перемещение в стартовую точку движения по времени. Но в этой теории есть скрытый изъян: подобные гёделевские путешествия могут происходить только во вращающейся Вселенной — но нет никаких оснований считать, что мы живем именно в такой.

81 Машина Тьюринга

Компьютеры, кардинально изменившие нашу цивилизацию, появились в результате мысленных экспериментов, проведенных блестящим математиком. Его гипотетическую машину так никогда и не построили. Она и не была предназначена для этого. Но его эксперимент показал, как использовать математику не только для того, чтобы преобразовывать некие данные согласно изначально заданной системе, но и как контролировать этот процесс автоматически.

Машина Тьюринга носит имя Алана Тьюринга, которого часто называют «отцом компьютеров». Тьюринг описал свою машину в 1936 г., вдохновленный не пророческим видением цифрового будущего, но задачей исследовать пределы логарифмов в свете гёделевской теоремы о неполноте для решения десятой проблемы Гильберта.

Как объяснял сам Тьюринг в 1948 г., такую машину невозможно было бы построить: «…бесконечный объем памяти в форме бесконечной ленты, разбитой на квадраты (ячейки), на каждый из которых нанесен свой символ. В каждый момент времени машина обрабатывает один “читаемый” символ. Машина может изменять эти символы, а ее действия частично определяются значением “читаемых” символов, но только “читаемых” в данный момент — другие символы на ленте в этот момент на поведение машины не влияют. Лента движется “сквозь” машину вперед или назад (или машина “ездит” по ленте) — это одна из базовых операций, совершаемых машиной. Таким образом, любой символ на ленте со временем может “сыграть”».



Опытный прототип АВМ (автоматической вычислительной машины), или компьютера, построен в 1950 г. в соответствии со схемой Тьюринга для использования в Национальной лаборатории физики Великобритании.

Поведение машины задается таблицей действий и инструкций — алгоритмами — сообщающих ей, что именно нужно делать с каждым «читаемым» символом в соответствующих обстоятельствах. В какой-то момент Тьюринг понял, что таблица действий может быть частью этой бесконечной ленты памяти. Это превратило его машину в универсальное устройство, способное исполнять вычисляемые функции, загружаемые в него. Именно эта идея изменила наш мир.

В 1938 г. Тьюринг встретился с другим «отцом компьютеров» — Джоном фон Нейманом. После Второй мировой войны фон Нейман разработал архитектуру релейных переходов, основанных на использовании логических переменных, что позволило воплотить машину Тьюринга с конечным объемом памяти в реальности — так появились первые цифровые компьютеры.

РАЗГАДКА «ЭНИГМЫ»

Алан Тьюринг был ведущим специалистом в области вычислительной техники. Поэтому он, естественно, принимал активное участие в работе по взлому кода, которым пользовались нацисты для передачи сообщений во время Второй мировой войны. Кодовые сообщения шифровались при помощи электромеханических машин «Энигма», способных генерировать 159 квинтиллионов различных версий каждого сообщения. Кодировка осуществлялась при помощи трех взаимозаменяемых роторов с 1 054 650 комбинациями символов. После того как образец «Энигмы» оказался в руках англичан, Алан Тьюринг принял участие в создании электрической системы, воспроизводившей каждую из этих комбинаций в течение пяти часов. Ежедневно в 6 часов вечера по соединениям фашистской армии рассылалась закодированная метеосводка, в которой, как резонно предполагали англичане, должны были присутствовать такие слова, как «дождь» и т. п. Эти сообщения были заложены в машину Тьюринга и дешифрованные описания погодных условий стали ключом, позволившим «расколоть» весь шифр.

82

Медали Филдса

Многие удивляются, почему не существует Нобелевской премии в области математики. Говорят, что причиной такого «упущения» стала некая история романтической конкуренции между Альфредом Нобелем и каким-то математиком.

На самом деле Нобелевскую премию получали и математики, например Джон Нэш — за вклад в развитие теории игр (Нобелевская премия в области экономики, 1994 г.). Однако самой престижной наградой для математиков является премия (и медаль) Филдса, названная по имени канадского математика Джона Чарльза Филдса, который и предложил ее учредить в 1931 г., и подкрепил свое предложение на следующий год определенной суммой денег, обозначенной в завещании. С 1936 г. эта медаль вручается на Международном конгрессе математиков, который проводится раз в четыре года. Первоначально лауреатам вручались две медали, но с 1966 г. количество лауреатов увеличилось до четырех. В отличие от Нобелевской премии, лауреат медали Филдса должен быть моложе 40 — эта премия должна как стимулировать дальнейший прогресс, так и вознаграждать за уже полученные результаты. Первыми математиками, удостоенными медали Филдса, стали финн Ларс Валериан Альфорс и американец Джесси Дуглас за исследования в области математики поверхностей.

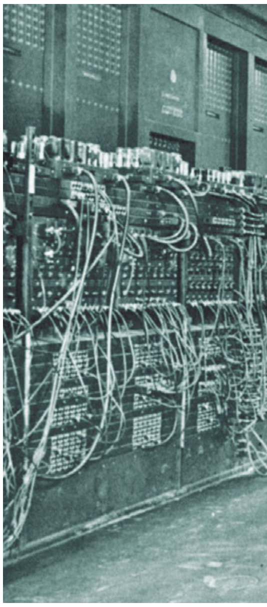
83

Цузе и электронный компьютер

Устройство Конрада Цузе под названием Z3, появившееся в 1941 г., было первой завершенной «машиной Тьюринга», исполнявшей разработанный Тьюрином алгоритм.

Развитие компьютерных технологий с изобретением Бэббиджа не остановилось. Индустриальная эпоха породила множество механических устройств, способных предсказывать приливы и наводить артиллерийский огонь.

Механические вычислительные машины можно было приводить в действие вручную — с помощью поворота рукоятки или колеса — но электромотор в качестве привода серьезно повысил их эффективность. В 1890 г. разработанный американцем Германом Холлеритом «Табулятор» — программируемая с помощью перфокарт счетная машина с электрическим приводом — была использована правительством США для обработки результатов переписи населения. Применение «Табулятора» позволило сократить работу, обычно занимавшую десяток лет, до шести недель. Много лет спустя из основанной Холлеритом компании вырос монстр под названием IBM. Затем последовало множество других изобретений, заложивших основу современных компьютерных технологий. Среди них можно назвать булеву алгебру, логические затворы, бинарную запись из нолей и единиц, передающую состояние «включено/выключено» (или «есть сигнал — нет сигнала»), составляющую суть работы коммутационного механизма компьютера. Первым рабочим образцом современного компьютера можно считать модель Z1 немецкого изобретателя Конрада Цузе.

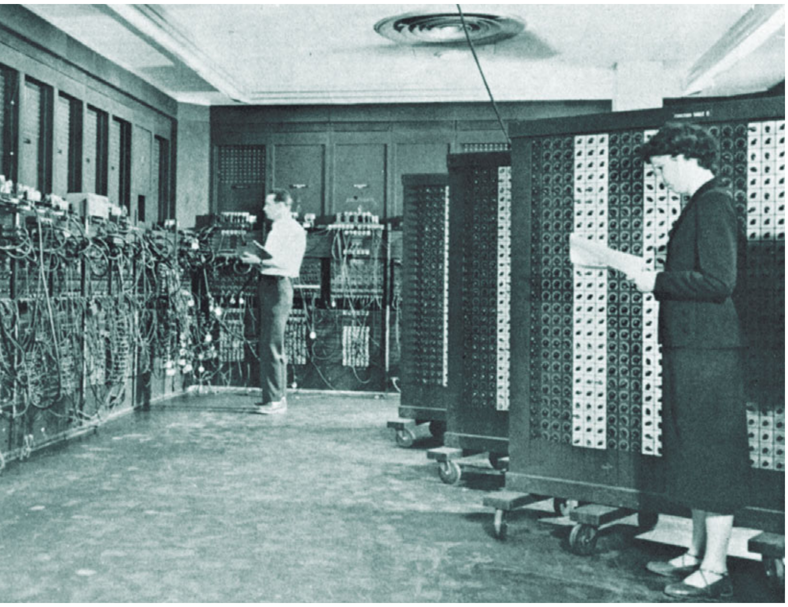


Эта машина была оборудована механическими коммутаторами для хранения данных, клавиатурой для их ввода и панелью с лампочками для вывода полученного результата. Важнейшей ее особенностью была способность получать и сохранять в памяти полученные инструкции. При этом главным технологическим прорывом этого электромеханического вычислителя была возможность программировать его при помощи двоичных кодов, а не десятеричной записи, как в предыдущих похожих устройствах.

Как это часто происходит с важными технологическими и научными разработками, первоначально компьютер предполагался для применения в военных целях, поэтому Германия, Великобритания и США вели свои разработки самостоятельно и втайне друг от друга. Действительно, устройство под названием «Колосс», созданное в 1942 г. в Великобритании под руководством Алана Тьюринга, предназначалось для расшифровки кодов «Энигмы».

По мере развития технологии зубчатые передачи уступили место электронным лампам, которые, в свою очередь, сменили транзисторы. Вычислительные мощности компьютеров росли, а их размеры уменьшались с огромной скоростью. В 70-е годы появились уже и домашние (персональные) компьютеры, хотя они были еще очень редки. Сегодня компьютеры можно найти практически везде — от мобильных телефонов до дверных ручек.

Первый многофункциональный электронный компьютер ЭНИАК (Электронный цифровой интегратор и калькулятор) занимал целую комнату, заполненную проводами и лампами. Его программировали вручную техники, переключая коммутаторы в соответствующие алгоритму позиции.



ХРОНОЛОГИЯ КОМПЬЮТЕРНОЙ ЭРЫ

1642 — Блез Паскаль создает первую счетную (суммирующую) машину. Она состояла из восьми зубчатых колес-передач и умела складывать и вычитать.

1679 — Готфрид Вильгельм Лейбниц разрабатывает бинарную систему.

1801 — ткач Жозеф Мари Жаккар изобретает ткацкий станок, «программируемый» с помощью картонных карт с отверстиями, расположенными в определенном порядке.

1822 — Чарльз Бэббидж начинает работу над разностной машиной, способной вычислять значения математических функций (синусов, косинусов и логарифмов) с точностью до шестого знака после запятой. Машина состоит их сотен зубчатых колес и весит две тонны.

1833 — Чарльз Бэббидж разрабатывает аналитическую машину, оснащенную «мельницей» (арифметико-логическим устройством), устройством ввода информации (считыватель картонных карт с отверстиями) и печатающим устройством. Кроме того, машина располагала и «складом» — устройством для накопления и хранения информации. Действующий прототип этой машины так никогда и не был построен.

1859 — Регистрационное бюро Англии использует разностную машину для подсчета страховых таблиц смертности с целью предсказания продолжительности жизни — это первый случай использования компьютера государственным агентством.

1890 — Герман Холлерит создает табулятор Холлерита.

1925 — инженер Массачусетского технологического института Вэннивер Буш с коллегами создает аналоговую вычислительную машину, использующую для хранения данных электромоторы (данные сохраняются как показатели значения разности потенциалов). Многие считают эту машину первым современным компьютером.

1935 — немецкий изобретатель Конрад Цузе использует бинарную кодировку при разработке вычислительной машины, увеличивая скорость ее работы по сравнению с предыдущими версиями вычислителей, использующих десятеричную.

1936 — Цузе разрабытвает Z1.

1943 — Алан Тьюринг с коллегами разрабатывают «Колосс» — вычислитель, прекдназначепнный для расшифровки кодов «Энигмы» во время Второй мировой войны.

1950 — Алан Тьюринг создает первую компьютерную программу-симулятор шахмат.

1956 — компания IBM выводит на рынок первый жесткий диск. Объем его памяти — 5 Мбайт; физический объем — как два холодильника.

1958 — Джек Килби из компании Texas Instruments разрабатывает первую модель интегральной микросхемы. В том же году Сеймур Крэй разрабатывает первый транзисторный суперкомпьютер.

1969 — М. И. Хофф-младший из компании Intel разрабатывает процессор с 2250 микротранзисторами на чипе толщиной в одну шестую дюйма и шириной в одну восьмую. Intel 4004 становится первым в мире микрокомпьютером.

1975 — Билл Гейтс и Пол Аллен адаптируют компьютерный язык BASIC для микрокомпьютера и основывают компанию Microsoft для того, чтобы вывести на рынок свое детище.

1977 — 5¼-дюймовая дискета заменяет 8-дюймовые накопители, имея тот же объем памяти.

1980 — компания IBM представляет первый гигабайтный жесткий диск, размером с холодильник и весом в 500 фунтов.

1983 — компания Apple демонстрирует персональный компьютер Lisa с графикой высокого разрешения и функцией многозадачности.

1983 — появился первый 3,5-дюймовый жесткий диск с объемом памяти в 10 Мбайт.

1991 — появился первый 1,8-дюймовый жесткий диск с объемом памяти в 21 Мбайт. Всемирная сеть (World Wide Web) доступна для широкой публики с 6 августа.

1998 — основана компания Google.

2012 — примерно 2 млрд человек имеют доступ в Интернет.

84

Теория игр

Есть некоторая ирония в том, что после полувека попыток «перевести» математику на «нечисленный» язык, с расцветом компьютерной эры, новые технологии потребовали перевода различных идей и концепций как раз на язык чисел. Одним из результатов стала теория игр — один из фундаментальных элементов прикладной математики.

Игры и математика связаны с давних времен. Теория вероятностей выросла из желания сделать наиболее эффективную ставку во время игры в кости, а проблема мостов Кёнигсберга, где отдыхающие старались проложить верный маршрут по старому прусскому городу, легла в основу теории графов и топологии. Частенько потрясающие открытия совершались во время развлечений, а великие математики от Диофанта до Льюиса Кэрролла насыщали свои работы математическими загадками и ребусами.

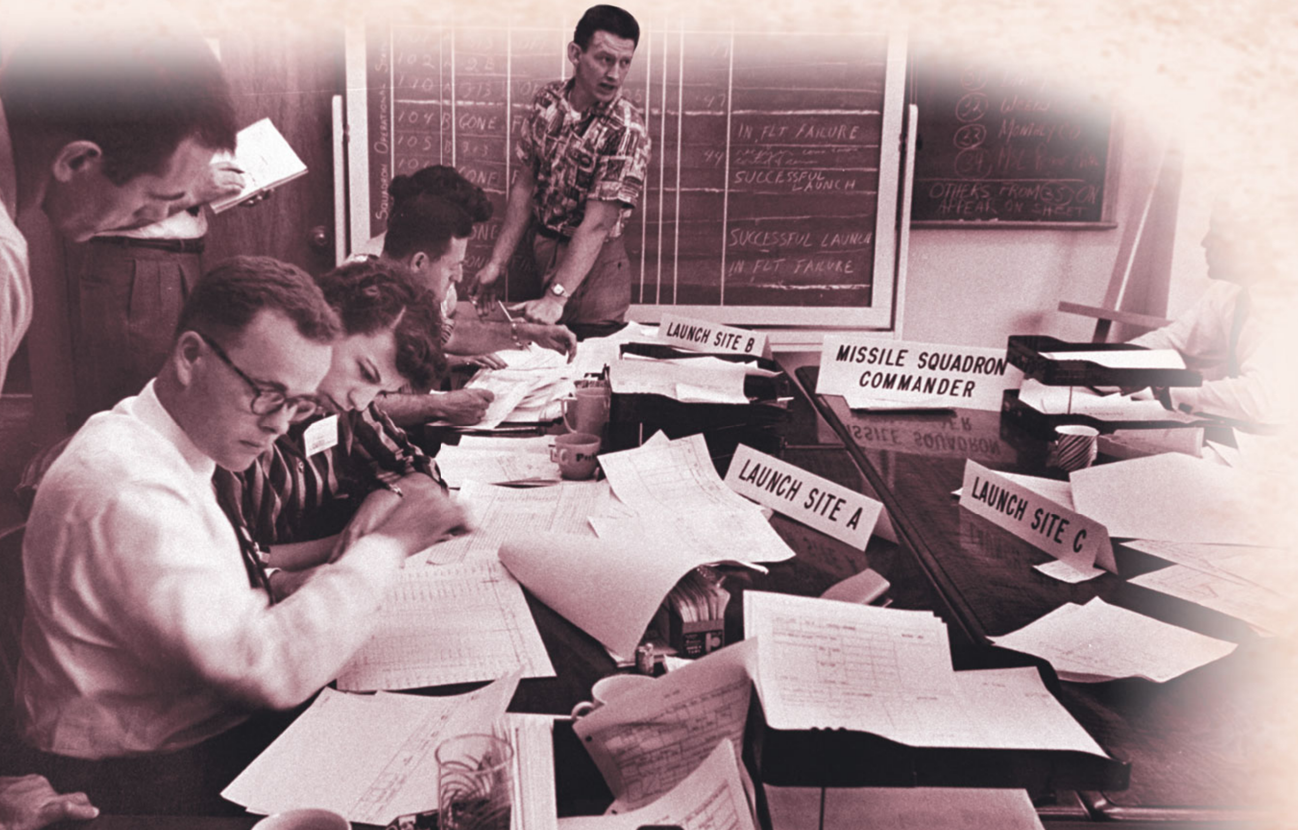
Каковы шансы?

Фактически математика игр разделяется две группы дисциплин; одна имеет дело с вероятностями, другая — нет. Дисциплины второй группы позволяют с помощью анализа определить выигрышную стратегию; если ей верно следовать, результат гарантирован. Простейший вари-

Теория игр была одним из многих изобретений Джона фон Неймана, перевернувших мир. Родившийся в Венгрии математик разработал первые цифровые компьютеры и принимал участие в Манхэттенском проекте.

КАРИБСКИЙ КРИЗИС

Теория игр помогла установить ядерный баланс во время холодной войны. Стратегия взаимного гарантированного уничтожения сделала бессмысленной войну, поскольку атакующая сторона неминуемо терпела бы такой же урон, как и атакованная*. Однако после того, как СССР в 1962 г. разместил на Кубе свои ядерные ракеты, правила игры изменились — их подлетное время до целей на территории США составляло несколько минут, что не оставляло США времени на ответ. 13 дней мир балансировал на грани ядерной войны, после чего две сверхдержавы пошли на взаимные уступки**.



Математики и экономисты американского стратегического исследовательского центра RAND определяют, как распределять ресурсы Стратегического авиационного командования ВВС США, отвечающего за ядерный потенциал США. Теория игр использовалась для разработки оптимальной схемы развертывания ядерных вооружений в разгар холодной войны в конце 50-х и в 60-е гг. XX в.

---

* Доктрина взаимного гарантированного уничтожения обессмыслила предыдущую — доктрину Первого удара, предполагавшую, что быстрый и мощный ядерный удар мгновенно обеспечит напавшему подавляющее военное преимущество. Считается, что сформулировал название новой доктрины (Mutual Assured Destruction — MAD, т. е. «безумный») именно Джон фон Нейман, имевший специфическое чувство юмора — *прим. пер.*

** СССР разместил ракеты на Кубе в ответ на размещение США своих ракет в Турции — *прим. пер.*

ант — игра в крестики-нолики: если оба игрока следуют оптимальной стратегии, ничья неизбежна. Игра случая (чисто азартная игра в математической терминологии) подразумевает подсчет вероятностей выигрыша и проигрыша. В 1928 г. американский ученый Джон фон Нейман основал теорию игр, в рамках которой вероятности и стратегия применялись к оценке реальных ситуаций.

Нулевая сумма и выигрыш

Основа теории игр — игра с нулевой суммой, где выигрыш одной стороны эквивалентен проигрышу соперника. Добыча и потери в сумме составляют ноль, поэтому в такой игре нет необходимости сотрудничать с соперником. Ожидаемые результаты действий игрока и его оппонента представляются в виде матрицы (таблицы, подобной той, что приведена справа). Она показывает эффект от предвыборных обещаний, которые дают в гонке за место мэра занимающая его в данный момент Марта и претендующая на это место Рут. Матрица показывает, что наилучшим шагом для Марты будет провести кампанию в поддержку строительства стадиона на восточной стороне, а Рут должна выступить против этого строительства, чтобы набрать больше голосов. Эти стратегии не зависят друг от друга, поэтому такая игра считается «определенной». В другом сценарии действия Рут зависят от того, что предпримет Марта. В этом случае используется «минимаксимальная» стратегия, ориентированная на то, чтобы снизить потери в случае наиболее неблагоприятных действий соперника. Если же идет игра с ненулевой суммой и выиграть или проиграть могут обе стороны, появляется возможность сотрудничества. Вопрос в том, насколько вы можете быть уверены в том, что ваш партнер-соперник будет строго придерживаться договоренностей.

Эта таблица показывает, как много голосов наберет Марта в зависимости от того, где она решит строить стадион. При игре с нулевой суммой Рут достанутся остальные голоса.

		Рут Айвал		
		Запад	**Восток**	**Нет стадиона**
Марта Эйор	**Запад**	55%	45%	35%
	Восток	60%	65%	45%
	Нет стадиона	45%	50%	40%

85

Теория информации

С РАЗВИТИЕМ ТЕХНОЛОГИИ ПРОГРАММЫ СТАНОВИЛИСЬ ВСЕ СЛОЖНЕЕ, А ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПОТОКИ, ПЕРЕТЕКАВШИЕ ОТ ОДНОГО КОМПЬЮТЕРА к другому, — все плотнее. В результате математики обнаружили, что им необходимо измерять новую величину — информацию.

В мире компьютерных технологий бит — это единица информации («сжатие» бинарного числа до одного разряда), обозначающая 1 или 0. Этот термин предложил в 1948 г. Клод Шеннон. В 1956 г. Вернер Бухгольц ввел термин «байт» — единицу информации из восьми битов. Размер кода для буквы или любого другого символа на клавиатуре, составлял 1 байт; что равнялось количеству информации, которое компьютер был способен обработать одномоментно. В 70-е гг. XX в. появился новый термин — «полубайт», состоящий из 4 битов.

Клод Шеннон — забытый отец теории информации. Одним из его вкладов в развитие этой теории была разработка кода с контролем по четности (по паритету) — математического метода обнаружения ошибочных данных. Этот код отправляется вместе с основным сигналом в конце сообщения. В примере, приведенном слева, коды присоединяются к полубайтам в виде битов 1, 2 и 3 (в двоичной системе), потом 1, 2 и 4 и, наконец, 2, 3 и 4. Если результат сложения дает четное число, добавляется паритетный бит 0, если нечетное — паритетный бит 1.

Оригинальное сообщение	Отправленное сообщение
0000	0000000
0001	0001011
0010	0010111
0100	0100101
1000	1000110
1100	1100011
1010	1010001
1001	1001101
0110	0110010
0101	0101110
0011	0011100
1110	1110100
1101	1101000
1011	1011010
0111	0111001
1111	1111111

86 Геодезические кривые

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ КРИВАЯ НА СФЕРЕ — ТО ЖЕ САМОЕ, ЧТО ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ. В ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИИ ТАКИЕ КРИВЫЕ ИСПОЛЬЗУЮТСЯ ОЧЕНЬ ШИРОКО — ОТ «ДУГ БОЛЬШОГО КРУГА» — линий долготы, опоясывающих Земной шар, до гравитационных кривых пространства-времени. В 1949 г. их использовали для возведения одной из характерных конструкций XX века — геодезического купола.

Линии долгот (меридианы) на глобусе являются геодезическими кривыми, а вот линии широт (кроме экватора) — нет.

Прямая линия и геодезическая кривая имеют важное общее свойство — обе они являются кратчайшим расстоянием между точками. Поэтому маршрут полета, перенесенный на плоскую карту, часто представляет собой выгнутую от центра кривую. Этот маршрут следует геодезической кривой, которую еще называют дугой большого круга Земли или меридианом. Если плоскостную карту обернуть вокруг сферы, такой маршрут будет выглядеть гораздо «прямее». Но все же прямые линии и геодезические кривые имеют больше различий, чем общих свойств: прямая линия не имеет ни начала, ни конца, а геодезическая кривая замкнута, она идет по кругу. Ее концом является ее начало. Прямые могут быть параллельными, геодезические кривые — никогда.

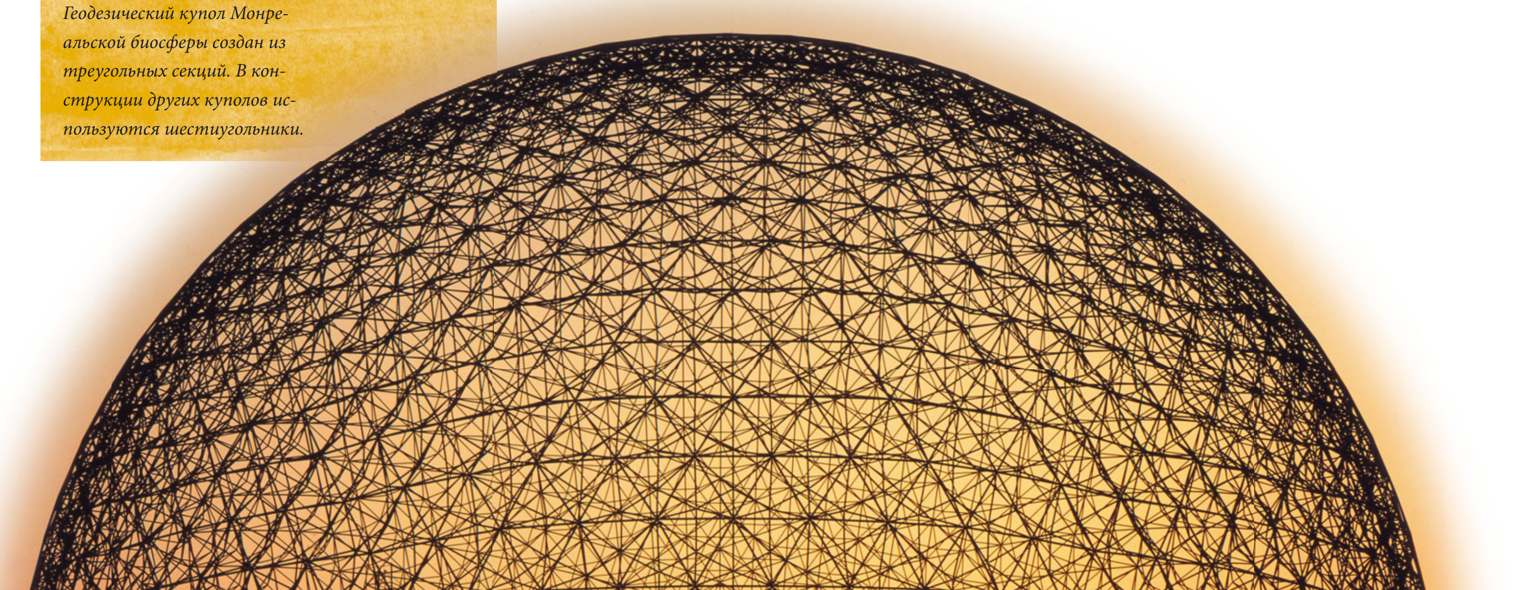
Эффективная организация пространства

Геодезический купол был запатентован Ричардом Бакминстером Фуллером. Он изучал принципы эффективности и разработал секционную сетчатую конструкцию, по которой вес всей структуры, основу которой составляла эта конструкция, распределялся равномерно. Такой купол мог накрыть весьма обширную площадь (наибольшая достигала 216 м в поперечнике). Источником вдохновения для Бакминстера Фуллера послужили кристаллические структуры. Через два года после его кончины в 1983 г. были обнаружены дотоле неизвестные природные структуры углерода (аллотропные формы), формирующие сферы. В честь знаменитого дизайнера их назвали бакминстерфуллеренами.

ПАССАЖИРЫ ПЛАНЕТЫ

В вышедшей в 1969 г. книге «Руководство по эксплуатации космического корабля "Земля"» Ричард Бакминстер Фуллер сравнил нашу планету с космическим кораблем, а человечество — с его пассажирами. В манере, пожалуй, несколько старомодной для сегодняшнего дня, он описал, как солнечная энергия передается Земле, протекает по биосфере и накапливается цивилизацией для производства необходимых нам вещей, а потом выбрасывается обратно в глубокий космос. Фуллер признавал, что количество доступной землянам энергии и ресурсов неуклонно уменьшается. Однако он считал, что количество знаний, которыми располагает человечество, также неуклонно растет. Он утверждал, что с ростом количества знаний человечество получает новые способы накапливать и использовать доступные ресурсы с тем, чтобы повысить общественное благосостояние и жизненные стандарты. Если даже немногие из предсказаний о технологической ценности фуллерен исполнятся, в руководстве по эксплуатации планеты может потребоваться новая глава.

Геодезический купол Монреальской биосферы создан из треугольных секций. В конструкции других куполов используются шестиугольники.



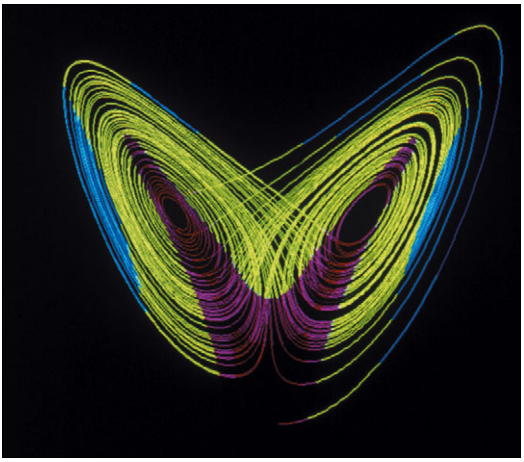
87 Теория хаоса

К СЕРЕДИНЕ XX в. МНОГИЕ СЧИТАЛИ, ЧТО БОЛЬШИНСТВО НАУЧНЫХ ЗАДАЧ О ПРИРОДЕ ВСЕЛЕННОЙ ЛИБО РЕШЕНЫ, ЛИБО ВОТ-ВОТ НАЙДУТ СВОЕ РЕШЕНИЕ. Это благолепие разрушила математика, показав, что природные явления имеют хаотический характер.

Теория хаоса часто описывается с помощью эффекта бабочки. Этот термин предложил в 60-х гг. XX в. Эдвард Лоренц. Он подразумевает, что небольшие изменения, подобные завихрениям воздуха, создающимся в результате взмахов крыла бабочки, могут привести к значимым результатам — таким, как торнадо.

Когда-то считалось, что мироздание подобно хорошо отлаженному часовому механизму, запущенному милосердным создателем, который затем оставил этот механизм действовать в соответствии с законами физики и математики. Такое представление называют ньютонианским — по имени сэра Исаака Ньютона и его законов механики и гравитации, сформулированных в XVII в. Однако не на все вопросы мироздания можно было ответить в рамках этих законов. В частности, без адекватного объяснения оставалась проблема трех тел — попытка Ньютона объяснить движение Луны под гравитационным влиянием Солнца и Земли.

В конце 80-х гг. XIX в. Гениальный французский математик Анри Пуанкаре предпринял первые шаги к осмыслению того, что впоследствии будет названо теорией хаоса. Он заметил, что небольшие изменения в скорости или положении трех гравитационно взаимодействующих тел со временем увеличиваются, что вызывает заметные изменения в поведении всей системы. Еще одним вкладом в развитие теории хаоса стал двойной маятник — маятник, к концу которого прикреплен другой маятник. Его поведение зависит как от амплитуды, так и от частоты колебаний, и может серьезно изменяться, если меняется та или другая характеристика.



Аттрактор Лоренца — точка хаотических решений системы дифференциальных уравнений, которую Эдвард Лоренц исследовал для того, чтобы предсказывать погоду. Это один из первых примеров фрактала.

Хаос наступает…

Исследование хаоса прервалось из-за недостатка вычислительных мощностей на несколько десятков лет — до тех пор, пока американский метеоролог Эдвард Лоренц не занялся моделированием погодных систем в 1961 г. В его распоряжении был чрезвычайно маломощный цифровой компьютер, но он смог заметить, что моделирование давало совершенно разные результаты с изменением каждого исходного условия. Причем результаты менялись даже если менялись условия, полученные при обработке данных разных итераций одной и той же модели. Источником этих изменений были мельчайшие отличия между данными, которые обрабатывались компьютером, и теми, которые он распечатывал. Распечатанные данные округлялись. Такие отличия считались пренебрежимо малыми, но Лоренц показал, что в хаотических системах незначительные изменения в исходных данных дают совершенно иные результаты вычислений.

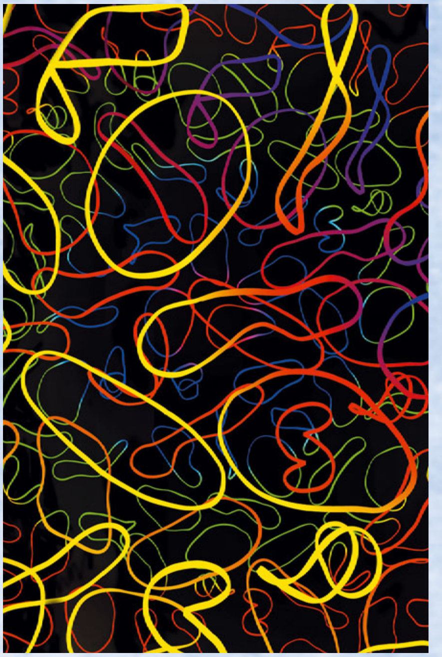
ЗАДАЧА N ТЕЛ

В 80-х гг. XIX в. Анри Пуанкаре столкнулся с проявлениями хаоса, решая задачу трех тел (впоследствии переименованную в задачу N тел), и доказал, что орбиты могут быть непериодичными (т. е. обращение тел по орбитам может не иметь фиксированного периода времени). Однако, несмотря на свое беспорядочное движение, тело при этом не удаляется и не приближается к фиксированной точке. Какая математика необходима для описания такого хаотического движения? Пуанкаре не смог решить задачу N тел целиком, но он добился такого прогресса, что был награжден за свои труды королем Швеции в 1887 г.

88

Теория струн

На протяжении XX в. математика спасала физику от самоуничтожения с помощью теорий бесконечно малых и бесконечно больших величин. То, что невозможно наблюдать или почувствовать, описывалось в виде чисто математических моделей. В 60-е гг. XX в. математика предложила и способ создать новую, целостную физику.



*Представить себе, что такое теория струн — помимо картинки вибрирующих петель и линий — достаточно сложно. Компактные пространства преобразуют линейные струны в многомерные поверхности или многообразия, взаимодействующие друг с другом во времени. Это взаимодействие создает так называемую «мировую ткань»***.*

Альберт Эйнштейн разъяснил миру, что такое квантовая физика, заявив, что фотоны являются носителями энергии света и других излучений, а потом его теория относительности объяснила очень многое о принципах мироздания. Все это заняло примерно 10 лет вдохновения (и кропотливого труда), а следующие 40 Эйнштейн пытался объединить свои теории с тем, чтобы разработать теорию всего — связать такие фундаментальные силы природы, как тяготение и электромагнетизм.

Точки вытянуты в струны

Попытки создания теории всего продолжаются по сей день. Наиболее перспективное направление исследований выделилось в конце 60-х гг. XX в. при помощи таких областей математики, как теория групп и топология. Это направление — теория струн, представляющая субатомные частицы не в виде безразмерных точек, но одномерных линий, названных струнами. Колебания этих струн, описанные математически, определяют их фундаментальные свойства, такие, как спин*, заряд и др. Бóльшая часть таких колебаний происходит в так называемых компактных пространствах. Они существуют только на квантовом уровне, но позволяют струнам двигаться в нескольких измерениях сразу — последние теоретические выкладки требуют движения в 11 измерениях.

Первоначальные положения этой теории (модель парного резонанса, например созданная в 1969 г.) концентрировались на свойствах бозонов — фотонов и других элементарных частиц с целым значением спина, отвечающих за фундаментальные взаимодействия. К 90-м гг. XX в. были сформулированы положения о суперструнах, определившие связь между бозонами и фермионами — электронами, кварками и другими частицами, определяющие массу материи. Связь между не имеющими массы бозонами и «массивными» фермионами называется суперсимметрией. Это явление сейчас активно исследуется благодаря открытию в 2012 г. важнейшей частицы — бозона Хиггса**.

БОЛЬШОЕ ВСТРЕЧАЕТСЯ С МАЛЫМ

Теория струн и ее «производные» активно критикуются — дескать, это, скорее, философия, чем естественная наука, ибо в рамках этой теории невозможно проводить эксперименты — не с чем. Наиболее эффективно проверить положения этой теории на практике можно в черной дыре, где сталкиваются теории о бесконечно малых и бесконечно больших величинах.

Черная дыра — это звезда, «свернувшаяся» в точку. В результате там возникает умопомрачительный узел струн на квантовом уровне. При этом эта точка обладает настолько большой массой, что имеет наибольшее гравитационное поле во Вселенной.

Квантовая неопределенность говорит, что в наиболее возможно краткий период времени (10^{-43} сек.) виртуальные частицы — или струны — материи и антиматерии существуют везде, безостановочно формируя, а затем аннигилируя друг друга. Противостоящие виртуальные частицы по «краям» черной дыры разделяются гравитационными силами в момент своего формирования. В результате из черной дыры испускается одна струна, позволяя строить предположения о том, что такое загадочная первозданная материя.

---

* Спин — собственный момент импульса элементарных частиц, имеющий квантовую природу и не связанный с перемещением частицы как целого — *прим. пер.*

** Важность бозона Хиггса заключается в том, что эта частица — последняя в так называемой стандартной модели — теоретической конструкции в физике элементарных частиц, описывающей электромагнитное, слабое и сильное взаимодействие всех элементарных частиц. Открытие бозона Хиггса подтвердило состоятельность стандартной модели, одновременно завершив ее — *прим. пер.*

*** Мировая ткань (worldsheet) — термин, введенный одним из создателей теории струн, американским физиком Леонардом Сасскиндом для определения двумерного многообразия, описывающего внедрение струн в пространство-время — *прим. пер.*

89 Теория катастроф

ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ, ХОТЯ И НЕ ИМЕЕТ ПРЯМОГО ОТНОШЕНИЯ К ТЕОРИИ ХАОСА, ИЗУЧАЕТ, КАК НЕБОЛЬШИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОГУТ ПРИВЕСТИ К НЕОЖИДАННЫМ И РЕЗКИМ ИЗМЕНЕНИЯМ ОБЪЕКТА. Склон горы может оставаться стабильным многие тысячелетия, а потом небольшой дождик или колебание почвы вызывают масштабный оползень.

Математический способ описания подобных катастроф — таких, как образование айсбергов или обрушения фондовых рынков, — состоит в том, чтобы представить эти системы в виде уравнений. Такие уравнения остаются в равновесии долгое время вне зависимости от того, как ведут себя переменные. Но затем какой-то элемент этого уравнения вызывает бифуркацию — резкое изменение, приводящее к катастрофе. Какой же?

Активные переменные

Французский математик Рене Том трудился над теорией катастроф в 60-х гг. XX в. Его работу в 70-х гг. популяризировал английский математик сэр Эрик Кристофер Зееман. Они классифицировали разнообразные типы катастроф на основе количества активных переменных, влияющих на процесс. Математические методы применялись при описании опрокидывания кораблей, обрушения мостов, ажиотажного спроса. Другой тип катастроф получил название «точка фиксации»*. Такие катастрофы происходят, когда одна или несколько активных переменных накапливают значение (влияние на ситуацию) до критического уровня, после чего их воздействие на систему возрастает многократно, очень быстро и неотвратимо. Этот феномен — предмет самых активных дискуссий сегодня — лежит в основе современных антропогенных моделей изменений климата.

Айсберги — куски ледяного покрова, отрывающиеся от него в результате потеплений во время полярного лета. Теорию катастроф используют для того, чтобы определить, насколько частота образования айсбергов и время их существования могут свидетельствовать об изменении климата.

Для кого-то самая страшная катастрофа — обрушение биржевых котировок, когда инвесторы начинают обвально паниковать после небольшого падения цен на несколько товарных позиций.

```
ABF ↑763.5   -13 CNA ↑313.5-4.25 IAP ↓429.8-58.8
ADM ↓874     -46 CNE ↑2358   -249 IHG ↑730.5-31.5
AMEC↑709.5   -44 COB ↓204.5-5.25 III ↑848     -54
ANTO↑485   -42.5 CPG ↑350.5  -1.5 IMT ↑1699    -38
ATST↑297     -13 CPI ↑696    -6.5 IPR ↑356.8-6.75
AV/ ↑492.8-40.8 CPW ↑179.7  -9.1 ISYS↓234.3-19.3
AZN ↑2492    -64 CW/ ↑172.8  -1.2 ITV ↓47.4   -3.6
BA/ ↑442.5-13.5 DGE ↑1042     -- JMAT↑1438    -41
BARC↑312.3-38.3 DRX ↑745   -15.5 KAZ ↑819.5   -82
BATS↑1848    -17 EMG ↑459.5   -54 KGF ↑125.7  -5.1
BAY ↑247.3-10.3 ENRC↑663.5-58.5 LAND↑1363    -53
BG/ ↑1082    -85 ETI ↑205.5   -21 LGEN↑93.8   -5.6
BGY ↓726      -5 EXPN↑426   -13.3 LII ↓949     -59
BLND↑769   -55.5 FGP ↓565.5-18.5 LLOY↑271.8-17.8
BLT ↓1427    -82 FP/ ↓88.9   -9.7 LMI ↑2805   -235
BNZL↓670   -16.5 FXPO↓166      -7 LSE ↑721     -57
BP/ ↑489.3-20.8 GFS ↑218.25-7.5 MKS ↑238.5  -9.5
BSY ↑441.5   -14 GSK ↑1214    -22 MRW ↑253.8-5.75
BT/A↑174.1  -3.7 HBOS↓207.3-74.8 NG/ ↓714.5  -2.5
CBRY↑640.5  -6.5 HMSO↓947.5-56.5 NXT ↑1098    -51
```

---

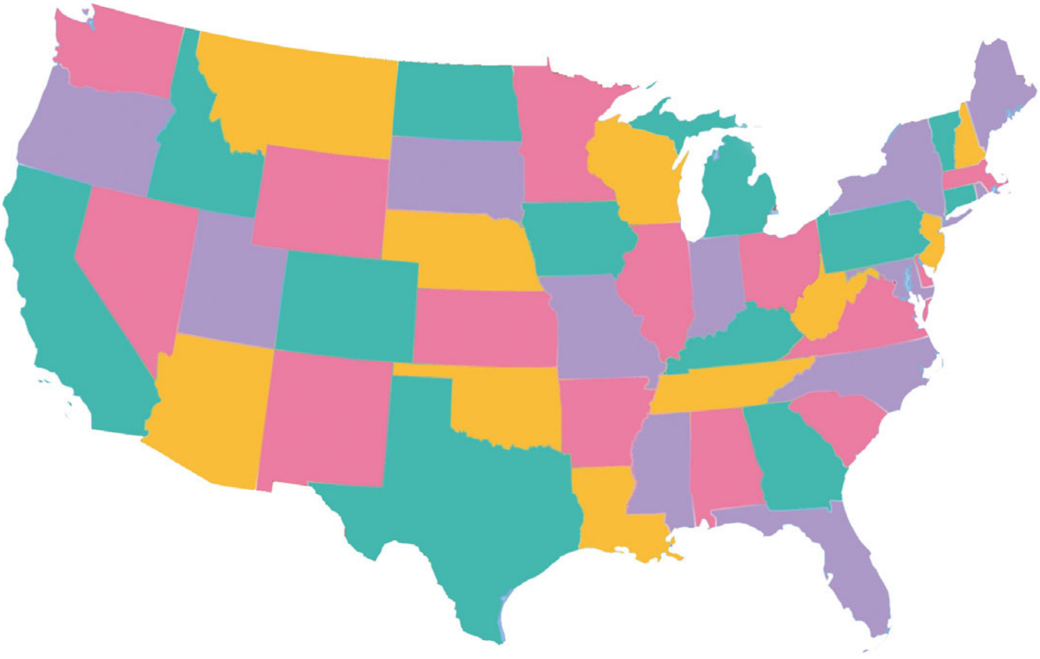
* В просторечии — последняя капля — *прим. пер.*

90 Теорема четырех красок

Многоцветную карту легко читать, она наглядна и понятна — каждому району соответствует свой цвет. Развитие полиграфии и формирование национальных государств в XIX в. позволили появиться самым красочным — разноцветным — картам. Картографы хотели упросить процесс рисования карт — а заодно снизить себестоимость процесса — поэтому задались вопросом: а сколько цветов вообще нужно для того, чтобы нарисовать цветную карту?

В романе Марка Твена «Том Сойер за границей» (1894 г.) Том и Гек Финн спорят, куда их занес воздушный шар, на котором они летели на восток от Сент-Луиса. Оценив скорость ветра, Том решил, что они долетели до штата Индиана, но простодушный Гек настаивал на том, что их обманули: «Мы все еще находимся над Иллинойсом. Сам можешь убедиться, что Индианы пока не видно… Иллинойс зеленый, а Индиана розовая. Ну-ка, покажи мне внизу что-нибудь розовое, если можешь». На попытку Тома возразить Гек отрезал: «Я сам видел на карте, она — розовая». Для всех, кроме Гека Финна, цветная карта обычно облегчала ориентирование, а интуиция вкупе с методом проб и ошибок позволила картографам понять, что для создания любой административной карты требуется всего четыре цвета.

Любая карта с четким разграничением областей — будь это границы государств, районы города или схема самого шикарного сказочного дворца — требует лишь четырех цветов для того, чтобы две любые соседние области были обозначены разными цветами. В 1852 г. математик Фрэнсис Гутри задумался о том, верно ли это. Он представил карты в виде графов, где области были плоскостями, границы — гранями, а узлами — точки, где сходились границы трех и более областей. Математического решения сформулированной Гутри задачи не мог найти никто — кроме картографов, которым по-прежнему требовалось всего лишь четыре краски. Проблему, наконец, разрешили в 1976 году, в по-прежнему зеленом штате Иллинойс, где Кеннет Аппел и Вольфганг Хэйкен с помощью университетского компьютера доказали, что на любую разноцветную административную карту можно нанести бесконечное число областей, используя лишь четыре цвета.

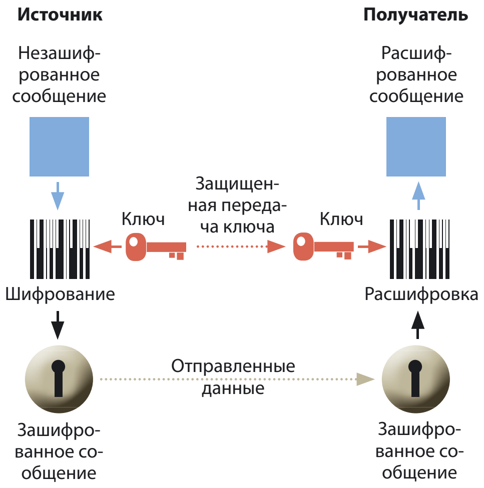


Административная карта 48 штатов США (за исключением Аляски и Гавайев). Эту карту без изменений можно перенести на глобус, но если бы Земля имела форму пончика (несъедобного, конечно), потребовалось бы семь цветов.

91

Шифрование с открытым ключом

С РАЗВИТИЕМ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КОМПЬЮТЕРОВ ВОЗРАСТАЛА ИХ ВАЖНОСТЬ ДЛЯ ПРАВИТЕЛЬСТВА И ВОЕННЫХ, а также для экономических взаимодействий. Необходимость защиты информации стала одной из важнейших задач. Решить ее помогла математика.



Бороться с желанием подслушать чужие секреты или раздобыть ценные конфиденциальные сведения невозможно. Единственный способ — защитить информацию, зашифровав ее. С другой стороны, компьютеры всегда использовались для взлома чужих кодов — взять хотя бы расшифровку кодов Энигмы во время Второй мировой войны.

Односторонняя математика

Впервые математические методы кодировки данных были использованы в 1874 г., когда математик Уильям Стэнли Джевонс разработал относительно простые инструкции для зашифровывания информации, но обратный процесс был весьма сложен и занимал непропорционально долгое время. Через сто лет криптологи Уилфрид Диффи и Мартин Хеллман сумели разрешить эту проблему, разработав концепцию шифрования с открытым ключом, известную как алгоритм Диффи — Хеллмана.

Предположим, двое решили обменяться секретной информацией. У них есть ящик, запирающийся на замок, ключи к которому есть на каждого. Отправитель просит у получателя открытый ящик с незапертым замком. Он кладет в ящик сообщение, закрывает его на замок своим ключом и отправляет получателю. Тот открывает замок своим ключом и получает сообщение.

Время — лучший запор

Метод шифрования открытым ключом основан на использовании комбинации большого количества чисел в определенном порядке. До сих пор не существует простого способа вычислить правильный произвольно определенный порядок чисел. Злоумышленнику может повезти — он может случайно определить его, но для того, чтобы его вычислить, потребуется столько времени, что к моменту определения верной комбинации искомая информация будет уже бесполезна.

Лучшие современные системы защиты данных используют 128 или 256-битные алгоритмы шифрования. В первом случае для вычисления верной последовательности необходимо обработать 2^{128} вариантов комбинаций. Попытка прямого взлома такой комбинации путем перебора всех возможных комбинаций может занять 149 триллионов лет. Для того, чтобы взломать 256-битный ключ, потребуется это время возвести в квадрат.

АЛГОРИТМ ДИФФИ — ХЕЛЛМАНА

В 1976 г. Уилфрид Диффи и Мартин Хеллман опубликовали метод, позволяющий двум (и более) сторонам обмениваться зашифрованными посланиями без предварительного обмена ключами к шифру. Основу их метода составили арифметические операции над абсолютными значениями чисел с учетом свойств простых чисел.

1. Энди выбирает кодовое число A1.

2. Зельда выбирает другое кодовое число Z1.

3. Энди и Зельда производят со своими числами одинаковые вычисления в соответствии с функцией $f(x) = a^x$ по модулю p, со своими числами, равными x, где p — известное обоим простое число, и a — открытая информация. В результате Энди получает новое число — $A2$, — остаток от деления a^x на p. Он отправляет это число Зельде. Та, выполнив ту же операцию, получает новое число $Z2$, и отправляет его Энди.

4. Энди решает уравнение $Z2^{A1}$ по модулю p и получает новое число — CA.

5. Зельда решает уравнение $A2^{Z1}$ по модулю p, и получает новое число — CZ.

Это может показаться удивительным, но значения CA и CZ равны — это и есть ключ, который обе стороны используют для расшифровки сообщения.

92

Фракталы

Традиционная геометрия имеет дело с прямыми линиями и правильными окружностями, но в реальном мире ничего подобного не существует. Облака, деревья и камни изогнуты, изломаны, зазубрены. Природа правильных форм не имеет. Математика долгое время не могла описать подобную систему. Дьявол, естественно, крылся в деталях.

Как предполагает название, математика фракталов — это попытка выразить математическими методами грубую природу повседневной реальности, «раздробленную»* на неправильные формы. Термин «фрактальная геометрия» придумал в 1975 г. математик Бенуа Мандельброт для описания исследований в новой области геометрии «одинаково грубой во всех измерениях». Отправной точкой послужила простая задача, связанная с измерением береговой линии.

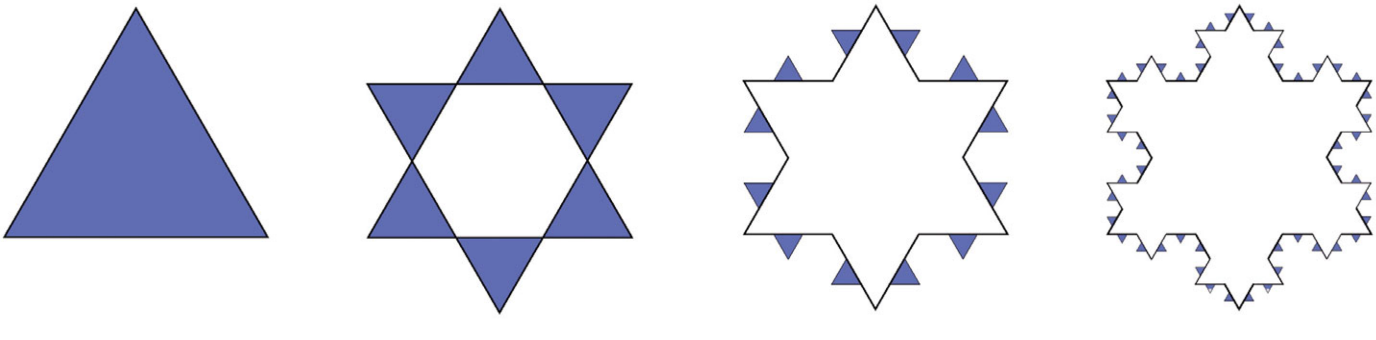
На карте большого масштаба провести береговую линию острова достаточно просто. Поскольку уровень детализации невелик, ее вполне можно обозначить прямыми линиями. Если же нам требуется более детальное отображение, нам необходимо «приблизить» карту. Для точных измерений в рамках этой новой шкалы нам требуется линейка с более мелкими делениями. Уменьшая масштаб измерений, мы получаем все более точные значения протяженности береговой линии. Пределов у этого процесса нет, и по мере дальнейшего «приближения» вычисления становятся все сложнее. В результате точное конечное значение найти невозможно, поскольку граница между сушей и водой размывается и край суши становится неотличим от края воды.

Затерянные в деталях

Формы, которые мы наблюдаем в природе, образованы так называемыми паталогическими кривыми. Тело человека состоит из фракталов — на всех уровнях приближения проявляются многокомпонентность и неправильные формы. Легкие, например, заполняют предоставленный им объем с поразительной эффективностью. Благодаря бесчисленным складкам и изгибам, при сравнительно небольшом объеме площадь поверхности легких огромна.

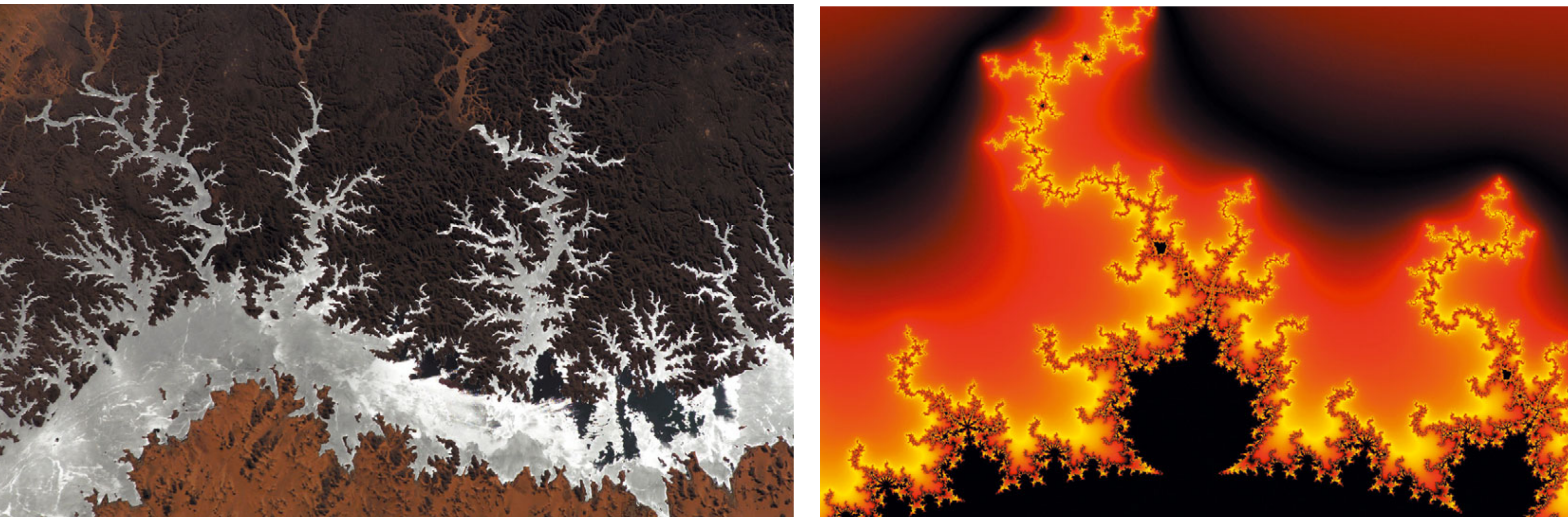
Рост растений также происходит в соответствии с достаточно простыми правилами, но при этом создаются чрезвычайно сложные многокомпонентные системы. Измерить площадь поверхности сложного спиралевидного листа капусты брокколи Романеско исключительно тяжело. Чем подробнее вы изучаете повторяющиеся паттерны соцветий и листовых спиралей,

В 1904 г. шведский математик Хельге фон Кох обнаружил конструкцию, имитирующую самоподобие. Описанная им «кривая Коха» из «исходной фигуры» (разбитого на три равных части отрезка) развивается во фрактал. Для этого средний отрезок заменяется равносторонним треугольником без этого отрезка. Далее эта операция повторяется для каждого из четырех получившихся сегментов. Если исходная фигура — равносторонний треугольник, то на втором шаге мы получим шестиконечную «звезду Давида», а вскоре придем к снежинке.



---

* Английские слова *fractal* («фрактал») и *fractured* («раздробленный») имеют общий корень — *прим. пер.*



Фракталы часто передают формы натуральных (природных) характеристик. Компоненты множества Мандельброта (справа) напоминают паутину каналов этого огромного резервуара (слева). Фрактальная геометрия используется в компьютерной графике для реалистичного отображения ландшафтов и волн.

тем больше деталей предстает вашему взору. «Метод» роста за счет добавления повторяющихся масштабируемых систем, которым «пользуется» капуста брокколи, дал начало феномену под названием «самоподобие».

Воплощенная многокомпонентность

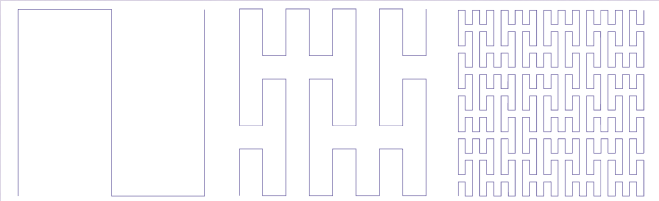
Каждый компонент многокомпонентной фигуры напоминает всю фигуру целиком вне зависимости от масштаба. До появления компьютеров исследования таких фигур сводились к отрисовкам от руки. Множества Мандельброта — вероятно, наиболее растиражированные математические изображения — впервые появились в 80-х гг. XX в., когда мощности компьютеров впервые позволили производить подобные операции. При всей сложности М-множеств, математический аппарат, на основе которого они построены, достаточно прост. Это сложение и перемножение чисел: $z = z^2 + c$. Ключ — в постоянном повторении: это простое правило применяется бесконечное количество раз. Результат становится новыми исходными данными снова и снова. Исследуя этот феномен (названный им «Большим медведем») в 80-х гг. XX в, Мандельброт обнаружил, что при определенных значениях исходных данных z результат будет расти бесконечно, в то время как при других значениях результат будет стремиться к нулю.

Таким образом, М-множества образуют граничный предел между этими двумя типами чисел. Вне этой границы находятся свободные значения z, стремящиеся к бесконечности; в пределах границ — «пленные», «приговоренные к исчезновению». Изменение масштаба — «приближение» — по границе изменяет масштаб чисел, но принцип их распределения остается неизменным.

Каждый объект обладает фрактальной размерностью — своего рода статистической «степенью грубости измерения». Фрактальная размерность капусты брокколи, например, равняется примерно 2,8; береговой линии — 1,28; легких человека — примерно 2,97. На основе степени сложности форм можно вывести формулы фрактальной размерности для облаков, деревьев, горных цепей и т. п. Ученые ищут — и находят — фрактальные закономерности в таких наборах множеств, которые выглядят совершенно хаотичными.

КРИВАЯ ПЕАНО

В 1890 г. итальянец Джузеппе Пеано обнаружил одномерную кривую, которая может бесконечно распространяться на двумерной плоскости. Используя метод, напоминающий тот, по которому строится кривая Коха, Пеано нанес исходный отрезок на эталонную единицу площади, а затем повторил тот же процесс, уменьшив интервалы. В результате получилась бесконечно длинная линия, не распространяющаяся за пределы эталонной площади. При этом Пеано никогда не рисовал такую кривую, предпочитая доказывать ее парадоксальные свойства математически.



93

Четвертое измерение и далее

Что такое четвертое измерение? Ученики Эйнштейна могли предположить, что четвертым — после трех пространственных измерений: длины, ширины и высоты (глубины) — является время. Однако математики редко ограничивают себя законами физики, поэтому они способны представить фигуры, имеющие еще больше пространственных измерений. То, что мы не можем увидеть такие фигуры целиком ни в одном измерении, их не смущает.

В 1884 г. английский учитель Эдвин Эбботт Эбботт опубликовал книгу под названием «Флатляндия. Роман во многих измерениях». Эта книга была не только едкой сатирой на нравы Викторианской Англии — еще она объясняла особенности восприятия измерений. Во многом благодаря ей у нас сформировалось представление о четвертом измерении как о некоем «ином мире» или «ином плане бытия», по сей день часто воплощаемое в научно-фантастических произведениях.

Обитатели Флатляндии были, что неудивительно*, плоскими и населяли Декартову систему координат (координатную плоскость). По ходу повествования Квадрат путешествовал в Линейный мир, где жили только одномерные линии и точки, не имевшие измерения вообще. Потом Квадрат принимал в гостях Сферу из трехмерного мира, которая представлялась ему в виде окружности с изменчивым диаметром — она росла и уменьшалась по мере прохождения через плоский мир Флатляндии.

Человек — трехмерное существо. Мы можем воспринимать расстояние в пространстве, а также ощущать изменение материи в пределах трех измерений — именно это изменение мы называем временем. Если бы мы могли видеть перемещение четырехмерных объектов в пространстве, то все, что мы были заметили, — изменение трех их измерений во времени.

К 80-м гг. XX в. геометрия окончательно вышла за пределы трех измерений. Если отрезок начинается и заканчивается на оси *x*, а стороны прямоугольника откладываются на осях *x* и *y*, то стороны куба имеют координаты на осях *x*, *y* и *z*. Таким образом, для получения четвертого измерения и четырехмерного куба (гиперкуба) достаточно добавить ось *w*. Для каждого последующего измерения добавляется очередная ось; алгебра оперирует так называемыми *n*-политопами — многогранниками или замкнутыми поверхностями с *n* измерениями.

Монументальная Большая арка Дефанс, возведенная в Париже в 1989 г., — это тессеракт, трехмерная проекция гиперкуба или (куба в четырехмерном пространстве). У него вдвое больше вершин и вчетверо больше граней и ребер, чем у трехмерного куба.

---

* Флатляндия — от Flatland (англ.) — «Плоская земля» — *прим. пер.*

ЖИЗНЬ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ: ПЕРСОНАЖИ «ФЛАТЛЯНДИИ» ЭББОТТА

Эдвин Эбботт Эбботт издал «Флатляндию» под псевдонимом Э. Сквеа. Возможно, он подшучивал над своей двойной фамилией*, но так же зовут и главного героя книги. Населена Флатляндия геометрическими фигурами, форма которых отражает их положение в обществе. Представители рабочего класса — треугольники; чем острее угол их вершины, тем менее квалифицированным трудом они занимаются: солдаты и прислуга имеют форму острых клиньев, а равносторонние треугольники — это администраторы и торговцы. Профессионалы, подобные автору книги, изображены в виде прямоугольников и квадратов; джентльмены — пятиугольников; знать — шестиугольников. Наивысшее положение занимали священники, количество граней у отображающих их фигур становилось таким большим, что они больше напоминали не совсем правильные круги. Решение Эбботта изображать всех женщин в виде одномерных отрезков подвергалось критике еще в его время, но он утверждал, что выбрал такую форму для того, чтобы отразить большое количество ограничений, которые накладывало на женщин общество XIX в., а не их примитивную суть по сравнению с мужчинами. На обложке «Флатляндии» изображен дом главного героя — обратите внимание на то, как линия жены добавляется к фигуре сыновей, что повышает их социальный статус.

94 Классификация простых конечных групп

Простые группы — кирпичи, из которых строится здание математики. Подобно тому, как все во Вселенной складывается из химических элементов, каждая конечная группа складывается из конечного количества простых групп.

Учитывая первостепенное значение групп как для математики, так и для физики, классификация всех простых конечных групп стала главным проектом XX века. В ее решении участвовали более ста математиков, написавших в процессе более 500 научных трудов. Работа была закончена в 1985 г.** Согласно полученной классификации, существует 18 типов простых конечных групп, а также 26 уникальных групп. Самая знаменитая — и большая — из них называется «Монстром». Математики, как правило, не склонны к преувеличениям: эта группа действительно монстроподобна. Она состоит из 8 8 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000 элементов, подсчитанных в 196 883 измерениях.

«Монстр» был выделен в отдельную группу для того, чтобы подтвердить, что классификация всех простых конечных групп действительно закончена. При этом его форма была до боли знакома математикам, ведущим исследования в области, которая считалась совершенно отдельной — в области модулярных форм***. Дальнейшие исследования подтвердили не только существование глубоких взаимосвязей между этими областями, но и позволили углубить наше понимание квантовой теории.

---

* Э. Сквэа — A. Square (*англ.*) — квадрат, прямоугольник, возведение в квадрат и т. д. — *прим. пер.*

** Разные источники датируют создание полной классификации простых конечных групп — и завершение доказательства ее верности — разными датами с 1982 по 2004 г. — *прим. пер.*

*** Модулярные формы и функции — важный инструмент теории чисел, алгебраической топологии и теории струн — *прим. пер.*

95

Самоорганизованная критичность

В 1987 г. статья под названием «Самоорганизованная критичность: объяснение 1/f шума» представила исследование одного из самых загадочных аспектов строения Вселенной: мы окружены невероятно сложными по своей структуре системами, но описывающие их уравнения относительно просты.

Статья Пера Бака, Чао Танга и Курта Визенфелда стала одной из самых цитируемых математических работ — и не без причины. Так, мы знаем все законы, которые регулируют изменения погоды, располагаем множественными результатами гидрометеорологических наблюдений и мощнейшими компьютерами, но любая попытка прогноза погоды на 50 дней все еще остается безнадежной. Исследуя клеточные автоматы (простые самоуправляющиеся системы), Бак, Танг и Визенфелд смогли продемонстрировать, что сложные модели поведения систем формируются сами по себе, вне зависимости от внешних воздействий и для широкого спектра изначальных состояний этих систем.

Потенциально эту теорию можно применить к описанию множества процессов — от войн до землетрясений, а также для того, чтобы объяснить, почему песчаные дюны в пустынях имеют ту же форму, что и похожие на рябь дюны на песчаных пляжах, хотя и отличаются от них по размеру.

96

Великая теорема Ферма

Немногие математические задачи привлекли такое внимание публики, как эта. Новость о ее доказательство в свое время попала на первые полосы газет, о ней были написаны книги, ставшие бестселлерами, а доказавший ее британский ученый удостоился рыцарского звания от королевы. На первый взгляд она достаточно проста $x^n + y^n \neq z^n$.

Ферма был непревзойденным мастером математических головоломок.

История последней (или Великой) теоремы Ферма начинается где-то около 1630 г. и занимает следующие 360 лет. Причиной тому — дьявольски сложный математический аппарат, лежащий в ее основе. Сэр Эндрю Уайлс, доказавший эту теорему в 1994 г., сравнил ее с погруженным во мрак домом со множеством комнат — в какой-то из них и таился ответ: «Вы входите в первую комнату, а в ней темно. Абсолютно темно. Вы спотыкаетесь, натыкаетесь на мебель, но постепенно вы понимаете, как она расставлена. Наконец, через полгода или около того вы находите включатель, нажимаете — и вдруг все вокруг освещено. Вы, наконец, точно видите, где вы находитесь. Потом вы переходите в следующую комнату — и вновь оказываетесь в полной темноте на шесть месяцев…». Славу Уайлсу принесла заметка, нацарапанная на полях страницы 85 одного из экземпляров эпохальной книги Диофанта «Арифметика».

Этот экземпляр принадлежал Пьеру де Ферма, юристу с юга Франции. Заметка гласила: «Если число n больше 2, то нет таких чисел x, y и z, отличных от нуля, чтобы они удовлетворяли равенству $x^n + y^n = z^n$». На первый взгляд все просто, но верно ли это утверждение? Заметка же продолжалась: «Я обнаружил превосходное доказательство, но поля слишком узкие, чтобы вместить его».

От загадки к разгадке

Ферма славился своим пристрастием к подобным математическим шуточкам и розыгрышам. Он часто рассылал их своим друзьям в Париже через монаха-математика Марена Мерсенна. Сам Ферма считался математиком-любителем — у него не было необходимости снабжать свои догадки доказательствами, он, скорее, считал свои послания веселыми интеллектуальными провокациями.

Частенько он заявлял, что доказательство у него есть, но он не обнародует его до тех пор, пока это не сделает кто-либо еще. Ни одного документа или письма, связанного с Великой теоремой Ферма, до сих пор не обнаружено — о таинственной заметке на полях стало известно, когда Самуэль де Ферма, сын великого француза, приводил в порядок архив своего отца для посмертного издания его трудов в 1665 г. Несмотря на все свои усилия, Самуэль не смог найти обещанного доказательства «последней теоремы» в архиве. Многие считали, что даже если Пьер де Ферма действительно располагал доказательством этой теоремы, оно было бы неполным, исходя из того, какая неразбериха царила вокруг нее на протяжении столетий, пока профессиональные математики пытались ее все-таки доказать.

В 1995 г. статья Эндрю Уайлса «Модулярные эллиптические кривые и Великая теорема Ферма» была принята в качестве истинного доказательства Великой теоремы. Решение загадки Ферма обошлось Уайлсу в восемь лет напряженной работы. «Превосходное доказательство» действительно не влезло бы на поля — выкладки Уайлса занимают более 100 страниц.

Энрю Уайлс с удовольствием рассказывает о своем доказательстве Великой теоремы Ферма в 1993 г. Однако в последний момент в его выкладках была обнаружена неточность, что стоило ему еще года, потраченного на доработку доказательства.

97

Компьютерное доказательство

ОТКРЫТИЕ — ЭТО НЕЧТО ОСОБЕННОЕ. ДЛЯ ТОГО ЧТОБЫ СДЕЛАТЬ ОТКРЫТИЕ, ТРЕБУЕТСЯ ВООБРАЖЕНИЕ, ЧАСТО АЛОГИЧНОЕ МЫШЛЕНИЕ, ПОРОЙ ОЗАРЕНИЕ ПРИХОДИТ СЛОВНО ИЗ НИОТКУДА. В этом есть что-то сугубо человеческое. Или было — до тех пор, пока в 1996 г. первая фундаментальная математическая задача не была решена компьютерной программой.

Первая математическая проблема, разрешенная машиной, известна как гипотеза Роббина о взаимозаменяемости двух аксиом булевой алгебры. Эту проблему сформулировал в 1933 г. Херберт Роббин и многие годы ведущие математики ломали копья вокруг нее.

В 90-х гг. XX в. Уильям МакКюн, сотрудник Аргоннской национальной лаборатории в США, доказал, что гипотеза Роббена в действительности является аксиомой и ее выполнение действительно приводит к возникновению булевой алгебры. Точнее, доказательство сформировала программа Маккюна под названием EQP. Аббревиатура EQP означает выражение equational prover («программа эквационных доказательств» или «доказатель верности тождеств»). Это была первая из целой плеяды программ, предназначенных для автоматического доказательства верности математических теорем.

Такие программы способны решать задачи первого порядка, основанные на аксиомах, но с вариациями уже не справляются. Они решают эти задачи грубо, «в лоб», используя метод подбора, однако, возможно, в ближайшем будущем одна из еще не доказанных пока математических гипотез получит имя компьютера, доказавшего ее.

98 Проблемы тысячелетия

В 1900 г. НА ЗНАМЕНИТОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ В ПАРИЖЕ ДАВИД ГИЛЬБЕРТ НАЗВАЛ 23 ПРОБЛЕМЫ, КОТОРЫЕ МАТЕМАТИКИ ДОЛЖНЫ РЕШИТЬ В XX ВЕКЕ. Через столетие математики снова собрались в Париже, чтобы определиться с тем, какими проблемами они займутся в веке XXI.

Логотип Математического института Клэя — «узел-восьмерка», символизирующий орбиобразный X как фактор трехмерного гипотетического пространства.*

Так называемые проблемы тысячелетия были представлены собравшимся Математическим институтом Клэя (МИК), основанным годом ранее в Массачусетсе меценатом Лэндоном Т. Клэем. В список вошли семь проблем, за решение каждой из которых была назначена награда в один миллион долларов США.

Так же, как и Гильберт веком ранее, научный комитет МИК, в который входят такие светила, как Эндрю Уайлс и Артур Джэфи, выбрал те проблемы, решение которых внесет самый существенный вклад в развитие математики: равенство классов P и NP, гипотезу Ходжа, гипотезу Пуанкаре, гипотезу Римана (единственная проблема, доставшаяся математикам XXI в. в наследство от списка Давида Гильберта), квантовую теория Янга — Миллса, существование и гладкость решений уравнений Навье — Стокса, а также гипотезу Бёрча — Свиннертон-Дайера. На сегодня одна из них решена — доказана верность гипотезы Пуанкаре.

99 Гипотеза Пуанкаре

В 1904 г. ФРАНЦУЗСКИЙ МАТЕМАТИК АНРИ ПУАНКАРЕ ОБНАРОДОВАЛ одну из величайших математических головоломок. Для подтверждения его гипотезы понадобилось 98 лет.

Ярчайшее светило математического сообщества, отец-основатель теории хаоса, Пуанкаре следовал строгому режиму: он работал два часа утром и два часа вечером, позволяя своему подсознанию в оставшееся время разбираться со сложнейшими задачами концептуального характера. Возможно, идея о том, что сфера является простейшей возможной формой во всех измерениях, пришла к Пуанкаре как раз во время этих его мечтательных размышлений.

Одна связь

Термины, описывающие любую математическую проблему, требуют своих определений. Так было и в случае с гипотезой Пуанкаре. Для демонстрации простоты своей трехмерной фигуры он использовал двумерную петлю. Пространство, согласно Пуанкаре, является «односвязным», если каждую петлю на нем можно стянуть в точку. Представьте аркан вокруг скользкого мяча. При попытке затянуть аркан мяч выскользнет из петли — и та стянется в точку. А вот с бубликом все будет не так, если аркан захлестнуть через отверстие в середине бублика — при этом аркан затянется и плотно захватит бублик. Таким образом, бублик (математически — тор) односвязным пространством не является.

Пуанкаре задался вопросом, остается ли это верным в многомерных пространствах. Действительно ли сфера — простейшая форма, или в таких пространствах есть другие односвязные фигуры.

Гипотеза Пуанкаре была доказана русским математиком Григорием Перельманом в 2002 г. От положенной за такой научный подвиг награды он отказался.

---

* Как раз тот случай, когда надо было бы дать простое и понятное определение, но его просто не существует, а развернутое простое объяснение того, что такое «многообразие с особенностями, которые выглядят как фактор эвклидова пространства по конечной группе», требует разъяснения практически КАЖДОГО слова — *прим. пер.*

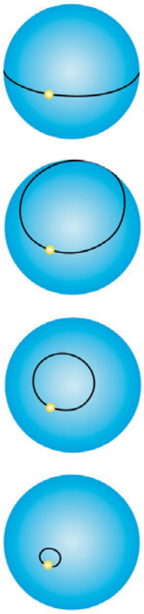


Схема односвязности сферы, по поверхности которой окружность сжимается в точку.

Видел их все

Доказательство гипотезы Пуанкаре не давалось лучшим умам почти век. Эта гипотеза была третьей в списке проблем тысячелетия. И всего через два года после того, как она попала в этот список, российский математик Григорий Перельман сумел найти решение. В 2002 и 2003 гг. он опубликовал три статьи, в которых изложил доказательство верности гипотезы Пуанкаре. Перельман воспользовался методом, который он сам назвал «поток Риччи с хирургией». С тех пор несколько научных коллективов подтвердили верность выкладок Перельмана, и тот был награжден Премией Математического института Клэя в один миллион долларов, а также — в 2006 г. — медалью Филдса за свое доказательство. Однако Перельман отказался от обеих наград, оставшись, похоже, равнодушным к своему достижению. Как-то он обронил: «“Односвязное компактное трехмерное многообразие” — звучит, конечно, сложно, но поверьте мне: если вы видели одно такое, вы видели их все». Безусловно, разыскать изложенное общедоступным языком описание всех хитросплетений гипотезы Пуанкаре не так-то просто, но для математиков это действительно один из важнейших прорывов — гипотеза Пуанкаре может помочь им понять форму Вселенной по мере ее расширения после Большого взрыва.

ПЕРЕЛЬМАН ОТКАЗАЛСЯ ОТ НАГРАДЫ

Безразличный к богатству и славе, Григорий Перельман в 2006 г. не принял ни медаль Филдса (математический эквивалент Нобелевской премии), ни миллион долларов, который присудил ему Математический институт Клэя за доказательство гипотезы Пуанкаре. Перельман живет со своей матерью в Санкт-Петербурге и отказывается от общения с журналистами, поскольку, по его словам, те интересуются только тем, почему он не взял миллион, и стрижет ли он ногти. Широко известно такое его высказывание: «Я не желаю, чтобы меня выставляли на потеху толпе, словно животное в зоопарке». Перельман считает свой вклад в развитие математики не более значительным, чем вклад американского математики Ричарда Гамильтона. Гамильтон ввел в научный оборот методику потока Риччи, при помощи которой Перельман и создал свое доказательство. Скромность Григория Перельмана и чистота его побуждений заслужили ему всемирное восхищение, хотя многие считают, что его отказ от премии — это точка, в которой гений разошелся со здравым смыслом.

100

В поисках чисел Мерсенна

ПРОБЛЕМА ПРОСТОГО ЧИСЛА, КОТОРУЮ В XVII В. СФОРМУЛИРОВАЛ ФРАНЦУЗСКИЙ МОНАХ, сегодня решается с помощью множества компьютеров, объединенных в единую сеть.

$$M_p = 2^p - 1$$

Французский монах Марен Мерсенн прославился благодаря своему парижскому математическому салону, где он знакомил гостей с трудами Декарта, Ферма, Галилея. Салон Мерсенна стал прообразом европейских академий наук. Кроме того, одно из подмножеств простых чисел носит его имя.

Простое число Мерсенна (p) — это показатель степени, в которую надо возвести число 2, чтобы при вычитании из полученного значения единицы результатом также было простое число (M_p). Поиск этих чисел весьма непрост, и в 1996 г. стартовал проект под названием GIMPS (аббревиатура от английского выражения «великий интернет-поиск простых Мерсенна»). Добровольцы-участники проекта подключали свои персональные компьютеры к общей сети, для того чтобы набрать достаточную вычислительную мощность. Сообщество GIMPS производит 68 триллионов вычислений в секунду. Очередное число Мерсенна было обнаружено в 2009 г. На сегодня их известно всего 47, в самом большом из них почти 13 миллионов цифр*.

Единственный способ найти простое число Мерсенна — метод проб и ошибок, подстановка чисел в формулу. Поиск чисел M_p ведет интернет-сообщество mersenne.org.

---

* Пока эта книга готовилась к изданию, было найдено 48-е число Мерсенна — 25 сентября 2013 г. Его десятичная запись содержит 17 425 170 цифр — *прим. пер.*

101

Математика: **Справочник**

Суть математики — в точности. Даже выражение, описывающее неточность, составляется исключительно точно. В этом состоит красота чисел — они, в отличие от слов, однозначны. При этом, правда, математический язык может показаться неспециалисту весьма запутанным. Дело в том, что используемые математиками слова из повседневной жизни в мире чисел часто имеют совершенно иное значение. Подготовленный нами справочник, надеемся, позволит вам сориентироваться.

Количества и величины

Когда число — не просто число? Когда оно является частью одного из тех определений, что даны ниже. Здесь мы приводим термины, описывающие типы и группы чисел особого вида или происхождения, а также связанные с ними другие термины.

Бесконечность — безмерно большое число, которого невозможно достичь. Дробь вида 1/x стремится (приближается) к бесконечности по мере того, как число x стремится (приближается) к 0.

Бинарные числа относятся к системе счета, где используются только два числа — 0 и 1. Бинарная система счисления — язык компьютеров, в котором каждое число или цифра означают «бит» (единицу информации). Восемь бит составляют «байт».

В периоде — число, десятичные дело которого представляют бесконечный ряд повторений одной и той же цифры. Так, десятичная запись числа ⅓ — ноль и три в периоде (0,33333….).

Вектор — величина, значение которой может быть выражено двумя и более числами (например, перемещение, характеризующееся скоростью и направлением).

Градиент — направление наибольшего возрастания функции, основанное на соотношении переменных показателей x и y; если $x = y$, градиент равен 1; если $3x = y$, градиент равен 3; значение y увеличивается в 3 раза при каждом увеличении значения x на 1.

Десятичные числа — дробные числа в десятичной систем счисления, которые составляют целое число с десятыми, сотыми, тысячными и т. д. долями.

Десятичный разделитель — знак, отделяющий целую часть числа (основу) от дробной. Чаще всего используется в десятичной системе счисления, где дробные части — десятки, сотни и т. д. В США вместо запятой используется точка. Таким образом, если основа составляет 10, то запись 10,1 можно представить как 10 и 1/10 (или десять и одна десятая). В двоичной системе счисления, где база равна 2 (0 и 1) запись 10,1 означает 2½, т. е. два с половиной.

Знаменатель — число в дроби под чертой; наименьший общий знаменатель — значение, к которому можно привести все знаменатели нескольких дробей. Так, наименьший общий знаменатель ½ и ⅓ — 6 (3/6 и 2/6).

Кардинальное число или мощность множества описывает общее количество элементов конечного множества.

Логарифм — система счисления, использующая не само число, а его экспоненту: логарифм 3 по основанию 9 равен 2 ($\log_3 9 = 2$, ибо 3^2=9), а $3\log_3 = 27$ (3^3).

Матрица — набор цифр, организованный в строки и столбцы, с которым можно проводить математические операции (сложение, умножение) целиком, как с одним числом. Матрицы используются для выражения множественных значений, сгруппированных или связанных по какому-либо принципу. Матрицей может быть, например, совокупность размеров какой-то формы или фигуры. После изменения этой фигуры любым способом через матрицу можно вычислить ее новые размеры.

Медиана (в планиметрии) — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, а также прямая, содержащая этот отрезок.

Медиана (в статистике) — значение, которое делит ранжированное множество так, что значение «нижних» единиц ряда оказывается не больше значения медианы, а значение «верхних» — не меньше ее значения. Так, средние значения множеств (1, 3, 8) и (2, 4, 6) оба равны 4, но медианы этих множеств — 3 и 4 соответственно.

Мода — наиболее часто встречающееся при всех наблюдениях значение признака. Среднее значение множества (1, 1, 4, 7) равно 3, но мода — 1.

Обратная величина — значение, получаемое при делении единицы на искомое. Так, обратная величина 4 — 0,25 (одна четверть).

Обратное число — число, с измененным (с положительного на отрицательный и наоборот) знаком: число, обратное 3 — минус 3 (–3).

Порядковые числительные — те, которые определяют порядок перечисления: первый, второй, третий и т. д.

Скаляр — величина, значение которой может быть выражено только одним числом (например, длина).

Составное число — целое положительное число, которое можно нацело разделить на любое другое целое число, кроме него самого и единицы. Несоставные целые положительные числа называются простыми.

Среднее значение (в наиболее общем случае) — результат деления суммы избранных чисел на их количество. Так, среднее значение чисел 2, 4 и 6 равно 4 (12/3), а среднее значение 2, 3 и 5 равно 3,3333… (10/3).

Целые числа — натуральные (положительные и отрицательные) числа. Дробные числа во множество целых не входят. Ноль также считается целым числом.

Цифра — синоним слова «числительное», также единичное число, отдельный символ цифровой записи. Также используется в биологии для обозначения пальцев на руках и ногах, которые, вероятно, были первыми предметами, которые человек научился считать.

СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА

Совершенное число — число, являющееся суммой своих делителей. Так, 6 можно нацело разделить на 1, 2 и 3, которые, если их просуммировать, дадут в итоге 6. Совершенство. На сегодня известно только 47 совершенных чисел. В самом большом из них 25 956 377 цифры. Все эти числа — четные. Может ли нечетное число быть совершенным, неизвестно — поиск продолжается.

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$$

Математические операции

Математическая операция — действие, выполняемое в соответствии с заранее определенными правилами, над одним или несколькими исходными числами (величинами) с тем, чтобы получить другие. В число математических операций входят не только сложение и умножение.

ФАКТОРИАЛЫ

Последовательность факториалов демонстрирует удивительно быстрый рост числовых значений.

0	1
x1	1
x2	2
x3	6
x4	24
x5	120
x6	720
x7	5040
x8	40320
x9	362 880
x10	3 628 800
x11	39 916 800
x12	479 001 600
x13	6 227 020 800
x14	87 178 291 200
x15	1 307 674 368 000
x18	6 402 373 705 728 000
x20	2 432 902 008 176 640 000
x24	620 448 401 733 239 439 360 000

Возведение в квадрат — возведение числа во вторую степень.

Возведение в куб — возведение числа в третью степень; 2 в кубе — $2^3=8$.

Возведение в степень — умножение числа на самое себя определенное количество раз: 10^n (10 в степени n) означает 10 умноженное на 10 n раз.

Вычитание — отнимая значение одного числа от другого, находят разность между ними.

Деление — операция, подсчитывающая, сколько раз одно число содержится в другом. Если результатом деления является не целое число, то такая операция называется делением с остатком. Обратная делению операция — умножение.

Делимое — число, над которым производится операция деления.

Делитель — число, на которое делится делимое.

Квадратный корень — число, которое необходимо возвести в квадрат, чтобы получить требуемое число. Так, квадратный корень из 4 — записывается $\sqrt{4}$ — равен 2 ($2^2=4$).

Кратное — число *a* кратно числу *b*, если делится на него без остатка.

Множитель — число, над которым производится операция умножения.

Преобразование — согласованное изменение множества чисел в соответствии с единым принципом. Например, простейшая функция, укорачивающая все длины в два раза, преобразует квадрат размером 2 на 2 в квадрат размером 1 на 1.

Произведение — результат умножения.

Сложение — одна из основных математических операций, заключается в прибавлении чисел друг к другу для получения нового числа, равного сумме всех слагаемых.

Степень — показатель, указывающий, сколько раз перемножается исходное число при возведении в степень. Обычно записывается верхним индексом.

Умножение (в арифметике) — последовательное сложение одного и того же числа определенное количество раз. Так, 10×3 = 10+10+10. Результат умножения называется произведением.

Факториал — произведение всех натуральных чисел от единицы до названного числа включительно. Факториал 4 — записывается 4! — равен 1×2×3×4=24.

Частное — результат деления.

Геометрия

МАТЕМАТИКА ФОРМ И ФИГУР ДЛЯ ИХ ОПИСАНИЯ ИСПОЛЬЗУЕТ НЕ ТОЛЬКО ЧИСЛА, но и множество слов, для того чтобы точно описать свойства объектов. Слова «квадрат», «треугольник» или «угол» нам, безусловно, хорошо знакомы, но этими терминами геометрия отнюдь не исчерпывается.

Вершина — точка, в которой сходятся грани или другие линии. Многоугольники, многогранники, графы — множества вершин.

Геодезическая кривая — кратчайшая дистанция между двумя точками на сфере или иной кривой поверхности.

Равносторонний треугольник

Сторон	3
Каждый угол	60°
Сумма всех углов	180°
Треугольников	1
Диагоналей	0

Градус — единица измерения угла; полный угол или оборот равняются 360°.

Диаметр — расстояние от одной точки на окружности до другой, проходящее через центр. Равен удвоенному радиусу.

Квадрат

Сторон	4
Каждый угол	90°
Сумма всех углов	360°
Треугольников	2
Диагоналей	2

Дуга — часть окружности.

Касательная — прямая линия, соприкасающаяся с кривой (например, с окружностью), только в одной точке.

Правильный пятиугольник

Сторон	5
Каждый угол	108°
Сумма всех углов	540°
Треугольников	3
Диагоналей	5

Конгруэнтность — конгруэнтные фигуры обладают одинаковым размером и при наложении друг на друга полностью совпадают.

Многогранник — трехмерная фигура, замкнутая поверхность, состоящая из многоугольников, образованных прямыми отрезками и плоскими гранями. Правильных многогранников всего пять.

Многоугольник — плоская фигура, состоящая из замкнутых непересекающихся прямых отрезков. Правильных многоугольников, все стороны которых равны, бесконечно много.

Неравносторонний треугольник — треугольник, все стороны которого имеют разные длины, а углы — разные величины.

Объем — пространство, занимаемое трехмерным объектом.

Окружность — граница круга (т. е. линия, которая «окружает» круг).

Острый угол — угол, меньший прямого (90°).

Параллельная — линия, которая в одной плоскости никогда не пересечет другую при продолжении их до бесконечности в любом направлении (в планиметрии).

Периметр — общая длина границы фигуры.

Перпендикуляр — линия, пересекающая что-либо под углом в 90°.

Плоскость — поверхность, на которой кратчайшим расстоянием между двумя точками является прямая.

Правильный шестиугольник

Сторон	6
Каждый угол	120°
Сумма всех углов	720°
Треугольников	4
Диагоналей	9

Площадь — часть плоскости, ограниченная периметром. Измеряется квадратными единицами площади.

Подобие (геометрическое) — подобные фигуры имеют равные углы и пропорции, но отличаются по размеру.

Политоп — геометрическое пространство, состоящее из прямых отрезков и плоских граней в четырех и более измерениях.

Правильный семиугольник	
Сторон	7
Каждый угол	128,57°
Сумма всех углов	900°
Треугольников	5
Диагоналей	14

Правильная фигура — фигура, все стороны и углы которой равны между собой.

Прямой угол — угол, равный 90°.

Прямоугольный параллелепипед — объемная шестигранная фигура, у которой все грани являются прямоугольниками. Прямоугольный параллелепипед, все грани которого являются квадратами, — это куб.

Равнобедренный — треугольник, у которого две стороны равны, а третья отличается.

Равносторонний — имеющий одинаковые по длине стороны; часто применяется в отношении равностороннего треугольника, все стороны (и углы) которого равны.

Правильный многоугольник	
Сторон	*n*
Каждый угол	(*n*–2) x 180°/*n*
Сумма всех углов	(*n*–2) x 180°
Треугольников	(*n*–2)
Диагоналей	*n*(*n*–3)/2

Радиан (рад) — единица измерения углов; один радиан равен центральному углу (углу, вершиной которого является центр окружности), длина дуги которого равна радиусу окружности. Полный круг равен 2π радиан.

Радиус — расстояние от центра круга до любой точки на его окружности.

Правильный восьмиугольник	
Сторон	8
Каждый угол	135°
Сумма всех углов	1080°
Треугольников	6
Диагоналей	20

Симметрия — способность фигуры (или иного множества чисел) проходить через преобразование (например, вращаться или отражаться), оставаясь неизменной.

Точка — безразмерное обозначение положения в пространстве.

Тупой угол — угол, больший 90°.

Хорда — отрезок, проведенный внутри окружности от одной точки на окружности до другой. Диаметр — хорда, проходящая через центр круга.

Математические выражения

НАКОНЕЦ, БРОСИМ ВЗГЛЯД НА МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ — инструменты, с помощью которых математики представляют результаты своих изысканий в виде символов.

Алгебра изучает взаимоотношения между числами, заменяя реальные, но переменные их значения символами, среди которых чаще всего встречаются x и y.

Константа (постоянная) — неизменная величина в формулах; π — математическая константа.

Коэффициент — постоянный множитель в математическом выражении. Например, в выражении c = 2πr «2» — коэффициент.

Неравенство — утверждение о том, что значения двух (и/или более) выражений неодинаковы.

Равенство — утверждение о том, что значения двух (и/или более) выражений одинаковы.

Тождество — равенство, верное при любых значениях входящих в него переменных.

Уравнение — демонстрация того, что одно выражение равно другому: 2x = 3y.

Формула — уравнение, составленное для вычисления какого-либо значения. Формула вычисления площади круга — $S = \pi r^2$.

Функция — правило, в соответствии с которым одному значению строго соответствует значение функции.

Типы доказательств

ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ ОПРОВЕРГНУТЬ ТЕОРЕМУ, МАТЕМАТИКУ ДОСТАТОЧНО ПРИВЕСТИ КОНТРПРИМЕР — исключение из утверждаемого теоремой правила. Так демонстрируется, что данная теорема не универсальна. Однако она все же может быть верной при определенных условиях. Определение этих условий — уже другая задача.

Прямое доказательство — применение аксиом и других определений для дедуктивного вывода универсальной истины.

Математическая индукция — доказательство истинности для одного или нескольких случаев с последующей демонстрацией того, что это решение должно оставаться верным и для всех остальных случаев (или в определенных пределах).

Контрапозиция — демонстрация верности утверждения A путем доказательства того, что утверждение, опровергающее A, — неверно.

Доказательство от противного — доведение до логического абсурда (*reductio ad absurdum*) утверждения, противоположного тому, верность которого необходимо подтвердить.

Построение — демонстрация истинности признака или свойства объекта построением примера, проявляющего это свойство.

Исчерпание вариантов — перебор огромного количества частных решений, при котором не возникает результат, опровергающий первоначальное утверждение.

Вероятностное доказательство — демонстрация примера того, что верное решение (или требуемое качество) наверняка существует с помощью методов теории вероятностей.

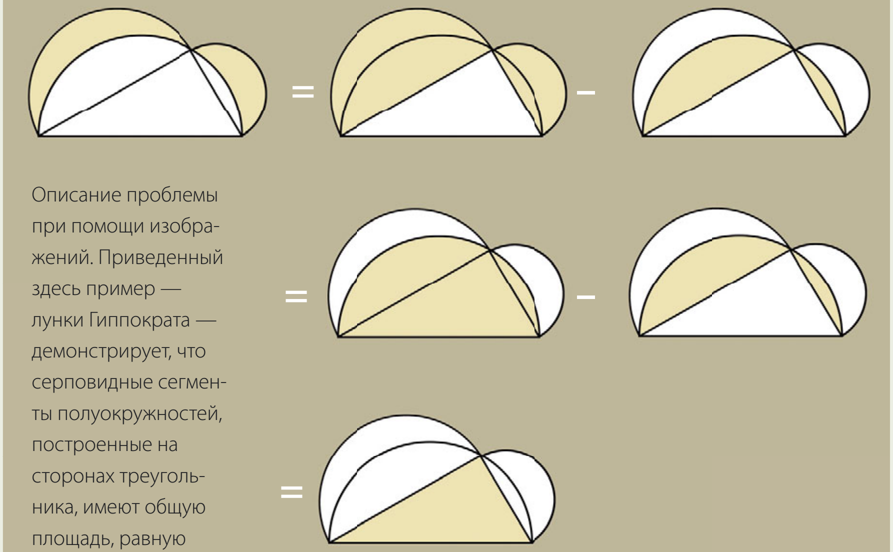
Комбинаторное доказательство — сравнение доказываемого утверждения с уже известным математическим объектом и демонстрация их эквивалентности.

Неконструктивное доказательство — постулирование того, что искомая математическая характеристика существует при невозможности объяснить, как именно ее можно вычислить.

Статистические методы в чистой математике — использование статистических данных, демонстрирующих истинность или ложность решения.

Автоматизированное (компьютеризированное) доказательство — использование компьютерных вычислений для перебора вариантов, чтобы осуществить доказательство исчерпанием, а также для проверки этих вычислений, масштаб которой выходит за пределы вычислительных возможностей человека.

НАГЛЯДНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Описание проблемы при помощи изображений. Приведенный здесь пример — лунки Гиппократа — демонстрирует, что серповидные сегменты полуокружностей, построенные на сторонах треугольника, имеют общую площадь, равную площади треугольника*.

---

* Приведенный рисунок — иллюстрация к лункам аль-Хайсама, решавшего, как и Гиппократ Хиосский, с помощью метода лунок (безуспешно, как и Гиппократ), проблему «квадратуры круга» — задачу построить при помощи циркуля и линейки квадрат, равновеликий данному кругу — *прим. ред.*

Число чисел

ЧИСЕЛ БЕСКОНЕЧНО МНОГО, НО НЕКОТОРЫЕ МНОЖЕСТВА ВНУТРИ БЕСКОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА ЧИСЕЛ соседствуют и пересекаются друг с другом. Число таких множеств также бесконечно, но мы начнем с самого начала.

1. Натуральные числа. Числа, которые мы подсчитываем на пальцах — и в уме. Если бы нам хватило времени, мы могли бы досчитать так до бесконечности. Правда, при этом мы бы упустили бесконечное множество других чисел.

2. Целые числа. Это множество вместе с натуральными числами включает отрицательные, а также ноль. Отрицательные числа, в общем, целиком и полностью идентичны натуральным — только их значение уменьшается по мере того, как они растут.

3. Рациональные числа. Числа, которые могут быть представлены в виде дроби, числитель которой всегда целое число, а знаменатель — натуральное: ½ = 0,5; 7/4 = 1,75; 97/29 = 3,34482759. Если одна из частей дроби выражена отрицательным числом, то и рациональное число также будет отрицательным (при умножении и делении одинаковые знаки дают положительный результат, разные знаки — отрицательный). Любое целое число также можно представить в виде дроби: 2/2 = 1; 9/3 = 3; 64/4 = 16.

4. Иррациональные числа. Как следует из названия, иррациональные числа не являются рациональными, то есть не могут быть представлены в виде дроби. Они образуют бесконечный неповторяющийся поток десятичных долей. Некоторые из иррациональных чисел можно «встроить» в алгебраические выражения — такие называются алгебраическими или конструктивными иррациональными числами. Те же иррациональные числа, которые невозможно записать в алгебраическом виде, называются трансцендентными.

5. Вещественные числа. Вместе рациональные и иррациональные числа образуют множество вещественных чисел. Почему их назвали вещественными? Ну, потому, что существует другое множество чисел с совершенно аналогичными свойствами за исключением того, что членов этого множества… не существует. Но это нас не останавливает — вместо того, чтобы считать единицами (1), мы считаем в символах (*i*). Буква *i* — от слова *imaginary* — «воображаемые», или «мнимые», числа.

6. Мнимые числа. Мнимые числа родились из квадратного корня из –1. Вещественные квадратные числа всегда положительные (два одинаковых знака дают в результате плюс). Так что, хотя квадратный корень из 1 равен 1 (единице из множества вещественных чисел), квадратный корень из –1 — это число *i*, которое и служит счетной единицей во множестве мнимых чисел. Подобно вещественным, мнимые числа можно расположить на числовой прямой или оси. Правда, она будет отличаться от числовой прямой вещественных чисел. Эти прямые пересекаются только в одной точке — в точке 0. Все, что умножается на 0, равно 0, даже *i*: 0 = 0*i*. Числа *i* не существует в реальности, но оно, тем не менее, подчиняется этому правилу, равно как и все остальные мнимые числа. А это означает, что некоторые мнимые числа являются алгебраическими, а некоторые — трансцендентными.

7. Комплексные числа. Числа, состоящие из двух частей — вещественной и мнимой. Это множество чисел объединяет все другие множества всех других чисел. Но не входит ли множество комплексных чисел в еще одно, еще более мощное множество?

До бесконечности и далее…

Множество чисел комплексными не исчерпывается. Это только начало. Комплексное число состоит из вещественной компоненты x и мнимой — i. Все вещественные числа можно расположить по точкам вдоль числовой оси x, а числовая ось y мнимых чисел будет пролегать перпендикулярно к ней. Почему бы не добавить еще два множества чисел — j и k, еще две числовые оси в еще двух измерениях? Комплексные числа, состоящие из 4 компонент называют кватернионами. Принципы взаимоотношений между этими числами проиллюстрированы в таблице внизу. Можно продолжать и дальше: октонионы — числа в восьми измерениях, состоящие из восьми компонент… Как вы уже, наверное, догадались, количество компонент и измерений бесконечно.

Множитель	1	*i*	*j*	*k*
1	1	*i*	*j*	*k*
i	*i*	–1	*k*	*j*
j	*j*	*k*	–1	*i*
k	*k*	*j*	*i*	–1

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Десятичная	Римская	Шестнадцатеричная	Бинарная
1	I	1	1
2	II	2	10
3	III	3	11
4	IV	4	100
5	V	5	101
6	VI	6	110
7	VII	7	111
8	VIII	8	1000
9	IX	9	1001
10	X	A	1010
50	L	32	110010
100	C	64	1100100
500	D	1F4	111110100
1000	M	3E8	1111101000

БУКВЫ ГРЕЧЕСКОГО АЛФАВИТА

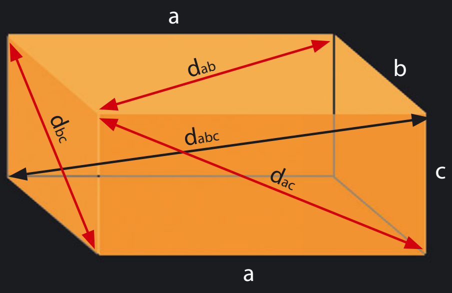
		название
Α	α	Альфа
Β	β	Бета
Γ	γ	Гамма
Δ	δ	Дельта
Ε	ε	Эпсилон
Ζ	ζ	Дзета
Η	η	Эта
Θ	θ	Тета
Ι	ι	Йота
Κ	κ	Каппа
Λ	λ	Лямбда
Μ	μ	Мю
Ν	ν	Ню
Ξ	ξ	Кси
Ο	ο	Омикрон
Π	π	Пи
Ρ	ρ	Ро
Σ	σ	Сигма
Τ	τ	Тау
Υ	υ	Ипсилон
Φ	ϕ	Фи
Χ	χ	Хи
Ψ	ψ	Пси
Ω	ω	Омега

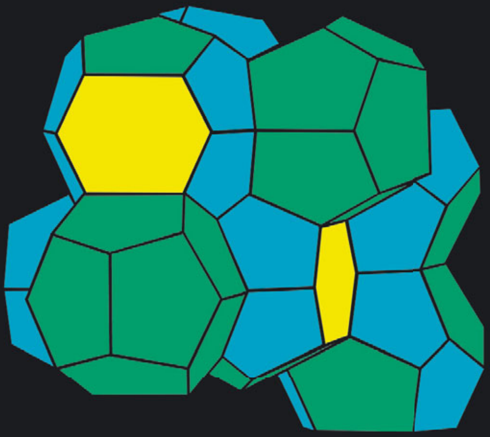
ОТКРЫТЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

История математики не закончится никогда — не открытых еще взаимоотношений, зависимостей, законов бесконечно много. Вот только некоторые вопросы, на которые еще нет ответа, а кроме них ответа ждут еще десятки. Ответы же на них породят только новые загадки, которые также надо будет решить.

Существует ли совершенная коробка?

Такой вопрос может вызвать интерес только у математика. Начнем с «кирпичей Эйлера» (эйлеровых параллелепипедов) — класса параллелепипедов, длины всех сторон которых, а также длины всех диагоналей по граням выражены целыми числами. Длины сторон самого маленького «кирпича Эйлера» составляют 240, 117 и 44 единицы; длины диагоналей — соответственно, 267, 244 и 125 единиц. Так вот, совершенная коробка — это «кирпич Эйлера», у которого и внутренние («пространственные») диагонали — линии, соединяющие противоположные углы через середину — также имеют целочисленную длину. В 2009 г. было доказано, что совершенные параллелепипеды существуют, но вычислить точные размеры совершенной коробки пока не удается. Не то чтобы этого не пытаются делать — напротив, в 2012 г. компьютерный анализ проблемы вывел из рассмотрения коробки со сторонами короче одного триллиона единиц измерения.





Возможно ли идеализировать пену?

Не стоит воспринимать этот вопрос слишком буквально. К нему следует подходить математически. Идеальная пена — ответ на вопрос, заданный лордом Кельвином о принципах термодинамики еще в 1887 г. Закончив работу над исследованием природы энергии — труд, который должен был наверняка обессмертить его имя, — шотландский пэр развлекал себя размышлениями о форме пузырей в пене. Если бы все пузыри имели одинаковый объем, какой он должны быть формы для того, чтобы их можно было упаковать наилучшим образом?

Кельвин предложил 14-сторонний усеченный октаэдр (с отрезанными вершинами, оставлявшими квадратные грани). Упакованные вместе, эти фигуры получили название Кельвиновых структур. В 1993 г. двое исследователей из Дублина превзошли лорда Кельвина — дважды. Структура, образованная 14-гранниками (тетракайдекаэдр) профессора Дениса Уэйра и его ученика Роберта Фелана, состоящими из двух шестигранников и 12 пятигранников, имела меньшую площадь поверхности, чем структура лорда Кельвина. Затем они показали, что структура из неправильных додекаэдров (12-гранников) имеет еще меньшую — на целых 0,3% — площадь поверхности.

Впрочем, природа все сделала сама, опередив, как это часто бывает, ученых. Некоторые клатраты — вид органических молекул, заключающих в своей структуре другие молекулы, — близки по своей организации к структуре Уэйра-Фелана.

Гипотеза Коллатца

Попробуйте сделать это сами — если осмелитесь. До сих пор не разрешенная проблема, также известная как сиракузская, чаще всего называется проблемой Коллантца — по имени немецкого математика, сформулировавшего ее в 30-х гг. XX в. Предложенный им алгоритм внешне выглядит очень просто: возьмем любое натуральное число x. Если оно четное, то делим его на 2, а если нечетное, то умножаем на 3 и прибавляем 1 (получаем 3x + 1). Над полученным числом выполняем те же самые действия, и так далее.

Согласно гипотезе Коллатца, в конце концов вы получите 1. Но верна ли эта гипотеза? Существует ли число, исполнение над которым этого алгоритма не даст в итоге единицу? Покойный Пал Эрдёш, современник Коллатца, предложил 500 долларов тому, кто сможет ответить на этот вопрос.

Спустя 80 с лишним лет этот приз может показаться не столь уж великим, но доказательство или опровержение гипотезы Коллатца может обнаружить новый тип взаимосвязей между натуральными числами — и кто знает, куда это может привести?

Существует ли закономерное распределение простых чисел?

Математики неустанно ищут закономерности в распределении простых чисел в надежде обнаружить некую скрытую формулу. Возможности, которые эта формула откроет перед математиками, пока остаются лишь в области научной фантастики, но, с другой стороны, некогда в этой области пребывали космические полеты, подводные лодки и роботы. В 1849 г. Альфонс де Полиньяк предположил, что для любого четного числа *n* найдется бесконечно много пар соседних простых чисел, разность между которыми равна *n*.

Иными словами, прибавляя к любому положительному числу любое простое, вы всегда получите в результате простое число, причем между ними никогда не окажется другое простое число. Пары простых чисел, отличающихся на 2, называют близнецами, на 4 — двоюродными. Те же, что отличаются на 6, имеют забавное английское название *sexy primes*, обыгрывающее сходство между латинским словом «секст» (шесть) и английским *sexy* («сексуальный»).

5 6 **7**

Близнецы

7 8 9 10 **11**

Двоюродные

11 12 13 14 15 16 **17**

Sexy primes

Проблема Гольдбаха

В 2000 г. лондонский издатель Тони Фейбер объявил о заманчивом призе в 1 миллион долларов тому, кто решит эту одну из самых древних математических головоломок. Кстати, в это же время Математический институт Клэя готовился опубликовать так называемый список проблем тысячелетия. Однако предприимчивый издатель установил предельный срок для выполнения своей задачи — 2 года со дня выхода в Англии романа «Дядюшка Петрос и проблема Гольдбаха».

Впрочем, эта гипотеза успешно ставила в тупик самых одаренных математиков и без всяких рекламных трюков с момента ее формулировки в 1742 году. Даже великий Леонард Эйлер в столкновении с ней потерпел неудачу, что случалось с ним крайне редко.

Гольдбах предположил, что любое четное число, начиная с 4, есть сумма двух простых чисел. Пока не удалось найти ни одного числа, для которого это правило не выполнялось бы. Со временем появилась так называемая слабая гипотеза Гольдбаха: любое нечетное число, начиная с 7, есть сумма трех нечетных простых чисел. И «сильная», и «слабая» гипотезы Гольдбаха, весьма вероятно, верны, однако окончательно это доказать до сих пор не удается.

100 = 3+97

или 100 = 11+89

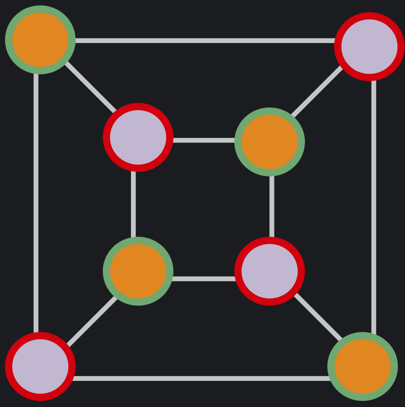
или 100 = 17+83

или 100 = 29+71

или 100 = 41+59

или 100 = 47+53

Оптимальный маршрут



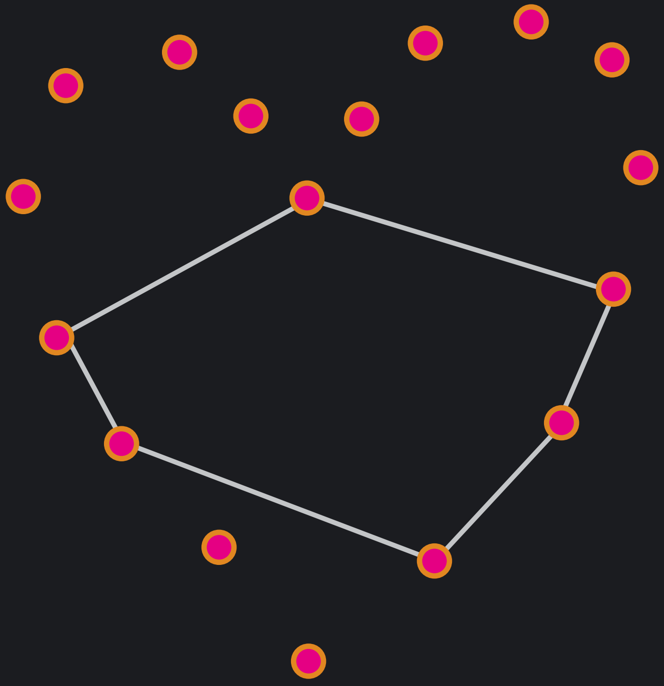
Гипотеза Барнетта, названная в честь профессора Калифорнийского университета Дэвида Барнетта, уводит нас в странный мир теории графов в поисках универсального закона, определяющего оптимальный маршрут в рамках определенного вида графов. Как мы помним, граф — это схема, в которой точки (или вершины) соединены отрезками (или гранями). Барнетт предположил, что любой парный многогранный граф, в каждой вершине которого сходятся три грани, подчиняется Гамильтонову циклу.

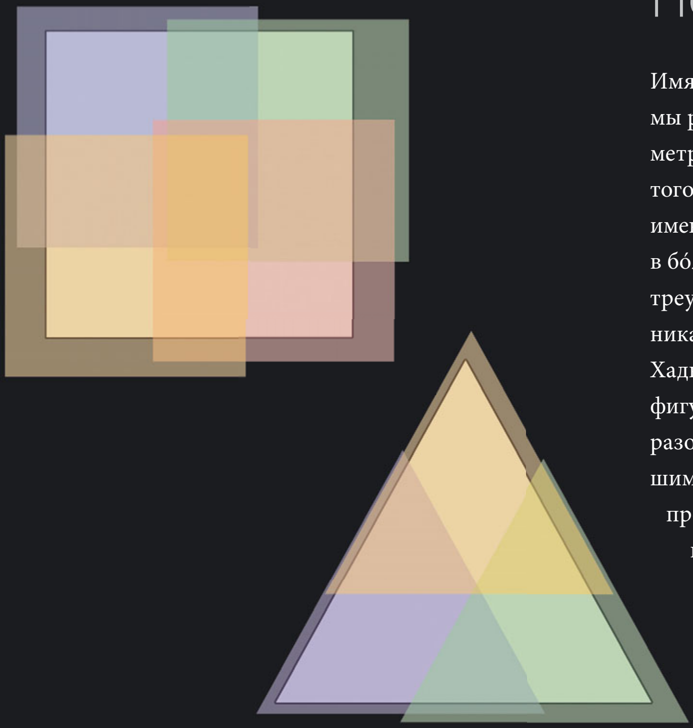
Так, теперь то же самое еще раз, но помедленнее. Согласно теории графов, многогранный граф — это отображение на плоскости граней и вершин трехмерной фигуры. «Парный» означает, что каждой вершине присвоен один из двух цветов, причем грани упираются в вершины, обозначенные разными цветами. Гипотеза предполагает, что по каждому подобному графу можно проложить маршрут, пересекающий каждую вершину единственный раз. Это и есть Гамильтонов цикл. На нынешний момент доказано, что это условие выполняется для графов, имеющих до 86 граней включительно.

Задача со счастливым концом

Эта математическая задача — еще один пример фактически детской игры. Проблему сформулировала Эстер Клейн на неформальной встрече молодых математиков в предвоенном Будапеште: любое множество из пяти точек на плоскости имеет подмножество из четырех точек, являющихся вершинами выпуклого четырехугольника. Присутствовавшие на той встрече двое молодых людей — Дьёрль Секереш и Пал Эрдёш — решили проверить, так ли это на самом деле и почему.

Они установили, что во множестве из девяти точек всегда скрывается пятиугольник, а из 17 — шестиугольник. Но до сих пор никто не нашел исчерпывающего объяснения, почему так происходит всегда. Юный Дьёрдь проявлял наибольшее рвение в поисках решения задачки Эстер Клейн, и неспроста — через три года они поженились. Поэтому Пал Эрдёш и назвал это проблему «задачей со счастливым концом».





Перекрытие фигур

Имя Хьюго Хадвигера носят несколько гипотез. Та, о которой мы рассказываем здесь, относится к комбинаторной геометрии. Сколько меньших подобных фигур требуется для того, чтобы перекрыть одну бóльшую? «Подобные» фигуры имеют одинаковую геометрию, но отличаются по размерам в бóльшую или меньшую сторону. Для того, чтобы покрыть треугольник, требуется три меньших подобных треугольника. Для того, чтобы покрыть квадрат, — четыре. Гипотеза Хадвигера гласит, что максимальное необходимое количество фигур — всегда $2n$, где n — количество измерений. Таким образом, двухмерный квадрат перекрывается четырьмя меньшими квадратами. Для того, чтобы полностью заполнить пространство, занимаемое трехмерным кубом, требуется шесть кубов меньшего размера. Для двухмерного пространства гипотеза Хадвингера доказана, а вот третье и все последующие измерения пока не поддаются математикам, что оставляет возможность для существования фигур, которые нельзя перекрыть их подобиями или масштабировать.

Великие математики

Многие разделы математики лежат вне нашего понимания. Неудивительно, что теми, кто способен свободно ориентироваться в мире чисел, формул и закономерностей, восхищаются — они вполне заслуживают такого отношения. Однако и они во многом — самые обычные люди. Просто у каждого из них есть своя замечательная история.

Архимед

Год рождения	ок. 290–280 г. до н. э.
Место рождения	Сиракузы, Сицилия
Год смерти	212/211 г. до н. э.
Чем знаменит	Первым точно подсчитал значение числа π

Неизвестно, бывал ли хоть раз этот греческий ученый и инженер в Греции (мы имеем в виду ее современную территорию). Он жил в греческой колонии Сиракузы на острове Сицилия и обучался, вероятно, в Александрии и Эратосфена. Немногие могут похвастать заслугами, сравнимыми с Архимедом. Помимо достижений в области математики, он изобрел архимедов винт для подъема воды; «коготь Архимеда» — кран, цеплявший с крепостной стены неприятельские корабли, и переворачивавший их; таинственное тепловое оружие (считается, что это были зеркала, точно фокусировавшие солнечный свет); и, наконец, закон Архимеда, определивший соотношение между плавучестью и плотностью.

Аль-Хорезми

Год рождения	ок. 780 г. н. э.
Место рождения	Хорезм, Центральная Азия
Год смерти	ок. 850 г.
Чем знаменит	Изобрел алгебру

Известный в Европе под латинизированным именем Алгоризми, этот персидский ученый родился, предположительно, в Хорезме (в Хиве), к югу от Аральского моря. В IX в. н. э. это был богатый район цветущей исламской империи. Сейчас это часть Узбекистана, где аль-Хорезми почитается как национальный герой. Центром науки того времени был Багдад, куда и перебрался аль-Хорезми, чтобы стать ученым в «Доме мудрости» (аналог академии), а затем и возглавить его. Помимо развития алгебры и разработки алгоритмов, аль-Хорезми прославился своими солнечными часами, астролябиями (приборами для составления карт звездного неба), а также составлением одних из самых точных географических карт своего времени.

Байес, Томас

Год рождения	1702 г.
Место рождения	Лондон, Англия
Год смерти	17 апреля 1761 г.
Чем знаменит	Трудами в области теории вероятностей

Преподобный Томас Байес бóльшую часть своего рабочего времени уделял заботам о пастве своей пресвитерианской церкви в Танбридж Уэллс, торговом городке к югу от Лондона. Лишь разменяв четвертый десяток лет, он занялся математикой. В 1742 г. он был избран членом Лондонского королевского общества за свои труды в области математического анализа, бывшего тогда сравнительно молодым разделом математики — работы Ньютона и Лейбница увидели свет всего за несколько десятков лет до Байеса. Однако наибольшую славу ему принесли его поздние работы в области теории вероятностей, а самый известный его труд был опубликован после его смерти.

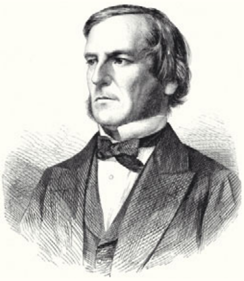
Бернулли, Даниил

Год рождения	8 февраля (29 января)* 1700 г.
Место рождения	Гронинген, Нидерланды
Год смерти	17 марта 1782 г.
Чем знаменит	Исследованиями в области гидродинамики

Семья Бернулли из швейцарского Базеля была самой математической семьей в истории. Дядя Даниила, Якоб, вывел значение константы *e*, а его отец Иоганн внес вклад в развитие математического анализа и рассчитал параметры брахистохрона — дуге циклоиды, не вполне круговой дуге, по которой материальная точка быстрее всего скатится от одной точки к другой. Сам Даниил наиболее известен работами в области гидродинамики. Его имя носит закон, определяющей действие подъемной силы, которая обеспечивает взлет самолетов. Его родной и двоюродный братья, племянники и внучатые племянники также были известными математиками.

Буль, Джордж

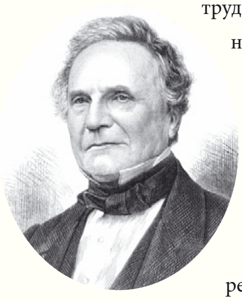
Год рождения	2 ноября 1815 г.
Место рождения	Линкольн, Англия
Год смерти	8 декабря 1864 г.
Чем знаменит	Изобрел булевы алгебру и логику



Гений этого английского логика проявился рано. Он рос в бедном доме, но его отец и друзья семьи принимали активное участие во внеклассном обучении Буля. Но основными знаниями тот обязан самому себе: самостоятельно, по учебникам, он выучил несколько языков и со временем овладел интегральным и дифференциальным счислением. Уже в юном возрасте 16 лет Джордж Буль сам начал преподавать, зарабатывая больше всех в семье. Его успехи не остались незамеченными, и в 1849 г. он стал первым профессором математики в новом университете в Корке, Ирландия, где он и закончил свою работу над символьной логикой.

Бэббидж, Чарльз

Год рождения	26 декабря 1791 г.
Место рождения	Лондон, Англия
Год смерти	18 октября 1871 г.
Чем знаменит	Изобрел механический компьютер



Говорят, что во времена своего студенчества, Бэббидж был недоволен уровнем преподавания математики в Кембридже. Вдохновленный трудами Лейбница и Лагранжа, он основал собственный Аналитический клуб с выходцем из семьи астрономов Джоном Хершелем и другими студентами. Как это было свойственно многим ученым того времени, Бэббидж был и весьма влиятельной фигурой Клуба привидений, исследовавшего сверхъестественные явления. Создать механическую счетную машину Бэббидж решил, столкнувшись с многочисленными ошибками, которые допускали в расчетах его коллеги. Однако огромное количество необходимых для строительства точных деталей и прецизионных передач, сделало эту машину настолько дорогой, что ее так никогда и не построили при его жизни.

Виет, Франсуа

Год рождения	1540
Место рождения	Фонтене-ле-Конт
Год смерти	13 декабря 1603 г.
Чем знаменит	Ввел символьную запись в алгебру

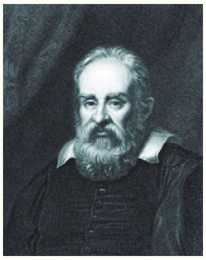
Те, кто не может справиться с иксами, игреками и другими математическими символами, могут утешиться, подозревая, что Виет — юрист и криптограф — нарочно все запутал так, чтобы никто не догадался. Таланты дешифровщика, которыми обладал Виет, заслужили одобрение короля Франции, когда математик сумел расшифровать переписку испанских агентов, планировавших по приказу короля Испании лишить трона Генриха IV. Испанцы были настолько уверены в надежности своих шифров, что, когда Виет вскрыл их планы, они обратились в жалобой к Папе римскому на использование французом черной магии.

---

* Здесь и далее даты в скобках даны по григорианскому календарю, сменившему в Англии юлианский в 1752 г. (даты по юлианскому даны первыми) — *прим. пер.*

Галилей

Год рождения	15 февраля 1564 г.
Место рождения	Пиза, Италия
Год смерти	8 января 1642 г.
Чем знаменит	Сформулировал законы падения и маятника



Галилей более известен как физик и астроном, но он одним из первых применил математику в этих дисциплинах. Сын музыканта и математика, Галилей избрал стезю ученого, но оставался весьма практичным человеком — его семья постоянно нуждалась в деньгах. Одним из его «бизнес-проектов» был телескоп, принесший своему создателю достаточно солидные доходы из разных источников. Однако гелиоцентрическая система Вселенной, разработанная Галилеем благодаря наблюдениям с помощью телескопа, вызвала ярость церковников. С тем чтобы избежать тюрьмы и сохранить доход, Галилей вынужден был отречься от своего открытия.

Гамильтон, Уильям

Год рождения	4 августа, 1805 г.
Место рождения	Дублин, Ирландия
Год смерти	2 сентября, 1865 г.
Чем знаменит	Открыл кватернионы

Ирландский математик и астроном оставил свой след в истории в буквальном смысле — формулу кватернионов он высек на камнях дублинского моста. Математический талант проявился в нем рано. В 12-летнем* возрасте Гамильтон выступил против другого вундеркинда — Зира Колбёрна, во время его представления в Дублине (счет и решение сложных математических задач на скорость) — и имел некоторый успех (хотя и не выиграл). Кроме того, он уже в детстве выучил несколько иностранных языков. Свою академическую карьеру Гамильтон провел в Тринити-колледже Дублинского университета. Сфера его интересов была широчайшей — от оптики до новых формулировок законов механики.

Гаусс, Карл Фридрих

Год рождения	30 апреля 1777 г.
Место рождения	Брюнсвик, Германия
Год смерти	23 февраля 1855 г.
Чем знаменит	Достижениями в самых разных областях

Начало жизни «Князя математики», как порой величают Гаусса, было совершенно неблагородным. Его неграмотные родители даже не зарегистрировали рождение ребенка. Его мать припоминала, что он родился за восемь дней до праздника Вознесения Господня, который случился через 40 дней после Пасхи. Гауссу пришлось разработать метод вычисления даты Пасхи на каждый год, в прошлом и будущем, для того чтобы определить, наконец, дату своего рождения. Благодаря рано проявившемуся необычайному математическому таланту, Гаусс получил стипендию герцога Брауншвейгского, которая позволила ему обучаться в колледже Геттингена, где он и провел всю свою жизнь. Гаусс был поистине выдающейся фигурой, он внес фундаментальный вклад в развитие геометрии, теории простых чисел и статистики.

Гёдель, Курт

Год рождения	28 апреля 1906 г.
Место рождения	Брюнн, Австро-Венгрия (совр. Брно, Чехия)
Год смерти	14 января 1978 г.
Чем знаменит	Теоремой о неполноте

Немец, рожденный в чешском городе Брно (в то время бывшем частью разваливавшейся Австро-Венгерской империи), в юности отправился обучаться в Вену. Там в возрасте 25 лет он опубликовал положения своей теории о неполноте, которая и прославила его. Через несколько лет нацисты убили его наставника-еврея, и с Гёделем случилось нервное расстройство. Еще через несколько лет, после начала Второй мировой войны, Гёдель эмигрировал в США по совету своего друга Альберта Эйнштейна. Он страдал от расстройства рассудка до конца своей жизни. Гёдель соглашался есть только приготовленную его женой пищу, а когда она попала в больницу, он отказался от еды и уморил себя голодом.

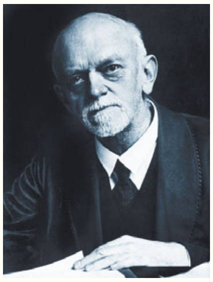
---

* По другим источникам — в возрасте 9 лет — *прим. пер.*

Гильберт, Давид

Год рождения	23 января 1862 г.
Место рождения	Кёнигсберг, Пруссия (совр. Калининград, Россия)
Год смерти	14 февраля 1943 г.
Чем знаменит	Сформулировал 23 фундаментальные проблемы математики для XX века

Немецкий математик известен более всего тем, что поставил своих коллег перед чередой фундаментальных проблем в начале XX века. Однако Гильберт был не только великим пропагандистом и учителем математики, но и одним из великих математиков-первооткрывателей. Родился он в Восточной Пруссии, а зрелость провел в университете Геттингена, альма-матер Гаусса. После его отставки нацисты изгнали евреев из университета — Гильберту оставалось лишь жаловаться новому министру образования на то, что с этого момента изучение математики в университете закончилось раз и навсегда.



Гиппарх

Год рождения	ок. 160 г. до н. э.
Место рождения	Никея, Вифиния (совр. Изник, Турция)
Год смерти	127 г. до н. э.
Чем знаменит	Изобрел тригонометрию

Более известный как астроном, Гиппарх разработал то, что потом назовут тригонометрией, для того чтобы объяснить движения небесных тел, которые он наблюдал. Большую часть жизни Гиппарх провел на острове Родос в Эгейском море (принадлежащий Греции остров неподалеку от побережья Турции). Он предположил, что планеты движутся вокруг Солнца и первым вывел формулы, описывающие их движение. Однако полученные им результаты говорили о том, что планеты описывают не идеальную окружность. Этого оказалось достаточно, чтобы Гиппарх отказался от своей идеи, посчитав ее неверной, — Вселенная считалась совершенной, поэтому движение в ней также должно было совершаться по совершенным траекториям.

Декарт, Рене

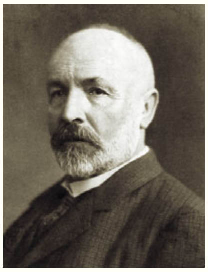
Год рождения	31 марта 1596 г.
Место рождения	Лаэ (пров. Турень), Франция
Год смерти	11 февраля, 1650 г.
Чем знаменит	Изобрел координатную плоскость

Немногие фразы цитируются чаще, чем знаменитое Cogito, ergo sum («мыслю, следовательно, существую») — выразительное подтверждение существования самого Рене Декарта. Развивая эту мысль дальше, он пояснял, что если есть мысль, следовательно, есть сомнение. Если некто сомневается в своих мыслях, своем существовании, значит, одного этого достаточно, чтобы доказать это самое существование. Ревностный католик, Декарт предпочел жить в Голландии, где доминировал протестантизм. Первый свой труд «О мире» он не решился опубликовать — всего годом ранее за ересь был осужден Галилей. Однако значительная часть этой работы увидела свет несколько позже, в составе его шедевра «Рассуждение о методе».

Кантор, Георг

Год рождения	3 марта 1845 г.
Место рождения	Санкт-Петербург, Россия
Год смерти	6 января 1918 г.
Чем знаменит	Создал теорию множеств

Родившийся в жемчужине Российской империи, Санкт-Петербурге, Георг Кантор был этническим немцем. Его родители-торговцы постоянно путешествовали, и в 11 лет Кантор перебрался в Германию — климат России оказался слишком тяжел для его родителей. Георг прекрасно учился и стал внештатным профессором математики Берлинского университета всего в 34 года. Вскоре его теория множеств сделала его центральной фигурой мирового математического сообщества, но достигнув возраста 50 лет, Кантор оказался подвержен приступам жесточайшей депрессии, которые часто приводили его в больницу. Остаток своей жизни, пришедшейся на годы Первой мировой войны, он провел в бедности — денег ему не всегда хватало даже на пропитание.



Лаплас, Пьер-Симон

Год рождения	23 марта 1749 г.
Место рождения	Бомон-ан-Ож, Нормандия, Франция
Год смерти	5 марта 1827 г.
Чем знаменит	Фундаментальными исследованиями в различных областях

Выходец из крестьян, аристократ, ученый Наполеоновской империи — немногим на долю выпало столько перемен, сколько досталось Лапласу, который при этом приложил руку ко множеству научных открытий. Он изучал термодинамику вместе с Антуаном Лавуазье (который вскоре оказался на гильотине). Он одним из первых предположил, что Солнечная система развивалась из газовой туманности, а когда Наполеон Бонапарт поинтересовался, почему в работе Лапласа не упомянут Творец, тот ответил императору: «Я не нуждался в этой гипотезе, сир». Лаплас совершил фундаментальные открытия в теории вероятностей, статистике и механике.

Лейбниц, Готфрид

Год рождения	1 июля (21 июня) 1646 г.
Место рождения	Лейпциг, Германия
Год смерти	14 ноября 1716 г.
Чем знаменит	Изобрел интегральное и дифференциальное исчисление (независимо от Ньютона)

Лейбниц был полной противоположностью своего главного конкурента — Ньютона. Он был веселым дружелюбным, им восхищались по всей Европе. Математикой он занялся довольно поздно, будучи уже известным дипломатом — сначала он представлял интересы курфюрста Майнца, а позже, когда конфликт с Ньютоном вокруг первенства в изобретении интегрального и дифференциального исчисления разгорелся вовсю, он поступил на службу к герцогу Брауншвейгскому, в Ганновер. Сын и наследник его нанимателя, Георг-Людвиг вскоре стал королем Великобритании Георгом I. Положение советника при сюзерене Ньютона, однако, не помогало в научном споре. Быстрый взлет Лейбница сменился таким же головокружительным падением, и умер он в забвении.

Мандельброт, Бенуа

Год рождения	20 ноября 1924 г.
Место рождения	Варшава, Польша
Год смерти	14 октября 2010 г.
Чем знаменит	Ведущий авторитет в области фрактальной геометрии

Мандельброт — один из ярчайших представителей нового поколения математиков, раздвинувшего рамки привычной науки при помощи компьютерных вычислений. Детские годы Мандельброта были омрачены вынужденной эмиграций — в 11 лет он бежал от нацистов из Варшавы в Париж, и годы Второй мировой войны провел в относительной безопасности на территории Франции, подконтрольной правительству Виши. Первые его работы были посвящены самым разнообразным проблемам прикладной математики. Позже Мандельброт увлекся самоподобными структурами, которые обнаруживались во всех областях, которыми он занимался, что и привело его к изучению фрактальной геометрии.

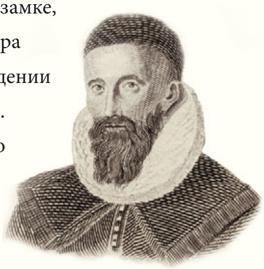
Нейман, Джон фон

Год рождения	28 декабря 1903 г.
Место рождения	Будапешт, Венгрия
Год смерти	8 февраля 1957 г.
Чем знаменит	Разработал теорию игр и принципы компьютерных технологий

С раннего возраста было ясно, что Янош Нейман — умный мальчик. В возрасте 6 лет он владел древнегреческим и делил в уме восьмизначные числа друг на друга. Он учился в различных заведениях Будапешта, Цюриха, Берлина — и везде оставался самым молодым, самым блестящим, самым лучшим студентом. В 30-х гг. XX в. он принял имя Джон. Он работал вместе с Эйнштейном и Гёделем. Его теория игр стала главным стратегическим оружием холодной войны, он принимал участие в разработке самых разных элементов стратегической обороны, включая межконтинентальные баллистические ракеты.

Непер, Джон

Год рождения	1550 г.
Место рождения	Замок Мерчистон под Эдинбургом, Шотландия
Год смерти	4 апреля, 1617 г.
Чем знаменит	Изобрел логарифмы



Восьмой лэрд Мерчистона, эксцентричный шотландский аристократ Джон Непер вел уединенную жизнь в удаленном замке, который сегодня стал частью Университета Непера в Эдинбурге. Всегда в черном, всегда в сопровождении черного кочета, Непер приобрел репутацию мага. Согласно одной из историй, он с помощью своего кочета разоблачил вора. Он потребовал всех прикоснуться к «волшебному петуху», заявив, что тот закричит, как только до него дотронется воровская рука. Петух, разумеется, не издал ни звука. Тогда Непер потребовал у всех показать руки — оказалось, что у всех руки в саже, которой Непер предварительно намазал перья птицы. У всех, кроме вора, который не осмелился прикоснуться к «волшебному петуху» и выдал себя чистыми руками.

Ньютон, Исаак

Год рождения	25 декабря 1642 г. (4 января 1643 г.)
Место рождения	Вулсторп, Линкольншир, Англия
Год смерти	20 (31) марта 1727 г.
Чем знаменит	Изобрел интегральное и дифференциальное исчисление

Сформулированные Ньютоном законы механики и тяготения (а также его труды по оптике и интегральное и дифференциальное исчисление) заложили основы современной физики — их вполне хватило для того, чтобы проложить путь к Луне 300 лет спустя. Отец Ньютона умер, когда тот был еще младенцем, а вскоре и мать оставила его. В результате Ньютон вырос скрытным, себялюбивым и злопамятным. Легендарная история с яблоком случилась, как считается, в семейном доме Ньютонов в Линкольншире, где ученый укрывался от эпидемии, опустошавшей города Англии. Ньютон настолько рьяно защищал свои открытия, что обнародовать их решался порой лишь спустя десятилетия после того, как он их сделал.

Отред, Уильям

Год рождения	5 марта 1574 г.
Место рождения	Итон, Бэкингемшир, Англия
Год смерти	30 июня 1660 г.
Чем знаменит	Изобрел логарифмическую линейку

Уильям Отред обогатил математику (в числе прочего) знаком «×» для обозначения умножения и логарифмической линейкой. Также он ввел в тригонометрический обиход сокращения sin и cos (за что благодарность к нему испытывают, возможно, немногие). В соответствии с издавна сложившейся традицией учености, Отред был священником. Он серьезно интересовался астрологией и оккультизмом. Позже он стал преподавателем. Среди его студентов был Кристофер Рен — величайший английский архитектор, среди творений которого — собор Святого Павла в Лондоне, Королевская обсерватория в Гринвиче, а также Шелдонский театр в Оксфорде.

Паскаль, Блез

Год рождения	19 июня 1623 г.
Место рождения	Клермон-Ферран, Франция
Год смерти	19 августа, 1662 г.
Чем знаменит	Создал первый механический калькулятор

Гений Блеза Паскаля расцвел рано, но к середине жизни, похоже, увял. Его счетные машины появились, когда самому Паскалю не было еще и двадцати, а исследование бинома при помощи самостоятельно разработанного числового треугольника Паскаль закончил к тридцати. К этому времени он также совершил серию открытий, исследуя вакуум, — позже они приведут к созданию теории относительности. В 1654 г. Паскаль пережил некое мистическое озарение свыше. В результате он оставил регулярные занятия наукой, посвятив всю оставшуюся жизнь теологии*.

---

* Это не помешало Паскалю заняться фундаментальным исследованием циклоиды — плоской трансцендентной кривой — и решить еще несколько фундаментальных математических задач — *прим. ред.*

Пеано, Джузеппе

Год рождения	27 августа 1858 г.
Место рождения	Кунео, Королевство Сардиния (территория совр. Италии)
Год смерти	20 апреля 1932 г.
Чем знаменит	Определениями математических аксиом

Наряду с трудами по философии математики, этот итальянский ученый стяжал славу тем, что ввел в обращение нотационные символы, которые используются в современной теории чисел. Именно в этой области Пеано определял свои аксиомы. Переписав эвклидову основу математики, Пеано собирался превзойти и «Начала» Эвклида своим сочинением Formulario — полным сборником актуализированных формул и теорем, подчиняющихся единой системе нотации. Затем Пеано принял участие в разработке нового универсального языка на основе латыни для распространения математических концепций. Но этот язык не прижился.

Пифагор

Год рождения	ок. 570 г. до н. э.
Место рождения	Самос, Иония, Греция
Год смерти	ок. 500–490 г. до н. э.
Чем знаменит	Теоремой Пифагора и математическим описанием музыки

Прямых свидетельств жизни Пифагора не существует. Все, что мы о нем знаем, содержится в записях других людей, прежде всего, Платона. Факты, предания и философию разделить невозможно. Некоторые ученые считают, что Пифагор — это персонификация системы идей, а вовсе не реальная личность. Согласно традиционным представлениям, Пифагор родился на острове Самос. Он много путешествовал — возможно, даже в Индию — собирая математические знания Вавилона, Египта и других стран и народов. Потом он осел в городе Кротон на юге Италии, где основал школу пифагорейцев.

Пуанкаре, Анри

Год рождения	29 апреля 1854 г.
Место рождения	Нанси, Франция
Год смерти	17 июля 1915 г.
Чем знаменит	Ведущий авторитет в области топологии

Немногие заслуживают именоваться математиками-универсалами наравне с Пуанкаре. Наиболее известны его труды в области топологии — которую, по сути, сам и создал (и в рамках которой его гипотезу безуспешно пытались доказать на протяжении почти всего XX века). Но он также работал над проблемами в области специальной теории относительности, квантовой физики, гравитации, теории хаоса, электромагнетизма. Пуанкаре, которого в семье называли Жюль, был ярчайшей звездой в семье блестящих ученых. Значительную часть жизни он провел на должности горного инспектора, а математика была побочной (хотя и весьма продуктивной) сферой деятельности.

Пуассон, Симеон

Год рождения	21 июня 1781 г.
Место рождения	Питивье, Франция
Год смерти	25 апреля, 1840 г.
Чем знаменит	Ведущий авторитет в изучении вероятностей

Статистическое распределение, носящее имя Пуассона, в большей степени обязано своим успехом работам других математиков, но труды самого Пуассона в различных областях математики не менее значительны. Он был ребенком Великой Французской революции, получившим основное образование после 1798 г., когда главные политические пертурбации затихли. Правительства и режимы сменяли друг друга, но Пуассон посвятил всего себя науке. Он был превосходным преподавателем и плодовитым ученым — опубликовано более 300 его работ. Многие из них касались применения математических методов в физике (в частности, в области магнетизма и света). Он получил баронский титул, но упоминал об этом редко.

Рамануджан, Сриниваса

Год рождения	22 декабря 1887 г.
Место рождения	Ироду, Индия
Год смерти	26 апреля, 1920 г.
Чем знаменит	Различными работами в области теории чисел

История этого индийца — история природного гения. Он не получил почти никакого формального образования, а математику изучал сам, с помощью книг и студентов, снимавших комнаты у его родителей. К 13 годам он начал разрабатывать собственные теоремы, заново открывая для себя работы великих математиков. Он отправил свои выкладки математикам разных стран, и в возрасте 27 лет стал профессором в Кембридже. Там он изучал натуральные числа. В детстве он сумел пережить оспу, но в возрасте 32 лет умер от туберкулеза.

Рассел, Бертран

Год рождения	18 мая 1872 г.
Место рождения	Треллек, Монмотшир, Уэльс
Год смерти	2 февраля 1970 г.
Чем знаменит	Ведущий математический философ

Рассел родился в богатой и влиятельной семье, представители которой входили в политическую элиту Великобритании со времен Генриха VIII. Сам Рассел — наследный граф. Несмотря на окружавшее его благополучие, в юности Бертран чувствовал себя очень одиноким и помышлял о самоубийстве. Однако, обнаружив свое призвание — математику и философию, к 30 годам стал фигурой мирового значения. Но это не было пиком его карьеры. Рассел был убежденным пацифистом. Он использовал свой статус и положение, чтобы поддержать антивоенное движение во время Первой и Второй мировых войн. В 50–60-х гг. активно выступал против ядерного оружия.

Риман, Бернард

Год рождения	17 сентября 1826 г.
Место рождения	Брезеленц, Ганновер, Германия
Год смерти	20 июля 1866 г.
Чем знаменит	Создал эллиптическую геометрию, вывел дзета-функцию

Детство этого немецкого математика, проведенное в большой бедной семье, было трудным. Он рано потерял мать, и вырос болезненно робким — он боялся выступать перед публикой. На это делали скидку на протяжении его научной карьеры, но Риману все равно приходилось читать лекции в Геттингенском университете. При этом недостатка в слушателях у него не было — его эллиптической геометрией вдохновлялся Эйнштейн, а дзета-функция Римана — наиболее успешная на сегодня попытка найти закономерность распределения простых чисел.

Стевин, Симон

Год рождения	1548 г.
Место рождения	Брюгге (Гаага или Лейден), Фламандия (совр. Бельгия)
Год смерти	1620
Чем знаменит	Сооснователь десятичной системы счета

Слово «математика» считается универсальным, практически неизменным в разных языках. Однако по-голландски оно пишется так: *wiskunde*, а значит — «искусство точного и определенного». Это слово придумал Симон Стевин, фламандский инженер и ученый, как и многие другие термины. Например, такой — *middellijn* — что означает «диаметр». Среди других достижений Стевина — модернизация водяных насосов и системы дамб и каналов в Голландии, а также изобретение сухопутной яхты — скоростного парусного транспорта.

Тьюринг, Алан

Год рождения	23 июня 1912 г.
Место рождения	Лондон, Англия
Год смерти	7 июня 1954 г.
Чем знаменит	Основоположник цифровых вычислений

Вероятно, Алан Тьюринг страдал синдромом Аспрегера, серьезно ограничивавшим возможность сопереживания. По иронии судьбы, именно он изобрел тест Тьюринга для искусственного интеллекта: если компьютер, выдавая себя за человека, способен заставить другого человека в это поверить, тест считается пройденным (до сих пор ни одному компьютеру это не удалось)*. Тьюринг был важной персоной в научном сообществе при британском правительстве, но в 50-х гг. был арестован по обвинению в гомосексуализме (тогда это считалось преступлением), и потерял статус благонадежности, а вместе с ним — и перспективную и крайне интересную работу. Тьюринг покончил жизнь самоубийством, съев отравленное яблоко**.

---

* В 2012 г. программа Eugene, изображавшая 13-летнего мальчика, сумела в 29,2 % своих ответов ввести экзаменаторов в заблуждение, не добрав всего 0,8 % для полного прохождения теста — *прим. ред.*

** Экспертиза найденного рядом с телом Тьюринга надкусанного яблока на цианид не проводилась — *прим. ред.*

Уайлс, Эндрю

Год рождения	11 апреля 1953 г.
Место рождения	Кембридж, Англия
Год смерти	–
Чем знаменит	Доказал последнюю теорему Ферма

Эндрю Уайлс мечтал доказать Великую теорему Ферма с 10 лет, после того, как обнаружил эту задачку в библиотечной книге по пути домой из школы. Родившийся, выросший и обучавшийся в Кембридже (плюс еще несколько лет в Оксфорде), основных успехов Уайлс добился в Париже и Принстоне. Однако для демонстрации своего доказательства он выбрал все-таки Оксфорд. Уайлс собрал целую коллекцию наград за свое выдающееся достижение. Королева Великобритании возвела его в рыцарское звание. Но высочайшую награду математического мира — медаль Филдса — он так и не получил. Он оказался слишком стар для нее — медаль Филдса вручается тем, кто еще не достиг 40 лет.

Ферма, Пьер де

Год рождения	17 августа 1601 г.
Место рождения	Бомон-де-Ломань, Франция
Год смерти	12 января 1665 г.
Чем знаменит	«Великой теоремой» Ферма

Ферма, возможно, величайший математик-любитель, которого когда-либо знал мир. Он работал юристом в сонных городках юга Франции, правда, сказать о том, что его деятельность в зале суда принесла ему всеобщее восхищение, нельзя. Осторожный и закрытый, Ферма предпочитал оставаться в тени — в те времена публичная жизнь во Франции была довольно рискованным делом в связи с постоянными религиозными конфликтами*. Ферма практически не публиковал результаты своих изысканий — большинство его трудов составлены из обрывочных материалов после его смерти. Он оставил немного доказательств своих гипотез (строго говоря, доказательства по тем временам не были обязательным требованием), и все самые известные его теоремы были доказаны другими математиками.

---

* Как раз к 30-м гг. XVII в. (Пьер Ферма выкупил должность члена Палаты эдиктов в 1931 г.) религиозные конфликты во Франции фактически прекратились, благодаря деятельности кардинала Ришелье; относительное спокойствие продлилось почти полтора десятка лет — *прим. ред.*

Фибоначчи

Год рождения	ок. 1170 г.
Место рождения	Пиза (?), Италия
Год смерти	после 1240 г.
Чем знаменит	Описал последовательность Фибоначчи

Леонардо Пизанский или Леонардо Боначчи в историю вошел под прозвищем Фибоначчи, означавшим «сын Боначчо», хотя широко использовать его (в том числе и для обозначения описанной им арифметической прогрессии) стали много позже смерти математика. Интерес к науке сформировался у Леонардо с детства, которое он провел в Алжире — там его отец управлял пизанской торговой факторией в Беджаи. В зрелом возрасте математические труды Фибоначчи принесли ему настоящее признание — город Пиза назначил ему содержание, посчитав, что работы ученого способствуют развитию бизнеса.

Фурье, Жозеф

Год рождения	21 марта 1768 г.
Место рождения	Осер, Франция
Год смерти	16 мая 1830 г.
Чем знаменит	Математическим описанием сложных колебаний

Рано ставшего сиротой Фурье воспитывали монахини. Страстно желавший стать военным инженером, Фурье получил отказ в связи с его низким происхождением. Ему пришлось утешаться изучением «военной» математики, связанной в основном с баллистикой. Со временем он уже читал лекции по баллистике в Политехнической школе. После французской революции Наполеон, сам в прошлом артиллерийский офицер, назначил Ферма губернатором Египта. Там Ферма показал Розеттский камень Жану-Франсуа Шампольону, который впоследствии расшифровал выбитые на нем иероглифы. Фурье первым описал, как энергия солнечного излучения улавливается атмосферой — эффект, ныне называемый парниковым.

Эйлер, Леонард

Год рождения	15 апреля 1707 г.
Место рождения	Базель, Швейцария
Год смерти	18 сентября 1783 г.
Чем знаменит	Создал теорию графов

Помимо теории графов к числу вкладов Эйлера в развитие математики входят натуральные логарифмы, методы исчисления бесконечно малых величин; известен он также работами в области логики, оптики и структурной инженерии. Родившийся в Швейцарии Эйлер был дружен со вторым поколением семьи Бернулли, а у старшего поколения иногда брал уроки. Работал он в основном в Санкт-Петербурге и Берлине, а его заслуги выглядят тем более значительными, что бóльшую половину жизни он испытывал проблемы со зрением, балансируя на грани слепоты.

Эвклид

Год рождения	неизвестен; расцвет — рубеж III в. до н. э.
Место рождения	Александрия, Египет
Год смерти	неизвестен
Чем знаменит	«Началами геометрии»

Толком о жизни Эвклида ничего не известно. Многие переводы его труда приписывают авторству ученику Сократа философу Евклиду из Мегары, жившему, вероятно, веком ранее «Отца геометрии». Деятельность Эвклида-математика относится к рубежу IV–III вв. до н. э. Он жил и работал в Александрии и, конечно, имел отношение к наполнению фондов созданной незадолго до этого Великой библиотеки. По сообщению Архимеда, Эвклид был наставником египетского фараона Птолемея и укорял того за небрежение в науках, повторяя, что «царского пути к геометрии нет».

Эратосфен

Год рождения	ок. 276 г. до н. э.
Место рождения	Кириена, совр. Ливия
Год смерти	ок. 194 г. до н. э.
Чем знаменит	Вычислил размер Земли

Будучи главным хранителем Великой Александрийской библиотеки, Эратосфен обладал самым крупным информационным ресурсом своего времени. И он использовал его для того, чтобы произвести самое известное измерение своего времени — измерение размера земного шара. Это деяние принесло ему звание отца-основателя географии — да и слово «география» придумал сам Эратосфен. Ученый был еще и одним из самых древних поборников равноправия — он критиковал замечания Аристотеля о том, что грекам нужно сохранять чистоту крови, воздерживаясь от браков с «варварскими» народами. Родиной Эратосфена была Северная Африка, так что тест Аристотеля на «расовую чистоту» Эратосфен, скорее всего, не прошел бы.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ХРОНОГРАФ

4000 лет до н. э. — 1000 лет до н. э.

Математика

3400 лет до н. э.
Шумер: глиняные таблички для счета.

3000 лет до н. э.
Иероглифические числительные: Древний Египет.

2800 лет до н. э.
Десятичные дроби для отображения мер веса и длины: долина р. Инд.

Египетские иероглифы

2700 лет до н. э.
Древний Египет: для построения прямых углов используется **Пифагорова тройка** длин веревки.

2500 лет до н. э.
Изобретены **счеты**.

2400 лет до н. э.
Позиционная система чисел: Месопотамия.

2000 лет до н. э.
Теорема Пифагора зафиксирована в нескольких разных культурах, не связанных друг с другом.

Наука и технология

3750 лет до н. э.
Древний Египет и Шумер (совр. Ирак): получена бронза путем плавления руд **меди, цинка** и **олова**.

3500 лет до н. э.
Шумер: первые **ирригационные системы** в земледелии..

3200 лет до н. э.
Первые правильные системы письма — **египетские иероглифы и шумерская клинопись.**

3200 лет до н. э.
Шумер: изобретено **колесо**.

Клинопись

2700 лет до н. э.
Китай: впервые заварен **чай**.

Ок. 2400 лет до н. э.
Древний Египет: для письма используется **папирус**.

Ок. 2000 лет до н. э.
Китай, Индия: используются очищенные **сера** и **ртуть**.

События мирового значения

4000 лет до н. э.
Ближний Восток: возникновение **городов**; по всему миру — появление **деревень**, развитие **производящего сельского хозяйства**.

Ок. 4000 лет до н. э.
Европа и Азия: приручение **лошади**; становятся доступными путешествия на сравнительно большие расстояния.

3100 лет до н. э.
Объединение **Египта** в одно царство.

3000–2000 лет до н. э.
Европа: появление культуры **колоколовидных кубков**; развитие **гончарного** дела.

2600 лет до н. э.
Расцвет **Хараппской цивилизации** в долине р. Инд (Индия).

Ок. 2000 лет до н. э.
Торговцы из Средиземноморья путешествуют по всей территории Европы.

2000 лет до н. э.
Миграция **индо-европейцев** по территории Азии и Европы.

Ок. 1766 лет до н. э.
Китай: **династия Шан** — обработка бронзы и письменность.

Культура

Ок. 4000–2800 лет до н. э.
Европа: возведение **мегалитов** (Эвора в Португалии, Стоунхендж в Англии, Карнак во Франции и др.).

Ок. 3000 лет до н. э.
Древний Египет: изображения **лиры** и похожих на **кларнет** музыкальных инструментов.

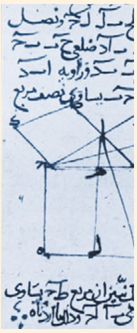
2600 лет до н. э.
Хараппская цивилизация (долина р. Инд): строительство дабм, защищающих от разлива реки и подтопления полей и жилищ.

2547–2475 лет до н. э.
Египет: первые **пирамиды** в Гизе.

2100 лет до н. э.
Строительство **зиккурата** в Уре.

Ок. 2000 лет до н. э.
Записано «Сказание о Гильгамеше» — вероятно, **древнейший в мире текст**.

Зиккурат в Уре

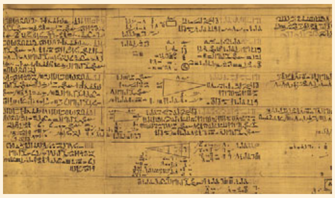


Теорема Пифагора

Вавилон: 60-ричная система, сохранившаяся до сих пор для подсчета времени и размера углов.

1650 лет до н. э.

Древний Египет: **папирус Ахмеса** с задачами по алгебре, геометрии и арифметике.



Папирус Ахмеса (Райнда)

1300 лет до н. э.

Древний Египет: **«Берлинский папирус»** — первая запись квадратных уравнений.

Ок. 1200 лет до н. э.

Малая Азия: первое использование **железа**.

1000 лет до н. э.

Китай: первые **чернильные ручки**.

Папирус со сценкой уборки урожая

Бронзовый треножник эпохи династии Шан

1700 лет до н. э.

Расцвет царства **Куш** в среднем течении р. Нил.

Ок. 1300–1200 лет до н. э.

Моисей выводит евреев из Египта в Ханаан.

Ок. 1260 лет до н. э.

Город **Троя** на территории современной Турции разрушен греками.

1200 лет до н. э.

Начало расцвета **Чавинской культуры** в Перу.

Крит: построен **дворец в Кноссе**.

1540 лет до н. э.

Древний Египет: Новое царство — эпоха монументального строительства.

1500 лет до н. э.

Майя строят первые гигантские ступенчатые пирамиды.

Фрески дворца в Кноссе

1345 лет до н. э.

Древний Египет: изваян раскрашенный известняковый бюст **царицы Нефертити**.

1000 лет до н. э. — 20 лет до н. э.

1000 лет до н. э.

Древний Египет: использование **простых дробей** при вычислениях.

876 лет до н. э.

Индия: **ноль** становится числом.

580 лет до н. э.

Ученые-пифагорейцы доказали **теорему о прямоугольном треугольнике**, хотя принцип, лежащий в основе этой теоремы, известен к 2000 г. до н. э.

518 лет до н. э.

Пифагорейцы обнаружили, что музыкальные гармонии кратны друг другу.

Пифагор

450 лет до н. э.

Древняя Греция: **золотое сечение** применяется в архитектуре и искусстве Афин.

360 лет до н. э.

Платон и **Теэтет** доказывают, что существуют только пять правильных многогранников, названных впоследствии платоновыми телами.

350 лет до н. э.

Аристотель определяет принципы логики в трактате «Органон».

300 лет до н. э.

Эвклид пишет «Начала» — энциклопедию математических знаний своего времени.

Ок. 460 лет до н. э.

Греция: родился **Гиппократ**, «отец медицины», давший имя современной клятве, которую приносят врачи перед началом профессиональной деятельности.

Ок. 400–340 лет до н. э.

Китайские астрономы **Гань Дэ** и **Ши Шэнь** создают древнейший из сохранившихся звездных каталогов с описанием более 100 созвездий.

400 лет до н. э.

Греция: ученый и философ **Платон** предполагает, что атомы — правильные геометрические тела.

350 лет до н. э.

Индия: зафиксированы измерения **уровня выпадения дождей**.

Греция: **Аристотель** добавляет пятый элемент — эфир — к классическим четырем: воде, земле, воздуху и огню.

Ок. 1000 лет до н. э.

Афины захватывают господство над Аттикой.

Ок. 1000 лет до н. э.

Царь Давид объединяет Израиль в одно царство.

431 лет до н. э.

Начало **Пелопоннесской войны** между Афинами и Спартой.

336 лет до н. э.

Александр Македонский становится правителем Македонии и начинает серию походов в Египет, Персию и Индию.

Ок. 1000 лет до н. э.

Появляются **китайская иероглифическая письменность** и **еврейский алфавит**.

Ок. 900 лет до н. э.

Греция: **Гомер** создает «Одиссею» и «Илиаду».

Ок. 800 лет до н. э.

Разработан **греческий** алфавит.

Ок. 400 лет до н. э.

Расцвет культур **майя** и **сапотеков** в Америке.

Гомер

260 лет до н. э.

Первый **магический квадрат** описан Ло Шу.

240 лет до н. э.

Эратосфен использует геометрические методы для расчета размера Земли.

Эвклид

230 лет до н. э.

Архимед подсчитывает наиболее точное значение числа **«пи»** — крайне трудоемким методом, вписывая многоугольники в окружность.

225 лет до н. э.

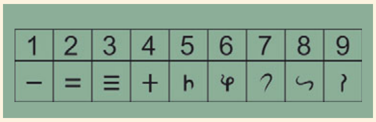
Аполлоний Пергский пишет труд о конических сечениях, ставший основой изучения кривых.

180 лет до н. э.

Греческие геометры переходят к **вавилонской 60-ричной системе**, деля круг на 360 градусов.

140 лет до н. э.

Гиппарх Самосский разрабатывает основы тригонометрии.



Цифры Брахми

50 лет до н. э.

Система письменности Брахми, включающая обозначение 9 числительных, разработана в Индии. Она стала основой 10-ричной системы исчисления.

46 лет до н. э.

Год, предшествовавший введению 365-дневного **юлианского календаря**, продолжался 446 дней.

340 лет до н. э.

Праксагор Косский обнаружил, что артерии и вены — сосуды разного типа.

Ок. 265 лет до н. э.

Древнеримские врачи знакомятся с греческой медициной через пленных.

Ок. 200 лет до н. э.

Водоподъемные колеса, приводимые в движение баками, используются в ирригации.

Аристотель

Ок. 159 лет до н. э.

Рим: **водяные часы**.

Ок. 140 лет до н. э.

Кратет Малльский создает один из первых трехмерных глобусов.

Ок. 100 лет до н. э.

Южная Америка: окультуривание **какао**.

90 лет до н. э.

Греческий врач **Асклепий Вифинский** рекомендует использование лекарственных препаратов естественного происхождения.

221 лет до н. э.

Первым императором объединенного Китая становится **Цинь Шихуанди**. Для своей усыпальницы он приказывает создать **терракотовую армию**.

Александр Македонский

Ок. 112 лет до н. э.

Первые путешественники и торговцы отправляются по **Великому шелковому пути** — совокупности разных наземных маршрутов, ведущих из Китая к Средиземноморью.

31–27 лет до н. э.

Октавиан, племянник Юлия Цезаря, побеждает своего бывшего союзника Марка Антония и становится первым императором Рима.

429 лет до н. э.

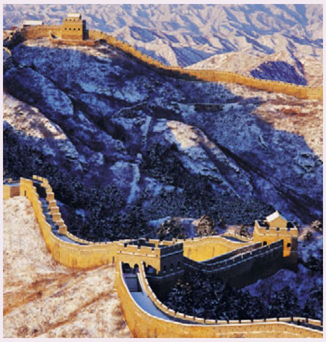
Греция: храмовый комплекс **Акрополь** построен в Афинах.

214 лет до н. э.

Начато строительство первой **Великой Китайской стены**.

Ок. 200 лет до н. э.

Египет: установлен **Розеттский камень**.



Великая Китайская стена

38 лет до н. э.

Греция: изваяна мраморная **статуя Лаокона**.

37 лет до н. э.

Египет: завершено строительство **храма Хатхор** в Дендре.

23 лет до н. э.

Япония: древнейшая запись о **борцовском поединке**, предшественнике системы борьбы **сумо**.

40 г. н. э. — 1000 г. н. э.

60 г. н. э.

Гемин оспаривает пятый постулат Эвклида о параллельных прямых — одна из первых попыток создать альтернативную геометрию.

100

Герон Александрийский впервые упоминает мнимые числа в контексте квадратного корня отрицательного числа.

78–139

Годы жизни китайского изобретателя **Чжан Хэна**, создателя древнейшего сейсмографа.

Ок. 83 — ок. 161

Птолемей, последний из древнегреческих астрономов, разрабатывает математическую модель движения небесных тел в Солнечной системе. Его положение о том, что Солнце движется вокруг Земли, остается

79

Извержение **Везувия**, в результате которого под слоем пепла погребены Помпеи и Геркуланум.

Помпеи

43

Римляне основывают **Лондон** (Лондиний).

Ок. 122

Вал Адриана построен римлянами на севере Англии.

220

Формирование классической **китайской ландшафтной живописи**.

250

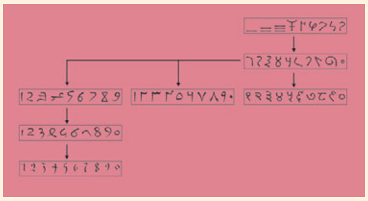
Диофант использует целочисленные переменные в многочленах

Герон Александрийский

и становится «отцом арифметики».

595

Формируется **индо-арабская система исчисления**, ставшая основой



Индо-арабские числительные

той, что сегодня используется повсеместно.

800

Описана концепция **алгоритма** — универсального пошагового процесса решения задач.

общепринятым на протяжении 1500 лет.

129 — ок. 216

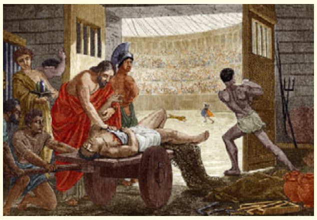
Греческий врач **Гален** проводит первое вскрытие и другие медицинские эксперименты.

270

Китай: вероятное использование древнейших **компасов**.

300

Алхимия, комбинация магии и науки распространяется из Египта.



Гален

Ок. 500

Колесные суда, приводимые в движение животными.

813–33

Багдад (Персия): Халиф Аль-Мамун основывает **«Дом мудрости»** — академию наук.

Ок. 868

Китай: **древнейшая известная печатная книга** — «Алмазная сутра».

900

Китай: изобретение **пороха**.

117

Расцвет Римской империи под управлением императора **Траяна**.

120

Посольство из Индии при дворе римского императора Адриана.

396

Римская империя разделяется на Восточную и Западную.

433

Аттила, которого римляне величают Бичом Божьим, во главе армии гуннов совершает разорительные набеги на Византию и Рим.

618

Китай: основание **династии Тан**.

700–1200

Золотой век арабской цивилизации с центрами в Багдаде и Кордобе (Испания).

Аттила

800

Карл Великий коронован как первый император Священной Римской империи.

Ок. 900

Полинезийцы достигают берегов Новой Зеландии.

250

Пик расцвета цивилизации **майя** в Южной Америке.

300

Основание города **Аксум** в Эфиопии.

Руины Майянской культуры

330

Римский император **Константин Великий** переносит столицу империи в древний Бизантиум и переименует город в Константинополь.

Ок. 350

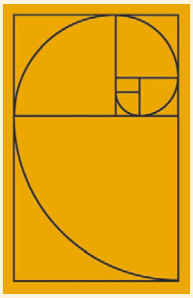
Завершен индийский эпос **«Махабхарата»**.

Константин Великий

1000–1650

1202

Алгебра: цифры в нумерологических выражениях заменяются символами; «Книга абака» Фибоначчи знакомит Европу с **рядом Фибоначчи**.



Спираль Фибоначчи

1435

Использование **геометрических принципов** приводит к революции в изобразительном искусстве, позволяя корректно и натуралистично отображать пространство и расстояние.

1214–1292

Годы жизни английского ученого **Роджера Бэкона**, предтечи системного анализа.

144

Европа: **Иоганн Гутенберг** изобретает печатный станок.

Козимо Медичи основал Академию во Флоренции (Италия) по образцу древнегреческой Академии Платона.

1066

Норманнское завоевание Англии.

1096

Первый **Крестовый поход**.

1206

Чингисхан основал Монгольскую империю.

1215

Король Иоанн подписывает **Великую хартию вольностей**.

XI в.

Каменный город **Великий Зимбабве** основан в Южной Африке на месте современного Зимбабве.

XII в.

Камбоджа: строительство храмового комплекса **Ангкор-Ват**.

1300

Жители островов Пасхи возводят гигантские каменные статуи.

1581

В процессе анализа зависимости высоты тона струны лютни от ее натяжения выведены **нелинейные уравнения**.

1583

Наблюдения за **качающейся лампой** в соборе Пизы подталкивают Галилея к формулировке закона маятника, описывающего соотношение между длиной и амплитудой качаний маятника.

1591

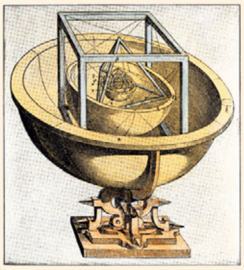
Франсуа Виет задает новое направление развитию алгебры, вводя в научный оборот переменные x и y, которые используются сегодня.

1609

Астрономы обнаруживают, что орбиты планет — эллипсы, а не окружности, а **Иоганн Кеплер** математически формулирует универсальный закон эллиптического движения.

1614

Джон Непер разрабатывает логарифмы, упрощающие вычисления от умножения и деления к простому сложению и вычитанию.



Космологическая модель Кеплера

1622

Изобретена **логарифмическая линейка** — предок калькулятора.

1629

Альберт Жирар описывает **комплексные числа**, состоящие из вещественной части и мнимой, образованной на основе числа *i* — корня квадратного из –1.

1637

Рене Декарт представляет **декартову систему координат**, в которой точки и отрезки определяются расстояниями от фиксированных осей. С ее помощью можно визуализировать числовые зависимости, а фигуры становятся элементом алгебры.

Латинское издание книги Декарта «О человеке» (De Homine).

1638

Изучая свободное падение, **Галилей** сформулировал его законы: скорость пропорциональна времени, а пройденное расстояние — квадрату времени.

1452–1519

Годы жизни **Леонардо да Винчи**, художника и изобретателя эпохи Возрождения.

1523

«Книга по земледелию» (Book of Husbandry) — **первый английский справочник по ведению сельского хозяйства**.

1543

Николай Коперник демонстрирует, что Земля обращается вокруг Солнца.

1610

Галилей делает первые записи об **астрономических наблюдениях** при помощи телескопа. В 1633 г. инквизиция обвиняет его в ереси из-за того, что Галилей поддерживает гелиоцентрическую концепцию Коперника. Галилей отказывается от своих взглядов.

Уильям Гарвей открывает циркуляцию крови.

Галилей

1612

Санторио Санторио первым измеряет температуру человеческого тела с помощью термометра.

1636

Основан институт, которому предстоит стать **Гарвардским колледжем**.

1640

Получен **кокс** из угля.

1492

Христофор Колумб пересекает Атлантический океан. С Карибского бассейна начинается европейская колонизация обеих Америк.

1526

Потомок **Чингисхана Бабур** основывает империю Моголов в Индии.

1582

В некоторых странах Европы вводится **грегорианский календарь**.

Христофор Колумб высаживается в Новом Свете

1588

Непобедимая (Великая) армада — испанский флот — разбита англичанами.

1589

Первое использование **обеденных вилок** — при дворе французского короля.

1618–48

Тридцатилетняя война в Священной Римской империи начинается с Пражской дефенестрации.

Великая Армада

1620

«Отцы-паломники» (первые колонисты) высаживаются в Массачусетсе, в Северной Америке.

1438

В Перу возведен город **Мачу-Пикчу**.

1564–1616

Годы жизни английского драматурга **Уильяма Шекспира**.

1597

Якопо Пери пишет первую в Европе оперу — «Дафна».

Мачу Пикчу

XVI в.

В Индии возникает искусство **миниатюры**.

1620

Период творчества **великих художников и скульпторов** — Рубенса, Веласкеса, Ван Дейка, Бернини и др.

1634

Первая постановка **«Пасхальних игрищ»** в Обераммергау, Бавария.

1637

Первая **публичная опера** открыта в Венеции, Италия.

1640-е гг.

Расцвет голландского художника **Рембрандта**.

1642

Блез Паскаль конструирует механический калькулятор.

Блез Паскаль

1641

Впервые в медицинских целях применен **мышьяк.**

1643

Эванджелиста Торичелли изобретает барометр.

Эванджелиста Торичелли

1637

«Тюльпановая лихорадка» в Голландии заканчивается биржевым крахом.

1640

Португалия получает независимость от Испании.

1650

Население мира оценивается в **500 млн** чел.

1643

Мода на **кофе** зарождается в Париже, Франция.

1644–1737

Годы жизни итальянского скрипичного мастера **Антонио Страдивари.**

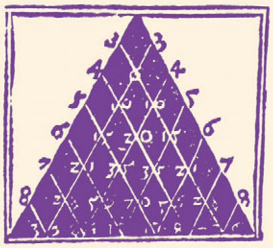
1648

Делфтский фарфор из Голландии становится популярным.

1650–1750

1653

Треугольник Паскаля применяется для вычисления биномиальных коэффициентов, треугольных чисел, четырехгранников и даже базовые метрические размерности фракталов.



Треугольник Паскаля

1654

Паскаль и **Ферма** с помощью математики вероятностей рассчитывают стратегии победы в играх и методы предсказания будущего.

1665

Принцип индукции при помощи математического аппарата позволяет выстроить логическую цепочку от известного к неизвестному.

1666

Исаак Ньютон и **Готфрид Лейбниц** независимо друг от друга разрабатывают системы интегрального и дифференциального исчисления.

1687

Ньютон выводит математические обоснования **закона всемирного тяготения.**

1703

Исследование **Лейбницем** бинарных чисел (известных со времен античности) мостит дорогу к цифровой революции.

1731

Постоянная величина *e* используется для математического описания процессов роста и распада.

1736

Леонард Эйлер находит решение головоломки **семи мостов Кёнигсберга** и создает теорию графов.

Исаак Ньютон

1650–1700

В Европе начинается **эпоха Просвещения.**

1660

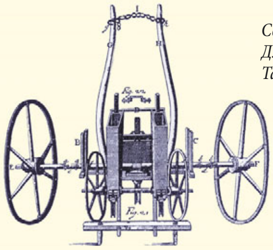
В Лондоне основано **Лондонское королевское общество.**

Книга **Роберта Бойля** The Sceptical Chymist знаменует трансформацию алхимии в научную химию.

1674

Используя линзы собственной ручной полировки, **Антони ван Левенгук** случайно обнаруживает микроорганизмы, закладывая основу микробиологии и бактериологии.

Микроскоп Левенгука



Сеялка Джетро Талла

1663 и 1965 гг.

Эпидемии **чумы** в Лондоне и Амстердаме.

1683

Расцвет **Оттоманской империи.**

1692

Судебные процессы над ведьмами в **Салеме** (Массачусетс, США).

1730

Маратхская империя подчиняет себе значительную часть Индостана.

Салемские процессы

1666

Великий лондонский пожар. В огне город практически уничтожен.

1668

Джон Драйден становится первым «Поэтом-лауреатом» (официальным придворным поэтом) Великобритании.

Китайский фарфор

1703

В России Петр Великий основывает **Санкт-Петербург.**

1708

В Европу попадает секрет производства **истинного фарфора** — через тысячу лет после изобретения его в Китае.

1742

Первая постановка **«Месии» Генделя.**

1750–1850

1747

В поисках способа описать движение трех взаимно притягивающихся тел (например, Солнца, Земли и Луны) **Жан д'Аламбер** и **Алексис Клеро** обнаруживают, что в долговременной перспективе его невозможно точно предсказать.

1748

Равенство Эйлера устанавливает соотношение между ключевыми числами: 1, e, i и π.

Леонард Эйлер

1763

Теорема Байеса увязывает вероятность следствия с вероятностью причины.

1796

Известный астроном **Невил Маскелайн** использует математические методы для коррекции ошибок, вызванных человеческим фактором.

1798

Томас Мальтус доказывает, что при росте населения в геометрической прогрессии запасы продовольствия растут лишь в арифметической, и предполагает, что голод не только неизбежное, но и естественное явление.

1799

Карл Фридрих Гаусс доказывает, что каждое полиномное (алгебраическое) уравнение имеет решение, формулируя таким образом фундаментальную теорему алгебры.

1822

Жозеф Фурье преобразует сложные волновые формы — любые звуковые или электромагнитные волны — во множество простых синусоид.

1823

Чарльз Бэббидж создает первую механическую вычислительную машину.

Компьютер Бэббиджа

1829

Появление **новых типов геометрии** — неэвклидовых — с искривленными прямыми.

1835

Адольф Кетле применяет математические методы к антропометрии и определяет понятие «среднего человека».

1837

Симеон Дени Пуассон описывает распределение мгновенных событий (таких, как удар молнии или лягание лошади).

1843

Уильям Гамильтон описывает вещественные числа в качестве подмножества комплексных, а комплексные — как подмножество кватернионов.

1701

Заново изобретенная агротехником **Джетро Таллом** сеялка становится провозвестником **аграрной революции**.

1735

Карл Линней создает первую классификацию живых организмов по родам, видам и т. д.

1750-е гг.

В Великобритании начинается **промышленная революция**.

Промышленная революция

Эдвард Дженнер прививает своего сына

1764

Джеймс Уатт изобретает паровой двигатель, первый, совершавший вращательное, а не поступательное движение.

1796

Эдвард Дженнер делает первую прививку от оспы.

1800

Алессандро Вольта конструирует гальванический элемент — первую электрическую батарейку.

1820-е гг.

Разработка **процессов фотографирования**.

1825

Первая **пассажирская железнодорожная линия** в Великобритании.

1829

Изобретение **швейной машинки**.

1750-е гг.

Расцвет колониальной **африканской работорговли**.

1757

Победа британский войск при Плесси. Начало **британского владычества** в Индии.

1775–83

Война за независимость США.

1789

Великая французская революция.

Великая французская революция

1811–25

Национально-освободительные войны в Латинской Америке.

1837

Королева Виктория занимает трон Великобритании.

1745

Самые знаменитые писатели эпохи — Вольтер, Джонсон и Свифт.

1750–1820

Возникновение европейской **классической музыки**. Величайшие композиторы эпохи — Гайдн, Моцарт, Бетховен.

1767–1847

Годы жизни **Тьягараджи**, знаменитого индийского музыканта и композитора.

1794

Готический роман. Одной из первых книг нового направления становится The Mysteries of Udolpho Энн Рэдклиф.

1800–50

Период романтизма в европейском искусстве и литературе.

1818

Мэри Шелли публикует роман «Франкенштейн» — возможно, первое научно-фантастическое произведение.

1826–33

Пик развития **японской ландшафтной живописи**. Цикл картин **Хокусая** «36 видов горы Фудзи».

1835

Строительство **Триумфальной арки** в Париже.

Фудзияма

1850–1950

1846
При помощи математических методов вычислено расположение **Нептуна** — самой удаленной планеты Солнечной системы — до того, как ее впервые наблюдают в телескоп.


Нептун

1847
Булева алгебра преображает повседневные задачи в математические выражения.

1858
Август Мёбиус описывает одностороннюю перекрученную ленту, которая с тех пор носит его имя.

1859
Бернард Риман формулирует гипотезу о дзета-функции, которая, вероятно, описывает зависимость в распределении простых чисел. Гипотеза остается недоказанной.

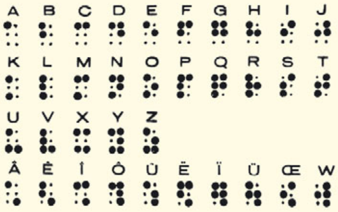
1871
Распределение Максвелла — Больцмана описывает равновесное распределение скоростей молекул в газе, т. е. идеальный газ.


Рихард Дедекинд

1872
Рихард Деденкинд определяет **иррациональные числа**, которые невозможно записать в виде дроби целого и натурального чисел.

1874
Георг Кантор приходит к выводу о том, что существует бесконечное число бесконечных множеств.

1834
Луи Брайль обнародует свою азбуку для слепых.



Азбука Брайля

1837
Появление **дагерротипов**, предшественников фотографии.

1844
Морзе отправляет первое **телеграфное сообщение**.

1850
Первый **подводный телеграфный кабель** проложен по дну Ла-Манша между Кале (Франция) и Дувром (Великобритания).

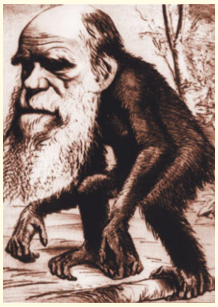

Прокладывание подводного кабеля

1855
Роберт Бунзен изобретает газовую горелку, названную в его честь.

Генри Бессемер изобретает конвертер (прообраз доменной печи) для литья стали.

1859
Чарльз Дарвин публикует книгу «Происхождение видов», формулируя теорию эволюции.

Изобретен **двигатель внутреннего сгорания**.


Карикатура на Чарльза Дарвина

1861
Джеймс Клерк Максвелл делает первый цветной фотоснимок. Параллельно он разрабатывает «уравнения Максвелла», описывающие связь между электричеством и магнетизмом.

1845–49
Картофельный город в Ирландии.

1846–48
Американо-мексиканская война.

1850-е гг.
Расцвет **Британской империи**.

Формирование **пролетариата**.

1854
Флоренс Найтингейл реорганизует медицинскую службу во время Крымской войны.

1861
Отмена **крепостничества** в России.

1861–65
Гражданская война в США приводит к отмене рабства.

1865
Застрелен президент США **Авраам Линкольн**.

1867
США покупают **Аляску** у России.

1869
Открытие **Суэцкого канала**.


Гражданская война в США

1840
В Британии вводятся **почтовые марки**. Другие страны быстро перенимают опыт.

1845
В США изобретен **бейсбол**.

1848
Карл Маркс и **Фридрих Энгельс** публикуют «Манифест коммунистической партии».

1850-е гг.
Развитие негритянской **африканской светской литературы** и журналистики.


Первый теннисный турнир в Уимблдоне

1861
Основание общества **Красного креста** после кровавого сражения под Сольферино.

1874
Первая выставка **импрессионистов** в Париже.

1877
Первый **теннисный турнир в Уимблдоне**, Англия.

1879
Зафиксированы правила **американского футбола**.

1886
Возведение **статуи Свободы**, подаренной Францией США.

1890–1940
Развитие **модернизма**, типичным представителем которого в живописи является Поль Сезанн.

1888

Джузеппе Пеано обнаруживает некоторые фундаментальные законы натуральных чисел.

1889

Фрэнсис Голтон показывает, что случайные отклонения от среднего значения распределяются по **колоколообразной (гауссовой) кривой**.

1895

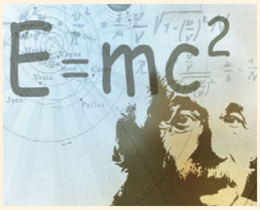
Топология определяет свойства фигур, неизменяемые при преображении.

1900

Давид Гильберт представляет 23 математические проблемы, требующие решения в XX веке.

1905

Знаменитое уравнение **Эйнштейна $E=mc^2$** с помощью математики увязывает массу и энергию.



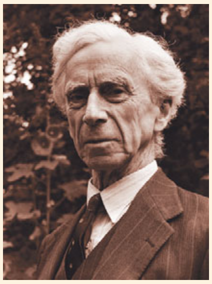
Альберт Эйнштейн

1906

Разработаны **цепи Маркова** для описания процессов, которые зависят только от непосредственно предшествующего состояния, а не от более ранней истории.

1908

Анализ популяционной генетики объясняет, как в реальности работают открытия **Грегора Менделя** в генетике.



Бертран Рассел

1913

Бертран Рассел сводит математику к набору логических принципов.

1866

Луи Пастер изобретает пастеризацию.

Альфред Нобель изобретает динамит.

Георг Иоганн Мендель обнародует открытые им законы генетического наследования.

1869

Дмитрий Менделеев составляет периодическую таблицу элементов.

1876

Александр Грэм Белл изобретает телефон.

1877–83

Томас Эдисон изобретает фонограф и надежную электрическую лампочку.

1887

Генрих Герц доказывает существование электромагнитных или радиоволн.

1895

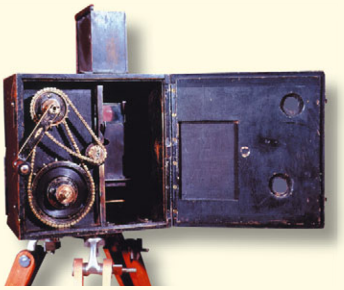
Вильгельм Рентген обнаруживает рентгеновское излучение.

Луи Люмьер изобретает кинокамеру.

Александр Грэм Белл

1900

Макс Планк формулирует **квантовую теорию**, предполагающую, что энергия распределяется



Проектор братьев Люмьер

Ок. 1880

Колониальный раздел Африки между европейскими державами.

1893

Новая Зеландия первой в мире предоставляет **избирательные права женщинам**.

1900

Боксерское восстание в Китае против иностранной экспансии завершается унизительным поражением и открытием Китая для иностранной торговли.

Окопы Первой мировой войны

1912

Крушение **«Титаника»** — после столкновения с айсбергом в Атлантическом океане лайнер затонул за три часа. 1503 человека погибли.

1914–1918

Первая мировая война.

1914

Открытие **Панамского канала**.

1917

Революция в России.

1918–1919

Мировая эпидемия гриппа убивает почти 20 млн человек.

1919

Создана **Лига Наций**, предшественник ООН.

1919–1933

«Сухой закон» в США.

1920

Владения **Британской империи** занимают самую обширную территорию.

1891

Изобретение **баскетбола**.

1896

Первая **Олимпиада** современности в Греции.

1899–1900

Зигмунд Фрейд публикует свои теории бессознательного — возникновение **психоанализа**.

1907

Мария Монтессори представляет свою систему дошкольного образования.

1909

Сергей Дягилев создает дивертисмент «Русский балет». Среди его звезд — Анна Павлова и Вацлав Нижинский. Мир знакомится с музыкой Игоря Стравинского.

1909–12

Пабло Пикассо и **Жорж Брак** разрабатывают **кубизм**.

Вацлав Нижинский

Ок. 1910

Развитие **джаза** в США.

1911

Открыта первая **студия в Голливуде**.

1913

Первый **кроссворд**, разработанный Артуром Уином, напечатан в газете New York World.

1920S

Сюрреализм распространяется по миру во всех видах искусства.

1920-е–1930-е гг.

Изобразительный и архитектурный стиль **баухаус** основан Вальтером Гропиусом в Веймаре, Германия.

Стиль **ар-деко**, разработанный во Франции, набирает признание по всему миру.

1950–2012

1926

Квантовая механика при помощи математики описывает физику субатомных частиц.

1931

Теорема Курта Гёделя показывает, что любая формальная аксиоматичная система содержит неразрешимые противоречия, из чего следует, что некоторые математические задачи не имеют решения.

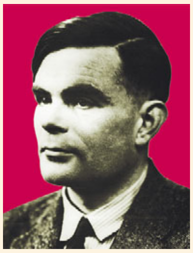
1936

Алан Тьюринг описывает гипотетическую машину, работающую на основе алгоритмов, что приводит к созданию современных компьютеров.

В противовес Нобелевской премии **Джон Чарльз Филдс** учреждает медаль в честь лучших математиков.

1944

Разработана **теория игр**, применяющая математические методы для оценки экономической конкуренции, военной стратегии и политики.



Алан Тьюринг

1948

Бинарные числа используются для передачи данных и подтверждения их истинности по приему с помощью контрольных кодов по четности.

1961

Первые исследования Эдварда Лоренца в области **теории хаоса**, позволяющей объяснить непредсказуемый характер природных явлений — таки, как погода или биржа.

1972

Теория катастроф Рене Тома математически объясняет, как небольшие изменения могут привести к драматическим результатам.

в виде мельчайших сгустков или квантов, а не в виде постоянного потока.

1901

Присуждена первая **Нобелевская премия**.

Гильермо Маркони проводит первый сеанс трансатлантической беспроводной радиосвязи.

1926

Джон Лоугли Бэрд изобретает телевидение.

1927

Принцип неопределенности **Вернера Гейзенберга**.

Эрвин Шрёдингер проводит мысленный эксперимент «Кот Шрёдингера».

1928

Александр Флеминг открывает пенициллин.

Чашка Петри Флеминга

1929

Эдвин Хаббл обнаруживает, что Вселенная расширяется.

1935

Нейлон получен из нефтяного масла.

1945

Атомные бомбардировки японских городов **Хиросима** и **Нагасаки**.

1953

Фрэнсис Крик и **Джеймс Уотсон** расшифровывают структуру ДНК (дезоксирибонуклеиновой кислоты).

Юрий Гагарин

1927–49

Гражданская война в Китае заканчивается победой коммунистов над националистами и созданием **Китайской Народной Республики** во главе с Председателем Мао.

1932

Основание королевства **Саудовская Аравия**.

1936–39

Гражданская война в Испании.

Китайская Народная Республика

1939–45

Вторая мировая война.

1945–80

Национально-освободительные войны против европейских колонизаторов в Африке и Азии.

«Лондонский блиц»

1946

Первое заседание **Генеральной Ассамблеи ООН**.

1950–53

Корейская война.

1950-е гг.

Распространение **противозачаточных таблеток** начинает изменять общество.

Противозачаточные таблетки

1953

Эдмунд Хиллари и **шерпа Тенцин Норгей** первыми покоряют Эверест.

1922

Говард Картер обнаруживает гробницу фараона **Тутанхамона** в Египте.

Небоскреб Эмпайр-стейт-билдинг в стиле ар-деко

Радиокорпорация **British Broadcasting Corporation (BBC)** проводит первую радиопередачу.

Вторая половина 1940-х гг.

Постмодернизм в архитектуре, живописи и литературе распространяется по миру.

Говард Картер

1950-е–1960-е гг.

Уорхол, Лихтенштейн, Хокни — лидеры поп-арта.

1955

Возникновение **рок-н-ролла**.

1975

Бенуа Мандельброт придумывает термин «фрактал».

1976

Компьютеры обеспечивают новый тип доказательств. Так, ответ на вопрос: сколько цветов нужно для того, чтобы раскрасить любую карту так, чтобы все районы, имеющие общую границу, были разноцветными? Вопрос простой, но ответ на него можно получить только путем полного перебора всех возможных вариантов.

Фрактал

1977

RSA — криптографический алгоритм с открытым ключом — обеспечивает безопасный обмен данными в Интернете.

1985

Тридцатилетняя **совместная работа** сотен математиков завершается созданием классификации простых конечных групп.

1987

В ответ на вопрос о том, как сложная и разнообразная Вселенная смогла развиться в соответствии с немногочисленными простыми законами, предложена концепция **самоорганизованной критичности**.

1995

Эндрю Уайлс доказывает Великую теорему Ферма.

Стивен Хокинг

1955

Джонас Солк разрабатывает вакцину от полиомиелита.

1961

Первый человек в космосе — **Юрий Гагарин**, СССР.

1969

Первая **высадка человека на Луну**. Нил Армстронг и Базз Олдрин (экипаж корабля «Аполлон-11») совершают первые шаги по поверхности Луны.

1974

Пол Берг прекращает исследования в области генной инженерии бактерий, осознав их потенциальную опасность, и формулирует международное руководство по генной инженерии.

1974–1883

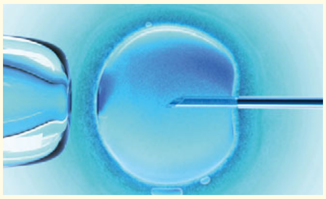
Субраманьян Чандрасекар разрабатывает математическую теорию черных дыр.

1976

Полет сверхзвукового лайнера **«Конкорд»**.

1979

Рождение первого **«ребенка из пробирки»**.



Искусственное оплодотворение

1981

Начало программы **«Шаттл»** («космический челнок») в США.

Выделен вирус **ВИЧ** (вирус иммунодефицита человека).

1983

Первые **мобильные телефоны** в продаже.

1953–59

Революция на Кубе, возглавляемая **Фиделем Кастро** и **Че Геварой**.

1957

Повторное открытие **Суэцкого канала**.

Основано **Европейское экономическое сообщество**.

1961

Возведена **Берлинская стена**.

Берлинская стена

1962

Кубинский ракетный кризис. США и СССР оказываются на грани ядерной войны.

1963

Президент США Дж. Ф. Кеннеди убит в Далласе, Техас.

1965–1975

Война во Вьетнаме.

1967–1975

Гражданская война в Камбодже.

1968

Убит **Мартин Лютер Кинг**, лидер **движения за гражданские права** в США.

1979

Революция в Иране. К власти приходят исламские фундаменталисты.

1979–1989

Миссия **советских войск** в Афганистане.

1980

Ирак объявляет войну Ирану. Конфликт продолжается до 1988 г.

1986–1987

Генеральный секретарь КПСС **Михаил Горбачев** объявляет перестройку и гласность в СССР.

1987

«Черный понедельник» — крах **Нью-Йоркской фондовой биржи**.

1988

Теракт на борту рейса **Pan Am 103** над Локерби, Шотландия. Погибли 270 человек.

1989

Гигантский разлив нефти после крушения танкера **Exxon Valdez** у побережья Аляски.

1989–1990

Падение **Берлинской стены**. Объединение Германии.

1990

Лидер борьбы с апартеидом **Нельсон Мандела** освобожден после 27 лет в тюрьме.

1990–1991

Развал Советского Союза.

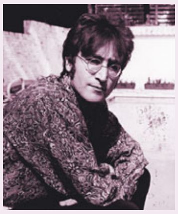
Билл Хейли и Элвис Пресли

1960-е гг.

Группа **Beatles** становится всемирно знаменитой.

1962

Смерть **Мэрилин Монро**.



Джон Леннон

1968

На экраны выходит фильм **«Космическая одиссея 2001 года»** Стэнли Кубрика.

1974

Появление **панк-рока**.

1980

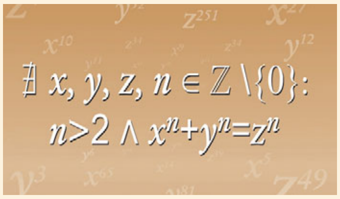
Джон Леннон застрелен в Нью-Йорке.

1980-е гг.

Распространение **рэпа**.

1985

Крупнейший в мире рок-концерт **Live Aid** в Лондоне и Филадельфии.



Великая теорема Ферма

1996

Первое **математическое доказательство** получено компьютерной программой Equational Prover.

2000

Математический институт Клэя определяет семь проблем тысячелетия и назначает награду в 1 миллион долларов за решение каждой из них.

2006

Гипотеза Пуанкаре: Григорий Перельман решает первую из задач тысячелетия, но отказывается от всех наград.

2011

Корпорация Google предлагает $π млрд (3 141 590 000 долл.) за конкурентные патенты.

1988

Стивен Хокинг публикует книгу «Краткая история времени», популяризирующую физику и космологию.

1989

Сидни Олтман и **Томас Чек** получают Нобелевскую премию за открытие каталитической роли РНК (рибонуклеиновой кислоты) в генетике.

Тим Бёрнерс Ли изобретает Всемирную паутину (**World Wide Web**).

1996

Первое **клонирование животного** — овечки **Долли** в Шотландии.

Введение **генетически модифицированных злаков**.

1997

Передвижной исследовательский зонд совершает посадку на Марс.

1998

Начало работ по сооружению **Международной космической станции**.

1999

Компьютеры Apple оборудуются wi-fi-соединением.

2000

Расшифрован **геном человека**.

2004

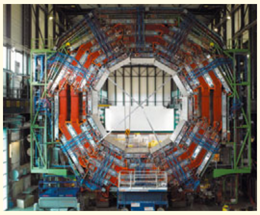
Создание соцсети **Facebook**.

2005

Новый **нефтепровод** соединяет Каспийское и Средиземное моря.

2007

Органическая микросхема разработана на основе нервных клеток.



Большой адронный коллайдер

2008

Под Женевой построен **Большой адронный коллайдер** — ускоритель частиц.

2009

Первые случаи успешного применения **генной терапии**.

2010

В продаже **Apple iPad**.

2011

Обнаружена самая похожая на Землю на сегодня планета — **Kepler 22b**.

1990–94

Гражданская война в Руанде.

1991–2001

Гражданская война в Югославии.

1991

Первая **«Война в заливе»**. Международный военный контингент освобождает Кувейт после вторжения иракских войск.

1994

Открыт **«Евротоннель»** под Ла-Маншем, связывающий Великобританию и Францию.

Первые всеобщие выборы в ЮАР. Президентом избран **Нельсон Мандела**.

1997

«Птичий грипп» вызывает панику по всему миру.

2001

Террористическая атака **11 сентября** — захваченные террористами пассажирские самолеты таранят башни Всемирного торгового центра в Нью-Йорке и здание Пентагона в Вашингтоне.

США возглавляет **«Войну против террора»** против движения «Талибан» в Афганистане.

2003

Вторая **«Война в заливе»**. Международная коалиция во главе с США вторгается в Ирак, свергнув Саддама Хуссейна.

Мировая эпидемия тяжелого острого респираторного синдрома **(SARS)**.

Саддам Хуссейн

2004

Теракты в поездах в Мадриде, Испания.

Землетрясение в Индийском океане: последовавшее гигантское цунами убивает около 200 000 человек в 11 странах.

Чеченские террористы захватывают 1128 детей и взрослых в заложники в школе города Беслан. В результате спасательной операции многие из заложников погибают.

2005

Первые за 50 лет свободные выборы в **Ираке**.

Теракты в Лондоне, Великобритания.

Ураган «Катрина» затапливает Новый Орлеан, США.

Ураган «Катрина»

2008

Банковский кризис в США приводит к мировой рецессии.

Террористы убивают 173 человека в Мумбае, Индия.

2009–2010

Свиной грипп вызывает панику по всему миру.

2010

Взрыв на нефтяной платформе **Deepwater Horizon** вызывает катастрофический разлив нефти в Мексиканском заливе.

Концерт Live Aid, стадион «Уэмбли»

2006

Картина **Джексона Поллока** «№ 5, 1948» продана за рекордную сумму в 140 млн долл.

2009

Умер **Майкл Джексон**. «Король поп-музыки», согласно Книге рекордов Гиннесса был самым успешным музыкантом.

2010

Возведение **«Бурдж Халифа»** в Дубае — самого высокого на сегодня небоскреба (829,84 м).

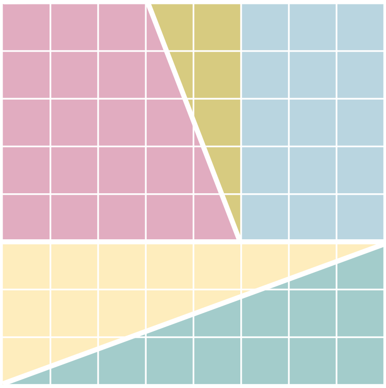
Математические загадки

Математика не обязательно должна быть смертельно серьезной. В основе многих из открытий, перевернувших мир, — игры с числами. Вот несколько головоломок — возможно, нелогичных, часто очень красивых и всегда неожиданных. Вдобавок, они действительно веселые.

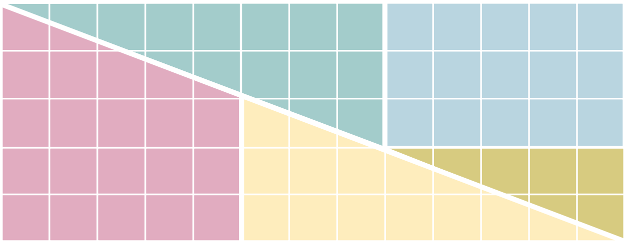
Лишняя клетка

В рядах Фибоначчи множество скрытых взаимосвязей. Ниже — один из примеров развлекательных головоломок, впервые приведенный в книге Уильяма Хупера Rational Recreations («Рациональные развлечения») в 1794 г.

Каждые три последовательных числа в ряду Фибоначчи связаны между собой любопытным образом. Результат умножения первого и третьего числа всегда будет отличаться на единицу (в большую или меньшую сторону) от квадрата второго. Возьмем, например, 5, 8, и 13: 5 x 13 = 8^2 + 1 (подсчитайте сами). Эту взаимосвязь можно представить и по-другому: квадрат 8 на 8 клеток превращается в прямоугольник 5 на 13. Подсчитайте клетки в каждой фигуре и убедитесь сами. Откуда взялась лишняя клетка? (Ответ: при визуальном сохранении изначальных пропорций на самом деле они несколько неправильны, мельчайшие «искажения», изначально заложенные в фигуры, и создают кажущийся парадокс «лишней» клетки).



8 x 8 = 64

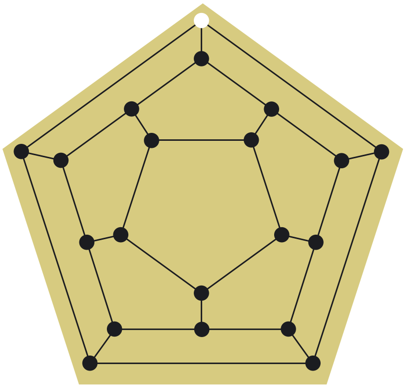


5 x 13 = 65

Игра с двенадцатигранником

Эту простую игру придумал Уильям Роуэн Гамильтон (более известный как «изобретатель» кватернионов) как один из инструментов исследования теории графов. Он вычислил математический принцип, лежащий в основе построения такого замкнутого непересекающегося маршрута, который проходит через все обозначенные точки только один раз.

Найдите такой же маршрут на этой проекции двенадцатигранника: начните с любой точки и вернитесь в нее, соединив все остальные точки. Попадать в одну и ту же точку дважды нельзя.



Геометрическое «решето»

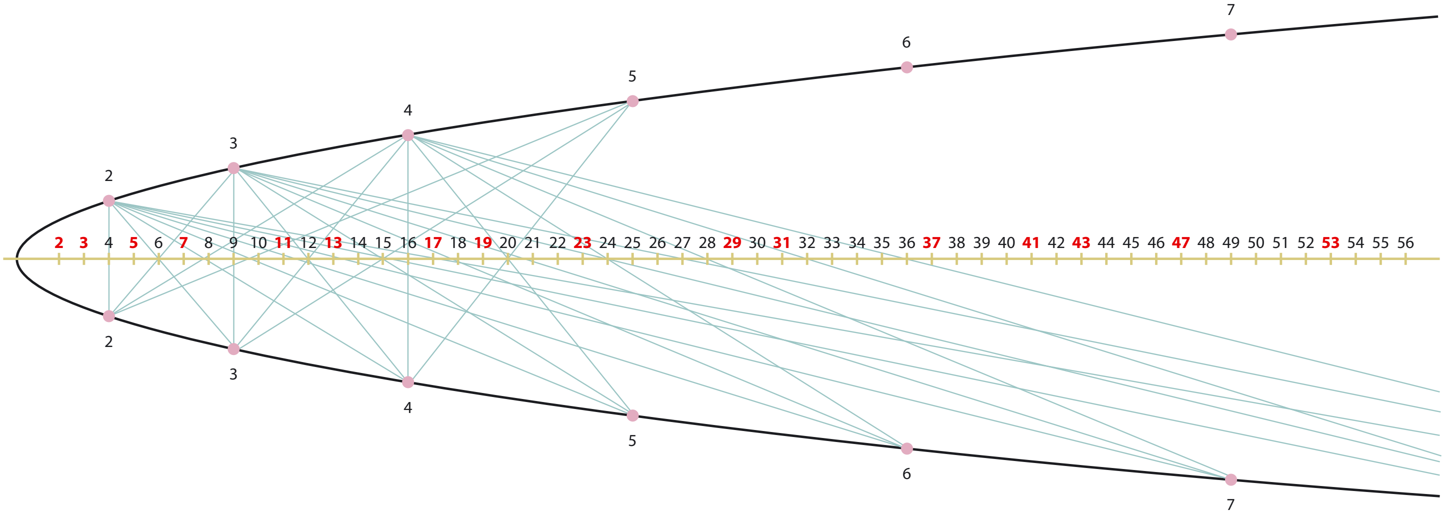
Во II в. до н. э. греческий философ Эратосфен изобрел знаменитое математическое «решето» — алгоритм поиска простых чисел. За 2200 лет, что прошли с тех пор, «решето» модифицировали многократно. Предложенная здесь модель использует параболическую кривую, которая показывает, как последовательно исключается кратные заданному числу составные числа. При этом остаются только простые.

1. Разделим ветви параболы горизонтальной осью. На оси в порядке возрастания разместим натуральные числа, начиная с 2. Единицу использовать не будем, поскольку 1 — ни простое, ни составное число, это счетная единица, единица измерения, с помощью которой получаются все остальные числа.

2. Проведем перпендикуляры к оси в точках, где расположены квадратные значения (4, 9, 16 и т. д.). В точках, где эти перпендикуляры пересекут ветви параболы, разместим натуральные числа, которые при возведении в квадрат будут давать исходные значения (т. е. 2, 3, 4 и т. д.).

3. Проведя все перпендикуляры от чисел на оси к их квадратным корням на параболе, соединим все точки на одной ветви параболы со всеми точками на другой ветви. Каждый такой отрезок пересечет числовую ось в точке, где расположено число, являющееся произведением тех чисел, которые соединены отрезком. Так, отрезок, соединяющий числа 2 и 3 на ветвях параболы, пересечет числовую ось в точке числа 6.

4. После того как все числа на ветвях параболы будут соединены отрезками, на числовой оси останутся неперечеркнутыми только искомые простые числа.



Любопытные простые

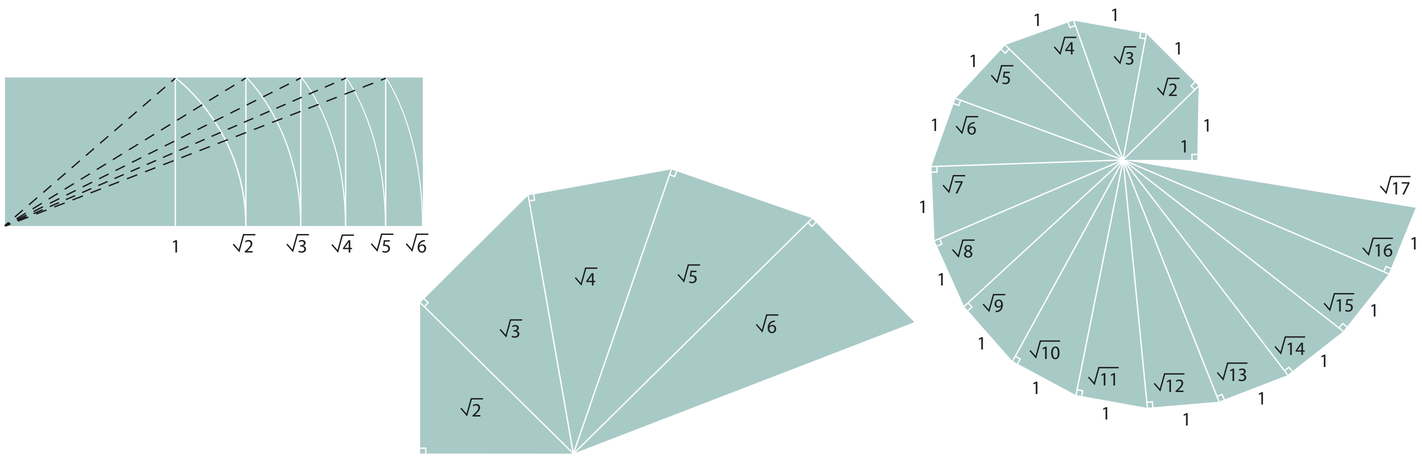
Закономерностей в распределении простых чисел не существует, что не мешает нам постоянно их искать. Вот несколько необычных последовательностей, которые принесли поиски. Означает ли это что-либо? Никто не знает.

1. Число 11111111111111111111111 (состоит из 23 единиц) простое.
2. Число 91 составное (91 = 13 x 7), но если в него последовательно вводить серии 9 и 0, полученные числа будут попеременно простыми и составными:
91 составное
9901 простое
999001 составное
99990001 простое
9999900001 составное
999999000001 простое
99999990000001 составное
9999999900000001 простое
999999999000000001 составное
Но вот следующее, 99999999990000000001, тоже составное!
3. 313 — единственное трехзначное число-палидром (число, значение которого остается неизменным при чтении как слева направо, так и справа налево). Это свойство сохраняется и для десятеричной записи, и для двоичной: $313_{10} = 100111001_2$. Как ни странно, $100\ 111\ 001_{10}$ — тоже простое число.

Спираль Феодора

Известная также как спираль квадратных корней, эта фигура носит имя греческого философа V–IV вв. до н. э. Феодора Киренского. В период начала упадка школы пифагорейцев он занимался исследованиями сложной проблемы иррациональных чисел. Выглядит знакомо, не правда ли? Эта форма проявляется во многих природных образованиях.

Спираль формируется множеством прямоугольных треугольников, гипотенуза каждого из которых является катетом соседнего.

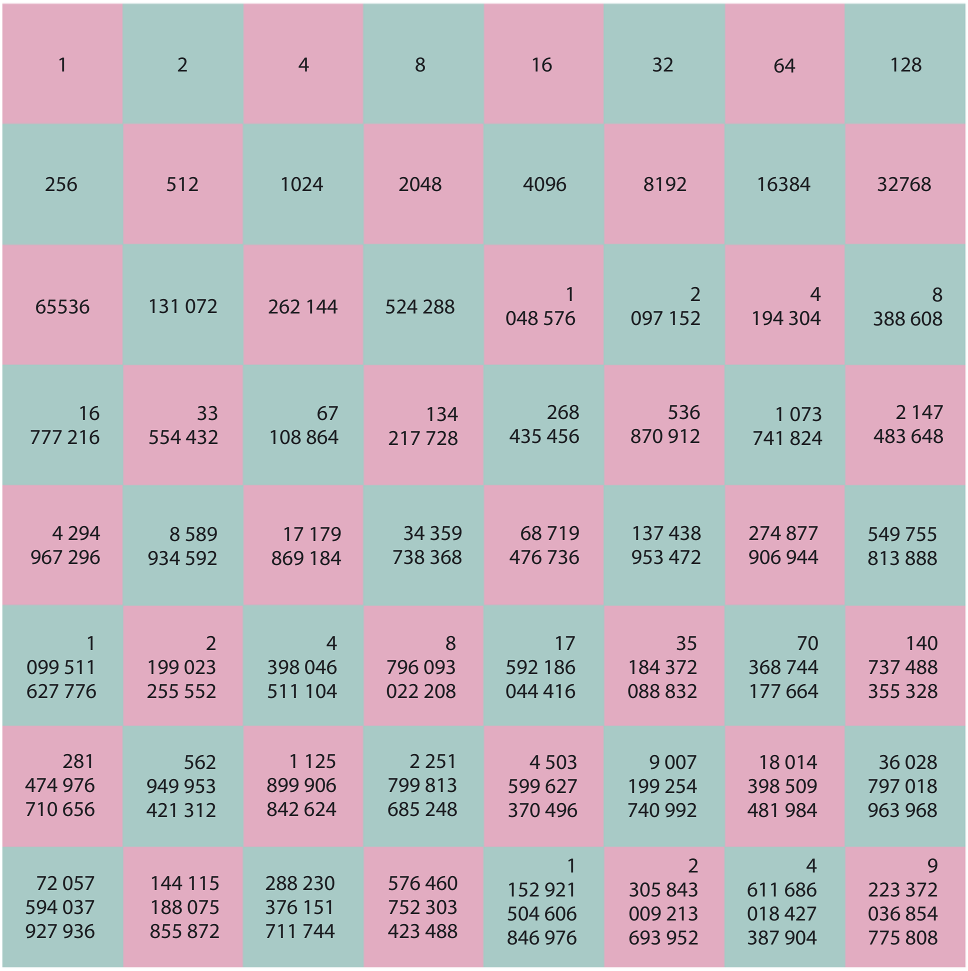


Зерна на шахматной доске

Легенда гласит, что некий мастер (или даже изобретатель) шахмат из Индии преподнес игру королю и предложил заключить сделку. Если бы король исполнил ее условия, ему пришлось бы отдать мастеру все свое королевство — и он все равно остался бы в долгу.

Мастер попросил короля положить на первую клетку доски одно пшеничное пшеницы, на вторую — два, на третью — четыре и так далее. Общее количество зерна на 64 клетках и составило бы награду мастера.

Ее размер — 18 446 744 073 709 551 615, или 18,4 квинтиллионов, зерен (больше, чем существует на Земле).



1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
65536	131 072	262 144	524 288	1 048 576	2 097 152	4 194 304	8 388 608
16 777 216	33 554 432	67 108 864	134 217 728	268 435 456	536 870 912	1 073 741 824	2 147 483 648
4 294 967 296	8 589 934 592	17 179 869 184	34 359 738 368	68 719 476 736	137 438 953 472	274 877 906 944	549 755 813 888
1 099 511 627 776	2 199 023 255 552	4 398 046 511 104	8 796 093 022 208	17 592 186 044 416	35 184 372 088 832	70 368 744 177 664	140 737 488 355 328
281 474 976 710 656	562 949 953 421 312	1 125 899 906 842 624	2 251 799 813 685 248	4 503 599 627 370 496	9 007 199 254 740 992	18 014 398 509 481 984	36 028 797 018 963 968
72 057 594 037 927 936	144 115 188 075 855 872	288 230 376 151 711 744	576 460 752 303 423 488	1 152 921 504 606 846 976	2 305 843 009 213 693 952	4 611 686 018 427 387 904	9 223 372 036 854 775 808

Номера такси

Редко бывает так, чтобы визит наставника к заболевшему студенту заканчивался появлением нового множества чисел. Но, с другой стороны, гении, подобные Сринивасе Рамануджану, тоже редкость. Как и его множество «номеров такси».

Как-то кэмбриджский профессор математики Годфри Харди навещал своего ученика, индийского математического гения Сринивасу Рамануджана в лондонском санатории, куда тот попал с симптомами туберкулеза. В разговоре Харди пожаловался, что номер такси, на котором он добирался до санатория, был «скучным», ничем не примечательным набором цифр **1–7–2–9** (яркий пример того, о чем и как болтают математики, не так ли?). Рамануджан возразил: «Это наименьшее число, которое можно записать как сумму двух кубов разными способами».

1,729 = $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$

На сегодня найдено только шесть «номеров такси»:

(1) = **2**

(2) = **1729**

(3) = **87 539 319**

(4) = **6 963 472 309 248**

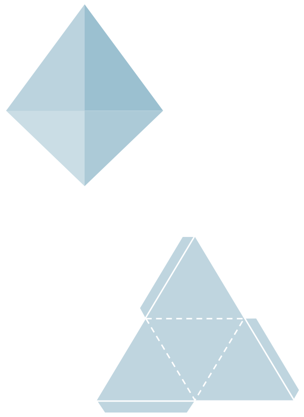
(5) = **48 988 659 276 962 496**

(6) = **24 153 319 581 254 312 065 344**

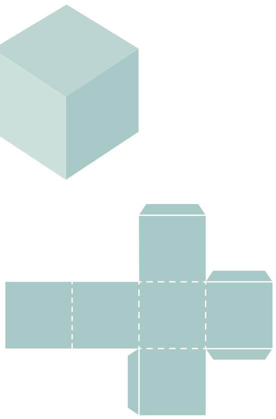
Платоновы тела своими руками

Эти знаменитые правильные фигуры образованы из одинаковых — и тоже правильных — граней. Немного терпения и ловкости — и вы сами сможете их сделать.

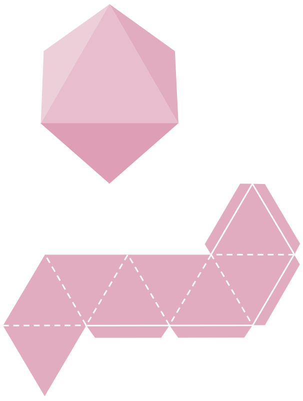
Грани этих многогранников — правильные треугольники, квадраты или правильные пятиугольники. Используя приведенные здесь выкройки в качестве образцов, вы сможете сделать платоновы тела дома.



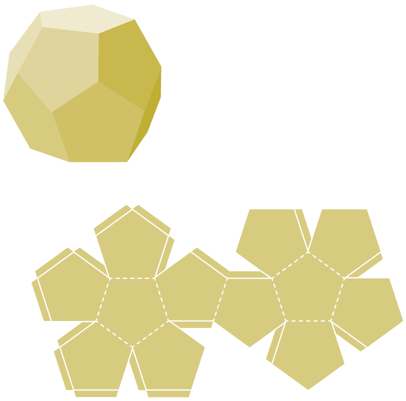
Четырехгранник (пирамида)



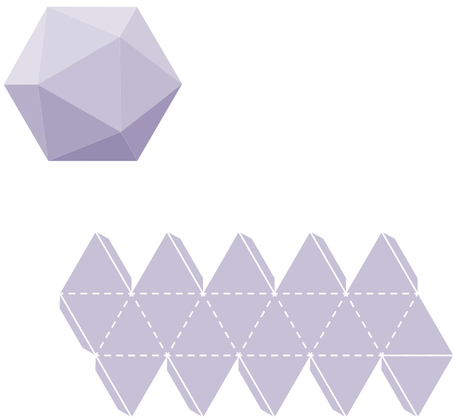
Куб



Октаэдр (восьмигранник)



Додекаэдр (двенадцатигранник)



Икосаэдр (двадцатигранник)

Пифагорейские числа

Для Пифагора и его последователей числа были основой и сутью всего. Эти древние математики разработали оригинальную систему классификации чисел, основанную как на математических, так и натурфилософских принципах.

Натуральные числа делились на 4 класса:

- четно-четные: четные числа, при делении на два дающие также четное число (т. е. кратные 4);
- нечетно-четные: четные числа, при делении на два дающие нечетное число;
- четно-нечетные: числа, при делении которых на нечетное число, получается четное;
- нечетно-нечетные: числа, имеющие только нечетные делители.

Фигурные числа

Линейные числа — числа, не имеющие делителей (т. е. простые числа).

Плоские числа — числа, представимые в виде двух сомножителей (т. е. составные числа).

Телесные числа — числа, представимые в виде трех сомножителей.

Квадратные числа — числа, представимые в виде перемножения двух одинаковых чисел (т. е. возведения в квадрат).

Кубические числа — числа, представимые в виде двукратного перемножения двух одинаковых чисел (т. е. возведения в куб).

Структура чисел

Недостаточные — числа, превосходящие сумму своих делителей (число 4, например, недостаточное, поскольку оно больше чем сумма его делителей — 1 и 2).

Избыточные — числа, меньшие суммы своих делителей (12 — избыточное число, поскольку сумма 1+2+3+4+6 = 16).

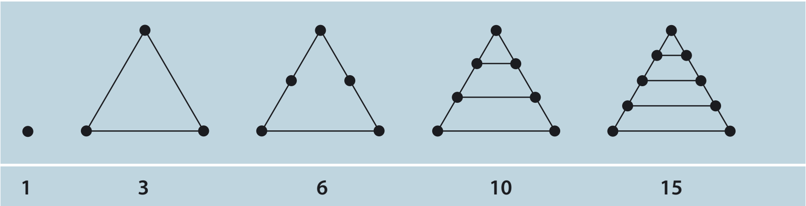
Совершенные — числа, равные сумме своих делителей (6 = 1 + 2 + 3).

Дружественные числа

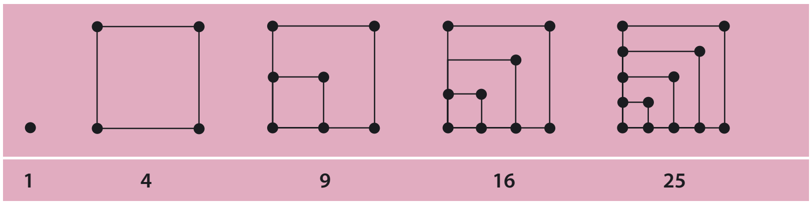
Два числа, каждое из которых равно сумме делителей другого. Пифагорейцы знали только одну такую пару — **220** и **284**.

Многоугольные числа

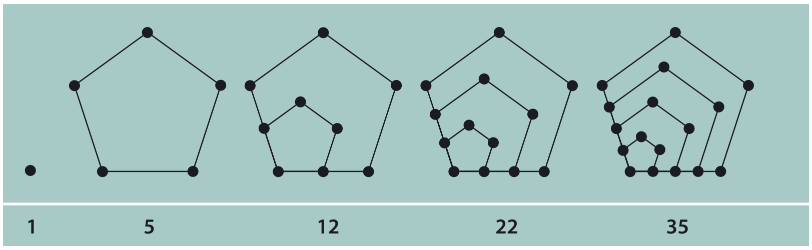
Треугольные



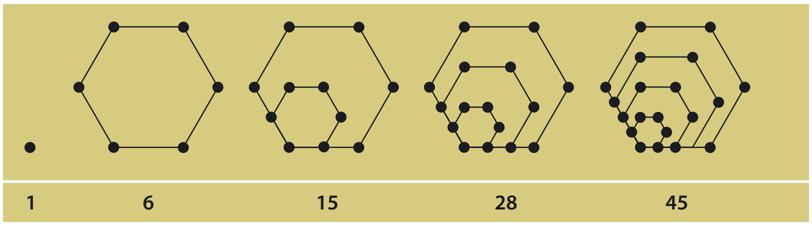
Четырехугольные



Пятиугольные



Шестиугольные



284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 (сумма делителей числа **220**)
220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 (сумма делителей числа **284**)

Числа π, *e* и φ

Эти три математические константы — трансцендентные числа, состоящие из бесконечного ряда неповторяющихся цифр. Замечательная равномерность распределения цифр в первом триллионе десятичных знаков записи числа *π* прекрасно это иллюстрирует. Впрочем, возможно, мы что-то упустили — проверьте сами, если хотите.

Частота цифр в числе π

0 — 99 999 485 134
1 — 99 999 945 664
2 — 100 000 480 057
3 — 99 999 787 805
4 — 100 000 357 857
5 — 99 999 671 008
6 — 99 999 807 503
7 — 99 999 818 723
8 — 100 000 791 469
9 — 99 999 854 780
Total — 1 000 000 000 000

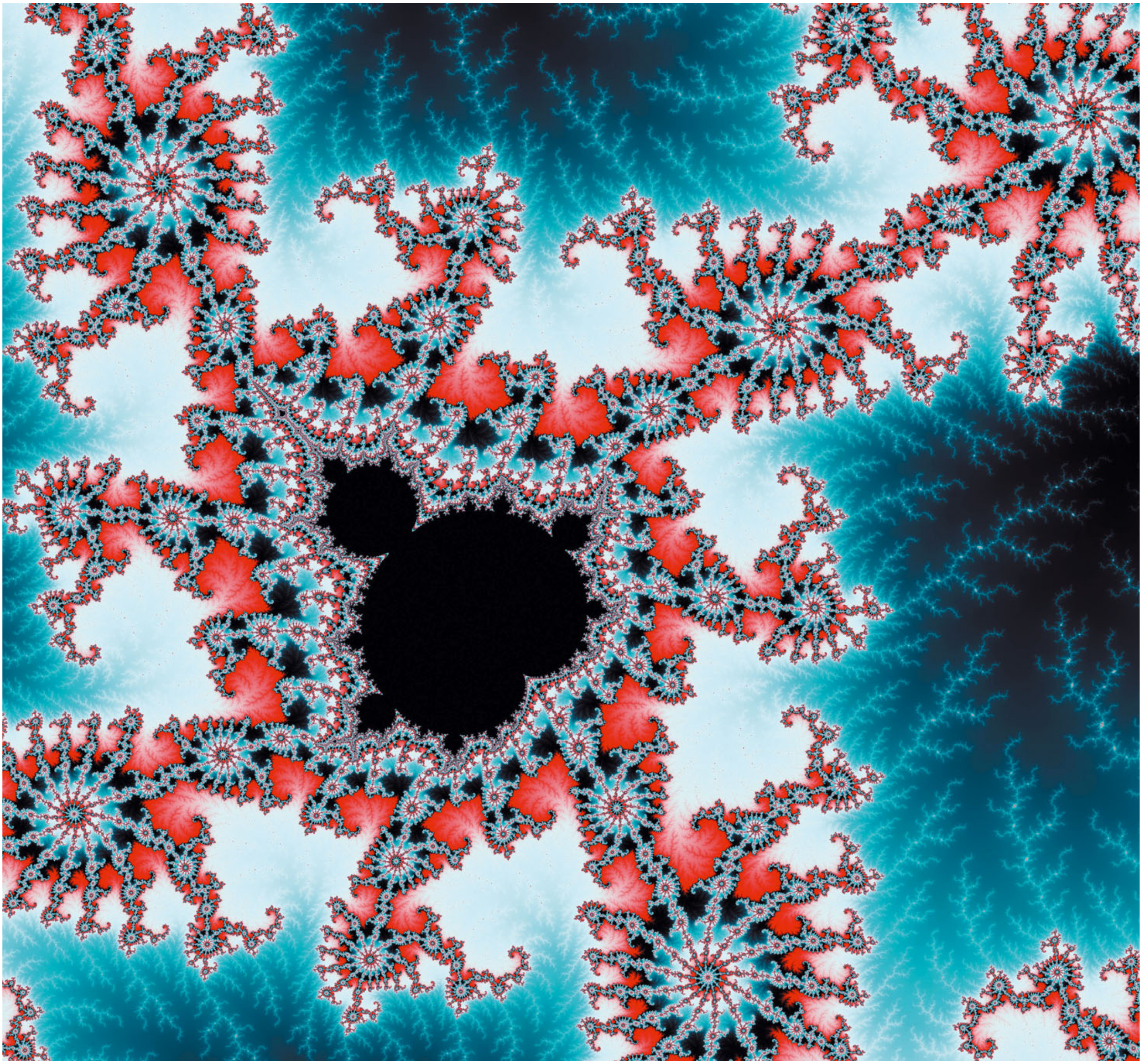
***π* = 3,14159**26535897932384626433832795028841971693993751058209749445923
078164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095505
822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644
288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234603486104
543266482133936072602491412737245870066063155881748815209209628292540
917153643678925903600113305305488204665213841469519415116094330572703657595919530921861173819
326117931051185480744623799627495673518857527248912279381830119491298336733624406566430860213
949463952247371907021798609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271452635608
2778577134275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892354201995611212
902196086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859502445
945534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320838142061717766914730
359825349042875546873115956286388235378759375195778185778053217122680661300192787661119590921
642019893809525720106548586327886593615338182796823030195203530185296899577362259941389124972
177528347913151557485724245415069595082953311686172785588907509838175463746493931925506040092
770167113900984882401285836160356370766010471018194295559619894676783744944825537977472684710
404753464620804668425906949129331367702898915210475216205696602405803815019351125338243003558
764024749647326391419927260426992279678235478163600934172164121992458631503028618297455570674

***e* = 2,71828**1828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353547594571382178
5251664274274663919320030599218174135966290435729003342952605956307381323286279434907632338298
8075319525101901157383418793070215408914993488416750924476146066808226480016847741185374234544
2437107539077744992069551702761838606261331384583000752044933826560297606737113200709328709127
4437470472306969772093101416928368190255151086574637721112523897844250569536967707854499699679
4686445490598793163688923009879312773617821542499922957635148220826989519366803318252886939849
6465105820939239829488793320362509443117301238197068416140397019837679320683282376464804295311
8023287825098194558153017567173613320698112509961818815930416903515988885193458072738667385894

phi = 1,6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052604628189024970720720
418939113748475408807538689175212663386222353693179318006076672635443338908659593958290563832
266131992829026788067520876689250171169620703222104321626954862629631361443814975870122034080
588795445474924618569536486444924104432077134494704956584678850987433944221254487706647809158
846074998871240076521705751797883416625624940758906970400028121042762177111777805315317141011
704666599146697987317613560067087480710131795236894275219484353056783002287856997829778347845
878228911097625003026961561700250464338243776486102838312683303724292675263116533924731671112

Множество Мандельброта

Фракталы легко посчитать детищем 60-х годов XX века с их психоделической эстетикой. Но это ошибка. Впервые компьютерная распечатка фрактала была получена в 1978 г., а полноцветного их воплощения пришлось ждать еще десяток лет. В остальном картинка говорит сама за себя.



Магические квадраты

Это одна из древнейших математических головоломок. Самое интересное в магических квадратах — не поиск суммы; сложение числе слева направо, справа налево, сверху вниз и обратно и даже по диагонали даст одинаковый результат. Самое интересное — складывать сами квадраты.

Магическая константа (сумма чисел в рядах, столбцах и диагоналях) таких квадратов вычисляется по формуле $n(n^2+1)/2$, где n — «порядок» квадрата. Эта формула определяет, как заполняются числами поля квадрата в каждом ряду, столбце и по диагонали, начиная с числа 1 и заканчивая числом n^2.

Здесь приведены несколько квадратов с порядком от 3 до 9, включая и самый древний, «квадрат Ло Шу» третьего порядка. Считается, что он был обнаружен в виде матрицы, выполненной из китайских триграмм на панцире черепахи, вынырнувшей из разлившейся реки.

15

4	9	2
3	5	7
8	1	6

34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

65

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

111

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

175

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	32	8

260

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

369

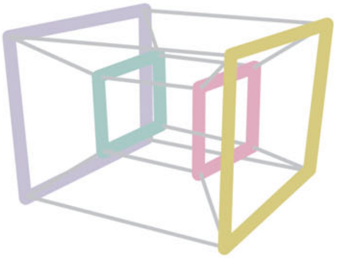
37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

Вращение тессеракта

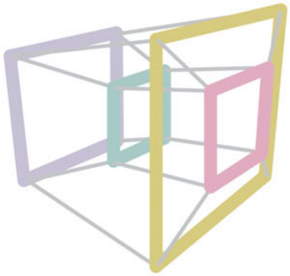
На это стоит посмотреть повнимательнее. Тессеракт — это куб в четырех измерениях. Одно измерение — это линия, у квадрата — два измерения, у куба — три. Можно предположить, что у четырехмерной фигуры обнаружится масса интересных свойств.

Восприятие 4-мерной фигуры выходит за рамки естественных возможностей человека. Даже для того чтобы изобразить трехмерный куб на двухмерном листе требуются определенные навыки художника, а изображать четырехмерную фигуру на двухмерном листе — сложнее вдвое (или даже в квадрате).

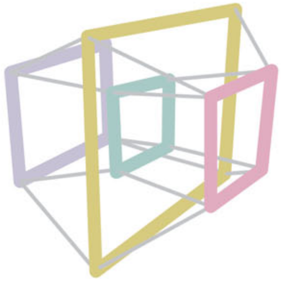
Представьте, что из внутреннего куба появляются еще четыре (на рисунке показаны в несколько искаженной форме), формируя внешний. Получилось? Теперь посмотрите, как углы, ребра и грани занимают свои положения в тессеракте. Продолжайте до тех пор, пока не войдете в четвертое измерение.



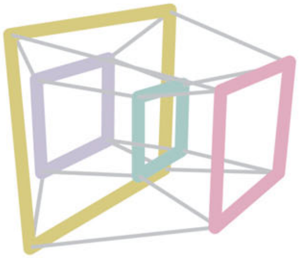
1



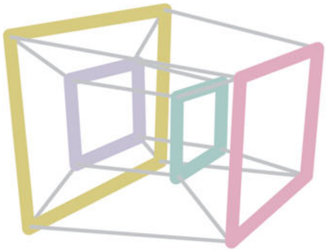
2



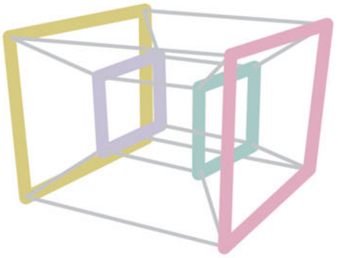
3



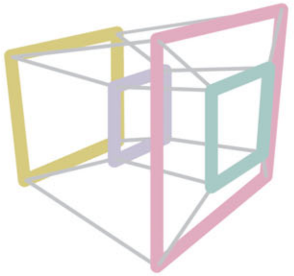
4



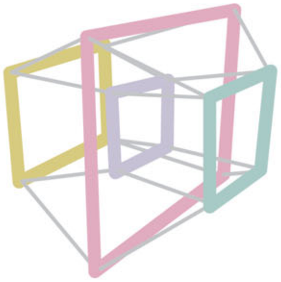
5



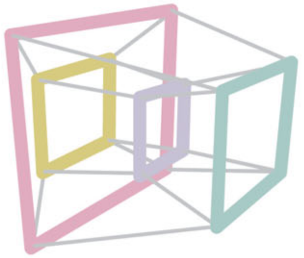
6



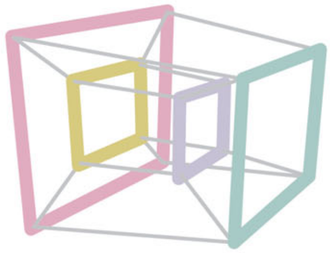
7



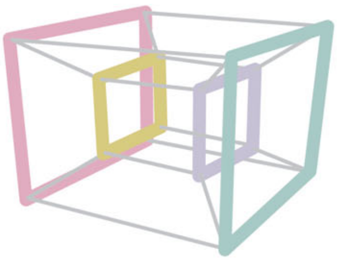
8



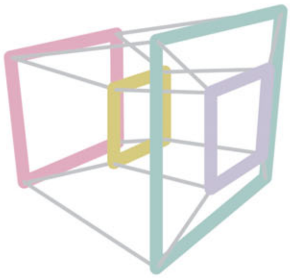
9



10



11



12

Математические символы

Математические символы не исчерпываются знаками + и –. Для краткой и стандартизированной записи математического языка требуется немало других. Понятно, что неофита эта система записи может сбивать с толку. Приведенные здесь таблицы помогут разобраться, что к чему.

Система математических символов разрабатывалась столетиями. Забавно, что некоторые простейшие операции до сих пор не имеют единого обозначения: умножение, например, записывается и как «×», и как «·». В англоязычных странах десятичная часть дроби отделяется от целой точкой (1.23), во многих других — запятой (1,23).

Символ	Название	Значение или пример
АРИФМЕТИКА		
=	Равно	Равенство
≠	Не равно	Неравенство
>	Сравнение	Строго больше
<	Сравнение	Строго меньше
≥	Сравнение	Больше или равно
≤	Сравнение	Меньше или равно
( )	Скобки	Приоритетность совершения действия (действие в скобках выполняется раньше остальных)
+	Плюс	Сложение
−	Минус	Вычитание
±	Плюс-минус	Значение выражения может быть как положительным, так и отрицательным
∓	Минус-плюс	Значение выражения может быть как отрицательным, так и положительным
*	Умножение	Умножить
×	Умножение	Умножить
·	Умножение	Умножить
÷	Деление	Разделить
/	Деление	Разделить
−	Дробь	Деление, запись в виде дроби (частей целого)
mod	Остаток	Остаток при делении ненацело
.	Точка (запятая)	Разделитель в десятичной дроби
a^b	Степень	Возведение в степень
$\sqrt{a}$	Корень квадратный (радикал)	$\sqrt{a}$ x $\sqrt{a}$ = a
$\sqrt[3]{a}$	Корень кубический	
$\sqrt[4]{a}$	Корень четвертой степени	
$\sqrt[n]{a}$	Корень n–ной степени	
%	Процент	Сотая часть
‰	Промилле	Тысячная часть
ppm	Частей на миллион	Миллионная часть
ppb	Частей на миллиард	Миллиардная часть
ppt	Частей на триллион	Триллионная часть
ГЕОМЕТРИЯ		
∠	Угол	∠ ABC = 30°
∡	Измеренный угол	[Измеренный угол] ABC = 30°
∟	Прямой угол	= 90°
°	Градус	В круге 360°
′	Минута	1° = 60′
″	Секунда	1′ = 60″
CD	Отрезок CD	Кратчайшее расстояние между точками C и D
⊥	Перпендикуляр	Перпендикулярные линии
‖	Параллели	Параллельные линии
≅	Конгруэнтность	Геометрический эквивалент
~	Подобие	Разность размеров при единстве формы
|a-b|	Расстояние	Расстояние между двумя точками
π	Число Пи	π = 3,141592654…
rad	Радианы	360° = 2π rad
grad	Градиенты	360° = 400 grad

Символ	Название	Значение или пример
АЛГЕБРА		
x	Переменная «икс»	Неизвестная величина
$\equiv$	Тождество	Тождественное равенство
$:=$	Определение	Равно (равносильно) по определению
$\sim$	Приблизительно	Приблизительное равенство (по порядку величины)
$\approx$	Примерно	Примерное равенство (более строгое)
$\propto$	Пропорция	
∞	Лемниската (Бесконечность)	Бесконечность
$\ll$	Много меньше	$1 << 9876544321$
$\gg$	Много больше	$9876544321 >> 1$
$X!$	Факториал	$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$
$\|x\|$	Абсолютная величина	Модуль, мощность.
$f(x)$	Функция f от x	Правило, согласно которому, каждому значению x соответствует определенное значение y (или f(x)).
Δ	Дельта	Разница, изменение
$\sum$	Сигма	Сумма
$\sum\sum$	Сигма сигма	Двойное сложение
$\prod$	Заглавная Пи	Произведение всех множителей
e	Постоянная е (Число Эйлера)	Основание натурального логарифма; $e = 2.718281828\ldots$
γ	Постоянная Эйлера-Маскерони	$\gamma = 0.527721566\ldots$
$\cdot$	Точка	Скалярное произведение
$\times$	Крест	Векторное произведение
$\|\|x\|\|$	Норма	Норма
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ		
$\lim$	Предел	Предельное значение функции
ε	Эпсилон	Сколь угодно малое вещественное число
$\partial x/\partial y$	Производная	Производная в записи Лейбница

Символ	Название	Значение или пример
$\int$	Интеграл	Противоположность производной
$\iint$	Двойной интеграл	Интегрирование функции с двумя переменными
$\iiint$	Тройной интеграл	Интегрирование функции с тремя переменными
$\oint$	Интеграл по закрытому контуру	
$\oiint$	Интеграл по закрытой плоскости	
i	Мнимая единица	$i \equiv \sqrt{-1}$
ЛОГИКА		
$\wedge$	Конъюнкция	«и»
$\vee$	Дизъюнкция	«или»
$\neg$	Отрицание	«не»
$\sim$	Тильда	Отрицание
$\forall$	Квантор всеобщности	«для любых», «для всех»
$\exists$	Квантор существования	«существует»
$\nexists$	Квантор отсутствия	«не существует»
$\therefore$	Следствие	«поэтому»
$\because$	Причина	«Отсюда»
δ	Дельта-функция	
СТАТИСТИКА		
$P(A)$	Вероятностная функция	Вероятность события А
$P(A \cap B)$	Вероятность пересечения события	Вероятность события А и В
$P(A \cup B)$	Вероятность объединения событий	Вероятность события А или В
$P(A \mid B)$	Вероятность причинности событий	Вероятность события А с учетом события В
μ	Популяционное среднее	Значение в среднем по популяции
$Bin(n,p)$	Биномиальное распределение	
$Poisson(\lambda)$	Распределение Пуассона	
$Geom(p)$	Геометрическое распределение	

БИБЛИОГРАФИЯ И СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Книги

А. Беллос. Алекс в стране чисел. Необычайное путешествие в волшебный мир математики. — М. КоЛибри, Азбука-Аттикус. 2012.

М. Гарднер. Математические головоломки и развлечения. — М. АСТ, Зебра Е. 2010.

М. Гарднер. Математические чудеса и тайны. — М. Современное слово. 2011.

Т. Крилли. Математика. 50 идей, о которых нужно знать. — М. Фантом Пресс. 2014.

Б. Рассел. Введение в математическую философию. — М. Гнозис. 1996.

С. Сингх. Великая теорема Ферма. — М. МЦНМО. 2000.

И. Стюарт. Величайшие математические задачи. — М. Альпина Нон-фикшн. 2015.

Э. Эбботт. Флатландия. Д. Бюргер. Сферландия. — М. Амфора. 2001.

Bellos, Alex. Alex's Adventures in Numberland. London: Bloomsbury Publishing, 2011.

Biddiss, Mark. Dr Mark's Magical Maths. London: Hands On Publishing, 2004.

Boyer, Carl B. A History of Mathematics. Hoboken: John Wiley and Sons, 1991.

Clegg, Brian. Infinity: The Quest to Think the Unthinkable. London: Robinson, 2005.

Cooke, R. The History of Mathematics. New York: John Wiley and Sons, 1997.

Courant, Richard, Herbert Robbins and Ian Stewart. What is Mathematics? New York: Oxford University Press, USA, 1996.

Ewald, William B., ed. From Immanuel Kant to David Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics. New York: Oxford University Press, USA, 1996.

Gardner, Martin. The Colossal Book of Mathematics. New York: W. W. Norton, 2001.

Hoffman, Paul. The Man Who Loved Only Numbers. New York: Hyperion, 1998.

Hogben, Lancelot. Mathematics for the Million: How to Master the Magic of Numbers. New York: W.W. Norton, 1983.

Linton, Christopher M. From Eudoxus to Einstein–A History of Mathematical Astronomy. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

MacArdle, Meredith (ed.). Scientists: Extraordinary People who Changed the World. London: Basement Press, 2008.

Maor, Eli. "e," the Story of a Number. Princeton: Princeton University Press, 2009

Scerri, Eric R. The Periodic Table: A Very Short Introduction. Oxford: Oxford University Press, 2011.

––The Codebook. New York: Doubleday, 1999.

Stewart, Ian. Does God Play Dice? London: Penguin, 1989.

––The Magical Maze. New York: John Wiley & Sons, 1999.

Struik, Dirk J. A Concise History of Mathematics. New York: Dover Publications, 1987.

Математические общества

Австралийское математическое общество www.austms.org.au

Австрийское математическое общество www.oemg.ac.at

Американское математическое общество www.ams.org

Африканский математический союз www.math.buffalo.edu/mad/AMU

Бразильское математическое общество www.sbm.org.br

Датское математическое общество www.dmf.mathematics.dk

Индийское математическое общество www.indianmathsociety.org.in

Институт прикладной математики (Великобритания) www.ima.org.uk

Итальянский математический союз www.umi.dm.unibo.it

Канадское математическое общество www.ms.math.ca

Канадское общество прикладной и промышленной математики www.caims.ca

Китайское математическое общество www.cms.org.cn

Королевское испанское математическое общество www.rsme.es

Лондонское математическое общество www.lms.ac.uk

Математическая ассоциация Америки www.maa.org

Математический институт Клэя www.claymath.org

Математическое общество Голландии (Wiskundig Genootschap) www.wiskgenoot.nl

Математическое общество Франции smf.emath.fr

Математическое общество Швейцарии www.math.ch

Математическое общество Яноша Бойяи (Венгрия) www.bolyai.hu

Математическое общество Японии www.mathsoc.jp

Международный математический союз www.mathunion.org

Немецкое математическое общество www.dmv.mathematik.de

Общество математиков, физиков и астрономов Словении www.dmfa.si

Польское математическое общество www.ptm.org.pl

Санкт-Петербургское математическое общество www.mathsoc.spb.ru

Союз словацких математиков и физиков www.fmph.uniba.sk

Союз чешских математиков и физиков www.cms.jcmf.cz

Шведское математическое общество www.swe-math-soc.se

Музеи

«Страна приключений Математика» (Erlebnisland Mathematik), Дрезден, Германия. www.math.tu-dresden.de

iQ-парк, Либерец, Прага, Чехия. www.iqpark.cz

Powerhouse Museum, Сидней, Австралия. www.powerhousemuseum.com

Дворец математики. Mathematics Palace, Navet Science Center, Борас, Швеция. www.navet.com

Дворец открытий, Париж, Франция. www.palais-decouverte.fr

Детский музей DuPage, Нейпервиль, Иллинойс, США. www.dupagechildrensmuseum.org

Китайский музей науки и техники, Пекин, Китай. www.cstm.org.cn

Математический музей Каталонии, Барселона, Испания. www.mmaca.cat

Московский планетарий, Москва, Россия. www.planetarium-moscow.ru

Музей «Математикум», Гессен¸ Германия. www.mm-gi.de

Музей «Обсерватория», Стокгольм, Швеция. www.observatoriet.kva.se/en

Музей «Техинквест», Кардифф, Великобритания. www.techniquest.org

Музей арифметики «Аритмеум» (Arithmeum), Бонн, Германия. www.arithmeum.uni-bonn.de

Музей Галилея, Институт и музей истории науки, Флоренция, Италия. www.museogalileo.it

Музей естественных наук и приборов Университета Модены, Модена, Италия. www.museo.unimo.it

Музей истории компьютера, Маунтин-Вью, Калифорния, США www.computerhistory.org

Музей истории науки, Оксфорд, Великобритания. www.mhs.ox.ac.uk

Музей Массачусетского технологического института, Кембридж, Массачусетс, США. www.web.mit.edu/museum

Музей математики в науке и искусстве (Музей Гудро), Нью-Йорк, США. www.mathmuseum.org

Музей математики, Нью-Йорк, США. (Открыт с декабря 2012 г.) www.momath.org

Музей науки Института Франклина, Филадельфия, США. www2.fi.edu

Музей науки, Бостон, США. www.mos.org

Музей науки, Лондон, Великобритания. www.sciencemuseum.org.uk

Музейный квартал, Вена, Австрия. www.mqw.at

Научный центр Коперника, Варшава, Польша. www.kopernik.org.pl/en/

Научный центр Онтарио, Торонто, Канада. www.ontariosciencecentre.ca

Национальный музей природы и науки. www.kahaku.go.jp/english

Немецкий музей, Мюнхен, Германия. www.deutsches-museum.de

Норвежский музей науки и техники, Осло, Норвегия. www.tekniskmuseum.no

Павильон знаний, Лиссабон, Португалия. www.pavconhecimento.pt/home

Политехнический музей, Москва, Россия. polymus.ru/ru

Смитсоновский институт, Вашингтон, Округ Колумбия, США. www.si.edu

Тирольский математический музей, Инсбрук, Австрия. www.mathemuseum.org

Умникум, Санкт-Петербург, Россия. www.umnikum.com

Федеральный резервный банк Филадельфии. Постоянная экспозиция «Деньги в движении», Филадельфия, США. www.phil.frb.org

Шанхайский музей науки и техники, Шанхай, Китай. www.sstm.org.cn

Экспериментаниум, Москва, Россия. www.experimentanium.ru

Эксплораториум, Сан-Франциско, США. www.exploratorium.edu

Архивы и персональные выставки

Архив Чарльза Бэббиджа и образец разностной машины: Музей науки, Лондон, Великобритания. www.sciencemuseum.org.uk

Архив Джорджа Буля: Лондонское королевское общество, Лондон, Великобритания. www.royalsociety.org. Архив Библиотеки Буля: Национальный университет Ирландии, Корк, Ирландия; Тринити-колледж, Дублин, Ирландия; Библиотека университета Кембридж, Кембридж, Великобритания.

Архив Рене Декарта: Институт Франции, Париж, Франция. www.institut-de-france.fr

Архив Альберта Эйнштейна: Еврейский университет в Иерусалиме, Израиль. www.huji.ac.il

Образцы шифровальной машины «Энигма»: Австралийский военный мемориал, Канберра, Австралия; Блетчли-Парк, Милтон Кинс, Великобритания; Музей истории компьютера, Маунтин-Вью, Калифорния, США; Управление радиотехнической обороны, Канберра, Австралия; Немецкий музей, Мюнхен, Германия; Музей науки и технологии, Чикаго, Иллинойс, США; Национальный музей криптографии, Форт Мид, Мэриленд, США; Национальный музей средств связи, Хельсинки, Финляндия; Морской музей Альберты, Калгари, Канада; Польский музей Вооруженных Сил, Варшава, Польша; Музей науки, Лондон, Великобритания; Шведский музей Вооруженных сил, Стокгольм, Швеция.

Архив Курта Гёделя: Университет Принстон, Принстон, США. www.princeton.edu

Архив Уильяма Гамильтона: Тринити-Колледж, Дублин, Ирландия. www.tcd.ie. Письма в библиотеке университета Кембридж, Кембридж, Великобритания; Лондонское королевское общество, Лондон, Великобритания, Британская библиотека, Лондон, Великобритания.

Архив Джона Непера: Библиотека Ламбетского дворца, Лондон, Великобритания. www.lambethpalacelibrary.org

Архив Исаака Ньютона: Библиотека университета Кембридж, Кембридж, Великобритания. www. cudl.lib.cam.ac.uk

Архив Бертрана Рассела: Библиотека университета Макмастер, Гамильтон, Канада. www.library.mcmaster.ca

Архив Алана Тьюринга: Архив Королевского колледжа, Кембридж, Кембридж, Великобритания. www.kings.cam.ac.uk. Национальный архив истории компьютера, Манчестерский университет, Манчестер, Великобритания. www.chstm.manchester.ac.uk

Сайты

Khan Academy: www.khanacademy.org/#chemistry

MacTutor History of Mathematics archive: www-history.mcs.standrews.ac.uk

Nobel Foundation: www.nobelprize.org

Приложения

Minds of Modern Mathematics. IBM, для iPad.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Ponderables: 100 Breakthroughs That Changed History
Mathematics
An Illustrated History of Numbers

Джексон, Том.
Д40 Математика: иллюстрированная история / Том Джексон ; [пер. с англ. А. Соловьева]. — Москва : Издательство «Э», 2017. — 168 с. : ил. — (Иллюстрированная энциклопедия науки).

Математика — это наука, искусство, огромное поле для воображения и творчества. История ее начинается с единицы, но бесконечность — это далеко не финал.

В этой красивой большой энциклопедии вы найдете ровно 100 историй о прекрасных математических загадках, которые знаменитые математики смогли разгадать и разъяснить миру. Пифагор, Эвклид, Фибоначчи, Пьер де Ферма, Уильям Гамильтон, Анри Пуанкаре, Алан Тьюринг, Джон фон Нейман — в этой книге мы расскажем о них и их гениальных открытиях, а также о многих других известных математиках.

Красивые иллюстрации и фотографии помогут легко понять суть открытий. Откройте целый мир математических чудес прямо рядом с вами!

УДК 51(091)
ББК 22.1г

ISBN 978-5-699-75288-1

Научно-популярное издание

ИЛЛЮСТРИРОВАННАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ НАУКИ

Том Джексон

МАТЕМАТИКА

ИЛЛЮСТРИРОВАННАЯ ИСТОРИЯ
(орыс тілінде)

Директор редакции *Е. Капьёв*
Ответственный редактор *В. Иванова*
Художественный редактор *А. Гусев*

В оформлении переплета использованы фотографии:
arleksey, Senoldo / Shutterstock.com
Используется по лицензии от Shutterstock.com

ООО «Издательство «Э»
123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел. 8 (495) 411-68-86.
Өндіруші: «Э» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел. 8 (495) 411-68-86.
Тауар белгісі: «Э»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша арыз-талаптарды қабылдаушының
өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС, Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.
Тел.: 8 (727) 251-59-89/90/91/92, факс: 8 (727) 251 58 12 вн. 107.
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайтта Өндіруші «Э»

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ
о техническом регулировании можно получить на сайте Издательства «Э»

Өндірген мемлекет: Ресей
Сертификация қарастырылмаған

Знак информационной продукции
6+
согласно Федеральному закону от 29.12.2010 г. № 436-ФЗ

Подписано в печать 18.11.2016. Формат 60x84$^1/_8$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,6.
Тираж экз. Заказ

ISBN 978-5-699-75288-1
9 785699 752881 >

САМОЕ ВАЖНОЕ
О МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИКАХ

Истории открытий в математике – это настоящие детективы, приключения, которые заставляют философов и ученых как следует пошевелить извилинами. Не всегда одно открытие делает один ученый, иногда требуются десятилетия и даже столетия, чтобы разрешить ту или иную математическую загадку.

В книге представлены 100 потрясающих историй об ученых и их приключениях в мире чисел, формул и неравенств. Пифагор, Фибоначчи, Ферма, Пуанкаре, Тьюринг, Перельман и многие другие известные ученые внесли важный вклад в математику, и книга простым и понятным языком раскроет вам тайны, которые лежат в основе всей нашей жизни.

ISBN 978-5-699-75288-1