МГЗПИ

Н. Я. Виленкин,
М. Б. Балк,
В. А. Петров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

МОЩНОСТЬ. МЕТРИКА. ИНТЕГРАЛ

МГЗПИ

МИНИСТЕРСТВО
ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Московский государственный
заочный педагогический институт

Н. Я. Виленкин,
М. Б. Балк,
В. А. Петров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

МОЩНОСТЬ. МЕТРИКА. ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие
для студентов-заочников
IV курса
физико-математических факультетов
педагогических институтов

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1980

Рекомендовано к печати Главным управлением высших и средних педагогических учебных заведений Министерства просвещения РСФСР

Редактор МГЗПИ — *О. А. Павлович*

Рецензенты: *М. И. Граев, А. С. Симонов, В. Ф. Молчанов, М. Ф. Бокштейн, Ф. А. Кабаков, Е. А. Щегольков*

В $\frac{60602-202}{103(03)-80}$ заказное

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга является учебным пособием для студентов педагогических институтов по следующим разделам программы курса «Математический анализ»: «Элементы теории множеств», «Метрические пространства», «Полные метрические пространства», «Интеграл Лебега», «Ряды Фурье».

Первая глава посвящена изучению бесконечных множеств и содержит основные теоремы о мощности множеств, о счетных множествах и о множествах мощности континуума.

Во второй главе рассматриваются метрические пространства и, в частности, линейные нормированные пространства. Из методических особенностей главы выделим здесь построение теории открытых и замкнутых множеств на базе понятия граничной точки (а не на базе понятия «предельной точки», как это общепринято в учебных пособиях); определение связности пространства основано на понятии непрерывного отображения.

В эту главу включено изложение вопроса о пополнении метрических пространств (который выходит за рамки программы, но, по мнению авторов, весьма существен для различных разделов математики, в том числе и для более глубокого осмысления школьной математики). Теорема о неподвижной точке использована для доказательства теоремы существования решения дифференциального уравнения первого порядка (авторы полагают, что доказательство аналогичной теоремы для систем уравнений не вносит новых математических идей и поэтому — по крайней мере, в пособии для заочников — может быть опущено).

Третья глава содержит материал, относящийся к теории интеграла и меры Лебега. Излагаемый здесь подход к этой теории, принадлежащий Н. Я. Виленкину и развитый В. А. Петровым, не встречается в известной нам литературе. При таком подходе нет необходимости до построения класса суммируемых функций предварительно рассматривать интеграл от ограниченных функций. Здесь сразу строится класс суммируемых функций (в том числе и на неограниченном измеримом множестве). При этом изложении лучше вскрывается наглядный смысл интеграла Лебега. Глава заканчивается рассмотрением полных пространств интегрируемых функций и ортогональных систем функций в $\mathbf{L}^2 [0; 2\pi]$.

Каждый параграф завершается вопросами для самопроверки и списком номеров задач по книге В. А. Петрова, Н. Я. Виленкина, М. И. Граева «Элементы функционального анализа в задачах» (1978 г.).

Книга разбита на главы, параграфы, пункты. Нумерация теорем, лемм, примеров и формул сплошная в пределах параграфа.

Данная книга входит в серию учебных пособий, выпускаемых издательством «Просвещение» для студентов-заочников по курсу «Математический анализ». Ранее уже были опубликованы в этой серии «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление», готовятся к изданию пособия «Ряды», «Функции многих переменных», «Теория аналитических функций». Эти пособия (написанные под общим руководством проф. Н. Я. Виленкина) в совокупности образуют единый курс математического анализа для студентов-заочников педвузов, охватывающий весь материал, предусмотренный программой.

В основу данной книги положены лекции, многократно читавшиеся авторами в МГЗПИ и Смоленском пединституте.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам книги — профессору М. И. Граеву, доценту А. С. Симонову, доценту В. Ф. Молчанову, кафедре математического анализа МГПИ им. В. И. Ленина,— замечания которых позволили улучшить первоначальный вариант книги.

Авторы просят присылать замечания о возможных недостатках книги по адресу: Москва 129 846 3-й проезд Марьиной рощи, издательство «Просвещение», редакция математики.

ГЛАВА 1

МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

§ 1. РАВНОМОЩНЫЕ МНОЖЕСТВА

1. Биекции и равномощность бесконечных множеств. Исходная проблема, приведшая к созданию теории множеств, состояла в следующем: можно ли вообще — и если можно, то как — различать бесконечные множества по количеству имеющихся в них элементов? Эта задача издавна интересовала как философов, так и математиков.

С одной стороны, казалось бы, очевидно, что поскольку каждое из бесконечных множеств содержит бесконечно много элементов, то можно считать, что этих элементов в каждом из них одинаково много. С другой стороны, поскольку, например, множество простых чисел составляет лишь часть множества натуральных чисел, то несмотря на то что оба эти множества содержат бесконечно много элементов, казалось бы, следует считать, что простых чисел меньше, чем натуральных.

Такого рода противоречия возникли из-за того, что для бесконечных множеств не было четко определено, что значат слова «столько же элементов», «больше элементов» и т. п.

Г. Кантору[1] удалось осуществить сравнение бесконечных множеств друг с другом, использовав понятие биективного соответствия.

Если каждому элементу a множества A по некоторому правилу поставлен в соответствие один элемент b множества B, то говорят, что задано *отображение* f множества A во множество B (пишут: $f\colon A \to B$). Элемент b при этом называют *образом элемента a при отображении f* и обозначают $f(a)$. Если $A_1 \subset A$, то совокупность образов элементов из A_1 обозначают $f(A_1)$:

$$f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}.$$

Элемент $x \in A$, такой, что $f(x) = b$, называют *прообразом элемента b при отображении f*. Не исключено, что при данном отобра-

---

[1] Георг Кантор (1845—1918) — немецкий математик; с 1872 г. профессор университета в Галле. В первых своих исследованиях занимался теорией тригонометрических рядов, а впоследствии разработал теорию бесконечных множеств.

жении f у элемента b будет больше одного прообраза или их не будет совсем. Множество всех прообразов данного элемента b называют *полным прообразом* этого элемента при отображении f и обозначают $f^{-1}(b)$. Если $B_1 \subset B$, то

$$f^{-1}(B_1) = \{x \mid f(x) \in B_1\}.$$

Например, пусть $A = B = \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел, а $f\colon A \to B$ определяется формулой $f(x) = \sin x$. Тогда прообразом числа $b = 0$ является любое число вида $a = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$, а полным прообразом нуля служит множество всех чисел, кратных π:

$$f^{-1}(0) = \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

Если $f(A) = B$, то говорят, что f — *отображение A на B*, или *сюръективное* отображение[1]. Употребляется также термин «сюръекция» (накрытие). Если из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$, то f называют *обратимым* или *инъективным* отображением (в этом случае полный прообраз каждого элемента из B либо пуст, либо состоит из одного элемента). Употребляется также термин «инъекция» (вложение).

Назовем отображение $f\colon A \to B$ *взаимно однозначным* или *биективным*, если оно инъективно и сюръективно. Иногда такое отображение называют *взаимно однозначным соответствием* между A и B. Употребляется также термин «биекция». Итак, соответствие между множествами A и B называется взаимно однозначным (биективным) если:

а) каждому элементу $a \in A$ соответствует один и только один элемент $b \in B$;

б) каждый элемент $b \in B$ соответствует одному и только одному элементу из A.

Легко видеть, что справедливы следующие утверждения:

1. *Тождественное преобразование $E\colon A \to A$ биективно.*

2. *Если $f\colon A \to B$ биективно, то существует обратное отображение $f^{-1}\colon B \to A$, причем оно тоже биективно.*

3. *Если отображения $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$ биективны, то и их композиция $g \circ f$ тоже биективна.*

Назовем два множества A и B *равномощными*, если одно из них можно биективно отобразить на другое; при этом пишут: $A \sim B$.

Иными словами, *два множества равномощны, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.*

Из свойств 1—3 биекций вытекает справедливость следующих утверждений:

1) $A \sim A$;

2) если $A \sim B$, то $B \sim A$;

3) если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Они означают, что отношение равномощности рефлексивно, симметрично и транзитивно и потому является отношением эквивалентности.

---

[1] От французского sur (сюр) — на.

Примеры. **1.1.** Множество A нечетных натуральных чисел и множество B четных натуральных чисел равномощны, так как формула $f(n) = n + 1$ задает биекцию $A \to B$ (при этом отображении число 1 переходит в 2, число 3 — в 4 и т. д.).

1.2. Множество $\mathbf{R}_+$ положительных действительных чисел равномощно множеству $\mathbf{R}_-$ отрицательных действительных чисел, так как формула $f(x) = -x$ задает биекцию $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_-$.

1.3. Множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел равномощно множеству A чисел, являющихся точными квадратами.

Действительно, формула $f(n) = n^2$ задает биекцию $\mathbf{N} \to A$.

Этот пример показывает, что *бесконечное множество* (в отличие от конечных множеств) *может быть равномощно своей части.*

Примеры. **1.4.** Любые два интервала $]a; b[$ и $]c; d[$ равномощны.

Действительно, биекция $f\colon]a; b[\to]c; d[$ может быть задана формулой $f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$ или с помощью центрального проектирования (рис. 1).

1.5. Интервал $]a; b[$ и числовая прямая $]-\infty; +\infty[$ равномощны.

Поскольку любые два интервала равномощны, достаточно показать равномощность интервала $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ и числовой прямой. Это же вытекает из того, что отображение $x \to \operatorname{tg} x$ задает биекцию $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R}$.

Геометрически отображение интервала на прямую показано на рисунке 2.

1.6. Множество точек круга радиуса R и множество точек круга радиуса r равномощны.

Для задания биективного отображения достаточно взять круги с общим центром O и выполнить гомотетию с центром O и коэффициентом $\frac{R}{r}$.

1.7. *«Отель Гильберта»*[1]. Вообразим, что где-то, в далеком космосе, имеется гостиница, содержащая бесконечное число одиночных номеров. Однажды в гостиницу приехал человек и попросил себе отдельный номер. Директор навел справку и узнал, что все номера заняты. Тем не менее он сумел выделить гостю отдельный номер, не выселив из гостиницы ни одного из жильцов. Как это ему удалось сделать?

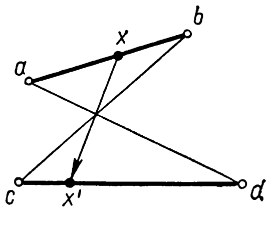

Рис. 1

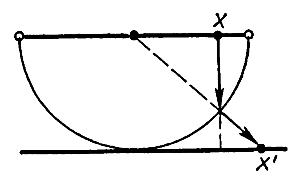

Рис. 2

[1] Давид Гильберт (1862—1943) — немецкий математик; с 1895 г. — профессор Геттингенского университета. Он получил фундаментальные результаты почти во всех областях математики: в геометрии (аксиоматическое изложение геометрии), алгебре (теория инвариантов), анализе (теория гильбертовых пространств, интегральные уравнения), теории чисел (решение задачи Варинга), математической логике и др. Широко известны 23 проблемы Гильберта, сформулированные им на математическом конгрессе в Париже в 1900 г.

Директор наметил сначала бесконечную последовательность номеров для переселения. Обозначим эти номера $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$. Жильцов, проживающих в соответствующих номерах, обозначим $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$, а вновь приехавшего — y. Нового жильца помещают в номер x_1, старого жильца y_1 переселяют из этого номера в номер x_2, жильца y_2 из номера x_2 переселяют в номер x_3 и т. д.:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] y \arrow[dr] & y_1 \arrow[dr] & y_2 \arrow[dr] & y_3 \arrow[dr] & \dots \\ & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \end{tikzcd}$$

Этот пример показывает, как, имея биекцию $f\colon A \to B$, можно построить биекцию $f'\colon A' \to B$, где A' — множество, полученное из A добавлением одного элемента.

Идея «отеля Гильберта» нередко используется для установления равномощности бесконечных множеств.

Пример 1.8. Отрезок $[a; b]$ и интервал $]a; b[$ равномощны.

Действительно, отрезок может быть получен из интервала путем поочередного присоединения его концов.

2. Понятие мощности множества. Мы определили понятие равномощности для бесконечных множеств и рассмотрели примеры равномощных множеств. Естественно возникает вопрос, не являются ли все бесконечные множества равномощными. Убедимся, что это не так.

Теорема 1.1. *Множество* $\mathbf{N}$ *натуральных чисел и множество* $\mathbf{R}$ *действительных чисел не равномощны.*

Доказательство. Пусть f — произвольное отображение множества $\mathbf{N}$ в $\mathbf{R}$. Возьмем на числовой прямой $\mathbf{R}$ отрезок $\Delta = [0; 1]$ и разобьем его на три конгруэнтных отрезка. Хотя бы один из этих отрезков не содержит образа числа 1. Обозначим его через Δ_1. Итак, $f(1) \notin \Delta_1$. Разобьем отрезок Δ_1 снова на три конгруэнтных отрезка и выберем отрезок Δ_2, не содержащий образа числа 2.

Продолжая этот процесс неограниченно, получим такую последовательность отрезков (Δ_n), что $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots$ и $f(n) \notin \Delta_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Так как длина отрезка Δ_n равна $\frac{1}{3^n}$, а $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{3^n} = 0$, то (Δ_n) — последовательность вложенных стягивающихся отрезков. Поэтому существует точка c, принадлежащая всем отрезкам Δ_n.

Ни одно натуральное число n не может оказаться прообразом точки c, так как c принадлежит отрезку Δ_n, а образ числа n ему не принадлежит. Это означает, что отображение $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ не биективно. Поскольку f — произвольное отображение множества $\mathbf{N}$ в $\mathbf{R}$, то мы доказали, что задать биективное отображение $\mathbf{N}$ на $\mathbf{R}$ невозможно, т. е. множества $\mathbf{N}$ и $\mathbf{R}$ неравномощны.

Итак, мы убедились (и этот факт был одной из причин возникновения теории множеств), что не все бесконечные множества равномощны. Поставим в соответствие каждому множеству A (конечному или бесконечному) класс, состоящий из всех равномощных ему множеств. Так, например, в один и тот же класс попадут: множество пальцев человеческой руки, множество букв в слове «книга», множество типов правильных многогранников (тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, гексаэдр, додекаэдр) и многие другие. В один из классов попадут всевозможные множества, равномощные множеству натуральных чисел. В каком-то из классов окажутся всевозможные множества, равномощные множеству действительных чисел и т. д.

Наряду с выражением «класс равномощных множеств» употребляют выражение «класс множеств, имеющих одинаковую мощность» и часто, вместо того чтобы сказать: «множество A равномощно множеству B» (и написать $A \sim B$), говорят: «*мощность множества A равна мощности множества B*» (и пишут: $|A| = |B|$). Класс множеств, равномощных A, можно задать путем указания какого-нибудь «стандартного» представителя этого класса. Например, среди множеств, равномощных конечному множеству A, есть одно и только одно множество вида $\{1, 2 \ldots, n\}$ (отрезок натурального ряда чисел). Поскольку это множество однозначно задается натуральным числом n, то для краткости говорят, что мощность A равна n, и пишут: $|A| = n$. Следовательно, понятие мощности — обобщение понятия натурального числа.

Множества, равномощные множеству $\mathbf{N}$ натуральных чисел, называют *счетными*. Запись $|A| = |\mathbf{N}|$ обозначает, что A — счетное множество. Множества, равномощные множеству $\mathbf{R}$ действительных чисел, называют множествами *мощности континуума*. Соответствующая запись имеет вид $|A| = |\mathbf{R}|$. Теорема 1.1 означает, что $|\mathbf{N}| \neq |\mathbf{R}|$.

3. Признаки равномощности множеств. Естественный способ отыскания мощности данного множества A — отыскание биективного отображения этого множества на «стандартное» множество, являющееся представителем того или иного класса равномощных множеств. Однако построение конкретной биекции часто оказывается делом весьма сложным. Поэтому возникает вопрос об отыскании признаков равномощности множеств. Рассмотрим два таких признака, угаданных Г. Кантором, но доказанных лишь позднее Ф. Бернштейном[1].

Будем говорить, что множество B является *промежуточным* для двух других множеств A и C, если оно содержится в одном из них и содержит в себе другое ($A \supset B \supset C$).

Теорема 1.2. (О промежуточном множестве.) *Если некоторое множество является промежуточным для двух равномощных множеств, то все три множества равномощны.*

Пусть даны множества A, B и C, причем $A \supset B \supset C$ и $A \sim C$. Требуется доказать, что $A \sim B$. Прежде чем проводить доказательство в общем виде, разберем конкретный пример. Пусть A —

---

[1] Феликс Бернштейн (1878—1956) — профессор Геттингенского университета. Его научные работы относятся к теории множеств, алгебре, теории чисел.

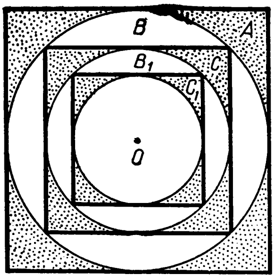

Рис. 3

квадрат, B — вписанный в него круг, C — квадрат со сторонами, параллельными сторонам квадрата A, вписанный в круг B (рис. 3). Квадраты A и C равномощны, так как гомотетия φ с центром в точке O и коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{2}}$ отображает биективно A на C. Покажем, что $A \sim B$. Для этого установим биекцию A на B.

При гомотетии φ круг B переходит в круг B_1, а квадрат C — в квадрат C_1. Та же гомотетия переводит круг B_1 в круг B_2, а квадрат C_1 — в квадрат C_2 и т. д. Мы имеем последовательность кругов $B \supset B_1 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$ и последовательность квадратов $A \supset C \supset C_1 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots$ с общим центром O. Нам надо отобразить квадрат A на круг B. Воспользуемся идеей «отеля Гильберта» (см. пример 1.7). Возьмем «лишние» уголки квадрата A (на рисунке 3 они заштрихованы) и отобразим их с помощью гомотетии φ на соответствующие им уголки квадрата C. Чтобы освободить им место, с помощью той же гомотетии отобразим уголки квадрата C на уголки квадрата C_1 и т. д. Так как множество квадратов бесконечно, всем уголкам найдется место. Точки же, принадлежащие незаштрихованным круговым сегментам, и точку O оставим неподвижными. Очевидно, при этом получается биективное отображение A на B.

В случае произвольных множеств A, B, C доказательство теоремы 1.2 менее наглядно.

Доказательство теоремы. Если $A = B$, то теорема тривиальна.

Пусть $A \neq B$. Из условия теоремы вытекает, что существует биекция T: $A \to C$. Для любого $x \in A$ его образ $x' = T(x)$ принадлежит C и, следовательно, принадлежит множеству A. Поэтому можно найти образ элемента x' при отображении T: $x'' = T(x') = T(T(x))$. Понятно, что $x'' \in A$. Элемент x'' обозначим через $T^2(x)$. Аналогично через $T^3(x)$ обозначим образ элемента $T^2(x)$, и, вообще, через $T^n(x)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ — образ элемента $T^{n-1}(x)$. Каждый из элементов $T^n(x)$ назовем *наследником* элемента x.

Условимся ради краткости элемент $y \in A$ называть *черным*, если он принадлежит $A \setminus B$ или является наследником какого-либо элемента из $A \setminus B$. Множество черных элементов не пусто, так как $A \neq B$. Образ $T(x)$ черного элемента x черен, так как если x — наследник элемента a из $A \setminus B$, то $x = T^n(a)$ при некотором $n \in \mathbf{N}$. А тогда $T(x) = T(T^n(a)) = T^{n+1}(a)$, и потому $T(x)$ тоже наследник элемента a из $A \setminus B$.

Все остальные элементы множества A будем называть *белыми*. Таким образом, множество A разбито на два непересекающихся класса — белых и черных элементов.

Сопоставим теперь каждому элементу $x \in A$ элемент $f(x)$ по следующему правилу:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ белый}, \\ T(x), & \text{если } x \text{ черный}. \end{cases}$$

Это правило задает отображение A в B. Действительно, пусть $x \in A$. Если элемент x белый, то $x \in B$, так как $x \notin A \setminus B$. Но $f(x) = x$ и, следовательно, $f(x)$ также принадлежит B. Если элемент x черный, то $f(x) = T(x)$, а $T(x) \in C$ (так как T — отображение A в C). Но, поскольку $C \subset B$, то $f(x) \in B$.

Очевидно, что отображение $f\colon A \to B$ биективно. ■

Теорема 1.3. (Признак Кантора — Бернштейна). *Если каждое из двух данных множеств равномощно части другого, то данные множества равномощны.*

Иначе говоря, если $A \supset A_1 \sim B$ и $B \supset B_1 \sim A$, то $A \sim B$.

Доказательство. Так как $B \sim A_1$, то существует биекция $f\colon B \to A_1$. Обозначим через A_2 образ множества B_1 при этом отображении. Тогда сужение f на B_1 является биекцией B_1 на A_2 (рис. 4). Поэтому $A_2 \sim B_1$, а это в силу транзитивности отношения равномощности означает, что $A_2 \sim A$. Но поскольку $A_2 \subset A_1 \subset A$, то по предыдущей теореме $A \sim A_1$; а так как по условию $B \sim A_1$, то отсюда и вытекает, что $A \sim B$. ■

Примеры. **1.9.** Любой интервал A и любой отрезок B числовой прямой равномощны.

В самом деле, каждый отрезок содержит некоторый интервал, а каждый интервал — некоторый отрезок. Так как все отрезки, так же как и все интервалы, равномощны, то, по теореме Кантора — Бернштейна, $A \sim B$.

1.10. Любой круг A равномощен любому квадрату B.

Действительно, рассмотрим некоторый квадрат $A_1 \subset A$ и некоторый круг $B_1 \subset B$. В примере 1.6 показано, что $A \sim B_1$. Тем же способом можно показать, что $B \sim A_1$. Поэтому $A \sim B$.

4. Сравнение мощностей. Пусть A и B — два множества. Если эти множества конечны, то мы можем не только узнать, равномощны ли эти множества, но, в случае их неравномощности, и определить, в каком из них больше элементов.

Для конечных множеств мощность собственного подмножества меньше мощности всего множества. Поэтому можно утверждать, что конечное множество A имеет меньшую мощность, чем конечное множество B, если $A \sim B_1 \subset B$, где $B_1 \neq B$. Это определение нельзя механически перенести на бесконечные множества, поскольку для них собственное подмножество может оказаться равномощным всему множеству (например, отрезки $[a; b]$ и $[a; c]$, где $a < b < c$, равномощны). Изменим данное выше определение следующим образом: будем говорить, что *мощность множества A не превосходит мощности множества B* (мощность множества B не меньше мощности множества A), если A равномощно какому-нибудь подмножеству B_1 из B. В

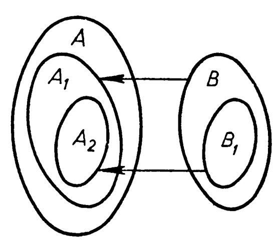

Рис. 4

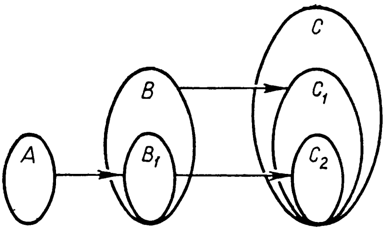

Рис. 5

этом случае пишут: $|A| \leqslant |B|$ (или $|B| \geqslant |A|$). Если же $|A| \leqslant |B|$, а множества A и B не равномощны, то будем говорить, что *мощность множества A меньше мощности множества B*, и писать: $|A| < |B|$. Иными словами, будем считать, что $|A| < |B|$, если: 1) A и B неравномощны; 2) A равномощно некоторой части B.

В случае конечных множеств соотношения $|A| \leqslant |B|$ и $|B| \leqslant |A|$ влекут за собой равенство $|A| = |B|$. Как следует из теоремы Кантора — Бернштейна, аналогичное утверждение верно и в случае произвольных множеств.

Покажем, что отношение «мощность A не превосходит мощности B» транзитивно, т. е. что из $|A| \leqslant |B|$ и $|B| \leqslant |C|$ следует: $|A| \leqslant |C|$.

В самом деле, по условию, существуют подмножества $B_1 \subset B$ и $C_1 \subset C$, такие, что $A \sim B_1$ и $B \sim C_1$. Так как $B_1 \subset B$, то B_1 равномощно подмножеству $C_2 \subset C$ (рис. 5). Но тогда $A \sim C_2 \subset C$ и потому $|A| \leqslant |C|$.

Из доказанного вытекает, что «$\leqslant$» — *отношение нестрогого порядка*, т. е., что оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

При сравнении мощностей полезно следующее утверждение:

Теорема 1.4. *Если существует сюръективное отображение f: $A \to B$, то $|B| \leqslant |A|$.*

Доказательство. Пусть b — произвольный элемент из B. Так как f — сюръекция, то у элемента b существует, по крайней мере, один прообраз $a \in A$. Возьмем для каждого $b \in B$ по одному прообразу и обозначим через A_1 полученное подмножество в A. Тогда $B \sim A_1 \subset A$ и потому $|B| \leqslant |A|$. ■

Пример **1.11.** Мощность множества точек окружности не меньше мощности множества точек ее диаметра.

В самом деле, пусть A — окружность, B — ее диаметр. Сопоставим каждой точке окружности ее ортогональную проекцию на B. Так как это отображение сюръективно, то доказываемое утверждение истинно.

Важнейшими бесконечными множествами являются $\mathbf{N}$ и $\mathbf{R}$. В следующих параграфах мы дадим условия равномощности множества множеству $\mathbf{N}$ или $\mathbf{R}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие отображения называются: а) сюръективными, б) инъективными, в) биективными? Приведите примеры всех трех видов отображений.
2. Дайте определение равномощных множеств.
3. Существует ли множество, равномощное множеству натуральных чисел, но являющееся его собственным подмножеством?

4. Перечислите свойства биективных отображений. Какие свойства отношения равномощности вытекают из них?

5. Существует ли бесконечное множество, неравномощное множеству натуральных чисел?

6. Верно ли, что мощность любого собственного подмножества меньше мощности всего множества?

7. Сформулируйте теорему о промежуточном множестве. Где в доказательстве этой теоремы используется условие: $A \supset B \supset C$?

8. Докажите, что отображение f, определенное при доказательстве теоремы о промежуточном множестве, является биективным. Поясните, почему $f(A) = B$ и почему каждому элементу из B соответствует лишь один элемент из A.

9. Докажите, что точек на прямой не меньше, чем на окружности.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 1. № 1—3, 6—18, 21—23, 36, 37, 54.

§ 2. СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Как было определено выше, счетным множеством или множеством счетной мощности называют любое множество S, равномощное множеству натуральных чисел $\mathbf{N}$. Это означает существование биекции $f: \mathbf{N} \to S$. Если обозначить образ числа n при этой биекции через x_n, то получим нумерацию элементов счетного множества S, при которой будут использованы все номера и каждому элементу из S будет поставлен в соответствие лишь один номер.

Примеры. **2.1.** Множество точных квадратов натуральных чисел счетно, так как числу n^2 можно сопоставить номер n.

2.2. Множество $\mathbf{Z}$ целых чисел счетно.

Действительно, сопоставим числу 0 номер 1, числу 1 номер 2, числу -1 номер 3, числу 2 номер 4, числу -2 номер 5 и т. д. Итак, множество $\mathbf{Z}$ занумеровано; следовательно, оно счетно.

2.3. Множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел счетно.

Действительно, любой элемент множества $\mathbf{Q}$ можно записать в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$). Поэтому, если доказать, что счетно множество таких дробей, то тем самым будет доказана и счетность $\mathbf{Q}$. Изобразим каждую несократимую дробь $\frac{m}{n}$ точкой $(m; n)$ на координатной плоскости. Точке $(0; 1)$ сопоставим номер 1, точке $(1; 1)$ — номер 2, точке $(1; 2)$ — номер 3 и т. д. по маршруту, указанному на рисунке 6. Поскольку мы занумеровали все отмеченные точки, то и все несократимые дроби — а следовательно, и все рациональные числа — оказались занумерованными.

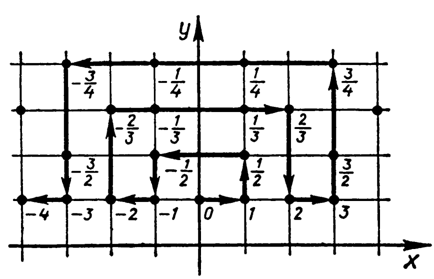

Рис. 6

На особую роль счетных множеств среди всех бесконечных множеств указывает следующая теорема:

Теорема 2.1. *Во всяком бесконечном множестве B имеется счетное подмножество S.*

Другими словами, *счетная мощность — наименьшая из бесконечных мощностей.*

Доказательство. Выберем в B один элемент — это можно сделать, так как B бесконечно и, следовательно, непусто; обозначим его через x_1. Так как B бесконечно, то $B \setminus \{x_1\}$ тоже непусто. Выберем в этом множестве какой-нибудь элемент и обозначим его через x_2. После этого выберем элемент x_3 во множестве $B \setminus \{x_1, x_2\}$, и т. д. В результате мы находим во множестве B подмножество занумерованных элементов $S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, т. е. счетное подмножество. Следовательно, для любого бесконечного множества B справедливо соотношение $|B| \geqslant |\mathbf{N}|$. ■

Остановимся на некоторых признаках счетности множеств.

Теорема 2.2. *Всякое бесконечное подмножество B счетного множества S счетно.*

Доказательство. Так как S счетно, то его элементы можно занумеровать. При этом занумерованными оказались и элементы подмножества B. Расположим элементы из B в порядке возрастания их номеров и затем перенумеруем их с помощью чисел 1, 2, 3,... Значит, B счетно. ■

Из этой теоремы, в частности, следует, что *любое бесконечное подмножество множества* $\mathbf{N}$ *счетно.* Например, счетны множества четных чисел, простых чисел, точных квадратов, точных кубов и т. д.

Теорема 2.3. *Бесконечное множество B счетно, если существует сюръекция f какого-нибудь счетного множества S на B.*

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что $S = \mathbf{N}$. Полным прообразом любого элемента $b \in B$ является некоторое множество $f^{-1}(b)$ натуральных чисел. В этом множестве есть наименьшее число, которое мы обозначим n_b. Множество $\{n_b | b \in B\}$ является бесконечным подмножеством в $\mathbf{N}$ и потому счетно. Поскольку соответствие $b \leftrightarrow n_b$ взаимно однозначно, то и B счетно. ■

Пример 2.4. Любое бесконечное множество D попарно непересекающихся интервалов на прямой счетно.

Действительно, пусть $\mathbf{Q}'$ — множество тех рациональных чисел, которые принадлежат интервалам множества D. Так как $\mathbf{Q}' \subset \mathbf{Q}$, а $\mathbf{Q}$ счетно (см. пример 2.3) и $\mathbf{Q}'$ бесконечно, то $\mathbf{Q}'$ счетно (см. теорему 2.2). Каждому рациональному числу из $\mathbf{Q}'$ сопоставим содержащий его интервал из D. Этим задается сюръективное отображение множества $\mathbf{Q}'$ на D. Так как множество D бесконечно, то по теореме 2.3 оно счетно.

Теорема 2.4. *Множество K всевозможных кортежей*[1], *составленных из натуральных чисел, счетно.*

Доказательство. Обозначим через P множество $\{p_1, \ldots$ $\ldots, p_k, \ldots\}$ простых чисел, расположенных в порядке возрастания ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ и т. д.). Каждому кортежу $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$

[1] *Кортеж* — это конечная последовательность. Два кортежа $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ и $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ считаются совпадающими, если $k = s$ и $n_p = m_p$ при любом p. В противном случае кортежи считаются различными, причем тогда пишут: $(n_1, \ldots, n_s) \neq (m_1, \ldots, m_k)$.

натуральных чисел поставим в соответствие натуральное число $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$. Например, кортежу (2, 4, 3) сопоставляется число $2^2 3^4 5^3 = 40500$. В силу теоремы о единственности разложения чисел на простые множители, различным кортежам соответствуют различные натуральные числа: если $(n_1, \ldots, n_k) \neq (m_1, \ldots, m_s)$, то $p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k} \neq p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s}$.

Мы построили, таким образом, взаимно однозначное отображение f множества K на бесконечное подмножество A натуральных чисел. Так как A счетно, то и K счетно. ■

Теорема 2.5. *Декартово произведение*[1] *конечного числа счетных множеств счетно.*

Доказательство. Пусть множества $A_1, \ldots, A_m$ счетны. Тогда их элементы можно перенумеровать:

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_m = \{a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, \ldots\}.$$

Декартово произведение $A = A_1 \times \ldots \times A_m$ состоит из кортежей $(a_{1n_1}, \ldots, a_{mn_m})$. Сопоставив такому кортежу кортеж из натуральных чисел $(n_1, \ldots, n_m)$, получим биекцию $f: A \rightarrowtail K_1$, где K_1 — бесконечная часть множества K (см. теорему 2.4). А так как K — по теореме 2.4 — счетно, то и A счетно. ■

Пример 2.5. Множество M целочисленных узлов на плоскости (т. е. точек с двумя целочисленными координатами) счетно.

В самом деле, $M = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, причем множество $\mathbf{Z}$ счетно (см. пример 2.2); в силу теоремы 2.5 множество M тоже счетно.

Теорема 2.6. *Объединение конечной или счетной совокупности счетных множеств счетно.*

Доказательство. Пусть $A = \bigcup\limits_k A_k$, где все A_k — счетные множества. Доказательство достаточно провести для случая, когда совокупность объединяемых множеств счетна. Если она конечна, т. е. $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, то, дополнив эту совокупность множествами $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$, равными, например, A_1, получим счетную совокупность множеств с тем же объединением A.

Перенумеруем сначала объединяемые множества $(A_1, A_2, \ldots \ldots, A_n, \ldots)$, а потом — элементы каждого из множеств $A_1, \ldots, A_n, \ldots$:

$$A_1 = \{a_{11}, \ldots, a_{1m}, \ldots\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n = \{a_{n1}, \ldots, a_{nm}, \ldots\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Множество $\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ счетно в силу теоремы 2.5. Сопоставим элементу (p, q) из $\mathbf{N}^2$ элемент a_{pq} из A, т. е. элемент с номером q

[1] Напомним, что *декартовым произведением* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ называется множество, состоящее из всевозможных кортежей $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_m \in A_m$.

из множества A_p. Так как любой элемент $a \in A$ принадлежит хотя бы одному из множеств A_p и имеет в нем определенный номер q, то мы задали сюръекцию $f\colon \mathbf{N}^2 \to A$, а это в силу теоремы 2.3 означает, что A счетно. ■

Пример 2.6. Приведем другое доказательство счетности множества $\mathbf{Q}$ рациональных чисел (см. пример 2.3).

Множество $\widetilde{Q}$ всех дробей $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$) можно представить в виде

$$\widetilde{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n,$$

где Q_n — множество дробей со знаменателем n. Так как каждое множество Q_n, очевидно, равномощно множеству целых чисел, то Q_n счетно, а тогда по теореме 2.6 счетно и $\widetilde{Q}$. Отсюда, в силу теоремы 2.2, вытекает, что счетно и множество несократимых дробей, т. е. $\mathbf{Q}$.

Теорема 2.7. *Объединение счетной совокупности конечных множеств конечно или счетно.*

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где все A_k конечны. Множество A может оказаться конечным (например, если все A_k совпадают друг с другом).

Рассмотрим теперь случай, когда A бесконечно. Пусть A_k имеет n_k элементов. Добавив к нему все натуральные числа, бо́льшие, чем n_k, получим счетное множество B_k. Множество $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ счетно в силу теоремы 2.6. А так как $A \subset B$ и A бесконечно, то его счетность следует из теоремы 2.2. ■

При нахождении мощностей бесконечных множеств полезны следующие две теоремы:

Теорема 2.8. *Мощность бесконечного множества B не изменится, если к нему присоединить счетное или конечное множество S.*

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что $B \cap S = \varnothing$. Согласно теореме 2.1, множество B можно представить в виде $B = S_1 \cup B_1$, где S_1 — счетное множество. Тогда (по свойству ассоциативности операции объединения множеств) $S \cup B = (S \cup S_1) \cup B_1$. Так как $S \cup S_1$ — счетное множество, то существует биекция $f\colon S \cup S_1 \to S_1$. Значит, отображение φ, определяемое формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in S \cup S_1, \\ x, & \text{если } x \in B_1, \end{cases}$$

является биекцией множества $B \cup S$ на множество B. Отсюда и следует, что $B \cup S \sim B$. ■

Пример 2.7. Интервал $]a; b[$ и промежуток $]a; b]$ равномощны.

Действительно, промежуток $]a; b]$ получается из интервала $]a; b[$ добавлением одной точки, а потому его мощность равна мощности интервала в силу теоремы 2.8.

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называют *несчетным.*

Теорема 2.9. *Мощность несчетного множества M не изменится, если из него удалить счетное или конечное множество S.*

Доказательство. Представим M в виде $M = (M \setminus S) \cup \cup S$. Так как M несчетно, то $M \setminus S$ бесконечно, и поэтому в силу теоремы 2.8

$$|M \setminus S| = |(M \setminus S) \cup S| = |M|.$$

Пример 2.8. Множество иррациональных чисел $\mathbf{I}$ равномощно множеству действительных чисел $\mathbf{R}$.

Действительно, $\mathbf{I} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел. А так как $\mathbf{Q}$ счетно, а $\mathbf{R}$ несчетно, то по теореме 2.9 получаем: $|\mathbf{I}| = |\mathbf{R}|$.

Теорема 2.10. *Множество* $\mathbf{A}$ *алгебраических чисел счетно.*

Доказательство. Алгебраические числа — это корни многочленов (степени не ниже первой) с целыми коэффициентами. Пусть M — множество всех таких многочленов, а M_n — множество тех из них, которые имеют фиксированную степень n. Многочлену $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) из множества M_n сопоставим кортеж его коэффициентов $(a_n, \ldots, a_1, a_0)$. Это определяет биективное отображение множества M_n на множество $T = (\mathbf{Z} \setminus \{0\}) \times \times \mathbf{Z}^n$. Так как $\mathbf{Z}$ счетно (см. пример 2.2), то и $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$ счетно (см. теорему 2.2), а потому (в силу теоремы 2.5) T тоже счетно. Значит, M_n счетно.

Поскольку $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, то в силу теоремы 2.6 и M счетно. Но в таком случае множество $\mathbf{A}$ представляет собой объединение счетного семейства конечных множеств (каждый многочлен имеет конечное число действительных корней). А так как $\mathbf{A}$, очевидно, бесконечно, то, в силу теоремы 2.7, оно счетно. ■

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие множества называются счетными? Приведите примеры счетных множеств.

2. Почему счетно множество многочленов степени n с рациональными коэффициентами?

3. Сформулируйте признаки счетности множества.

4. Где в доказательстве теоремы 2.4 использована простота чисел $p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots$? Почему построенное в этом доказательстве соответствие f различным кортежам сопоставляет различные натуральные числа? Найдите образы кортежей (2, 1, 3) и (4, 1, 5) при этом соответствии. Укажите несколько натуральных чисел, которые при отображении f: $K \to \mathbf{N}$ не имеют прообразов.

5. Может ли объединение счетной совокупности конечных множеств быть конечным множеством?

6. Может ли объединение конечной совокупности счетных множеств быть конечным множеством?

7. Докажите, что всякое бесконечное множество равномощно некоторому своему собственному подмножеству.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 1. № 26, 64, 80—81, 83, 105, 119—120.

§ 3. МНОЖЕСТВА МОЩНОСТИ КОНТИНУУМА

Множество $\mathbf{R}$ называют *числовым континуумом*. Поэтому *множеством мощности континуума* называют каждое множество, равномощное множеству действительных чисел $\mathbf{R}$. В § 1 мы доказали, что $\mathbf{R}$ неравномощно $\mathbf{N}$. А так как $\mathbf{R} \supset \mathbf{N}$, то $|\mathbf{R}| > |\mathbf{N}|$, т. е. *мощность континуума больше счетной*.

Примеры. **3.1.** Произвольные отрезок, интервал, полуоткрытый промежуток имеют мощность континуума (см. примеры 1.5, 1.8, 2.7).

3.2. Множество иррациональных чисел имеет мощность континуума (см. пример 2.8).

3.3. Множество $\mathbf{T}$ трансцендентных[1] чисел имеет мощность континуума.

Это вытекает из теоремы 2.9, так как $\mathbf{T} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — множество алгебраических чисел, а оно счетно.

Выше (теорема 2.5) мы видели, что декартово произведение конечного числа счетных множеств счетно. В случае бесконечной совокупности счетных множеств это уже не так.

Теорема 3.1. *Декартово произведение счетной совокупности счетных множеств имеет мощность континуума.*

Доказательство достаточно провести для множества $\mathbf{N}^\infty = \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \ldots$ бесконечных последовательностей, составленных из натуральных чисел, причем достаточно доказать (см. пример 3.1), что $\mathbf{N}^\infty \sim \,]0;\,1]$.

Пусть $x = (k_1, \ldots, k_i, \ldots)$ — какая-либо последовательность натуральных чисел. Сопоставим последовательности x строго возрастающую последовательность $y = (n_1, \ldots, n_i, \ldots)$, члены которой определяются по формулам: $n_1 = k_1$, $n_2 = n_1 + k_2$, ..., $n_i = n_{i-1} + k_i$, ... Далее, последовательности y сопоставим правильную бесконечную двоичную дробь z, у которой на местах с номерами n_1, n_2, n_3, ... после запятой записаны единицы, а на остальных местах — нули. Например, последовательности $x = (3, 1, 2, 2, 2, \ldots)$ сопоставляется сначала последовательность $y = (3, 4, 6, 8, 10, \ldots)$, а потом — дробь $z = 0{,}0011010101 \ldots$.

Так как последовательность y строго возрастающая, то среди чисел этой последовательности имеются сколь угодно бóльшие; поэтому в соответствующей двоичной дроби z будет бесконечно много единиц, т. е. дробь z, как принято говорить, *существенно бесконечная*. Но каждая правильная существенно бесконечная двоичная дробь определяет единственное число из промежутка $]0,\,1]$, значит, мы построили отображение множества $\mathbf{N}^\infty$ в этот промежуток.

[1] Напомним, что *трансцендентным числом* называется всякое действительное число, которое не является алгебраическим. Вопрос о том, существуют ли вообще трансцендентные числа, интересовал многих математиков середины прошлого столетия. В 1849 г. французскому математику Ж. Лиувиллю (1809—1882) удалось с помощью довольно громоздких рассуждений привести первые примеры таких чисел. Приводимое в примере 3.3 рассуждение показывает, что теория множеств позволила дать очень простое доказательство существования трансцендентных чисел.

Различным последовательностям соответствуют при этом различные существенно бесконечные двоичные дроби. В самом деле, пусть $(k_1, \ldots, k_i, \ldots) \neq (k'_1, \ldots, k'_i, \ldots)$. Тогда найдется такой номер s, что $k_1 = k'_1, \ldots, k_{s-1} = k'_{s-1}$, но $k_s \neq k'_s$ (например, $k_s < k'_s$). Тогда $n_1 = n'_1, \ldots, n_{s-1} = n'_{s-1}$, но $n_s < n'_s$. Поэтому на n_s-м месте после запятой в первой дроби будет записана единица, а во второй дроби — нуль, и потому эти дроби различны. Так как любое число x из $]0; 1]$ можно единственным образом записать в виде существенно бесконечной двоичной дроби, то построенное отображение $f\colon \mathbf{N}^\infty \to]0; 1]$ инъективно.

Покажем, что образом $\mathbf{N}^\infty$ является весь промежуток $]0; 1]$. Любое $z \in]0; 1]$ можно записать в виде существенно бесконечной двоичной дроби. Но каждой такой дроби соответствует возрастающая последовательность $y = (n_1, \ldots, n_i, \ldots)$, состоящая из номеров мест, на которых стоят единицы, а каждой такой последовательности — последовательность $x = (k_1, \ldots, k_i, \ldots)$, где $k_1 = n_1$ и $k_i = n_i - n_{i-1}$ при $i \geqslant 2$. Ясно, что $f(x) = z$. Значит, отображение f биективно, и потому $\mathbf{N}^\infty \sim]0; 1]$, т. е. $\mathbf{N}^\infty$ имеет мощность континуума. ■

Аналогично доказывается следующее утверждение:

Теорема 3.2. *Пусть $A_1, \ldots, A_k, \ldots$ — конечные множества, каждое из которых имеет не менее двух элементов. Тогда их декартово произведение A имеет мощность континуума.*

Доказательство. В силу теорем 3.1 и 1.2 достаточно доказать, что декартово произведение A счетной совокупности множеств $A_k = \{0, 1\}$ имеет мощность континуума. Множество A состоит из последовательностей $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, где $a = 0$ или 1. Обозначим через B подмножество множества A, состоящее из последовательностей, все элементы которых, начиная с некоторого, равны нулю. По теореме 2.4 множество B счетно.

Пусть a — произвольная последовательность из множества $A \setminus B$. Сопоставим ей двоичную дробь $0{,}a_1 \ldots a_n \ldots$. Это существенно бесконечная дробь. Так как любое число из промежутка $]0; 1]$ представимо в виде такой дроби, то мы установили биективное соответствие между множествами $A \setminus B$ и $]0; 1]$. Значит, $A \setminus B$ имеет мощность континуума, а тогда из теоремы 2.8 вытекает, что такую же мощность имеет и множество A. ■

Рассмотрим другие признаки множеств мощности континуума.

Теорема 3.3. *Объединение конечной или счетной совокупности множеств мощности континуума имеет ту же мощность.*

Доказательство. Пусть $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ (в случае конечного числа объединяемых множеств доказательство лишь упрощается) и пусть для всех n имеем $|A_n| = |\mathbf{R}|$. Рассмотрим вспомогательное множество — луч $L =]0; \infty[$. Оно имеет мощность континуума. При этом $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, где $L_n =]n - 1; n]$. Так как каждый из промежутков L_n имеет мощность континуума, то существуют биекции $f_n\colon\ L_n \to A_n$. Для любого $x \in L$ положим $f(x) = f_k(x)$, где k — номер промежутка L_k, которому принадлежит x. Этим определяется сюръективное[1] отображение $f\colon L \to A$. По теореме 1.4 имеем:

$$|A| \leqslant |L| = |\mathbf{R}|. \tag{3.1}$$

С другой стороны, $A \supset A_1$ и потому

$$|A| \geqslant |A_1| = |\mathbf{R}|. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) в силу теоремы Кантора — Бернштейна и вытекает, что $|A| = |\mathbf{R}|$. ■

Пример 3.4. Множество M точек плоскости с рациональными абсциссами имеет мощность континуума.

Действительно, $M = \bigcup_{r} M_r$ $(r \in \mathbf{Q})$, где M_r — прямая $x = r$. Так как M_r имеет мощность континуума и множество $\mathbf{Q}$ счетно, то M представляет собой объединение счетного семейства множеств мощности континуума, а следовательно, в силу теоремы 3.3, оно имеет ту же мощность.

Теорема 3.4*. *Декартово произведение A конечной или счетной совокупности множеств A_k мощности континуума имеет ту же мощность.*

Доказательство проведем для случая, когда A представляет собой произведение счетной совокупности A_k. Идея доказательства состоит в установлении биективного соответствия между множеством A и множеством $\mathbf{N}^{\infty}$, имеющим мощность континуума (см. теорему 3.1).

Рассмотрим элемент $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ из A. Здесь $a_k \in A_k$ $(k \in \mathbf{N})$. Так как каждое из множеств A_k имеет мощность континуума, то существует биекция $f_k\colon A_k \to \mathbf{N}^{\infty}$. Значит, каждому элементу a_k последовательности a соответствует определенная последовательность натуральных чисел:

$$\begin{array}{l}
a_1 \to (n_{11}, \ldots, n_{1m}, \ldots), \\
a_2 \to (n_{21}, \ldots, n_{2m}, \ldots), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_k \to (n_{k1}, \ldots, n_{km}, \ldots), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Поэтому последовательности a соответствует бесконечная таблица

$$a \longrightarrow \begin{pmatrix}
n_{11} & n_{12} & n_{13} & \ldots n_{1m} \ldots \\
n_{21} & n_{22} & n_{23} & \ldots n_{2m} \ldots \\
n_{31} & n_{32} & n_{33} & \ldots n_{3m} \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{pmatrix},$$

[1] Если A_n попарно не пересекаются, то построенное отображение f — биекция A на L.

состоящая из натуральных чисел. При этом различным элементам соответствуют различные таблицы.

Множество чисел в любой такой таблице счетно как объединение счетного числа счетных множеств. Поэтому их можно перенумеровать, т. е. записать в виде последовательности. При этом такие последовательности можно составлять единым образом для всех таблиц. Составляя, например, последовательность так называемым «диагональным» способом, получим:

$$a' = (n_{11},\ n_{12},\ n_{21},\ n_{31},\ n_{22},\ n_{13},\ n_{14},\ \dots).$$

Тогда разным таблицам (n_{km}) сопоставляются разные последовательности a', и мы получаем биективное отображение A на $\mathbf{N}^\infty$. Значит, A имеет мощность континуума.■

Примером декартова произведения счетной совокупности множеств мощности континуума может служить $\mathbf{R}^\infty$. Поэтому из теоремы 3.4 вытекает, что множество числовых последовательностей, составленных из действительных чисел, имеет ту же мощность, что и $\mathbf{R}$. Заметим, что с натуральными числами дело обстоит иначе: из них можно составить множество последовательностей мощности большей, чем мощность самого множества $\mathbf{N}$.

П р и м е р ы. **3.5.** Множество всех точек плоскости имеет мощность континуума[1].

Действительно, поскольку каждая точка плоскости однозначно определяется своими координатами $(x;\ y)$, где $x,\ y \in \mathbf{R}$, то множество точек плоскости равномощно декартову произведению $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Но в силу теоремы 3.4 имеем: $|\mathbf{R} \times \mathbf{R}| = |\mathbf{R}|$.

Аналогично можно убедиться и в том, что множество всех точек трехмерного и вообще n-мерного пространства имеет мощность континуума.

3.6. Любое множество F из $\mathbf{R}^n$, содержащее подмножество K мощности континуума, имеет ту же мощность.

В самом деле, $K \subset F \subset \mathbf{R}^n$ и $|\mathbf{R}^n| = |\mathbf{R}|$. А так как $K \sim \mathbf{R}$, то по теореме о промежуточном множестве $|F| = |K| = |\mathbf{R}|$.

Например, круг, куб, параболоид имеют мощность континуума, так как содержат отрезок или биективный образ отрезка.

3.7. Множество C всех функций, определенных и непрерывных на прямой, имеет мощность континуума.

В самом деле, занумеруем все рациональные точки $r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_n,\ \dots$ и сопоставим функции φ последовательность действительных чисел — значений функции φ в точках $r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_n,\ \dots$:

$$(\varphi(r_1),\ \varphi(r_2),\ \dots,\ \varphi(r_n),\ \dots).$$

Получим отображение $F\colon C \to \mathbf{R}^\infty$. Это отображение инъективно, так как различным функциям φ и ψ соответствуют различные последовательности. Действительно, если функции φ и ψ различны, то хотя бы в одной точке c прямой $\varphi(c) \neq \psi(c)$. Пусть для определенности $\varphi(c) > \psi(c)$, т. е. $\varphi(c) - \psi(c) > 0$. Тогда, в силу непрерывности φ и ψ, найдется окрестность U точки c, в которой $\varphi(x) - \psi(x) > 0$. Но эта окрестность содержит хоть одну рациональную точку r_i,

[1] Этот факт, открытый Кантором, в свое время явился большой неожиданностью. Во времена Кантора было принято говорить, что на прямой имеется ∞ точек, а число точек плоскости составляет уже ∞^2. Кантор вначале также думал, что «на плоскости точек больше, чем на прямой», и более трех лет искал соответствующее доказательство, пока не обнаружил, что мощности этих множеств одинаковы. «Вижу, но не верю», — писал он по этому поводу Дедекинду.

и мы получаем, что $\varphi(r_i) - \psi(r_i) > 0$, а поэтому последовательности значений функций φ и ψ в рациональных точках неодинаковы.

Итак, отображение F — инъекция, а значит, множество C равномощно части $\mathbf{R}^\infty$. Поэтому

$$|C| \leqslant |\mathbf{R}^\infty| = |\mathbf{R}|. \tag{3.3}$$

С другой стороны, множество C содержит подмножество функций вида $y = a$, где $a \in \mathbf{R}$, а это подмножество имеет мощность континуума. Значит,

$$|C| \geqslant |\mathbf{R}|. \tag{3.4}$$

Из (3.3) и (3.4) вытекает, что $|C| = |\mathbf{R}|$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что значат слова «множество A имеет мощность континуума»?
2. Какие числа имеют две записи в виде двоичных дробей? Почему при рассматриваемом в доказательстве теоремы 3.1 отображении f получаются существенно бесконечные дроби? Найдите образ последовательности (1, 1, ..., 1, ...) при этом отображении или биективный образ отрезка.
3. Какова мощность множества, являющегося объединением совокупности множеств мощности континуума, если сама совокупность имеет ту же мощность?
4. Верно ли, что квадрат содержит больше точек, чем отрезок?
5. Верно ли, что шар содержит больше точек, чем круг?
6. Какова мощность множества всех числовых последовательностей?
7. Объясните, какова мощность множества всех: а) кортежей из $\mathbf{N}$; б) бесконечных последовательностей из $\mathbf{N}$; в) конечных подмножеств из $\mathbf{N}$; г) бесконечных подмножеств из $\mathbf{N}$; д) подмножеств из $\mathbf{N}$.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 1. № 94, 98—104, 106, 109—110.

§ 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ МНОЖЕСТВ СКОЛЬ УГОДНО ВЫСОКОЙ МОЩНОСТИ

Выше мы обнаружили, что имеются, по меньшей мере, два класса бесконечных множеств различной мощности — счетные множества и множества мощности континуума. Выясним, не исчерпываются ли ими всевозможные виды бесконечных множеств.

Для ответа на этот вопрос рассмотрим, наряду с данным множеством M, другое множество, состоящее из всех частей множества M. Это множество называют *булеаном*[1] *множества* M и обозначают так: $\beta(M)$. Например, если $M = \{1, 2, 3\}$, то

$$\beta(M) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

В этом примере мощность булеана множества выше мощности самого множества. Докажем, что это всегда так:

Теорема 4.1. *Мощность булеана $\beta(M)$ данного множества M больше мощности самого множества M.*

Доказательство. Сопоставив каждому элементу x из M одноэлементное множество $\{x\}$, замечаем, что M равномощно

---

[1] По имени английского математика Джорджа Буля (1815—1864), одного из творцов математической логики.

подмножеству своего булеана $\beta(M)$, состоящему из одноэлементных множеств.

Остается показать, что M и $\beta(M)$ неравномощны. Предположим противное. Тогда существует биекция $f\colon M \to \beta(M)$. Для любого $x \in M$ возможны две ситуации: элемент x либо входит в подмножество $f(x)$, являющееся его образом, либо не входит в него. Элемент, обладающий первым свойством, будем называть *белым*; элемент, обладающий вторым свойством, — *черным*. Ясно, что всякий элемент из M либо черный, либо белый.

Рассмотрим подмножество $P \subset M$ черных элементов. Поскольку P — элемент булеана, а f — биекция, то у P имеется прообраз $\xi \in M$, и притом только один. Выясним «цвет» этого элемента ξ.

Предположим, что ξ белый. Тогда, по определению белого элемента, $\xi \in f(\xi) = P$, т. е. ξ черный.

Предположим, что ξ черный. Тогда, по определению черного элемента, $\xi \notin f(\xi) = P$ и потому ξ белый.

Итак, ξ должен быть «двуцветным», что невозможно. Полученное противоречие показывает, что сделанное нами предположение ложно, т. е. не существует биекции $M \to \beta(M)$. Значит, $|M| < |\beta(M)|$. ■

П р и м е р ы. **4.1.** Булеан $\beta(\mathbf{R})$ множества $\mathbf{R}$ действительных чисел имеет мощность бóльшую, чем континуум.

4.2. Мощность множества F всех функций (как непрерывных, так и разрывных), определенных на прямой, больше континуума.

Действительно, рассмотрим подмножество $F' \subset F$, в которое входят функции, принимающие только два значения: 0 и 1. Каждой такой функции можно сопоставить часть ее области определения, состоящую из тех точек x, где $f(x) = 1$. Тем самым определено биективное отображение $F' \to \beta(\mathbf{R})$. Поэтому $|F| \geqslant |F'| = |\beta(\mathbf{R})| > |\mathbf{R}|$.

Итак, мы видим, что существуют множества мощности выше, чем континуум. Более того, справедлива следующая теорема:

Теорема 4.2. *Среди бесконечных множеств не существует множества самой высокой мощности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное: существует множество M наибольшей мощности. Рассмотрим его булеан $\beta(M)$. В силу теоремы 4.1 находим: $|\beta(M)| > |M|$. Противоречие! ■

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что булеан множества натуральных чисел имеет мощность континуума.

2. Докажите, что множество всех фигур на плоскости имеет мощность бóльшую, чем континуум.

3. Укажите три бесконечных множества различной мощности.

ГЛАВА II

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 5. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ГЕОМЕТРИЯ

1. Метрические пространства. Одной из важнейших задач математики является исследование изучаемых ею понятий в максимальной общности, выяснение глубинных оснований математических теорем. Фундаментальными понятиями математического анализа являются понятия предела и непрерывности. Определение этих понятий требует лишь знания того, что такое расстояние между точками прямой, плоскости или пространства. Поэтому их можно распространить на более широкие классы объектов, лишь бы было определено понятие «расстояния» между этими объектами. Смысл же понятия «расстояние» раскрывается в трех хорошо известных аксиомах геометрии[1]. Таким путем мы приходим к понятию метрического пространства.

Пусть M — произвольное множество. Числовую функцию ρ, определенную на множестве $M \times M$, называют *метрикой* на M (а конкретное значение $\rho(x, y)$ — *расстоянием от* x *до* y), если при любых x, y, z из M выполняются следующие условия (*аксиомы метрики*):

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$; $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома неотрицательности и тождества);

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (аксиома треугольника).

Множество с введенной на нем метрикой называют *метрическим пространством*[1]; элементы исходного множества называют при этом *элементами* или *точками* пространства. Приведем примеры метрических пространств, предлагая читателю самостоятельно проверить выполнимость аксиом метрики.

Примеры. **5.1.** *Евклидова прямая.* Расстояние между двумя расположенными на ней точками с координатами x и y определяется, как известно, по формуле

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

---

[1] См., например: Геометрия. Учебное пособие для 8-го класса средней школы. Под ред. А. Н. Колмогорова. М., 1978.

[2] Понятие метрического пространства ввел в 1906 г. французский математик Морис Фреше (1878—1973).

5.2. *Евклидова плоскость.* Расстояние между точками $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ вычисляется по формуле

$$\rho(A_1,\ A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

5.3. *Евклидово пространство.* Расстояние между точками $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ вычисляется, как известно, по формуле

$$\rho(A_1,\ A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

5.4. Метрическое пространство L — множество прямых на плоскости, параллельных прямой $y = x$, с расстоянием

$$\rho(l_a,\ l_b) = |a - b|,$$

где l_c — прямая $y = x + c$.

5.5. Метрическое пространство $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел с расстоянием

$$\rho(m,\ n) = |m - n|.$$

5.6. Метрическое пространство $\widetilde{N}$ — множество натуральных чисел с расстоянием

$$\rho(m,\ n) = \begin{cases} 0, \text{ если } m = n, \\ 1 + \dfrac{1}{m+n}; \text{ если } m \neq n. \end{cases}$$

Последние два примера показывают, что в одном и том же множестве метрика может вводиться по-разному. Может возникнуть вопрос: существуют ли множества, в которых ни одним из способов нельзя ввести метрику? Ответ на него позволяет получить следующий пример:

Пример 5.7. Любое непустое множество M является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(x,\ y) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \neq y, \\ 0 \text{ при } x = y. \end{cases}$$

Каждое метрическое пространство естественным образом порождает ряд других метрических пространств. Пусть P — какое-либо подмножество множества M, на котором введена метрика ρ_M, и пусть в P метрика определяется равенством $\rho_P(x,\ y) = \rho_M(x,\ y)$, где $x,\ y \in P$. Тогда множество P также является метрическим пространством. Оно называется *подпространством* (или *частью*) пространства M. При этом говорят, что метрика в P *индуцируется* метрикой, заданной в M, или что метрика в P *заимствована* из M.

Например, обычная метрика в евклидовом пространстве индуцирует на сфере метрику, при которой расстояние между точками сферы равно длине соединяющей их хорды. Другую метрику на сфере получаем, выбрав за расстояние между точками x и y наименьшую из длин кривых, лежащих на сфере и соединяющих эти точки; можно доказать, что это длина дуги большой окружности, соединяющей точки x и y. Возникающее таким образом метрическое пространство уже не является подпространством евклидова пространства.

2. Геометрия метрического пространства. Появившийся в этом параграфе (применительно к множествам общей природы) геометрический язык (пространство, точка, расстояние, аксиома треугольника) не случаен. Привлечение «геометрического языка», геометрических понятий и геометрических образов позволяет сделать наглядными различные факты из алгебры, анализа, механики и других разделов математики и ее приложений. При этом часто возникает возможность установить новые закономерности, проводя рассуждения, аналогичные известным рассуждениям для случая одномерного, двумерного или трехмерного пространства.

Располагая понятием «расстояние между двумя точками», мы можем определить в произвольных метрических пространствах ряд геометрических понятий. Начнем с понятий открытого и замкнутого шара и сферы.

Замкнутым шаром в метрическом пространстве M называется множество $\overline{U}(a; r)$ точек из M, расстояние от которых до некоторой фиксированной точки $a \in M$ не превосходит некоторого числа $r > 0$:

$$\overline{U}(a; r) = \{x \in M \mid \rho(a, x) \leqslant r\}.$$

При этом точка a называется *центром* данного шара, а число r — его *радиусом.*

Сферой в метрическом пространстве M называется множество $S(a; r)$ точек из M, расстояния от которых до некоторой фиксированной точки $a \in M$ равны некоторому числу $r > 0$:

$$S(a; r) = \{x \in M \mid \rho(a, x) = r\}.$$

Точка a при этом называется *центром* сферы, а число r — ее *радиусом.*

Например, замкнутый шар в евклидовом пространстве — это обычный шар вместе с ограничивающей его сферой; на евклидовой плоскости — круг вместе со своей границей; на прямой — отрезок; в пространстве M примера 5.7 — одна точка (совпадающая с центром шара) при $r < 1$ и все множество M при $r \geqslant 1$.

Сфера в евклидовом пространстве — это обычная сфера, на плоскости — окружность, на прямой — пара точек. В пространстве M примера 5.7 сфера с центром в точке a радиуса r — это пустое множество при $r \neq 1$ и все пространство без точки a при $r = 1$.

Разность замкнутого шара $\overline{U}(a; r)$ и сферы $S(a; r)$ называется *открытым шаром* и обозначается $U(a; r)$. Таким образом

$$U(a; r) = \overline{U}(a; r) \setminus S(a; r) = \{x \in M \mid \rho(a, x) < r\}.$$

Открытый шар $U(a; \varepsilon)$ называется также *ε-окрестностью точки a.*

Отметим некоторые свойства окрестностей, которые нам понадобятся в дальнейшем:

а) *Каждая точка a принадлежит всем своим окрестностям.* В самом деле, если $r > 0$, то $\rho(a, a) = 0 < r$, и потому $a \in U(a; r)$.

б) *Пересечение любых двух окрестностей точки a содержит окрестность этой точки.*

В самом деле, если $r_1 \leqslant r_2$, то

$$U(a; r_1) \cap U(a; r_2) = U(a; r_1).$$

в) *Если $x \in U(a; r)$, то у точки x есть окрестность, целиком принадлежащая $U(a; r)$.*

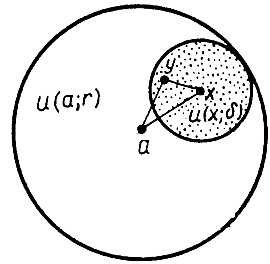

Рис. 7

В самом деле, пусть $\rho(a, x) = d$. Так как $x \in U(a; r)$, то $d < r$ и потому $\delta = r - d > 0$. Пусть $y \in U(x; \delta)$. Тогда в силу аксиомы треугольника имеем (рис. 7):

$$\rho(a, y) \leqslant \rho(a, x) + \rho(x, y) < d + \delta = d + (r - d) = r$$

и потому $y \in U(a; r)$. Значит, $U(x; \delta) \subset U(a; r)$.

г) *Любые две различные точки из метрического пространства M имеют непересекающиеся окрестности.*

Пусть $a, b \in M$, $a \neq b$, $\rho(a, b) = r$. Покажем, что, например, окрестности $U(a; \varepsilon)$ и $U(b; \varepsilon)$, где $\varepsilon = \frac{r}{3}$, не пересекаются. Действительно, пусть эти окрестности имеют общую точку x. Тогда $\rho(a, x) < \varepsilon$, $\rho(b, x) < \varepsilon$ и потому $\rho(a, b) \leqslant \rho(a, x) + \rho(b, x) < 2\varepsilon = \frac{2r}{3} < r$, что противоречит условию.

Множество F из метрического пространства M (в частности, само пространство M) называется *ограниченным*, если в M существует открытый шар, содержащий это множество.

Нетрудно проверить, что данное определение равносильно следующему: множество F из метрического пространства M называется ограниченным, если существует такое положительное число K, что $\rho(x, y) < K$ для всех x и y из F.

Одно и то же множество F, рассматриваемое с одной метрикой, может оказаться ограниченным, а с другой — неограниченным. Например, множество натуральных чисел с метрикой примера 5.5, очевидно, неограниченно, а с метрикой примера 5.6 ограниченно, так как в этом случае $\rho(1, n) = \frac{1}{1+n} + 1 < 2$ при любом $n \neq 1$, т. е. при такой метрике все натуральные числа принадлежат открытому шару с центром в точке 1 и радиусом 2.

Обобщением неравенства треугольника в метрическом пространстве M является «*неравенство многоугольника*»:

$$\rho(x_1, x_n) \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n), \quad (5.1)$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — произвольные точки из M, которое доказывается по индукции. Из него следует, что для любых точек x, y, z, u имеем:

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, u) + \rho(u, z),$$
$$\rho(y, u) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, z) + \rho(z, u).$$

Вычтя из обеих частейпервого неравенства $\rho(y, u)$, а второго $\rho(x, z)$, получим систему двух неравенств, равносильную следующему неравенству:

$$|\rho(x, z) - \rho(y, u)| \leqslant \rho(x, y) + \rho(z, u). \tag{5.2}$$

Это неравенство называют *«неравенством четырехугольника»*. В случае плоскости оно означает, что модуль разности двух несмежных сторон четырехугольника не превосходит суммы двух других сторон.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение метрического пространства. Приведите примеры метрических пространств. Задайте какую-нибудь метрику на прямой, отличную от евклидовой.
2. Что представляет собой множество $S(a; r) \cup U(a; r)$?
3. Являются ли пространства примеров 5.5 и 5.6 подпространствами евклидовой прямой?
4. Является ли ограниченным метрическое пространство L из примера 5.4? Докажите равносильность двух определений ограниченности множества.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 2. № 4—7, 10, 12—14, 20, 34—36, 38; § 4. № 57—61.

§ 6. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Норма и метрика. Во многих вопросах современной математики используются линейные (векторные) пространства. Для целей анализа важно, чтобы такое пространство обладало метрикой. Метрику в линейных пространствах обычно вводят, задавая для каждого их элемента норму, т. е. число, обладающее свойствами длины вектора.

Пусть L — некоторое линейное пространство[1] над полем действительных чисел $\mathbf{R}$ (или комплексных чисел $\mathbf{C}$). Назовем *нормой* на L числовую функцию $x \to \|x\|$, которая при любых $x, y \in L$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ (или $\lambda \in \mathbf{C}$) удовлетворяет следующим условиям (*аксиомы нормы*):

1) $\|x\| \geqslant 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (θ — нуль пространства L);
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Линейное пространство с введенной на нем нормой называется *линейным нормированным пространством*[2].

---

[1] Определение и свойства линейных пространств предполагаются известными из курса «Алгебра и теория чисел».

[2] Систематическое исследование нормированных пространств было проведено в начале 20-х годов текущего столетия польским математиком Стефаном Банахом (1892—1945) и американским математиком Норбертом Винером (1894—1964). Они нашли многочисленные приложения построенной теории к различным проблемам математического анализа.

Теорема 6.1. *В каждом нормированном пространстве формула*

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \tag{6.1}$$

задает метрику.

Доказательство. Проверим выполнение аксиом метрики для функции ρ. По определению и первой аксиоме нормы $\rho(x, y) = \|x - y\| \geqslant 0$. Если $x = y$, то по свойствам линейных пространств $x - y = \theta$, а потому $\rho(x, y) = \|\theta\| = 0$ в силу первой аксиомы нормы. Пусть, наоборот, $\rho(x, y) = 0$. Это означает, что $\|x - y\| = 0$. Но тогда по первой аксиоме нормы $x - y = \theta$ или $x = y$. Итак, аксиома неотрицательности и тождества выполняется.

В линейном пространстве справедливо равенство $x - y = (-1) \times (y - x)$. Поэтому в силу второй аксиомы нормы имеем:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y, x).$$

Таким образом, выполняется и аксиома симметрии.

В силу третьей аксиомы нормы

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Следовательно, аксиома треугольника также выполняется. ■

Говоря о метрике линейного нормированного пространства, всегда подразумевают, что она задается формулой (6.1).

Отметим следующие очевидные свойства метрики, задаваемой нормой:

а) $\rho(\theta, x) = \|x\|$, т. е. $\|x\|$ — *это расстояние элемента* x *от нуля пространства*;

б) $\rho(x + a, y + a) = \rho(x, y)$ (*расстояния между точками не изменяются при «параллельном переносе»*);

в) $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$ (*расстояния между точками умножаются на* $|\lambda|$ *при «гомотетии с коэффициентом* λ»).

Нетрудно показать и обратное: любая метрика в линейном пространстве, обладающая свойствами а)—в), задает норму в этом пространстве, определяемую равенством

$$\|x\| = \rho(x, \theta).$$

2. Примеры линейных нормированных пространств

Пример 6.1. Множество $\mathbf{R}^n$ кортежей длины n, составленных из действительных чисел, является линейным пространством (*n-мерное арифметическое пространство*) относительно операций

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$

$$\lambda (a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n).$$

Назовем нормой элемента $a = (a_1, \ldots, a_n)$ число

$$\|a\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

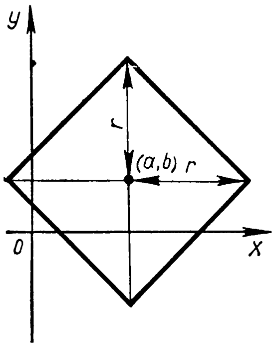

Рис. 8

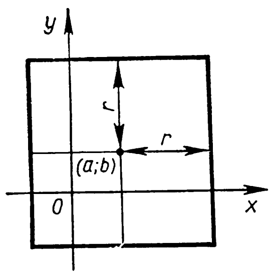

Рис. 9

Легко проверить, что все аксиомы нормы выполняются; пространство $\mathbf{R}^n$ с такой нормой обозначается через $\mathbf{R}_1^n$. Расстояние между элементами $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ определяется, согласно формуле (6.1), так:

$$\rho(a, b) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|.$$

При $n = 2$ эта формула задает своеобразную метрику на плоскости: расстояние между точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ равно $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Такой способ измерения расстояния естествен, например, с точки зрения таксиста, работающего в городе с идеальной планировкой, где каждая улица параллельна одной из двух взаимно перпендикулярных прямых.

Открытый шар с центром в точке $(a; b)$ и радиусом r на плоскости с такой метрикой задается неравенством

$$|x - a| + |y - b| < r,$$

а сфера (рис. 8) — уравнением:

$$|x - a| + |y - b| = r.$$

П р и м е р **6.2.** В линейном пространстве $\mathbf{R}^n$ можно ввести норму и иначе:

$$\|a\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|. \tag{6.2}$$

Пространство $\mathbf{R}^n$ с такой нормой обозначается через $\mathbf{R}_\infty^n$. Расстояние между элементами a и b в $\mathbf{R}_\infty^n$ определяется так:

$$\rho(a, b) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i - b_i|.$$

Эта метрика возникает, например, в следующей ситуации. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — набор значений каких-то n показателей. Иногда по смыслу задачи целесообразно оценивать отклонение данного набора показателей от стандартного набора $b = (b_1, \ldots, b_n)$ по максимальному из отклонений отдельных показателей, т. е. по формуле (6.2).

Открытый шар с центром в точке $(a; b)$ и радиусом r на плоскости с такой метрикой задается условием

$$\max\{|x - a|, |y - b|\} < r,$$

а сфера (рис. 9) — условием

$$\max\{|x - a|, |y - b|\} = r.$$

Пример 6.3. Естественными обобщениями построенных выше пространств $\mathbf{R}_\infty^n$ и $\mathbf{R}_1^n$ являются описываемые ниже пространства $\mathbf{R}_\infty^\infty$, $\widehat{\mathbf{R}}_\infty^\infty$, $\widetilde{\mathbf{R}}_\infty^\infty$ и $\mathbf{R}_1^\infty$, элементами которых являются бесконечные числовые последовательности.

Пространство $\mathbf{R}_\infty^\infty$ состоит из всех ограниченных последовательностей $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ с нормой (проверку выполнимости аксиом нормы предоставляем читателю):

$$\|a\| = \sup_n |a_n|;$$

$\widehat{\mathbf{R}}_\infty^\infty$ — подпространство пространства $\mathbf{R}_\infty^\infty$, состоящее из сходящихся последовательностей; $\widetilde{\mathbf{R}}_\infty^\infty$ — подпространство, состоящее из последовательностей, сходящихся к нулю (бесконечно малых последовательностей). Очевидно, что $\widetilde{\mathbf{R}}_\infty^\infty \subset \widehat{\mathbf{R}}_\infty^\infty \subset \mathbf{R}_\infty^\infty$.

Пространство $\mathbf{R}_1^\infty$ состоит из таких последовательностей $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Норма в $\mathbf{R}_1^\infty$ задается равенством

$$\|a\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Очевидно, что любая последовательность из $\mathbf{R}_1^\infty$ принадлежит $\widetilde{\mathbf{R}}_\infty^\infty$.

Элементы пространств $\mathbf{R}_\infty^n$, $\mathbf{R}_1^n$ — кортежи длины n — можно рассматривать как числовые функции, заданные на множестве $\mathbf{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Точно так же числовые последовательности, из которых состоят пространства $\mathbf{R}_\infty^\infty$, $\widehat{\mathbf{R}}_\infty^\infty$, $\widetilde{\mathbf{R}}_\infty^\infty$, $\mathbf{R}_1^\infty$, являются числовыми функциями на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел. Дальнейшие примеры линейных нормированных пространств строятся из числовых функций, заданных на отрезке или на ином числовом множестве.

Пример 6.4. Рассмотрим множество функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a; b]$. Известно, что это множество образует линейное пространство относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число. Покажем, что в этом пространстве нормой функции f можно назвать наибольшее значение (рис. 10) функции $|f|$ на отрезке $[a; b]$.

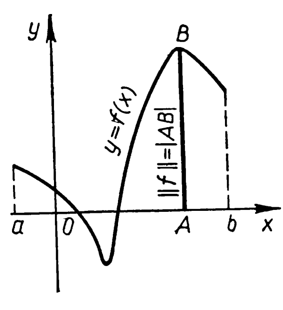

Рис. 10

Действительно, так как все значения функции $|f|$ неотрицательны, то и наибольшее из них неотрицательно, т. е. $\|f\| \geqslant 0$.

Пусть $f = \theta$, т. е. $f(x) \equiv 0$ при $x \in [a; b]$. Тогда и наибольшее значение функ-

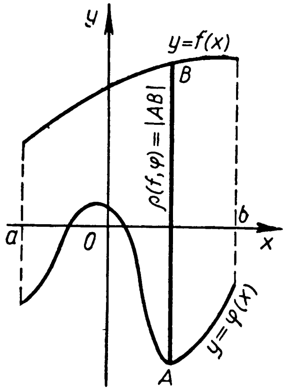

Рис. 11

ции $|f|$ на $[a; b]$ равно нулю, или $\|\theta\| = 0$. Наоборот, если $\|f\| = 0$, т. е. наибольшее значение $|f|$ равно нулю, то и $f(x) = 0$ при любом x из $[a; b]$ и, следовательно, $f = \theta$. Первая аксиома нормы выполняется.

Поскольку при любом $x \in [a; b]$

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)|,$$

то и

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|,$$

т. е. $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ — вторая аксиома нормы выполняется.

Для проверки выполнения третьей аксиомы нормы заметим, что

$$|f_1(x) + f_2(x)| \leqslant |f_1(x)| + |f_2(x)| \leqslant \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|,$$

а потому и $\|f_1 + f_2\| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f_1(x) + f_2(x)| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|$.

Построенное здесь нормированное пространство обозначают $\mathbf{C}[a; b]$. Согласно (6.1), в $\mathbf{C}[a; b]$ можно ввести метрику (рис. 11):

$$\rho(f, \varphi) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - \varphi(x)|. \tag{6.3}$$

Такое понимание расстояния между функциями нашло широкое применение, в частности, в исследованиях по теории приближения функций многочленами, выполненных П. Л. Чебышевым[1]. Поэтому рассматриваемую метрику называют *чебышевской*.

Открытый шар $U(f; r)$ в $\mathbf{C}[a; b]$ состоит из всех непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций, графики которых лежат в открытой полосе, ограниченной графиками функций $x \to f(x) + r$ и $x \to f(x) - r$.

Пример 6.5. В том же линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$, можно ввести норму и по формуле

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Геометрически $\|f\|$ означает (рис. 12) площадь фигуры, заключенной между осью абсцисс, кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$.

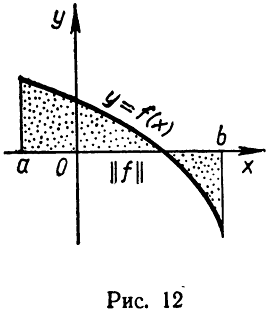

Рис. 12

Данное нормированное пространство обозначается через $\mathbf{C}_1[a; b]$. Расстояние в

[1] Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894) — крупнейший русский математик, основоположник знаменитой Петербургской математической школы. Ему принадлежат фундаментальные результаты в теории функций, теории вероятностей и теории чисел.

этом пространстве вычисляется по формуле

$$\rho(f, \varphi) = \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx$$

и равно площади фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $x = a$, $x = b$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение линейного пространства. Какой элемент линейного пространства называется нулем (или нейтральным)?
2. Дайте определение нормы и линейного нормированного пространства.
3. Какое из понятий является более общим: «метрическое пространство» или «линейное нормированное пространство»?
4. По каким формулам определяется норма в пространствах $\mathbf{R}^1_1$ и $\mathbf{R}^1_\infty$? Задайте какую-нибудь другую норму на прямой.
5. Какую фигуру на координатной плоскости покрывают графики функций, принадлежащих замкнутому шару $U(f; r)$ в $\mathbf{C}[a; b]$, если $f(x) = x$?

УПРАЖНЕНИЯ

§ 3. № 3—6, 35—36, 39—43, 56, 60.

§ 7. ПРЕДГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

1. Определение предгильбертова пространства. В системе аксиом евклидовой геометрии, принятой в настоящее время в школе, расстояние является первичным понятием. Другой широко известной[1] системой аксиом евклидовой геометрии является аксиоматика Вейля. В ней длина вектора (а следовательно, и расстояние между точками) вводится через понятие скалярного произведения с помощью формулы $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$. Такой способ введения нормы (а следовательно, и метрики) удобен и в некоторых других линейных пространствах.

Говорят, что в линейном пространстве L (над полем действительных чисел) определено *скалярное произведение*, если каждой паре элементов (векторов) x и y из L поставлено в соответствие действительное число (x, y), причем для всех x, y, z из L и любого λ из $\mathbf{R}$ выполняются следующие условия (*аксиомы скалярного произведения*):

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4) $(x, x) \geqslant 0$; $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

---

[1] См.: Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П. Геометрия, ч. 1. М., 1974.

Линейное пространство с введенным на нем скалярным произведением называется *предгильбертовым пространством*[1].

Теорема 7.1. *В предгильбертовом пространстве для любых элементов x и y справедливо неравенство*

$$|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}. \qquad (7.1)$$

Доказательство. Пусть x, y — произвольные, но фиксированные элементы пространства L, а λ — любое действительное число. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x - y, \lambda x - y).$$

Согласно четвертой аксиоме скалярного произведения $\varphi(\lambda) \geqslant 0$. С другой стороны, с помощью второй и третьей аксиом находим, что

$$\varphi(\lambda) = (x, x)\lambda^2 - 2(x, y)\lambda + (y, y),$$

т. е. функция φ является квадратным трехчленом. Этот трехчлен не может иметь различных действительных корней, так как в противном случае он не мог бы иметь одного и того же знака для всех значений λ. Поэтому его дискриминант $(x, y)^2 - (x, x)(y, y)$ не может быть положительным. Следовательно,

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x) \cdot (y, y).$$

Извлекая квадратный корень, получаем требуемое неравенство. ■

Неравенство 7.1 называют *неравенством Коши — Буняковского*[2].

Теорема 7.2. *В предгильбертовом пространстве формула*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \qquad (7.2)$$

задает норму.

Доказательство. Выполнение первых двух аксиом нормы для $\|x\|$ очевидно, а третья следует из неравенства Коши — Буняковского. Действительно,

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

и потому $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. ■

Используя норму, неравенство Коши — Буняковского можно переписать в более компактном виде:

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

---

[1] В отличие от гильбертова пространства, которое является его частным случаем и с которым мы познакомимся позднее (см. § 13). Эти пространства связаны с именем Гильберта потому, что им была построена в начале XX в. теория бесконечномерных линейных пространств со скалярным произведением. Обобщение этой теории привело к созданию теории линейных нормированных пространств.

[2] Огюстен Коши (1789—1857) — крупнейший французский математик первой половины XIX в., один из основоположников математического анализа.

Виктор Яковлевич Буняковский (1804—1889) — русский академик. Занимался вопросами теории чисел, математического анализа, теории вероятностей, а также прикладной математикой. Написанные им различные учебные руководства оказали большое влияние на развитие математики в России.

2. Примеры предгильбертовых пространств.

Пример 7.1. Рассмотрим n-мерное арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$ и для произвольных элементов $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ положим

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Легко проверить, что (a, b) обладает всеми свойствами скалярного произведения. Поэтому согласно теореме 7.2 формула

$$\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

определяет норму на $\mathbf{R}^n$, а формула

$$\rho(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

задает метрику на $\mathbf{R}^n$.

Определенное таким образом нормированное пространство обозначается $\mathbf{R}_2^n$, это — n-мерное евклидово пространство.

Замечание. Метрики пространств $\mathbf{R}_1^n$, $\mathbf{R}_2^n$, $\mathbf{R}_\infty^n$ при $n = 1$, т. е. в случае прямой, совпадают. Поэтому при $n = 1$ любое из этих пространств мы будем обозначать просто буквой $\mathbf{R}$.

Пример 7.2. Обобщая пример 7.1, рассмотрим множество P, состоящее из бесконечных числовых последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ сходится. Множество P, вместе с каждой последовательностью x содержит и последовательность λx, так как из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2 x_n^2$.

Далее, предположим, что $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ — другой элемент множества P. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ сходится. Так как, очевидно,

$$(x_n + y_n)^2 \leqslant 2x_n^2 + 2y_n^2$$

при любом n, то по признаку сравнения рядов с неотрицательными членами ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2$ сходится, т. е. $x + y \in P$.

Итак, множество P вместе с любыми двумя последовательностями x и y содержит последовательность $\lambda x + \mu y$. Значит, P — линейное пространство.

Так как $|x_n y_n| \leqslant \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$ при любом n, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ абсолютно сходится. Назовем сумму этого ряда скалярным произведением элементов x и y:

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Не составляет труда проверить, что (x, y) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Определенное таким образом предгильбертово пространство обозначают $\mathbf{R}_2^{\infty}$. В этом пространстве

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}.$$

Пример 7.3. В линейном пространстве действительных функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$, положим

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x)\, \varphi(x) dx.$$

Из свойств определенного интеграла следует, что (f, φ) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Поэтому на указанном множестве функций можно еще одним способом (сравните с примерами 6.5 и 6.4) ввести норму:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}.$$

Возникающее при этом нормированное пространство обозначается так: $\mathbf{C}_2[a; b]$. Расстояние в нем вычисляется по формуле

$$\rho(f, \varphi) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2\, dx}.$$

Такое расстояние $\rho(f, \varphi)$ иногда называют *среднеквадратичным уклонением* функции f от функции φ.

Уже сейчас можно видеть, насколько полезно рассмотрение абстрактных метрических пространств. Применим теорему 7.1 к конкретным метрическим пространствам $\mathbf{R}_2^n$, $\mathbf{R}_2^{\infty}$, $\mathbf{C}_2[a; b]$. Вспомнив формулы для скалярного произведения в этих пространствах, получаем, что для любых действительных чисел

$$|a_1b_1 + \ldots + a_n b_n| \leqslant \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2};$$

$$|a_1b_1 + \ldots + a_n b_n + \ldots| \leqslant \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots} \cdot \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2 + \ldots}$$

(известные *неравенства Коши*) и для любых непрерывных на $[a; b]$ функций

$$\left|\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)\,dx}$$

(известное *неравенство Буняковского*).

Таким образом, нет необходимости проводить доказательства каждого из этих неравенств отдельно. «Чтобы избежать доказательства теоремы в каждой отдельной области, — писал Банах, — что было бы неоправданной тратой времени, я выбрал путь, который состоит в следующем. В общем виде я рассматриваю множество элементов; для этих элементов я постулирую определенные свойства, из которых вывожу теоремы, и затем доказываю, что для каждой отдельной области математики принятые постулаты справедливы».[1]

3. Геометрия предгильбертовых пространств. Существование скалярного произведения в предгильбертовых пространствах позволяет определить в таких пространствах ряд геометрических понятий, аналогичных тем, которые встречаются в элементарной геометрии.

Среди них особенно важно понятие ортогональности векторов. Как известно, в евклидовом пространстве два вектора a и b ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю. Это предложение принимают в предгильбертовых пространствах за определение ортогональности: два вектора a и b предгильбертова пространства L называются *ортогональными*, если $(a, b) = 0$. Так, например, функции $a(x) = \cos x$ и $b(x) = \sin x$ ортогональны в пространстве $\mathbf{C}_2\,[0;\ 2\pi]$, так как

$$(a, b) = \int_0^{2\pi} \cos x \sin x\,dx = 0.$$

В геометрии ортогональность векторов a и b означает, что угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$. Определим общее понятие угла между векторами a и b предгильбертова пространства.

Известно, что в трехмерном евклидовом пространстве угол φ между любыми двумя векторами удовлетворяет соотношению

$$\cos\varphi = \frac{(a,\ b)}{\|a\| \cdot \|b\|} \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi). \tag{7.3}$$

Определим этой формулой и угол φ между векторами a и b предгильбертова пространства L. Такой угол заведомо существует, так как по неравенству Коши — Буняковского

$$\left|\frac{(a,\ b)}{\|a\| \cdot \|b\|}\right| \leqslant 1,$$

а потому найдется такое φ, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, и выполняется (7.3).

---

[1] См. У. Сойер. Путь в современную математику. М., 1972, с. 223.

На предгильбертовы пространства переносятся также некоторые теоремы элементарной геометрии (теорема Пифагора и т. п.)

4. Предгильбертовы пространства над полем комплексных чисел. Скалярное произведение рассматривают и в линейных пространствах над полем комплексных чисел **C**. Для них скалярное произведение может принимать комплексные значения; при этом требуют, чтобы оно удовлетворяло приведенным выше аксиомам 2—4, а вместо первой аксиомы выполнялось условие: $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

Например, в линейном пространстве $\mathbf{C}^n$, элементами которого служат кортежи длины n из комплексных чисел, можно следующим образом ввести скалярное произведение элементов $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$:

$$(a, b) = a_1\bar{b}_1 + \ldots + a_n\bar{b}_n.$$

Норма элемента $a = (a_1, \ldots, a_n)$ находится в этом пространстве по формуле

$$\|a\| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{a_1\bar{a}_1 + \ldots + a_n\bar{a}_n} = \sqrt{|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2}.$$

Очевидно, что $\|a\| \geqslant 0$, причем $\|a\| = 0$ лишь если $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

В пространстве непрерывных комплекснозначных функций скалярное произведение определяется формулой

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x)\overline{\varphi(x)}\,dx.$$

Неравенство Коши — Буняковского истинно и в предгильбертовых пространствах над **C**.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Перечислите аксиомы скалярного произведения.
2. Частным случаем какого понятия является понятие предгильбертова пространства?
3. Что такое двумерное предгильбертово пространство?
4. Как задается в предгильбертовом пространстве норма? Как задается в нем метрика?
5. Какие векторы предгильбертова пространства называются ортогональными?
6. Почему косинус угла в предгильбертовом пространстве по модулю не превосходит числа 1?
7. Запишите частные случаи неравенства Коши — Буняковского.
8. Запишите формулу для нормы вектора в пространствах $\mathbf{R}_2^n$, $\mathbf{R}_2^\infty$, $C_2[a; b]$.
9. Запишите формулу для косинуса угла в пространствах $\mathbf{R}_2^n$, $\mathbf{R}_2^\infty$, $C_2[a; b]$.
10. Из каких элементов состоят единичные шары с центром в нуле для пространств $\mathbf{R}_2^n$, $\mathbf{R}_2^\infty$, $C_2[a; b]$?

УПРАЖНЕНИЯ

§ 3. № 16—17, 19—20, 29—31, 44—46, 61—62.

Таблица основных линейных нормированных пространств

	Элементы пространства		
	Кортежи из n действительных чисел $x=(x_1, \dots; x_n)$	Бесконечные последовательности из действительных чисел $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$	Функции, непрерывные на отрезке $[a; b]$ $x = x(t)$
Обозначение и формула для нормы	R_2^n $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$	R_2^∞ $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$ x такие, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ сходится	$C_2[a; b]$ $\|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt}$
	R_1^n $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$	R_1^∞ $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ x такие, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ сходится	$C_1[a; b]$ $\|x\| = \int_a^b \|x(t)\|\,dt$
	R_∞^n $\|x\| = \max_i \|x_i\|$	R_∞^∞ $\|x\| = \sup_i \|x_i\|$ x — ограниченные последовательности	$C[a; b]$ $\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \|x(t)\|$

§ 8. СХОДИМОСТЬ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Предел последовательности. Перейдем теперь к определению основных понятий математического анализа в метрических пространствах. Первым из них будет понятие сходимости последовательности точек метрического пространства. Так как определение предела числовой последовательности опирается лишь на понятие расстояния, то оно может быть дословно перенесено в произвольное метрическое пространство.

Точка a метрического пространства M называется *пределом последовательности точек* (x_n) из пространства M, если для любого положительного числа ε можно указать такой номер N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

При этом пишут $x_n \to a$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и говорят, что *последовательность* (x_n) *сходится к точке* a (по метрике пространства M). Если последовательность (x_n) не сходится ни к какому элементу из M, ее называют *расходящейся*.

Определение предела в произвольном метрическом пространстве можно, очевидно, свести к понятию предела числовой последовательности: точка $a \in M$ называется *пределом последовательности точек* (x_n) из M, если числовая последовательность $\rho(a, x_n)$ стремится к нулю при $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a, x_n) = 0$.

Неравенство $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ означает, что x_n находится в ε-окрестности точки a. Поэтому можно дать и «геометрическое» определение предела.

Точка a называется *пределом последовательности точек* (x_n), если любая окрестность точки a содержит все точки данной последовательности, начиная с некоторой.

Поскольку элементами метрического пространства могут быть и числа, и числовые кортежи, и точки геометрического пространства, и линии, и функции, то данное выше определение имеет весьма широкую область применения.

Пример 8.1. Последовательность функций $x_n(t) = t^n$ сходится в пространстве $\mathbf{C}_1[0; 1]$ к функции $\theta(t) \equiv 0$.

В самом деле, в этом пространстве

$$\rho(x_n, \theta) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1},$$

а значит, $\rho(x_n, \theta) \to 0$ при $n \to \infty$.

Эта же последовательность функций в пространстве $\mathbf{C}[0; 1]$ не сходится к функции θ, поскольку в этом случае

$$\rho(x_n, \theta) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} t^n = 1.$$

В конечномерном линейном нормированном пространстве наряду со сходимостью по норме удобно рассматривать еще так называемую покоординатную сходимость. Пусть $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$, $k \in \mathbf{N}$, последовательность точек из n-мерного пространства L^n. Будем говорить, что *последовательность* $(x^{(k)})$ *сходится покоординатно к точке* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из L^n, если каждая числовая последовательность $(x_i^{(k)})$ сходится при $k \to \infty$ к числу x_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Докажем, что *в любом конечномерном линейном нормированном пространстве L^n из покоординатной сходимости последовательности $(x^{(k)})$ к x вытекает, что $(x^{(k)})$ сходится к x по норме.*

В самом деле, $x^{(k)}=\sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} e_i$, $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e$, где $(e_1, \ldots, e_n)$ — некоторый базис пространства L^n. Поэтому

$$\rho(x^{(k)}, x) = \| x^{(k)} - x \| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - x_i) e_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} | x_i^{(k)} - x_i | \cdot \| e_i \|.$$

Отсюда видно, что если $x_i^{(k)} \to x_i$ при $k \to \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$, то $\rho(x^{(k)}, x) \to 0$ при $k \to \infty$, т. е. $(x^{(k)})$ сходится к x по норме.

Справедливо и обратное утверждение: *если последовательность элементов $(x^{(k)})$ конечномерного линейного нормированного пространства L^n сходится к элементу x по норме, то она сходится к x и покоординатно.*

В общем случае это утверждение доказывается непросто. Докажем его для пространства $\mathbf{R}_2^n$. Так как в этом пространстве

$$\|x^{(k)} - x \| = \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - x_i)^2,$$

то $| x_i^{(k)} - x_i | \leqslant \| x^{(k)} - x \|$ при любом i, а потому из того, что $\lim\limits_{k \to \infty} \| x^{(k)} - x \| = 0$, вытекает, что $\lim\limits_{k \to \infty} x_i^{(k)} = x_i$.

Аналогично проводится доказательство и для пространств $\mathbf{R}_1^n$ и $\mathbf{R}_\infty^n$.

Две метрики на множестве M называются *эквивалентными*, если из того, что $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x$ по одной из них, вытекает, что то же равенство справедливо и для другой. Так как в $\mathbf{R}^n$ любая из норм задает сходимость, равносильную покоординатной сходимости, то *все нормы в пространстве $\mathbf{R}^n$ задают эквивалентные друг другу метрики.*

Пример 8.2. В пространстве $\mathbf{R}_2^\infty$ также наряду со сходимостью по метрике можно рассматривать и покоординатную сходимость. И в этом случае сходимость последовательности $(x^{(k)})$, $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots)$ к точке $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ по метрике влечет за собой покоординатную сходимость: $\lim\limits_{k \to \infty} x_n^{(k)} = a_n$, $n \in \mathbf{N}$. Обратное, однако, неверно — последовательность элементов из $\mathbf{R}_2^\infty$ может сходиться к a покоординатно, но не сходиться к a по метрике. Например, положим $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots)$, где $x_i^{(k)} = 0$ при $i \neq k$ и $x_k^{(k)} = 1$. Тогда для каждого фиксированного i имеем: $\lim\limits_{k \to \infty} x_i^{(k)} = 0$, так как только одно из чисел этой последовательности отлично от нуля, а именно $x_i^{(i)}$. Но эта последовательность не сходится к элементу $\theta = (0, \ldots, 0, \ldots)$ по метрике пространства $\mathbf{R}_2^\infty$, так как

$$\rho(x^{(k)},\ \theta) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^{(k)} - 0)^2} = 1$$

и $\rho(x^{(k)}, \theta)$ не стремится к нулю при $k \to \infty$.

Поскольку метрики в пространствах $\mathbf{C}[a; b]$, $\mathbf{C}_1[a; b]$, $\mathbf{C}_2[a; b]$ различны, то можно говорить о разных видах сходимости последовательностей функций.

Пусть последовательность функций из пространства $\mathbf{C}[a; b]$ сходится в этом пространстве к функции f. Это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$, где

$$\rho(f_n, f) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f_n(x) - f(x)|.$$

Но тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $n > N$ для всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Это значит, что последовательность (f_n) равномерно сходится на $[a; b]$ к f.

Обратно, если последовательность (f_n) функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$, равномерно сходится на $[a; b]$ к f, то, как известно, функция f тоже непрерывна на $[a; b]$, т. е. $f \in \mathbf{C}[a; b]$. При этом, в силу определения равномерной сходимости, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$, т. е. (f_n) сходится к f по метрике $\mathbf{C}[a; b]$.

Итак, *сходимость по метрике пространства* $\mathbf{C}[a; b]$ *равносильна равномерной сходимости.*

2. Свойства сходящихся последовательностей. Сходящиеся последовательности произвольного метрического пространства обладают привычными свойствами сходящихся числовых последовательностей.

Теорема 8.1. *Никакая последовательность точек метрического пространства не может иметь более одного предела.*

Доказательство. Предположим, что в некотором метрическом пространстве имеется последовательность (x_n), имеющая два предела: a и b, $a \neq b$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a, x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(b, x_n) = 0$. Кроме того, в силу аксиом метрики

$$0 \leqslant \rho(a, b) \leqslant \rho(a, x_n) + \rho(b, x_n).$$

Переходя в этом числовом неравенстве к пределу, получаем: $\rho(a, b) = 0$, что противоречит аксиоме тождества, поскольку $a \neq b$. ■

Теорема 8.2. *Если последовательность точек метрического пространства имеет предел, то и любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.*

Доказательство такое же, как и в случае числовых последовательностей. ■

Теорема 8.3. *Всякая сходящаяся последовательность точек* (x_n) *метрического пространства* M *ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда найдется такое N, что $\rho(a, x_n) < 1$ при $n > N$. Обозначим через r наибольшее из чисел $1, \rho(a, x_1), \ldots, \rho(a, x_N)$. Все точки рассматриваемой последовательности принадлежат замкнутому шару радиуса r с центром в точке a. Это и означает, что последовательность ограничена. ■

Теорема 8.4. *Если последовательности* (x_n) *и* (y_n) *из метрического пространства сходятся, то*

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n). \tag{8.1}$$

Доказательство. В силу неравенства (5.2) имеем:

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y).$$

Переходя в этом соотношении к пределу, получаем (8.1). ■

В линейных нормированных пространствах, где определены операции сложения элементов и умножения элементов на число, справедливы такие теоремы:

Теорема 8.5. *Если в линейном нормированном пространстве последовательности* (x_n) *и* (y_n) *сходятся, то и последовательность* $(x_n + y_n)$ *сходится, причем*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{8.2}$$

Доказательство. Пусть $x_n \to a$, $y_n \to b$. Тогда

$$0 \leqslant \|(a + b) - (x_n + y_n)\| = \|(a - x_n) + (b - y_n)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|a - x_n\| + \|b - y_n\|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, получим (8.2.)■

Теорема 8.6. *Если числовая последовательность* (λ_n) *сходится к числу* λ, *а последовательность* (x_n) *из линейного нормированного пространства* L *сходится к* $a \in L$, *то последовательность* $(\lambda_n x_n)$ *сходится в* L *к элементу* λa.

Доказательство вытекает из соотношения

$$0 \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda a\| = \|\lambda_n (x_n - a) + (\lambda_n - \lambda) a\| \leqslant |\lambda_n| \cdot \|a - x_n\| +$$
$$+ |\lambda_n - \lambda| \cdot \|a\|. \ ■$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение сходящейся последовательности точек метрического пространства.
2. Дайте определение сходящейся последовательности точек линейного нормированного пространства.

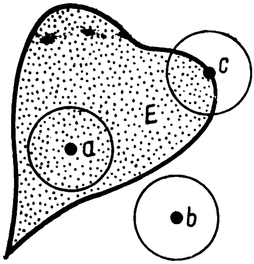

Рис. 13

3. Какое линейное пространство называется конечномерным? Что называется базисом такого пространства? Что такое «координаты вектора»? Укажите базис в пространстве $\mathbf{R}^n$, дайте определение покоординатной сходимости в конечномерном линейном пространстве.

4. Укажите какую-нибудь расходящуюся последовательность точек из пространства $\mathbf{R}_1^2$. Может ли эта последовательность сходиться к какой-нибудь точке покоординатно?

5. Проведите доказательство соотношения (8.2).

6. Почему не имеет смысла говорить о справедливости теоремы 8.5 в произвольном метрическом пространстве?

УПРАЖНЕНИЯ

§ 5. № 3, 7, 9—14, 22, 23—26, 32.

§ 9. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА

1. Внешние, внутренние и граничные точки. На рисунке 13 изображено подмножество E плоскости $\mathbf{R}_2^2$. Все точки плоскости делятся по отношению к этому множеству на три класса — внутренние (например, точка a), внешние (например, точка b) и граничные (например, точка c). Такую же классификацию можно ввести для точек любого метрического пространства по отношению к любому подмножеству этого пространства. Приведем соответствующие определения.

Пусть M — метрическое пространство, E — какое-либо его подмножество. Точка $a \in M$ называется *внутренней* для множества E, если у нее существует окрестность, целиком состоящая из точек множества E.

Точка $b \in M$ называется *внешней* для множества E, если у нее существует окрестность, не содержащая ни одной точки из E.

Точка $c \in M$ называется *граничной* для множества E, если в каждой ее окрестности имеются как точки, принадлежащие множеству E, так и точки, не принадлежащие ему. Множество всех граничных точек для E называется *границей* E и обозначается ∂E.

Как следует из этих определений, *любая точка $a \in M$ является для данного множества E либо внутренней, либо внешней, либо граничной, причем каждая из этих возможностей исключает две остальные.* Ясно также, что множество E содержит все свои внутренние точки и не содержит внешних точек; граничные точки могут как принадлежать, так и не принадлежать этому множеству.

Следует иметь в виду, что внутренняя точка множества E может оказаться граничной, если заменить метрическое пространство M другим пространством, содержащим E. Например, любая точка множества $E = \mathbf{R}$ является внутренней относительно $\mathbf{R}$. Но если рассматривать $E = \mathbf{R}$ как часть плоскости, то все точки из E окажутся граничными, так как в любой их окрестности, наряду с точками из E, имеются точки, не принадлежащие E (рис. 14).

Но *если $E \subset M \subset M_1$ и a — граничная точка для E в M, то она будет граничной для E и в M_1.* В самом деле, по условию в любой окрестности точки a в M есть точки из E и точки из $M \setminus E$, а тогда тем более в любой окрестности этой же точки в M_1 найдутся как точки из E, так и точки из $M_1 \setminus E$.

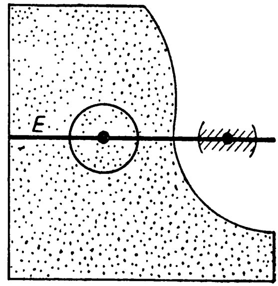

Рис. 14

Пример 9.1. Верхняя и нижняя грани ограниченного множества E из $\mathbf{R}$ являются граничными точками этого множества.

Действительно, пусть $\beta = \sup E$. Согласно известному свойству верхней грани, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $x \in E$, что

$$\beta - \varepsilon < x \leqslant \beta.$$

Отсюда ясно, что ε-окрестность точки β содержит как точку x из E, так и, например, точку $\beta + \frac{\varepsilon}{2}$, не принадлежащую E, а потому β является граничной точкой для E.

Аналогично проверяется, что и $\alpha = \inf E$ — граничная точка для E.

Пример 9.2. Все точки пространства $\mathbf{R}$ — граничные для множества $\mathbf{Q}$. Это следует из того, что в любой окрестности точки $a \in \mathbf{R}$ имеются как рациональные, так и иррациональные числа.

Пример 9.3. Пусть E — множество функций пространства $C[-1; 1]$ таких, что $f(x) \leqslant 1$ при $x \in [-1; 1]$. Покажем, что функция $f_0(x) = 2x$ является внешней «точкой» для множества E.

Рассмотрим окрестность радиуса $\frac{1}{2}$ функции f_0 (рис. 15). Пусть f — произвольная функция из этой окрестности. Тогда

$$\|f - f_0\| = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - f_0(x)| < \frac{1}{2},$$

а значит,

$$|f(1) - f_0(1)| < \frac{1}{2} \Rightarrow |f(1) - 2| < \frac{1}{2} \Rightarrow f(1) > \frac{3}{2} \Rightarrow f \notin E.$$

Таким образом, ни один элемент из выбранной окрестности не принадлежит множеству E, а потому f_0 — внешняя «точка» для E.

Пример 9.4. Границей открытого шара $U(a; r)$ в линейном нормированном пространстве L является сфера $S(a; r)$.

Доказательство предоставляем провести читателю.

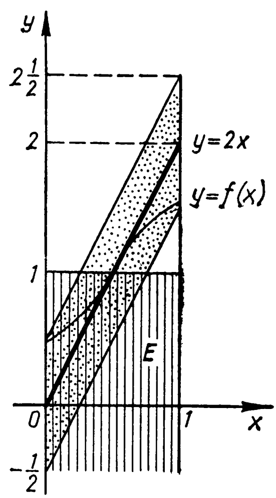

Рис. 15

Теорема 9.1. *Граница множества в метрическом пространстве совпадает с границей его дополнения до всего пространства.*

Доказательство. В определении граничной точки множества как само множество E, так и его дополнение CE «равноправны» — в любой окрестности этой точки должны быть и точки из E, и точки из CE. Отсюда и следует наше утверждение. ■

Теорема 9.2. *Пусть дана любая совокупность подмножеств $\{E_\alpha\}$ метрического пространства M. Точка a, внутренняя хотя бы для одного из этих подмножеств, является внутренней и для их объединения $E = \bigcup\limits_{\alpha} E_\alpha$. Если число подмножеств E_α конечно, то точка, внешняя для каждого из E_α, является внешней и для E.*

Доказательство. Если a — внутренняя точка для E_α, то у нее существует окрестность U, целиком состоящая из точек множества E_α. Так как $E_\alpha \subset E$, то U состоит целиком из точек множества E, и потому a является внутренней точкой и для E.

Если a — внешняя точка для $E_1, E_2, \ldots, E_n$, то у нее существуют окрестности $U_1, U_2, \ldots, U_n$, не содержащие соответственно точек из $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Но тогда наименьшая из этих окрестностей не содержит точек множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n$, т. е. не содержит ни одной точки из $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$. Это и означает, что точка a является внешней для E. ■

Теорема 9.3. *Граница объединения двух множеств E и F содержится в объединении границ этих множеств.*

$$\partial (E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F. \tag{9.1}$$

Доказательство. Пусть точка a из пространства M не принадлежит ни границе множества E, ни границе множества F. Тогда a либо является внутренней хотя бы для одного из этих множеств, либо внешней для обоих множеств. Согласно теореме 9.2, в первом случае она будет внутренней, а во втором — внешней точкой для $E \cup F$ и потому не может быть граничной точкой для $E \cup F$.

Итак, если точка a не принадлежит $\partial E \cup \partial F$, то она не может принадлежать и $\partial (E \cup F)$, а потому справедливо включение (9.1). ■

Замечание. Теорема 9.3, очевидно, справедлива для объединения любой конечной совокупности множеств. Однако она перестает быть верной в случае объединения бесконечного семейства множеств.

Действительно, рассмотрим, например, в $\mathbf{R}_2^2$ концентрические круги E_n радиусов $1 - \frac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$. Их объединением является открытый круг радиуса 1. Граница этого круга (окружность единичного радиуса) не является подмножеством объединения границ E_n $\left(\text{окружностей радиусов } 1 - \frac{1}{n+1}\right)$.

Теорема 9.4. *Для любой граничной точки a множества E существует последовательность точек (x_n) этого множества, сходящаяся к a.*

Доказательство. Так как $a \in \partial E$, то в любой окрестности a имеются точки из E. В частности, в $\frac{1}{n}$-окрестности точки a можно найти точку из E. Обозначим ее x_n. Давая n значения 1, 2, 3, ..., получим последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$, точек из E. Поскольку $\rho(x_n, a) < \frac{1}{n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a, x_n) = 0$ и потому $x_n \to a$. ■

Теорема 9.5. *Предел a любой сходящейся последовательности точек (x_n) из множества E является либо внутренней, либо граничной точкой для E.*

Доказательство. Так как $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то в любой окрестности точки a, имеются точки последовательности (x_n), т. е. точки из E. Значит, a не может быть внешней точкой для E, что и утверждается в теореме. ■

2. Всюду плотные подмножества. Если E—такая часть метрического пространства M, что в M нет ни одной точки, внешней для E, то говорят, что E *всюду плотно* в M. Иными словами, E всюду плотно в M, если любая точка a из M является для E внутренней или граничной, т. е. $M = E \cup \partial E$.

Поскольку в любой окрестности точки, граничной для E, есть точки из E, можно сказать, что E всюду плотно в M в том и только том случае, когда в любой окрестности $U(x; r)$, где $x \in M$, $r > 0$, есть хоть одна точка из E.

Пример 9.5. Множество рациональных чисел всюду плотно в $\mathbf{R}$.

В самом деле, в примере 9.2 было показано, что все точки из $\mathbf{R}$ являются граничными для $\mathbf{Q}$.

Пример 9.6. Множество E непрерывных кусочно-линейных функций на отрезке $[a; b]$ всюду плотно в $\mathbf{C}[a; b]$ (функция называется *кусочно-линейной* на $[a; b]$, если существует такое разбиение $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a; b]$, что на каждом промежутке $[x_k; x_{k+1}]$ эта функция линейна).

В самом деле, для любой непрерывной функции f и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a; b]$, что для всех k $(k = 0, \ldots, n-1)$ выполняется неравенство: $M_k - m_k < \varepsilon$ (здесь M_k — наибольшее, а m_k — наименьшее значения функции f на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$). Последовательно соединяя отрезками точки $(x_0; y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, где $y_k = f(x_k)$ $(k = 0, \ldots, n)$, получим график кусочно-линейной функции φ. Ясно, что $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in [a; b]$ и потому $\rho(f, \varphi) < \varepsilon$, т. е. $\varphi \in U(f; \varepsilon)$. Это и значит, что E всюду плотно в $\mathbf{C}[a; b]$.

Теорема 9.6. *Часть E метрического пространства M всюду плотна в M в том и только том случае, когда для любой точки $a \in M$ можно найти в E последовательность (x_n), сходящуюся к a.*

Доказательство. Пусть E всюду плотно в M. Точка $a \in M$ является для E либо внутренней, либо граничной. Если a — внутренняя, то в качестве искомой последовательности можно взять $(a, a, \ldots, a, \ldots)$. Если же $a \in \partial E$, то искомая последовательность существует в силу теоремы 9.4.

Обратно, если любая точка из M есть предел некоторой последовательности из E, то в силу теоремы 9.5 эта точка внутренняя или граничная для E. Поэтому E всюду плотно в M. ■

Теорема 9.7. *Если F всюду плотно в E, а E всюду плотно в M, то F всюду плотно в M.*

Доказательство. Возьмем любую точку $a \in M$ и рассмотрим произвольную окрестность $U(a; r)$ этой точки. Так как E всюду плотно в M, то в $U(a; r)$ найдется точка b из E. Существует окрестность $U(b; r_1)$ точки b такая, что $U(b; r_1) \subset U(a; r)$ (см. с. 27). Так как F всюду плотно в E, то в окрестности $U(b; r_1)$ найдется точка $c \in F$. Ясно, что $c \in U(a; r)$. Значит, в любой окрестности каждой точки a из M есть точка из F, а потому F всюду плотно в M. ■

3. Открытые и замкнутые множества. На плоскости различают открытый и замкнутый круги, открытый и замкнутый квадраты и т. д. Точно так же на прямой различают открытый и замкнутый промежутки (интервал и отрезок). Различие между этими множествами состоит в том, что первые не содержат ни одной своей граничной точки, а вторые содержат все такие точки. Аналогичные классы множеств выделяют и в произвольных метрических пространствах.

Множество E из метрического пространства M, содержащее все свои граничные точки, называется *замкнутым* в M. Иными словами, E замкнуто в M в том и только том случае, когда $\partial E \subset E$.

Множество E из M, не содержащее ни одной своей граничной точки, называется *открытым* в M. Иными словами, E открыто в M тогда и только тогда, когда $\partial E \cap E = \varnothing$.

Так как точки любого множества в M делятся на внутренние и граничные, а открытые множества не содержат граничных точек, то *все точки открытого множества внутренние*. Обратно, *если все точки множества E внутренние, то оно открыто.*

Точно так же доказывается, что *множество E тогда и только тогда замкнуто в M, когда все точки, не принадлежащие E, являются внешними для E.*

Граница всего метрического пространства M пуста: $\partial M = \varnothing$. Поэтому $\partial M \subset M$ и $\partial M \cap M = \varnothing$. Это значит, что *все пространство M одновременно и замкнуто и открыто.* Таким же свойством, очевидно, обладает и пустое множество.

Имеются множества, которые не являются ни открытыми, ни замкнутыми. Таков, например, промежуток $]0; 1]$ из $\mathbf{R}$, который содержит одну свою граничную точку и не содержит другой.

Пример **9.7.** В любом метрическом пространстве каждый открытый шар является открытым множеством (чем и объясняется его название).

Действительно, согласно свойствам окрестностей (см. с. 27), у любой точки шара U имеется окрестность, целиком принадлежащая U, т. е. все точки множества U — внутренние и потому оно является открытым.

Пример **9.8.** В любом метрическом пространстве каждый замкнутый шар $V = \overline{U}(a; r)$ является замкнутым множеством (чем и объясняется его название).

В самом деле, пусть $b \notin V$. Тогда $\rho(a, b) > r$, и если $\delta < \rho(a, b) - r$, то для всех x из $U(b; \delta)$ имеем:

$$\rho(a, x) \geqslant \rho(a, b) - \rho(b, x) > \rho(a, b) - \delta > r,$$

Поэтому $x \notin V$ и $V \cap U(b; \delta) = \varnothing$, т. е. b — внешняя точка для V. Итак, каждая не принадлежащая V точка — внешняя для V, что и доказывает замкнутость V.

Замечание. Из рассмотренных примеров не вытекает, что никакой открытый шар не может оказаться замкнутым множеством (а замкнутый шар — открытым множеством). Например, в пространстве $\mathbf{Q}$ рациональных чисел с обычной метрикой открытый шар с центром в точке 0 и радиусом $\sqrt{2}$ совпадает с замкнутым шаром с тем же центром и радиусом, а потому (см. пример 9.8) является замкнутым множеством.

Однако в линейном нормированном пространстве L, в частности в $\mathbf{R}_2^n$, всякий открытый шар $U(a; r)$ не замкнут, поскольку его граница — сфера $S(a; r)$ (см. пример 9.4) — не пуста и не принадлежит этому шару. Замкнутые же шары в L не открыты.

Из теорем 9.4 и 9.5 вытекает, что принятое нами определение замкнутого множества равносильно такому: множество E из метрического пространства M называется *замкнутым*, если предел всякой сходящейся последовательности (a_n) из E принадлежит E.

В самом деле, пусть множество E в M замкнуто, и (a_n) — сходящаяся последовательность в M, состоящая из элементов множества E, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда по теореме 9.5 точка a либо внутренняя, либо граничная для E. Поскольку E замкнуто, оно содержит свои граничные точки, а потому в обоих случаях $a \in E$.

Обратно, пусть множество $E \subset M$ содержит пределы всех сходящихся последовательностей, составленных из его элементов, и пусть a — граничная точка этого множества. Так как по теореме 9.4 a —предел некоторой последовательности точек из E, то $a \in E$. Значит, E содержит все свои граничные точки и потому замкнуто в M.

Это определение иногда удобнее первоначального.

4. Свойства открытых и замкнутых множеств. Одно и то же множество E может быть открытым (соответственно — замкнутым), если его рассматривать в одном метрическом пространстве M_1, и не быть открытым (соответственно — замкнутым), если его рассматривать в другом пространстве M_2. Например, интервал — открытое множество на прямой — не является открытым на плоскости.

Тем не менее справедливы следующие теоремы:

Теорема 9.8. *Если E — часть пространства M_1, а M_1 — часть пространства M_2 и E замкнуто в M_2, то E замкнуто и в M_1.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда в M_1 существует точка a, граничная для E, но не принадлежащая E. Такая точка a является граничной для E и в M_2 (см. с. 45), и так как $a \notin E$, то E не замкнуто в M_2. ■

Теорема 9.9. *Если M — часть пространства P, а множество E из P открыто в P, то $E \cap M$ открыто в M.*

Доказательство. Пусть $a \in E \cap M$. Тогда $a \in E$, а так как E открыто в P, то существует окрестность $U_P(a; \delta)$, целиком лежащая в E. Но тогда тем более $U_M(a; \delta) \subset E$ (так как M — часть P) и потому $U_M(a; \delta) \subset E \cap M$. Это значит, что любая точка из $E \cap M$ является внутренней в M и потому $E \cap M$ открыто в M. ■

Следствие. *Если* $E \subset M_1 \subset M_2$ и E *открыто в* M_2, *то* E *открыто и в* M_1.

Часто некоторое множество получается из других множеств с помощью теоретико-множественных операций. Поэтому полезны следующие теоремы:

Теорема 9.10. *В любом метрическом пространстве дополнение к замкнутому множеству открыто, а дополнение к открытому — замкнуто.*

Доказательство. В силу теоремы 9.1 множества A и CA имеют одну и ту же границу. Поэтому, если A замкнуто, т. е. содержит все свои граничные точки, то CA не содержит ни одной своей граничной точки, т. е. открыто.

Аналогично доказывается и вторая часть теоремы. ■

Теорема 9.11. *В любом метрическом пространстве объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство проведем сначала для случая объединения двух замкнутых множеств: A и B. Согласно теореме 9.3

$$\partial (A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B.$$

Но так как A и B замкнуты, то $\partial A \subset A$ и $\partial B \subset B$, а потому $\partial A \cup \partial B \subset A \cup B$. Значит, $\partial (A \cup B) \subset A \cup B$, т. е. множество $A \cup B$ содержит свою границу. Это и означает, что оно замкнуто.

Поскольку объединение любого конечного числа замкнутых множеств может быть получено путем последовательного попарного объединения (например, $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$), то теорема доказана и в общем случае. ■

Отметим, что теорема 9.11 перестает быть верной, если семейство объединяемых множеств бесконечно. Например, объединение счетного набора замкнутых множеств $\left[\frac{1}{n};\ 1\right]$ из $\mathbf{R}$ представляет собой незамкнутое множество $]0;\ 1]$.

Теорема 9.12. *В любом метрическом пространстве объединение любого семейства открытых множеств открыто.*

Доказательство. Пусть $\{E_\alpha\}$ — семейство открытых множеств и $E = \bigcup\limits_{\alpha} E_\alpha$. Докажем, что E открыто.

Пусть $x \in E$. Тогда x принадлежит хотя бы одному из множеств E_α. Но E_α по условию открыто. Поэтому x — внутренняя точка E_α. Но тогда по теореме 9.2 она будет внутренней и для E. Значит, все точки из E внутренние. Следовательно, E — открытое множество. ■

Теорема 9.13. *В любом метрическом пространстве пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

Доказательство. Пусть $E = \bigcap\limits_{k=1}^{n} E_k$, где E_k $(k = 1, \ldots$

..., n) — открытые множества. По правилам Де Моргана имеем:

$$CE = C\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} CE_k.$$

Так как, в силу теоремы 9.10, множества CE_k замкнуты, то из теоремы 9.11 вытекает, что и множество CE замкнуто. А значит, E является дополнением к замкнутому множеству и потому открыто.■

Пример 9.9. Множество D тех точек $(x; y)$ плоскости $\mathbf{R}_2^2$, координаты которых удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} x + y > 5, \\ x^2 + y^2 > 36, \end{cases}$$

открыто.

Действительно, множество D представляет собой пересечение множеств $D_1 = \{(x; y) \mid x + y > 5\}$ и $D_2 = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 > 36\}$. Эти множества открыты, так как D_1 — это открытая полуплоскость, а D_2 — открытый круг. Поэтому, в силу теоремы 9.13, D открыто.

Замечание. Теорема 9.13 перестает быть верной в случае пересечения бесконечного семейства открытых множеств. Действительно, например, пересечение счетного набора открытых множеств $\left]-\frac{1}{n};\ 1 + \frac{1}{n}\right[$, $n \in \mathbf{N}$, из $\mathbf{R}$ представляет собой отрезок $[0; 1]$, не являющийся открытым множеством в $\mathbf{R}$.

Теорема 9.14. *В любом метрическом пространстве пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.13.

5. Канторово множество и ковер Серпинского. В некоторых теоретических вопросах математики встречаются весьма причудливые замкнутые множества. Рассмотрим два из них.

Пример 9.10. Канторово троичное множество. Разделим отрезок $[0; 1]$ на три конгруэнтных отрезка точками $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ и удалим средний интервал $G_1 = \left]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right[$. Каждый из оставшихся двух отрезков $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ разобьем на три конгруэнтных отрезка и удалим средние интервалы, т. е. интервалы $G_2 = \left]\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right[$ и $G_3 = \left]\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right[$. С каждым из оставшихся четырех отрезков $\left(\left[0; \frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}; \frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9}; 1\right]\right)$ поступим аналогично: разобьем каждый из них на три конгруэнтных отрезка и удалим средний интервал (рис. 16). Указанный процесс продолжим неограниченно. В итоге на прямой останется некоторое множество точек F_0, которое называют *канторовым троичным множеством*. Покажем, что оно замкнуто в $\mathbf{R}$.

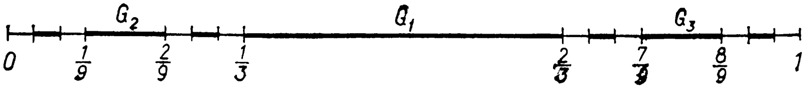

Рис. 16

Для этой цели предварительно рассмотрим объединение G всех удаленных интервалов[1]: $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \ldots$. Понятно, что G открыто в $\mathbf{R}$ как объединение открытых множеств (см. теорему 9.12). Поэтому множество CG замкнуто как дополнение к открытому (см. теорему 9.10). Так как $F_0 = [0; 1] \cap CG$, то и F_0 замкнуто как пересечение двух замкнутых множеств (см. теорему 9.14). Итак, *канторово троичное множество замкнуто.*

Множество F_0 состоит из таких чисел отрезка [0; 1], которые допускают запись в виде бесконечной троичной дроби, каждая цифра которой равна 0 или 2. Поскольку множество бесконечных последовательностей, состоящих из чисел 0 и 2, имеет мощность континуума (см. теорему 3.2), то *канторово множество имеет мощность континуума.*

Отметим еще следующее свойство этого множества: *в каждой окрестности любой точки канторова множества найдутся отличные от нее точки этого множества.*

В самом деле, точку a множества F_0 можно изобразить троичной дробью вида $a = 0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$, где все a_n имеют значения 0 или 2. Зададим $\varepsilon > 0$. Найдется такое n, что $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Но тогда, исправив в троичной записи числа a цифры $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ с 0 на 2 и с 2 на 0, получим точку, которая принадлежит F_0 и лежит в ε-окрестности точки a.

Замкнутое множество, в любой окрестности каждой точки которого есть точки того же множества, отличные от нее, называется *совершенным.* Таким образом, *канторово троичное множество совершенно.* Отметим, что любой отрезок тоже является совершенным множеством. Но канторово множество обладает еще одним свойством, которого нет у отрезка: на любом промежутке числовой оси найдется интервал, не содержащий ни одной точки канторова множества (это сразу следует из построения указанного множества, при котором из любого сколь угодно малого отрезка удалялась средняя треть).

Пример **9.11**. Ковер Серпинского[2]. Построение, аналогичное указанному в примере 9.10, можно выполнить и на плоскости. Возьмем замкнутый квадрат K со стороной 1 и разобьем его на 9 конгруэнтных квадратов (общие граничные отрезки ка-

---

[1] Их называют *смежными* для F_0 интервалами; интервал длины $\frac{1}{3^n}$ называют *интервалом n-го ранга.*

[2] Вацлав Серпинский (1882—1969) — известный польский математик. Решил ряд важных проблем из области теории множеств, топологии, теории функций, теории чисел.

ких-либо двух из этих квадратов считаем принадлежащими обоим квадратам). Удалим из K внутренность G_1 центрального квадрата (его границу оставляем). С каждым из оставшихся 8 квадратов со стороной, равной $\frac{1}{3}$, проведем аналогичную операцию: разобьем его на 9 конгруэнтных квадратов и удалим внутренность центрального квадрата (рис. 17). Аналогично поступим с каждым из оставшихся 64 квадратов со стороной, равной $\frac{1}{9}$. Указанный процесс продолжим неограниченно. В результате от квадрата останется некоторая фигура Φ_0, которая носит название «ковер Серпинского». Рассуждая так же, как при рассмотрении канторова троичного множества F_0, можно убедиться, что Φ_0 — совершенное множество.

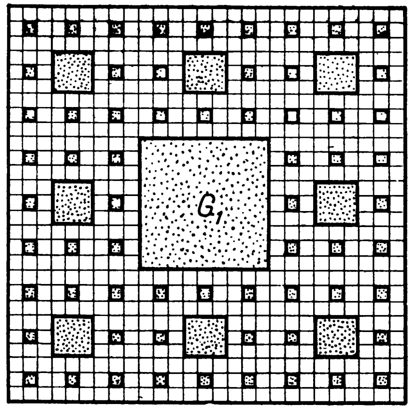

Рис. 17

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение внутренней, внешней и граничной точек множества E из метрического пространства M.
2. Дайте определение границы множества.
3. Приведите примеры внутренних, внешних и граничных точек для различных фигур на плоскости.
4. Пусть границей множества E в M является A. Какова граница дополнения E в M?
5. Может ли граница множества быть пустой? Приведите примеры.
6. Может ли граница множества совпадать со всем пространством M? Приведите примеры.
7. Меняется ли граница множества E, если заменить пространство M другим пространством, также содержащим E?
8. Приведите пример, когда граница объединения двух множеств не совпадает с объединением их границ.
9. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, где все $a_n \in E$ и все $b_n \notin E$. Докажите, что a — граничная точка для E.
10. Приведите пример всюду плотного множества на отрезке $[0;\ 1]$, отличного от этого отрезка.
11. Дайте определения открытых и замкнутых множеств.
12. Перечислите свойства открытых и замкнутых множеств.
13. В доказательстве какой теоремы о замкнутых множествах использована теорема 9.3?
14. Проведите доказательство теоремы 9.14.
15. Докажите эквивалентность двух определений замкнутого множества (через граничные точки и через пределы последовательностей).
16. Докажите, что множество E открыто в M в том и только том случае, когда все его точки внутренние.
17. Докажите, что множество $E \cup \partial E$ всегда замкнуто.

18. Докажите, что ковер Серпинского состоит из таких точек $A\ (x;\ y)$, что $0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1$, причем хотя бы одно из чисел x, y допускает троичную запись, все цифры которой отличны от 1.

19. Докажите, что ковер Серпинского — совершенное множество в $\mathbf{R}_2^2$.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 4. № 4—8, 10—15, 17—18, 20, 22, 27, 29, 42, 51, 55.
§ 5. № 40—44.

§ 10. КОМПАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Определение компактности. При изучении свойств функций, непрерывных на метрических пространствах (определение этого понятия дается в § 11) желательно выделить пространства, аналогичные отрезку, а не, скажем, интервалу — ведь мы знаем, например, что если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена, а функция $\frac{1}{x}$, непрерывная на интервале $]0;\ 1[$, не ограничена на нем.

Анализируя доказательство теорем о функциях, непрерывных на отрезке, убеждаемся, что в них широко используется свойство отрезка, выражаемое теоремой о вложенной системе отрезков. Пространства, обладающие аналогичным свойством, могут служить «аналогом» отрезка. Однако удобнее вместо этой теоремы положить в основу теории ее следствие, которое мы сейчас докажем.

Теорема 10.1 (Больцано — Вейерштрасса[1]). *Из любой последовательности (x_n) точек отрезка $[a;\ b]$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке этого отрезка.*

Доказательство. Разобъем отрезок $\Delta_1 = [a;\ b]$ пополам. Тогда хотя бы одна из полученных половин содержит точки данной последовательности, имеющие сколь угодно большие номера, иначе вся последовательность содержала бы лишь конечное число членов, что противоречило бы ее бесконечности. Обозначим выбранную половину через Δ_2 и снова разделим ее пополам. Продолжая этот процесс (который некоторые математики шутливо

---

[1] Во многих курсах математического анализа именно теорема Больцано — Вейерштрасса кладется в основу вывода свойств непрерывных функций.

Бернард Больцано (1781—1848) — чешский математик и философ. Он раньше Коши и Вейерштрасса занялся обоснованием математического анализа, ввел современные понятия предела, непрерывности, сходимости ряда, получил так называемый «критерий Коши» и др. В его труде «Наукознание» предвосхищены некоторые идеи современной математической логики.

Карл Вейерштрасс (1815—1897) — крупнейший немецкий математик, который многое внес в развитие математического анализа, теории аналитических функций, вариационного исчисления, дифференциальной геометрии и линейной алгебры. Особое внимание он уделял математической строгости и систематичности изложения математических теорий. Его учениками были многие видные математики: С. В. Ковалевская, Г. А. Шварц, Г. Кантор и др.

называют «ловлей льва в пустыне»[1]), мы получим стягивающуюся последовательность отрезков (Δ_n), такую, что каждый из них содержит точки последовательности, имеющие сколь угодно большие номера.

Выберем теперь на каждом отрезке Δ_k точку x_{n_k} заданной последовательности так, чтобы номера этих точек возрастали: $n_1 < < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Это возможно, поскольку отрезки Δ_k содержат точки со сколь угодно большими номерами. Система отрезков (Δ_k) имеет общую точку c. Докажем, что выбранная нами последовательность (x_{n_k}) сходится к c.

В самом деле, так как $\lim\limits_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$, то для любой окрестности точки c найдется такой номер m, что отрезок Δ_m целиком содержится в этой окрестности. Но этот отрезок содержит все точки последовательности (x_{n_k}), начиная с x_{n_m}. Значит, любая окрестность точки c содержит все точки последовательности (x_{n_k}), начиная с x_{n_m}, а это и значит, что $x_{n_k} \to c$. ■

Теперь мы можем выделить интересующий нас класс метрических пространств. Это пространства, в которых выполняется принцип Больцано — Вейерштрасса. Такие пространства называют компактными.

Итак, метрическое пространство называется *компактным* (или, короче, *компактом*), если всякая бесконечная последовательность его точек содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке этого пространства.

2. Свойства компактов. Приведем необходимые признаки компактности.

Теорема 10.2. *Всякое компактное подпространство A метрического пространства M замкнуто в M.*

Доказательство проведем от противного. Допустим, что A не замкнуто. Тогда (см. с. 49) в A существует сходящаяся в M последовательность (x_n), предел которой (обозначим его через b) не принадлежит A. Из этой последовательности нельзя извлечь никакой подпоследовательности, сходящейся к некоторому элементу a из A (так как иначе эта подпоследовательность имела бы в пространстве M два предела a и b, что невозможно). Но в таком случае A не является компактом, что противоречит условию. ■

Пример 10.1. Открытый шар $U(a; r)$ из линейного нормированного пространства L (в частности, интервал на прямой, открытый круг на плоскости) не компактен, так как он (см. с. 49) не замкнут в L.

Теорема 10.3. *Всякий компакт M ограничен.*

Доказательство проведем от противного. Пусть M не ограничен. Рассмотрим произвольную точку $c \in M$. Ввиду неогра-

---

[1] Утверждают, что один математик предложил для поимки льва в пустыне последовательно делить ее пополам, выбирая каждый раз для дальнейшего деления часть, где в данный момент находится лев.

ниченности M для любого n найдется такая точка $x_n \in M$, что $\rho(x_n, c) > n$. Любая подпоследовательность (x_{n_k}) построенной последовательности не ограничена, а потому (см. теорему 8.3) не может быть сходящейся. Значит, из (x_n) нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность, вопреки компактности M.■

Пример 10.2. Числовая прямая **R**, полоса на плоскости, цилиндрическая поверхность в трехмерном пространстве не являются компактными, так как они не ограничены.

Докажем один достаточный признак компактности.

Теорема 10.4. *Всякая замкнутая часть A компактного пространства M компактна.*

Доказательство. Выберем в A бесконечную последовательность элементов (x_n). Так как $A \subset M$, то $x_n \in M$ и потому (x_n) — последовательность элементов компактного пространства M. В таком случае из нее можно извлечь сходящуюся к некоторой точке a из M подпоследовательность (x_{n_k}). Но (x_{n_k}) одновременно является последовательностью из A, и A замкнуто. Значит, $a \in A$ (см. с. 49). Итак, из любой последовательности точек пространства A можно извлечь сходящуюся (к точке из A) подпоследовательность, что и доказывает компактность A.■

3. Критерий компактности в $\mathbf{R}_2^n$. Совокупность установленных выше необходимых признаков компактности — замкнутость и ограниченность — в случае подпространств из $\mathbf{R}_2^n$ является и достаточным признаком.

Теорема 10.5. *Подпространство T n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}_2^n$ тогда и только тогда компактно, когда оно в $\mathbf{R}_2^n$ замкнуто*[1] *и ограничено.*

Доказательство. Необходимость условия вытекает из теорем 10.2 и 10.3. Остается доказать его достаточность.

В случае когда T является n-мерным параллелепипедом (т. е. состоит из точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ таких, что $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, $i = 1, \ldots, n$), компактность T доказывается точно так же, как теорема Больцано — Вейерштрасса. Только параллелепипеды надо делить не пополам, а на 2^n частей (на рисунке 18 показано деление двумерного параллелепипеда, т. е. прямоугольника).

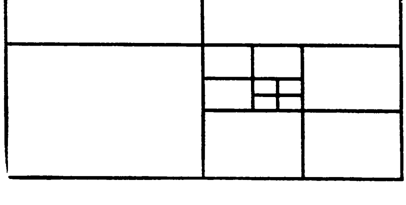

Рис. 18

Пусть теперь T — любая ограниченная замкнутая часть пространства $\mathbf{R}_2^n$. Так как T ог-

[1] Обращаем внимание читателя на одну тонкость: если T рассматривать как самостоятельное пространство, то оно всегда (см. § 9) замкнуто. В теореме имеется в виду замкнутость T как множества в пространстве $\mathbf{R}_2^n$.

раничено, то найдется n-мерный параллелепипед P, содержащий T. Но по доказанному выше этот параллелепипед компактен, а потому T компактно, как замкнутая часть компактного пространства. ■

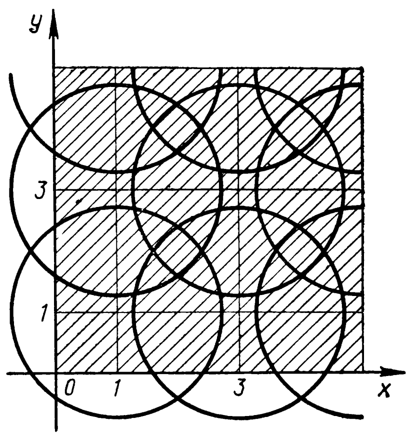

Рис. 19

4. Открытые покрытия компактов. Пусть F — некоторое подпространство метрического пространства M, а $\{G_\alpha\}$ — семейство подмножеств M (возможно, бесконечное и даже несчетное) такое, что объединение всех множеств из $\{G_\alpha\}$ содержит F. Такое семейство $\{G_\alpha\}$ называется *покрытием* F; если все множества из семейства $\{G_\alpha\}$ открыты в M, то семейство $\{G_\alpha\}$ называется *открытым покрытием* F. Например, семейство кругов $(x-(2k-1))^2+(y-(2n-1))^2 < 3$, где $k, n \in \mathbf{N}$, является (докажите это!) открытым покрытием первого квадранта плоскости (рис. 19).

Оказывается, если F — компакт, то из любого его счетного[1] открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Точнее говоря, справедлива следующая теорема:

Теорема 10.6. *Пусть $\{G_\alpha\}$ — счетное открытое покрытие компактной части F метрического пространства M. Тогда из $\{G_\alpha\}$ можно выделить конечную совокупность множеств, которая также является покрытием F.*

Доказательство. Так как $\{G_\alpha\}$ счетно, то совокупность множеств из $\{G_\alpha\}$ можно перенумеровать:

$$\{G_\alpha\} = \{G_1, \ldots, G_n, \ldots\}.$$

Обозначим через H_n множество $\bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$. Оно открыто в M как объединение открытых множеств. Поскольку $G_n \subset H_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \supset F.$$

Иными словами, система множеств $\{H_1, \ldots, H_n, \ldots\}$ также образует открытое покрытие F, причем $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \ldots$.

Докажем, что найдется такое N, при котором $H_N \supset F$. Действительно, если бы это было не так, то для любого натурального n нашлось бы такое $x_n \in F$, что $x_n \notin H_n$. Так как $H_m \subset H_n$ при $m < n$, то $x_n \notin H_m$ при всех $m \leqslant n$.

---

[1] Даже из любого бесконечного. Поскольку этот результат в такой общности нам не понадобится, то ограничимся доказательством его частного случая.

Давая n значения 1, 2, 3 и т. д., мы получим последовательность (x_n) точек из F. Из этой последовательности можно, в силу компактности F, выделить подпоследовательность (x_{n_k}), сходящуюся к некоторой точке $x \in F$. Так как $x \in F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, то найдется такое m, что $x \in H_m$. Поскольку H_m открыто, найдется окрестность U точки x, лежащая в H_m. Так как $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$, то все точки x_{n_k}, начиная с некоторого номера K, принадлежат U, а следовательно, и H_m. Таким образом, $x_{n_k} \in H_m$ при $k \geqslant K$. Но это противоречит тому, что $x_{n_k} \notin H_m$ при $n_k > m$.

Итак, найдется такое N, что $\bigcup_{n=1}^{N} H_n \supset F$. Но тогда $\bigcup_{n=1}^{N} G_n$ содержит F, т. е. конечное семейство множеств $\{G_1, \ldots, G_N\}$ покрывает F.■

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте теорему Больцано — Вейерштрасса.

2. Сходится ли последовательность (x_n), где $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$? Выделите из этой последовательности две сходящиеся подпоследовательности.

3. По какому принципу выбираются половины отрезков при доказательстве теоремы Больцано — Вейерштрасса? Почему существует последовательность чисел (n_k) такая, что $x_{n_k} \in \Delta_k$ и $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$? Где в доказательстве этой теоремы использован принцип о стягивающейся системе отрезков? Где использовано, что $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$?

4. Дайте определение компактного метрического пространства.

5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие компактности подмножества в $\mathbf{R}_2^n$.

6. Приведите примеры компактных и некомпактных подмножеств в $\mathbf{R}_2^2$ и $\mathbf{R}_2^3$.

7. Сформулируйте теорему о конечных покрытиях.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 6. № 1, 3, 5, 8, 9—17, 19—20, 26—31.

§ 11. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

1. Непрерывные отображения. Ранее вы изучали непрерывные функции одной и нескольких переменных. Теперь познакомимся с более общим понятием — непрерывным отображением.

Пусть A и B — метрические пространства с метриками ρ_A и ρ_B соответственно и f — отображение A в B. Отображение $f\colon A \to B$ называется *непрерывным в точке* $a \in A$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех $x \in A$, удовлетворяющих неравенству $\rho_A(a, x) < \delta$, выполняется неравенство

$$\rho_B(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

Это определение можно перефразировать, используя понятие окрестности.

Отображение f: $A \to B$ называется *непрерывным в точке* $a \in A$, если для любой окрестности V точки $b = f(a)$ можно указать в A такую окрестность U точки a, что $f(U) \subset V$.

Можно также дать определение непрерывности отображения, используя «язык последовательностей».

Отображение f: $A \to B$ называется *непрерывным в точке* $a \in A$, если для любой последовательности (x_n), сходящейся в A к точке a, последовательность $(f(x_n))$ в B сходится к точке $f(a)$.

Эквивалентность этих определений непрерывности доказывается точно так же, как и для функций f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Отображение f: $A \to B$ называется *непрерывным на всем пространстве* A (или просто *непрерывным*), если оно непрерывно в каждой точке из A.

Пример 11.1. Отображение f: $x \to x(1)$ пространства $\mathbf{C}[0; 1]$ в $\mathbf{R}$ непрерывно в любой «точке» a. Здесь x и a — непрерывные функции на $[0; 1]$.

Действительно, пусть дано $\varepsilon > 0$. Возьмем $\delta = \varepsilon$. Так как

$$\rho_{\mathbf{C}}(a, x) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - a(t)|,$$

$$\rho_{\mathbf{R}}(f(a), f(x)) = |x(1) - a(1)| \leqslant \rho_{\mathbf{C}}(a, x),$$

то ясно, что неравенство $\rho_{\mathbf{C}}(a, x) < \delta$ влечет за собой неравенство

$$\rho_{\mathbf{R}}(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

Такое же отображение f: $x \to x(1)$ пространства $\mathbf{C}_1[0; 1]$ в $\mathbf{R}$ не является непрерывным в «точке» θ (т. е. для функции $\theta(t) \equiv 0$).

Действительно, последовательность $x_n(t) = t^n$ сходится в $\mathbf{C}_1[0; 1]$ к функции θ (см. пример 8.1), в то время как $f(x_n) = x_n(1) = 1$, $f(\theta) = 0$ и, следовательно, $(f(x_n))$ не сходится к $f(\theta)$.

Отображение F метрического пространства M в $\mathbf{R}_2^m$ определяется заданием координат точки $F(x)$, т. е. набором числовых функций[1]: $f_1, \ldots, f_m$, определенных на M (они называются *компонентами отображения* F). *Отображение* F: $M \to \mathbf{R}_2^m$ *непрерывно на* M *тогда и только тогда, когда на* M *непрерывны функции — компоненты* $f_1, \ldots, f_m$ *отображения* F.

В самом деле, если $F(a) = (f_1(a), \ldots, f_m(a))$, $F(x) = (f_1(x), \ldots$ $\ldots, f_m(x))$, то

$$\rho^2(F(x), F(a)) = \sum_{k=1}^{m} (f_k(x) - f_k(a))^2.$$

Отсюда ясно, что если $\rho(F(x), F(a)) < \varepsilon$, то и

$$|f_k(x) - f_k(a)| < \varepsilon \ (k = 1, \ldots, m). \tag{11.1}$$

[1] *Числовой функцией* называют отображение любого метрического пространства в числовую прямую $\mathbf{R}$.

Если же выполняется (11.1), то $\rho(F(x), F(a)) < \varepsilon\sqrt{m}$. Отсюда и следует наше утверждение.

Пример **11.2.** Инверсия F относительно окружности $x^2 + y^2 = r^2$ является непрерывным отображением на себя плоскости $\mathbf{R}_2^2$ с выколотой точкой (0, 0).

Действительно, инверсия $(x; y) \to (u; v)$ задается функциями (компоненты отображения)

$$u = \frac{r^2x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{r^2y}{x^2 + y^2},$$

которые, очевидно, непрерывны на проколотой плоскости.

Покажем непрерывность некоторых важных числовых функций.

Теорема 11.1. *Если M — метрическое пространство и a — любая точка этого пространства, то функция $x \to \rho(a,x)$ непрерывна на M.*

Доказательство. Из неравенства треугольника следует, что $|\rho(a,x) - \rho(a,y)| \leqslant \rho(x,y)$. Поэтому если точка y принадлежит ε-окрестности точки $x_0 \in M$, то $|\rho(a,x_0) - \rho(a,y)| < \varepsilon$.

Это и значит, что функция $x \to \rho(a, x)$ непрерывна в точке x_0. ■

Следствие. *Отображение $x \to \|x\|$ является непрерывной числовой функцией на любом нормированном пространстве L.*

Доказательство следует из теоремы 11.1, так как $\|x\| = \rho(\theta, x)$.

Теорема 11.2. *Скалярное произведение $x \to (a, x)$, где a — произвольный элемент предгильбертова пространства L, непрерывно на L.*

Доказательство. В силу неравенства Коши — Буняковского,

$$|(a, x) - (a, x_n)| = |(a, x - x_n)| \leqslant \|a\| \cdot \|x - x_n\|.$$

Отсюда ясно, что если $x_n \to x$ в M, то $(a, x_n) \to (a, x)$ в $\mathbf{R}$. ■

Отображение f метрического пространства M_1 на метрическое пространство M_2 называется *изометрическим* или *изометрией*, если для любых x и y из M_1 выполняется равенство

$$\rho_1(x, y) = \rho_2(f(x), f(y)),$$

где ρ_1 (соответственно ρ_2) — метрика в M_1 (соответственно в M_2).

Поскольку из неравенства $\rho_1(x, y) < \varepsilon$ следует, что $\rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$, то *изометрия непрерывна.* Примером изометрического отображения может служить любое перемещение плоскости.

2. Свойства непрерывных отображений. Для непрерывных отображений метрических пространств сохраняются основные теоремы о непрерывных числовых функциях.

Теорема 11.3. *Пусть отображение f: $A \to B$ непрерывно в точке a пространства A, а отображение g: $B \to C$ — в точке $b = f(a)$ пространства B. Тогда и сквозное отображение*

$$x \to g(f(x))$$

пространства A в C непрерывно в точке a.

Доказательство. Выберем любую окрестность W точки $c = g(f(a))$ пространства C. Так как отображение g непрерывно в точке $b = f(a)$ и $g(b) = c$, то найдется окрестность V точки b такая, что $g(V) \subset W$. Точно так же, в силу непрерывности отображения f в точке a, найдется окрестность U этой точки такая, что $f(U) \subset V$. Но тогда имеем:

$$g(f(U)) \subset g(V) \subset W,$$

а это и значит, что отображение $x \to g(f(x))$ непрерывно в точке a. ■

Пусть φ и ψ — два отображения метрического пространства M в линейное пространство L. В этом случае можно говорить о сумме отображений φ и ψ, а также о произведении этих отображений на число λ. А именно полагаем:

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x); \quad (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x).$$

Теорема 11.4. *Пусть φ и ψ — непрерывные отображения метрического пространства M в линейное нормированное пространство L. Тогда отображения $\varphi + \psi$ и $\lambda\varphi$ также непрерывны на M.*

Доказательство. Пусть $a \in M$. Так как отображения φ и ψ непрерывны в точке a, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\rho(a, x) < \delta$ выполняются неравенства

$$\|\varphi(x) - \varphi(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|\psi(x) - \psi(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А тогда

$$\|(\varphi + \psi)(x) - (\varphi + \psi)(a)\| \leqslant \|\varphi(x) - \varphi(a)\| + \\ + \|\psi(x) - \psi(a)\| < \varepsilon.$$

Значит, $\varphi + \psi$ — непрерывное отображение M в L.

Непрерывность $\lambda\varphi$ доказывается аналогично. ■

Из теоремы 11.4 вытекает, что *множество всех непрерывных отображений метрического пространства M в линейное нормированное пространство L само является линейным пространством.*

Теорема 11.5. *Если f — непрерывное отображение метрического пространства A в метрическое пространство B, то полный прообраз любого открытого множества из B открыт, а замкнутого — замкнут в A.*

Доказательство. Пусть G — открытое множество из B. Требуется доказать, что все точки множества $D = f^{-1}(G)$ из A являются внутренними.

Пусть $a \in D$ и $f(a) = b$. Тогда $b \in G$ и, поскольку G открыто в B, b — внутренняя точка G. Поэтому существует окрестность V этой точки, принадлежащая G. Поскольку отображение f непрерывно в a, найдется такая окрестность U точки a, что $f(U) \subset V$. Но тогда $f(U) \subset G$, и потому $U \subset D = f^{-1}(G)$. Это показывает, что у любой точки $a \in D$ есть окрестность, принадлежащая D, т. е. a — внутренняя точка для D. Поэтому D открыто в A.

Поскольку дополнение к замкнутому множеству открыто, а прообразы двух дополнительных друг другу множеств из B взаимно дополнительны в A, то из доказанного вытекает справедливость и второго утверждения теоремы.

Теорема 11.5 иногда позволяет дать весьма простое доказательство открытости или замкнутости множества.

Пример 11.3. Множество D из $\mathbf{R}_2^3$, определяемое неравенством $2x^2 + y^2 + 3x - 4y - 5z^3 > 1$, открыто.

В самом деле, функция $u = 2x^2 + y^2 + 3x - 4y - 5z^3$ задает непрерывное отображение $\mathbf{R}_2^3$ в $\mathbf{R}$. Множество D является полным прообразом открытого луча $]1; +\infty[$ при этом отображении, а потому, в силу теоремы 11.5, оно открыто.

Заметим, что образ открытого множества при непрерывном отображении не обязательно открыт. Например, при непрерывном отображении $x \to \sin x$ интервал $]-\pi; \pi[$ переходит в отрезок $[-1; 1]$.

3. Непрерывные отображения компактов.

Теорема 11.6. *Образ компакта при непрерывном отображении компактен.*

Доказательство. Пусть M — компакт и $f: M \to T$ — непрерывное отображение. Требуется доказать, что $M' = f(M)$ — компакт.

Возьмем в M' произвольную последовательность (x_n') и обозначим через x_n какой-либо прообраз точки x_n' при отображении f. Получится последовательность точек (x_n) из M. Так как M — компакт, то из этой последовательности можно выделить подпоследовательность (x_{n_k}), сходящуюся в некоторой точке c из M. При отображении f эта последовательность перейдет в подпоследовательность (x'_{n_k}) последовательности (x_n'). В силу непрерывности отображения f в точке c

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(c) \in M'.$$

Итак, каждая последовательность точек из M' содержит подпоследовательность, сходящуюся в M'. А это и означает, что M' — компакт. ■

Следствие. *Образ замкнутого и ограниченного множества при непрерывном отображении* f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *замкнут и ограничен.*

В самом деле, и в $\mathbf{R}^n$, и в $\mathbf{R}^m$, свойство «замкнуто и ограничено» эквивалентно компактности, а непрерывный образ компакта компактен. ■

Любопытно, что если множество является только замкнутым или только ограниченным, то при непрерывных отображениях его образ не всегда сохраняет эти свойства. Так функция $x \to \operatorname{tg} x$ отображает ограниченный интервал $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ в бесконечную прямую, а функция $x \to \operatorname{arctg} x$ переводит прямую (т. е. замкнутое множество в $\mathbf{R}$) в интервал $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, который незамкнут в $\mathbf{R}$.

Теорема 11.6 позволяет обобщить на произвольные компакты некоторые свойства числовых функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 11.7 (теорема Вейерштрасса). *Числовая функция, определенная и непрерывная на компакте, ограничена и принимает на нем как свое наибольшее, так и наименьшее значение.*

Доказательство. Пусть f — числовая функция, определенная и непрерывная на некотором компакте M. В силу теоремы 11.6, множество E значений функции (образ компакта M) является компактом. В силу теоремы 10.3 получаем, что E — ограниченное множество, т. е. существуют такие числа a и b, что $a \leqslant f(x) \leqslant b$ при любом x из M. Ограниченность функции f доказана.

Из ограниченности числового множества E вытекает существование у E верхней грани β и нижней грани α. А так как компакт E замкнут (см. теорему 10.2), а α и β — граничные точки для E (см. пример 9.1), то $\alpha \in E$, $\beta \in E$. Это значит, что в компакте M имеются такие точки ξ и η, что $f(\xi) = \alpha$, $f(\eta) = \beta$. ■

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте три определения непрерывности отображения $f\colon A \to B$ в точке a. Докажите их эквивалентность.

2. Укажите какое-нибудь непрерывное и какое-нибудь разрывное отображение плоскости в себя.

3. Перечислите свойства непрерывных отображений метрических пространств.

4. Каким свойством обладает непрерывное отображение метрического пространства в линейное нормированное пространство?

5. Объясните, какие из следующих утверждений истинны: а) полный прообраз открытого множества при непрерывном отображении открыт; б) непрерывный образ открытого множества открыт; в) непрерывный образ компакта компактен; г) непрерывный образ ограниченного множества ограничен; д) полный прообраз ограниченного множества при непрерывном отображении ограничен.

6. Как читается теорема Вейерштрасса? Что означает фраза «функция принимает на множестве свое наибольшее значение»?

7. Перечислите все понятия из курса математического анализа, которые встречаются в формулировке и доказательстве теоремы 11.7. Дайте их определения.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 7. № 1—11, 16—21, 27—28, 36.

§ 12. СВЯЗНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Связные и несвязные пространства. В ряде вопросов бывает важно знать, «из одного куска состоит» рассматриваемое метрическое пространство (как, например, отрезок) или оно «составлено из нескольких кусков» (как, например, объединение двух непересекающихся отрезков). Такая интуитивная классификация приводит к понятиям связного и несвязного пространства. Строгое определение этих понятий основывается на интуитивном представлении о том, что связность сохраняется при непрерывных отображениях:

если пространство можно непрерывно отобразить на некоторое каноническое несвязное пространство (например, на часть прямой, состоящую из двух точек 0 и 1), оно несвязно, если нет — связно.

Метрическое пространство M называется *несвязным*, если существует непрерывное отображение f этого пространства на двухточечное пространство $\{0, 1\}$, и *связным*, если такого отображения не существует.

Рассмотрим на примере, как «работают» эти определения.

Пример 12.1. Фигура K, состоящая из двух непересекающихся кругов K_1 и K_2, несвязна.

Действительно, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in K_1, \\ 1, \text{ если } x \in K_2. \end{cases}$$

Покажем, что f непрерывна на K.

Пусть a — произвольная точка из K и (x_n) — произвольная последовательность из K, сходящаяся к a. Допустим, для определенности, что $a \in K_1$. Тогда все x_n, начиная с некоторого номера, принадлежат K_1. Поэтому $f(x_n) = 0$ при $n > N$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Итак, построено непрерывное отображение f пространства K на $\{0, 1\}$, чем и доказана несвязность K.

Теорема 12.1. *Любой числовой промежуток связен.*

Доказательство. Предположим противное: некоторый промежуток E несвязен. Тогда на E можно определить непрерывную функцию, принимающую значения 0 и 1. Выберем такие две точки a и b из E, что $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. Поскольку отрезок I с концами a и b принадлежит E, то f непрерывна на I. По теореме о промежуточном значении числовой функции, непрерывной на отрезке, найдется такая точка $c \in I$, что $f(c) = \frac{1}{2}$. Так как $c \in E$, то получили противоречие с тем, что функция f на E принимает лишь значения 0 и 1. Значит, предположение о несвязности E ложно. ■

Теорема 12.2. *Каждая связная часть E числовой прямой* $\mathbf{R}$ *вместе с любыми двумя точками a и b содержит весь отрезок* $[a; b]$.

Доказательство. Предположим, что существует точка c из $[a; b]$, не принадлежащая E. Рассмотрим множества $E_1 = E \cap]-\infty; c[$ и $E_2 = E \cap]c; +\infty[$. Эти множества не пусты ($a \in E_1$, $b \in E_2$) и открыты в E как пересечения E с открытыми множествами $]-\infty; c[$ и $]c; +\infty[$ из $\mathbf{R}$ (см. теорему 9.9). При этом поскольку $c \notin E$, то $E_1 \cup E_2 = E \cap (\mathbf{R} \setminus \{c\}) = E$; $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, так как лучи $]-\infty; c[$ и $]c; +\infty[$ не пересекаются.

Таким образом, E удалось разбить на две непересекающиеся непустые открытые части E_1 и E_2. Тогда функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in E_1, \\ 1, \text{ если } x \in E_2 \end{cases}$$

задает (см. рассуждения в примере 12.1) непрерывное отображение E на $\{0, 1\}$. Значит, вопреки условию, E несвязно. Полученное противоречие и доказывает справедливость рассматриваемого утверждения. ■

Из доказанных теорем следует, что *непустыми связными множествами в* $\mathbf{R}$ *являются только промежутки*, т. е. отрезки, интервалы, полуинтервалы, открытые и замкнутые лучи и, наконец, вся прямая — лишь эти множества вместе с любыми двумя точками a и b содержат весь отрезок $[a; b]$.

Гораздо сложнее описание связных множеств на плоскости или в трехмерном пространстве: здесь могут получиться кривые и области весьма сложного строения. Так, например, ковер Серпинского (см. пример 9.11) является связным множеством.

Убедимся, что интуитивное предположение о сохранении свойства связности при непрерывных отображениях действительно справедливо.

Теорема 12.3. *Образ связного пространства M при непрерывном отображении f является связным.*

Доказательство. Если бы $T = f(M)$ было несвязно, нашлось бы непрерывное отображение φ пространства T на $\{0, 1\}$. Но тогда сквозное отображение $x \to \varphi(f(x))$ было бы непрерывным (см. теорему 11.3) отображением пространства M на $\{0, 1\}$, что противоречит связности M. ■

Мы видели, что свойство функций, непрерывных на отрезке, выражаемое теоремой Вейерштрасса, переносится на произвольный компакт. Другое свойство таких функций, о котором идет речь в теореме о промежуточном значении, справедливо для произвольных связных пространств.

Теорема 12.4. *Если числовая функция, непрерывная на связном пространстве M, принимает на M значения a и b $(a < b)$, то она принимает на M и любое промежуточное значение c $(a < c < b)$.*

Доказательство. Пусть $E \subset \mathbf{R}$ — множество значений функции f, т. е. $E = f(M)$. Так как M связно, то по предыдущей теореме и E связно. А тогда вместе с a и b это множество содержит весь отрезок $[a; b]$. Поэтому при любом выборе числа c из $[a; b]$ найдется такая точка ξ из M, что $f(\xi) = c$. ■

Доказанная теорема в силу своей большой общности, так же как и теорема Вейерштрасса, применяется при доказательстве самых различных теорем существования.

2. Связные компоненты пространства. Пространство M, состоящее из четырех расположенных на плоскости попарно непересекающихся кругов, несвязно. Оно распадается на четыре круга, каждый из которых связен и не содержится ни в какой другой связной части рассматриваемого пространства. Такие части называют связными компонентами пространства. Мы докажем сейчас, что и любое несвязное пространство распадается на связные компоненты, совокупность которых может быть и бесконечной.

Лемма 12.1. *Пусть f — непрерывное отображение несвязного* *пространства M на двухточечное пространство $\{0, 1\}$. Тогда любая часть A пространства M, которая содержит хотя бы по одному прообразу нуля и единицы, несвязна.*

Доказательство. Так как $f(A) \supset \{0, 1\}$, а никаких других значений f не принимает, то $f(A) = \{0, 1\}$. Поскольку отображение f, по условию, непрерывно в любой точке из M, то f непрерывно на A. Итак, f осуществляет непрерывное отображение A на $\{0, 1\}$, откуда и следует несвязность A.■

Лемма 12.2. *Если связные части A_α метрического пространства M имеют общую точку a, то их объединение $A = \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ связно.*

Доказательство. Допустим противное. Предположим, что A несвязно. Тогда существует непрерывное отображение f пространства A на двухточечное пространство $\{0, 1\}$. Допустим для определенности, что $f(a) = 0$. Поскольку f — сюръекция, то в A имеется такая точка b, что $f(b) = 1$.

Точка b принадлежит хотя бы одному из множеств A_α. Поэтому хотя бы одно из них содержит как прообраз 0 (точка a), так и прообраз 1 (точка b). В силу предыдущей леммы, это означает, что A_α несвязно. Полученное противоречие с условием и доказывает связность пространства A.■

Из доказанной леммы вытекает, что объединение всех связных частей пространства M, содержащих точку a, связно. Это максимальная связная часть M, содержащая a. Ее называют *связной компонентой пространства M*, содержащей точку a, и обозначают C_a. Из леммы 12.2 следует, что если связные компоненты C_a и C_b пространства M имеют общую точку, то они совпадают. В самом деле, в этом случае их объединение C связно, а так как C_a и C_b — максимальные связные части, то $C_a = C$, $C_b = C$, а потому $C_a = C_b$. Таким образом, различные связные компоненты пространства M попарно не пересекаются. Кроме того, каждая точка из M принадлежит своей связной компоненте. Мы доказали следующую теорему:

Теорема 12.5. *Всякое метрическое пространство M является объединением попарно непересекающихся связных частей, каждая из которых не содержится ни в какой отличной от нее связной части.*

Из максимальности связных компонент следует, что если C_a такая компонента, а A — связная часть M, причем $A \cap C_a \neq \varnothing$, то $A \subset C_a$. В самом деле, в противном случае $A \cup C_a$ было бы связной частью M, отличной от C_a и содержащей C_a, что невозможно.

Теорема 12.5 позволяет выяснить структуру открытых и замкнутых множеств на числовой прямой.

Лемма 12.3. *Связные компоненты открытой части* $\mathbf{R}$ *открыты в* $\mathbf{R}$.

Доказательство. Пусть C — связная компонента открытой части M пространства $\mathbf{R}$; a — произвольная точка из C. Так как $a \in M$, а M открыто в $\mathbf{R}$, то в $\mathbf{R}$ существует окрестность U точки a, целиком принадлежащая M. Поскольку U — интервал, а интервал связен (см. теорему 12.1), то в силу свойства максимальности компоненты C имеем: $U \subset C$. Итак, любая точка из C входит в C вместе с некоторым интервалом, а это и означает, что C открыто в $\mathbf{R}$.■

Теорема 12.6. *Всякое открытое множество G на прямой либо представляет собой интервал, либо является объединением конечной или счетной совокупности попарно непересекающихся интервалов*[1].

Доказательство. По теореме 12.2 любое связное множество на прямой является промежутком. Открытые промежутки на числовой прямой — конечные или бесконечные интервалы. Поскольку множество G распадается на связные компоненты, а связные компоненты открытого множества открыты в силу леммы 12.3, то G — объединение попарно непересекающихся интервалов. Но любое семейство попарно непересекающихся интервалов на прямой конечно или счетно (см. пример 2.4).■

Следствие. *Всякое замкнутое множество на прямой можно получить из нее удалением конечного или счетного семейства попарно непересекающихся интервалов.*

Доказательство. По теореме 9.10 замкнутое множество является дополнением открытого множества. Применяя теорему 12.6, получаем требуемый результат.■

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение связного метрического пространства.
2. Приведите примеры связных и несвязных пространств.
3. Перечислите связные части числовой прямой.
4. Связен ли образ связного пространства при непрерывном отображении?
5. Сформулируйте теорему о промежуточном значении.
6. При каком условии объединение двух связных частей пространства M связно?
7. Что такое связная компонента метрического пространства? Может ли связная часть пространства иметь непустое пересечение со связной компонентой этого пространства и не содержаться в ней?
8. Опишите строение открытых и замкнутых множеств на прямой.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 7. № 49, 51—54.

§ 13. ПОЛНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Фундаментальные последовательности. Последовательность точек (x_n) метрического пространства M называется *фундаментальной*, если для любого положительного числа ε можно указать такой номер N, что при $m > N$ и $n > N$ выполняется неравенство

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{13.1}$$

---

[1] Среди них могут быть и бесконечные интервалы: $]-\infty;\ a[$, $]a;\ +\infty[$, $]-\infty;\ \infty[$.

Пример 13.1. Последовательность (x_n), где $x_n(t) = t^n$, фундаментальна в пространстве $\mathbf{C}\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$.

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ возьмем N таким, что $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как наибольшее значение функции $|t^n|$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ равно $\frac{1}{2^n}$, то $\|t^n\| = \frac{1}{2^n}$, поэтому при $m,\ n > N$

$$\rho(x_n, x_m) = \|t^n - t^m\| \leqslant \|t^n\| + \|t^m\| \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m} < \varepsilon,$$

что и требовалось установить.

Пример 13.2. Последовательность (x_n), где $x_n(t) = t^n$, не фундаментальна в пространстве $\mathbf{C}[-1;\ 1]$.

Действительно, рассмотрим x_n и x_{2n}. Имеем:

$$\rho(x_n, x_{2n}) = \|t^n - t^{2n}\| \geqslant t_0^n - t_0^{2n},$$

где t_0 — любая точка из $[-1;\ 1]$. Положив $t_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, получаем:

$$\rho(x_n, x_{2n}) \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, например, при $\varepsilon = \frac{1}{5}$ нельзя указать такой номер N, чтобы неравенство (13.1) выполнялось при всех $n,\ m > N$. Значит, (x_n) не фундаментальна.

Выясним некоторые свойства фундаментальных последовательностей.

Теорема 13.1. *Если последовательность (x_n) принадлежит части E пространства M, то из ее фундаментальности в одном из этих пространств вытекает ее фундаментальность в другом.*

Доказательство. Обозначим метрику пространства E через ρ_E, а метрику пространства M через ρ_M. Так как

$$\rho_E(x_n, x_m) = \rho_M(x_n, x_m),$$

то из того, что неравенство (13.1) выполняется для одной из этих метрик, вытекает его справедливость и для другой метрики. Поэтому, если мы нашли для данного $\varepsilon > 0$ требуемое N для одной метрики, оно подходит и для другой. ■

Теорема 13.2. *Всякая фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$. Можно указать такой номер N, что при всех n и m, больших N, выполняется неравенство $\rho(x_n, x_m) < 1$. В частности, выполняется неравенство $\rho(x_k, x_n) < 1$, где k — некоторое фиксированное число, большее N, а $n \geqslant k$. Но в таком случае шар с центром в точке x_k радиуса

$r = \max\{\rho(x_1, x_k), \ldots, \rho(x_{k-1}, x_k), 1\}$ содержит все члены последовательности (x_n), т. е. (x_n) ограничена. ■

Теорема 13.3. *Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Доказательство. Пусть последовательность (x_n) сходится к точке a. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то найдется такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. А тогда для любых n и m, больших N, имеем:

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и доказывает фундаментальность последовательности (x_n). ■

Пример 13.3. Последовательность десятичных приближений по недостатку числа $\sqrt{2}$ фундаментальна в $\mathbf{Q}$.

Действительно, поскольку $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, а в пространстве $\mathbf{R}$ эта последовательность сходится к $\sqrt{2}$, то, в силу теоремы 13.3, она фундаментальна в $\mathbf{R}$, а значит (см. теорему 13.1), фундаментальна и в $\mathbf{Q}$.

Теорема 13.4. *Если некоторая подпоследовательность (x_{n_k}) фундаментальной последовательности (x_n) сходится к a, то и сама последовательность (x_n) сходится к тому же пределу a.*

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, то можно указать такой номер K, что

$$\rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $k > K$. С другой стороны, в силу фундаментальности (x_n) существует такое N, что

$$\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $n > N$ и $m > N$.

Выберем номер p такой, что $p > K$ и $n_p > N$. Тогда для x_{n_p} выполняются неравенства:

$$\rho(x_{n_p}, a) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(x_{n_p}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n > N).$$

Поэтому при $n > N$

$$\rho(x_n, a) \leqslant \rho(x_n, x_{n_p}) + \rho(x_{n_p}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а это и означает, что (x_n) сходится к a. ■

Теорема 13.5. *Если последовательность* (x_n) *такова, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_k, x_{k+1}) \tag{13.2}$$

сходится, то она фундаментальна.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как ряд (13.2) сходится, то найдется такое N, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon \tag{13.3}$$

при $n > N$. Поскольку ряд в (13.3) знакоположителен, то любая его частичная сумма не превосходит суммы ряда, т. е.

$$\sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon \tag{13.4}$$

при $m > n > N$.

Возьмем теперь два произвольных члена x_n и x_m нашей последовательности, номера которых больше N, причем $m > n$. Тогда, в силу неравенства многоугольника и неравенства (13.4), имеем:

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon. \blacksquare$$

Замечание. Обратное утверждение неверно. Последовательность (x_n) может быть фундаментальной, несмотря на расходимость ряда (13.2). Такова, например, последовательность чисел (x_n), где $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Однако справедливо следующее утверждение:

Теорема 13.6. *Если последовательность* (x_n) *точек метрического пространства* M *фундаментальна, то из нее можно извлечь такую подпоследовательность* (x_{n_k}), *что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \tag{13.5}$$

сходится.

Доказательство. Поскольку (x_n) фундаментальна, то для любого k найдется такое n_k, что при $n \geqslant n_k$ выполняется неравенство $\rho(x_{n_k}, x_n) < \frac{1}{4^k}$. Но тогда и $\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{4^k}$. Отсюда по признаку сравнения заключаем, что ряд (13.5) сходится. $\blacksquare$

Пример 13.4. Последовательность функций (f_n), где

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } -1 \leqslant x < 0, \\ nx \text{ при } 0 \leqslant x < \frac{1}{n}, \\ 1 \text{ при } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

из пространства $C_1[-1; 1]$ фундаментальна.

Действительно, поскольку $\rho(f_k, f_{k+1})$ (рис. 20) — площадь треугольника OAB, то

$$\rho(f_k, f_{k+1}) = \frac{1}{2k(k+1)} < \frac{1}{k^2}.$$

Но ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, как известно, сходится, а тогда по признаку сравнения сходится и ряд (13.2), составленный для рассматриваемой последовательности. В силу теоремы 13.5, данная последовательность фундаментальна.

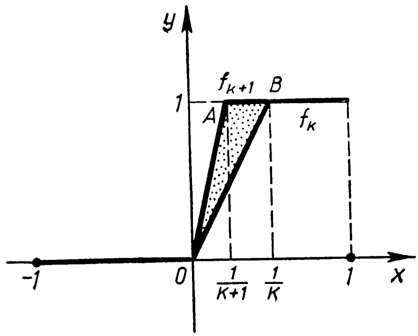

Рис. 20

2. Полные и неполные пространства. В то время как сходящаяся последовательность в любом метрическом пространстве фундаментальна, обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Например, последовательность (x_n) десятичных приближений по недостатку числа $\sqrt{2}$, фундаментальная в $\mathbf{Q}$ (см. пример 13.3), не имеет в этом пространстве предела.

Точки фундаментальной последовательности неограниченно сближаются, и если эта последовательность не имеет предела, то они как бы накапливаются у «дырки» (это хорошо иллюстрируется рассмотренным примером). Таким образом, расходимость некоторой фундаментальной последовательности как бы показывает на наличие «дырки» в пространстве.

Метрическое пространство M, в котором любая фундаментальная последовательность сходится, называется *полным*; в противном случае пространство называется *неполным*.

Полное линейное нормированное пространство называют *банаховым* пространством, а полное предгильбертово пространство называют *гильбертовым*.

Теорема 13.7. *Всякий компакт — полное пространство.*

Доказательство. Пусть (x_n) — произвольная фундаментальная последовательность из M. В силу компактности M из нее можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $a \in M$. Но тогда по теореме 13.4 и вся последовательность (x_n) сходится к a. Значит, в M всякая фундаментальная последовательность сходится, т. е. M полно. ■

Следствие. $\mathbf{R}_2^n$ — *полное (а значит, и гильбертово) пространство.*

Доказательство. Пусть (x_k) — фундаментальная последовательность из $\mathbf{R}_2^n$. Так как (x_k) ограничена, то она принадлежит некоторому замкнутому шару V из $\mathbf{R}_2^n$. Такой шар компактен, а потому и полон. Поскольку (в силу теоремы 13.1) (x_k) фундаментальна в V, то она сходится в V, а значит, сходится и в $\mathbf{R}_2^n$. Это и требовалось установить. ■

Точно так же доказывается полнота пространств $\mathbf{R}_1^n$ и $\mathbf{R}_\infty^n$.

В частности, полна числовая прямая $\mathbf{R}$. Так как $\mathbf{R}$ не компактно, то требование компактности более жестко, чем требование полноты.

Теорема 13.8. *Всякая замкнутая часть E полного метрического пространства M — полное пространство.*

Доказательство. Пусть (x_n) — фундаментальная последовательность из E. Она фундаментальна и в M. Поскольку M полно, то эта последовательность сходится к некоторой точке $a \in M$. Но так как (x_n) из E, а E замкнуто, то $a \in E$. Значит, любая фундаментальная последовательность из E сходится в E, т. е. E полно. ■

Пример 13.5. Отрезок $[a; b]$ из $\mathbf{R}$, замкнутый круг или окружность из $\mathbf{R}_2^2$, сфера или куб в $\mathbf{R}_2^3$ — полные пространства как замкнутые части полных пространств.

Теорема 13.9. *Всякое полное подпространство E метрического пространства M замкнуто в M.*

Доказательство. Пусть (x_n) — любая последовательность из E, сходящаяся к некоторой точке $a \in M$. В силу теоремы 13.3, она фундаментальна в M, а значит, фундаментальна и в E. Так как E полно, то (x_n) имеет предел в E. Обозначим его через b. В силу единственности предела в метрическом пространстве M, точки a и b совпадают. Поэтому $a = b$, и следовательно, $a \in E$.

Итак, предел любой сходящейся последовательности точек из E принадлежит E, т. е. E замкнуто (см. с. 49). ■

Пример 13.6. Пространство $\mathbf{Q}$ рациональных чисел с обычной метрикой неполно.

Действительно, $\mathbf{Q}$ — незамкнутая часть $\mathbf{R}$, так как, например, e — предел последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ из $\mathbf{Q}$ не принадлежит $\mathbf{Q}$.

Пример 13.7. Пространство $\mathbf{R}_2^\infty$ полно.

Действительно, пусть (x_n) — фундаментальная последовательность в $\mathbf{R}_2^\infty$, где $x_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots)$. Так как для любых i, n и m

$$\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_n^{(k)} - x_m^{(k)})^2 \geqslant |x_n^{(i)} - x_m^{(i)}|^2,$$

то для любого i числовая последовательность $(x_n^{(i)})$ фундаментальна, а значит (в силу полноты $\mathbf{R}$), она сходится к некоторому числу $x^{(i)}$. Покажем, что «точка» $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(i)}, \ldots)$ принадлежит пространству $\mathbf{R}_2^\infty$, причем последовательность (x_n) сходится в этом пространстве к x.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $n, m > N$

$$\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_n^{(k)} - x_m^{(k)})^2 < \varepsilon^2.$$

Но тогда для любого i имеем:

$$\sum_{k=1}^{i} \left(x_n^{(k)} - x_m^{(k)} \right)^2 < \varepsilon^2.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{i} \left(x^{(k)} - x_m^{(k)} \right)^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Поскольку это неравенство справедливо для любого i, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x^{(k)} - x_m^{(k)})^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x^{(k)})^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_m^{(k)})^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left(x^{(k)} - x_m^{(k)}\right)^2} \leqslant \| x_m \| + \varepsilon,$$

т. е. что $x \in \mathbf{R}_2^{\infty}$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое N, что $\|x - x_m\| \leqslant \varepsilon$, если $m > N$, и потому $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Значит, $\mathbf{R}_2^{\infty}$ полно.

3. Полнота пространства ограниченных отображений. Пусть Y — метрическое пространство с метрикой r и X — произвольное множество. Назовем отображение $f : X \to Y$ *ограниченным*, если $f(X)$ — ограниченная часть пространства Y (см. с. 27).

Докажем, что *если отображения $f : X \to Y$ и φ: $X \to Y$ ограничены, то числовое множество $A = \{r(f(x), \varphi(x)),\ x \in X\}$ ограничено.*

В самом деле, выберем в X любой элемент x_0 и обозначим $r(f(x_0), \varphi(x_0))$ через a. Поскольку отображения f и φ ограничены, найдутся такие числа b и c, что для всех $x \in X$ выполняются неравенства $r(f(x), f(x_0)) < b$ и $r(\varphi(x), \varphi(x_0)) < c$. Но тогда для всех $x \in X$ имеем:

$$0 \leqslant r(f(x), \varphi(x)) \leqslant r(f(x), f(x_0)) + r(f(x_0), \varphi(x_0)) + \\ + r(\varphi(x_0), \varphi(x)) < b + a + c.$$

Отсюда и следует, что числовое множество A ограничено (оно лежит на отрезке $[0; a + b + c]$).

Обозначим через $B(X, Y)$ совокупность всех ограниченных отображений множества X в метрическое пространство Y. Из доказанного выше утверждения следует, что для любых двух отображений f и φ из $B(X, Y)$ существует число

$$\rho(f, \varphi) = \sup_{x \in X} r(f(x), \varphi(x)).$$

Докажем, что для ρ выполняются все аксиомы метрики (см. с. 24).

Так как $r(f(x), \varphi(x)) \geqslant 0$, то и $\rho(f, \varphi) \geqslant 0$. При этом если $f \neq \varphi$, то найдется такой элемент x_0, что $f(x_0) \neq \varphi(x_0)$, а тогда

$r(f(x_0),\ \varphi(x_0)) > 0$, и потому $\rho(f, \varphi) > 0$. Значит, первая аксиома метрики выполняется.

Поскольку $r(f(x),\ \varphi(x)) = r(\varphi(x),\ f(x))$ при любом $x \in X$, то $\rho(f,\ \varphi) = \rho(\varphi,\ f)$. Это означает, что выполняется и вторая аксиома метрики.

Пусть, наконец, f, φ и ψ — произвольные ограниченные отображения X в Y. Воспользовавшись аксиомой треугольника для метрического пространства Y, получаем:

$$r(f(x),\ \varphi(x)) \leqslant r(f(x), \psi(x)) + r(\psi(x),\ \varphi(x)) \leqslant \rho(f, \psi) + \rho(\psi, \varphi).$$

Отсюда вытекает, что $\rho(f,\ \varphi) \leqslant \rho(f, \psi) + \rho(\psi,\ \varphi)$, т. е. для ρ выполняется и третья аксиома метрики.

Итак, *множество $B(X,\ Y)$ является метрическим пространством с метрикой* ρ. Оказывается, если Y — полное пространство, то и $B(X,\ Y)$ полно. Чтобы доказать это, покажем вначале, что справедливо следующее утверждение.

Лемма. 13.1. *Если отображение $f: X \to Y$ ограничено, причем $r(f(x),\ \varphi(x)) \leqslant a$ для всех $x \in X$, то отображение $\varphi: X \to Y$ тоже ограничено.*

Доказательство. Из ограниченности f следует существование такого элемента x_0 в X и такого числа b, что $r(f(x_0),\ f(x)) < b$ для всех $x \in X$. Но тогда

$$r(\varphi(x_0),\ \varphi(x)) \leqslant r(\varphi(x_0),\ f(x_0)) + r(f(x_0),\ f(x)) + r(f(x),\ \varphi(x)) < a + b + a$$

для всех x, и потому отображение φ тоже ограничено. ■

Теорема 13.10. *Если пространство Y полно, то и пространство $B(X,\ Y)$ ограниченных отображений произвольного множества X в Y также полно.*

Доказательство. Пусть (f_n) — произвольная фундаментальная последовательность из $B(X,\ Y)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $\rho(f_n,\ f_m) < \varepsilon$ при $m, n > N$. А так как при любом $x \in X$

$$r(f_m(x),\ f_n(x)) \leqslant \sup_{x \in X} r(f_m(x),\ f_n(x)) = \rho(f_m,\ f_n),$$

то и

$$r(f_m(x),\ f_n(x)) < \varepsilon \quad (m, n > N;\ x \in X). \tag{13.6}$$

Это означает, что последовательность $(f_n(x))$ точек пространства Y тоже фундаментальна, а значит, в силу полноты Y, она сходится. Полагая, что $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ для любого $x \in X$, получаем отображение $f: X \to Y$.

В силу непрерывности метрики (см. с. 60) в неравенстве (13.6) можно перейти к пределу при $m \to \infty$. Получим, что

$$r(f(x),\ f_n(x)) \leqslant \varepsilon \quad (n > N,\ x \in X). \tag{13.7}$$

Так как отображение f_n ограничено, то отсюда, в силу леммы 13.1, вытекает, что f тоже ограничено, т. е. $f \in B(X,\ Y)$. При этом из (13.7) следует, что $\rho(f_n,\ f) \leqslant \varepsilon$ при $n > N$. Это означает, что последовательность отображений (f_n) сходится в пространстве $B(X, Y)$ к отображению f, т. е. $B(X, Y)$ полно.■

До сих пор мы ничего не требовали от множества X. Рассмотрим теперь случай, когда это множество является компактным метрическим пространством. Тогда, в силу теорем 10.3 и 11.6, для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ множество $f(X)$ ограничено. Иными словами, *любое непрерывное отображение компактного пространства X в метрическое пространство Y ограничено*, т. е. если пространство X компактно, то $C(X, Y) \subset B(X, Y)$, где через $C(X, Y)$ обозначено множество непрерывных отображений X в Y.

Если $f, \varphi \in C(X, Y)$, то числовая функция $r(f(x), \varphi(x))$ непрерывна на X (см. теорему 8.4), и потому в случае компактности X имеет на X наибольшее значение. Поэтому метрику в $C(X, Y)$ для компактного X можно определить равенством

$$\rho(f, \varphi) = \max_{x \in X} r(f(x), \varphi(x)).$$

Сходимость по этой метрике, т. е. сходимость в пространстве $C(X, Y)$, равносильна равномерной сходимости[1]. Но так же, как при изучении функциональных последовательностей доказывалось, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть функция непрерывная, можно доказать аналогичное утверждение и для последовательности непрерывных отображений. Отсюда следует, что если пространство X компактно, то $C(X, Y)$ замкнуто в $B(X, Y)$. По теореме 13.7 отсюда вытекает, что если $B(X, Y)$ полно, то и $C(X, Y)$ полно. Мы доказали следующую теорему:

Теорема 13.11. *Если пространство X компактно, а пространство Y полно, то пространство $C(X, Y)$ непрерывных отображений X в Y полно.*

В частности, *полно пространство* $\mathbf{C}[a; b]$. Заметим, что пространства $\mathbf{C}_1[a; b]$ и $\mathbf{C}_2[a; b]$, как это будет показано в § 19, не являются полными.

4. Пополнение метрических пространств*. Полнота — важнейшее свойство метрических пространств. Замечательным фактом является то, что любое неполное пространство M можно «включить» в некоторое полное пространство, причем среди полных пространств, содержащих M, имеется в некотором смысле «минимальное». Более точно это утверждение мы сформулируем ниже. Сначала докажем следующую фундаментальную теорему:

Теорема 13.12. *Для всякого метрического пространства M существует полное метрическое пространство $\overline{M}$, содержащее всюду плотное подпространство $\widetilde{M}$, изометричное пространству M.*

---

[1] Аналогично случаю функциональных последовательностей говорят, что *последовательность отображений (f_n) равномерно сходится к отображению f*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ при $n > N$ и всех $x \in X$.

Чтобы понять, как доказывается эта теорема, рассмотрим сначала, как можно построить полное пространство действительных чисел, исходя из неполного пространства рациональных чисел.

Как известно, действительные числа могут быть записаны в виде бесконечных десятичных дробей. С каждым действительным числом $x = A,\ a_1 \dots a_n \dots$ связана последовательность рациональных чисел $z_0 = A$; $z_1 = A,\ a_1$; ...; $z_n = A,\ a_1 \dots a_n$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x$. Однако это не единственная последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x: вместо последовательности приближений по недостатку можно было бы взять приближения по избытку, вместо бесконечных десятичных дробей — бесконечные двоичные, троичные дроби и т. д. Тем не менее если $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = x$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n - t_n) = 0$, т. е. члены двух последовательностей, сходящихся к одному и тому же числу x, как бы сближаются друг с другом. При этом, как мы знаем, если последовательность (r_n) сходится, то она фундаментальна.

Множество действительных чисел можно строить так: взять в $\mathbf{Q}$ все фундаментальные последовательности и назвать две такие последовательности (r_n) и (t_n) сближающимися, если $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n - t_n) = 0$. Действительным числом можно назвать класс попарно сближающихся фундаментальных последовательностей из $\mathbf{Q}$. Сходным образом строится полное пространство $\overline{M}$ для любого метрического пространства M.

Доказательство теоремы. 1. *Построение пространства $\overline{M}$.* Обозначим через $\widehat{M}$ множество, элементами которого являются всевозможные фундаментальные последовательности пространства M. Назовем фундаментальные последовательности (x_n) и (y_n) *сближающимися*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$. Из свойств метрики легко выводится, что отношение сближения на множестве $\widehat{M}$ является отношением эквивалентности. Поэтому оно определяет разбиение множества $\widehat{M}$ на классы эквивалентности. Эти классы состоят из попарно сближающихся фундаментальных последовательностей, причем последовательности из различных классов не сближаются друг с другом. Обозначим через $\overline{M}$ множество этих классов эквивалентности и покажем, что на $\overline{M}$ можно ввести метрику.

Пусть $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — две «точки» из $\overline{M}$. Это классы попарно сближающихся последовательностей. Выберем в этих классах по одному представителю: в $\overline{x}$ — последовательность (x_n), а в $\overline{y}$ — последовательность (y_n). Покажем, что числовая последовательность $(\rho(x_n, y_n))$ имеет предел. В силу неравенства четырехугольника (5.2), при любых n и m

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n). \qquad (13.8)$$

Поскольку последовательности (x_n) и (y_n) фундаментальны, из неравенства (13.8) вытекает фундаментальность числовой последовательности $(\rho(x_n, y_n))$. Но пространство $\mathbf{R}$ полно и потому эта последовательность сходится в $\mathbf{R}$ к некоторому пределу. Покажем, что этот предел не зависит от выбора последовательностей (x_n) и (y_n) в $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

В самом деле, рассмотрим другие последовательности (x'_n) и (y'_n) из классов $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Поскольку (x_n) сближается с (x'_n), а (y_n) — с (y'_n), то $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x'_n, x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(y'_n, y_n) = 0$. Но

$$0 \leqslant |\rho(x'_n, y'_n) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x'_n, x_n) + \rho(y'_n, y_n)$$

и потому $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$.

Отсюда вытекает, что каждым двум классам $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из $\bar{M}$ соответствует единственное число $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$, где $(x_n) \in \bar{x}$, $(y_n) \in \bar{y}$. Назовем это число расстоянием между $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и обозначим его $r(\bar{x}, \bar{y})$. Очевидно, что r удовлетворяет аксиомам 1) — 3) из п. 1 § 5 и, значит, задает метрику на $\bar{M}$.

2. *Построение пространства* $\tilde{M}$. Каждому элементу x из M соответствует фундаментальная последовательность $(x, x, \ldots)$, а тем самым и класс $\bar{x}$ последовательностей, сближающихся с $(x, x, \ldots)$. Обозначим через $\tilde{M}$ подпространство в $\bar{M}$, состоящее из классов фундаментальных последовательностей, содержащих последовательности вида $(x, x, \ldots)$. Построена изометрия $f: M \to \tilde{M} \subset \bar{M}$. Действительно,

$$r(f(x), f(y)) = r(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y),$$

так как $x_n = x$, $y_n = y$ при любом n.

Покажем, что $\tilde{M}$ всюду плотно в $\bar{M}$.

Действительно, пусть $\bar{x} \in \bar{M}$. Выберем в классе $\bar{x}$ какую-нибудь последовательность (x_n) и обозначим через $\tilde{x}_n$ класс, определяемый последовательностью $(x_n, x_n, \ldots)$. Так как (x_n) фундаментальна, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $m, n > N$. В таком случае $r(\tilde{x}_m, \bar{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{m\to\infty} \tilde{x}_m = \bar{x}$ в $\bar{M}$. Иными словами, каждый элемент из $\bar{M}$ является пределом последовательности элементов из $\tilde{M}$, т. е. $\tilde{M}$ всюду плотно в $\bar{M}$.

3. *Полнота пространства* $\bar{M}$. Пусть $(\bar{x}_n)$ — фундаментальная последовательность из $\bar{M}$. Так как $\tilde{M}$ всюду плотно в $\bar{M}$, то для любого n найдется такой класс $\tilde{x}_n$ из $\tilde{M}$, что $r(\tilde{x}_n, \bar{x}_n) < \frac{1}{2^n}$. Но

тогда

$$\rho(x_m, x_n) = r(\widetilde{x}_m, \widetilde{x}_n) \leqslant r(\widetilde{x}_m, \overline{x}_m) + r(\overline{x}_m, \overline{x}_n) + r(\overline{x}_n, \widetilde{x}_n) <$$
$$< \frac{1}{2^m} + r(\overline{x}_m, \overline{x}_n) + \frac{1}{2^n}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $m, n > N$

$$\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{3}, \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{3}, \ r(\overline{x}_n, \overline{x}_m) < \frac{\varepsilon}{3},$$

и потому $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Значит, последовательность (x_n) фундаментальна в M и потому ей соответствует некоторый элемент $\overline{x} \in \overline{M}$, причем

$$\lim_{n\to\infty} r(\widetilde{x}_n, \overline{x}) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \rho(x_n, x_k) = 0, \tag{13.9}$$

$$0 \leqslant r(\overline{x}_n, \overline{x}) \leqslant r(\overline{x}_n, \widetilde{x}_n) + r(\widetilde{x}_n, \overline{x}) < \frac{1}{2^n} + r(\widetilde{x}_n, \overline{x}).$$

Из последнего неравенства, в силу (13.9), вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} r(\overline{x}_n, \overline{x}) = 0$. Итак, всякая фундаментальная последовательность из $\overline{M}$ сходится. Значит, $\overline{M}$ полно.■

Полное метрическое пространство $\overline{M}$, содержащее данное метрическое пространство M в качестве всюду плотного подпространства, называется *пополнением пространства* M.

Например, отрезок $[a; b]$ — пополнение неполного пространства $]a; b[$, пространство $\mathbf{R}$ — пополнение пространства $\mathbf{Q}$, пространство $\mathbf{C}[a; b]$ — пополнение (см. пример 9.6) пространства $E[a; b]$ непрерывных кусочно-линейных функций.

Напомним, что построенное при доказательстве теоремы 13.12 пространство $\widetilde{M}$ состоит из классов последовательностей, сближающихся с последовательностью $(x, x, \ldots)$. Такой класс принято отождествлять с точкой x из M (как мы отождествляем целое число a с множеством дробей вида $\frac{an}{n}$), а пространство $\widetilde{M}$ — с пространством M. Поэтому принята такая (несколько условная, но более выразительная) редакция теоремы 13.1:

У всякого метрического пространства существует пополнение.

Покажем теперь, что у метрического пространства M имеется лишь единственное (с точностью до изометрии) пополнение.

Теорема 13.13. *Если A и B — пополнения пространства M, то существует изометрия $f: A \to B$, оставляющая неподвижными точки из пространства M (т. е. $f(x) = x$ при $x \in M$).*

Доказательство. Пусть $a \in A$. Так как M всюду плотно в A, существует последовательность (x_n) из M, сходящаяся к a. Такая последовательность фундаментальна в A, а значит, (см. теорему 13.1), она фундаментальна и в M. Но в таком случае последовательность (x_n) фундаментальна и в B. В силу полноты B последовательность (x_n) имеет в B некоторый предел b. Покажем, что этот предел не зависит от выбора последовательности (x_n), сходящейся к a.

В самом деле, пусть (y_n) — другая последовательность из M, сходящаяся в A к a. Так как

$$0 \leqslant \rho_M(x_n, y_n) = \rho_A(x_n, y_n) \leqslant \rho_A(x_n, a) + \rho_A(a, y_n),$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_M(x_n, y_n) = 0$. Отсюда, в силу соотношения

$$0 \leqslant \rho_B(b, y_n) \leqslant \rho_B(b, x_n) + \rho_B(x_n, y_n) = \rho_B(b, x_n) + \rho_M(x_n, y_n),$$

и следует, что (y_n) сходится в B к тому же элементу b, что и (x_n).

Итак, каждому $a \in A$ с помощью (любой) последовательности (x_n) из M, сходящейся к a, можно сопоставить единственный элемент $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ в пространстве B. Полагая $f(a) = b$, получаем отображение $f: A \to B$.

Легко проверить, что отображение f сюръективно (если $b \in B$, то $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x_n \in M$, и, значит, $b = f(a)$, где a — предел последовательности (x_n) в A). Далее, в силу теоремы 8.4, имеем:

$$\rho_A(a_1, a_2) = \rho_A(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho_M(x_n, y_n),$$

$$\rho_B(f(a_1), f(a_2)) = \rho_B(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho_M(x_n, y_n).$$

Следовательно, отображение f — изометрия.

Рассмотрим элемент x из A, принадлежащий M. В качестве сходящейся к x последовательности из M рассмотрим последовательность $(x, x, \ldots)$. Предел этой последовательности в пространстве B также равен x. Поэтому $f(x) = x$. Это означает, что изометрия оставляет неподвижными точки из M. ■

5. Распространение отображения на пополнение метрического пространства*. В школе показательную функцию сначала определяют на множестве **Q** рациональных чисел, а потом распространяют ее на все множество **R** действительных чисел, т. е. на пополнение пространства **Q**. Мы рассмотрим сейчас общий вопрос о возможности распространения непрерывного отображения $f: A \to B$ до непрерывного отображения $\overline{f}: \overline{A} \to \overline{B}$.

Вначале выясним некоторые свойства так называемых равномерно-непрерывных отображений. Отображение f метрического пространства A в метрическое пространство B называется *равномерно-непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых a_1 и a_2 из A, удовлетворяющих неравенству $\rho(a_1, a_2) < \delta$, выполняется неравенство $r(f(a_1), f(a_2)) < \varepsilon$.

Так же, как для функций, заданных на отрезке, доказывается, что *если A компактно, то любое непрерывное отображение $f: A \to B$ равномерно-непрерывно.*

Лемма 13.2. *Если отображение* $f : A \to B$ *равномерно-непрерывно и* $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$, *то и* $\lim\limits_{n\to\infty} r(f(x_n), f(y_n)) = 0$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $\rho(a_1, a_2) < \delta$ следует: $r(f(a_1), f(a_2)) < \varepsilon$. Но так как $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$, то найдется такое N, что при $n > N$ имеем: $\rho(x_n, y_n) < \delta$. Тогда при $n > N$ имеем: $r(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$, а это и значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} r(f(x_n), f(y_n)) = 0$. ■

Лемма 13.3. *Если* $f : A \to B$ *— равномерно-непрерывное отображение и* (x_n) *— фундаментальная последовательность в* A, *то последовательность* $(f(x_n))$ *фундаментальна в* B.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности f найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $\rho(a_1, a_2) < \delta$ следует: $r(f(a_1), f(a_2)) < \varepsilon$. Поскольку последовательность (x_n) фундаментальна, найдется такое N, что при $m, n > N$ имеем: $\rho(x_m, x_n) < \delta$. Но тогда $r(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$ при $m, n > N$. Отсюда следует, что последовательность $(f(x_n))$ фундаментальна. ■

Докажем теперь следующую теорему о распространении отображений:

Теорема 13.14. *Если* A *и* B *— метрические пространства и отображение* $f : A \to B$ *равномерно-непрерывно, то существует равномерно-непрерывное отображение* $\bar{f} : \bar{A} \to \bar{B}$ *пополнения пространства* A *в пополнение пространства* B, *такое, что* $\bar{f}(x) = f(x)$, *если* $x \in A$.

Доказательство. Для любого $\bar{a} \in \bar{A}$ найдется последовательность (x_n) элементов из A, сходящаяся к $\bar{a}$. Эта последовательность фундаментальна в A. В силу леммы 13.3 последовательность $(f(x_n))$ фундаментальна в $\bar{B}$, и потому найдется такое $\bar{b} \in \bar{B}$, что $\bar{b} = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Это $\bar{b}$ не зависит от выбора последовательности (x_n), сходящейся к $\bar{a}$. В самом деле, если (y_n) — другая последовательность элементов из A, сходящаяся к $\bar{a}$, то последовательности (x_n) и (y_n) сближаются. Из леммы 13.3 получаем, что последовательности $(f(x_n))$ и $(f(y_n))$ тоже сближаются, а потому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \bar{b}$.

Итак, каждому $\bar{a} \in \bar{A}$ соответствует один элемент $\bar{b} \in \bar{B}$ такой, что из условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \bar{a}$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \bar{b}$. Положим $\bar{f}(\bar{a}) = \bar{b}$. Очевидно, что если $x \in A$, то $\bar{f}(x) = f(x)$.

Осталось показать, что отображение $\bar{f} : \bar{A} \to \bar{B}$ тоже равномерно-непрерывно. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдется такое $\delta > 0$, что для всех a_1, a_2 из A, удовлетворяющих неравенству $\rho(a_1, a_2) < \delta$, выполняется неравенство $r(f(a_1), f(a_2)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Покажем, что тогда из условия $\rho(\bar{a}_1, \bar{a}_2) < \delta$, где $\bar{a}_1, \vec{a}_2 \in \bar{A}$, следует, что $r(\bar{f}(\bar{a}_1), \bar{f}(\bar{a}_2)) < \varepsilon$.

В самом деле, положим $\delta_1 = \delta - \rho(\overline{a}_1, \overline{a}_2)$. Так как $\delta_1 > 0$, то найдутся такие $a_1, a_2 \in A$, что $\rho(a_1, \overline{a}_1) < \frac{\delta_1}{2}$, $\rho(a_2, \overline{a}_2) < \frac{\delta_1}{2}$, причем $r(\overline{f}(a_1), \overline{f}(\overline{a}_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$, $r(\overline{f}(a_2), \overline{f}(\overline{a}_2)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Но тогда

$$\rho(a_1, a_2) \leqslant \rho(a_1, \overline{a}_1) + \rho(\overline{a}_1, \overline{a}_2) + \rho(\overline{a}_2, a_2) < \frac{\delta_1}{2} + \delta - \delta_1 + \frac{\delta_1}{2} = \delta,$$

и потому $r(\overline{f}(a_1), \overline{f}(a_2)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Следовательно,

$$r(\overline{f}(\overline{a}_1), \overline{f}(\overline{a}_2)) \leqslant r(\overline{f}(\overline{a}_1), \overline{f}(a_1)) + r(\overline{f}(a_1), \overline{f}(a_2)) + \\ + r(\overline{f}(a_2), \overline{f}(\overline{a}_2)) < \varepsilon.$$

Этим равномерная непрерывность $\overline{f}$ доказана. ■

Распространение равномерно-непрерывных отображений лежит в основе многих математических конструкций. Например, понятие определенного интеграла можно ввести с помощью распространения интеграла, заданного для ступенчатых функций. Легко доказать далее, что если A и B — линейные нормированные пространства и $f\colon A \to B$ — непрерывное отображение A в B, то это отображение равномерно-непрерывно. Поэтому его можно распространить до непрерывного отображения $\overline{f}\colon \overline{A} \to \overline{B}$ банахова пространства $\overline{A}$ в банахово пространство $\overline{B}$. В частности, норму (т. е. отображение $x \to \|x\|$ пространства M в пространство $\mathbf{R}$) и скалярное произведение в M можно распространить на $\overline{M}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение фундаментальной последовательности точек метрического пространства. Приведите примеры фундаментальной и нефундаментальной числовой последовательности.

2. Какие достаточные и какие необходимые признаки фундаментальности вы знаете?

3. Дайте определение полного метрического пространства. Приведите примеры полных и неполных метрических пространств.

4. Дайте определение банахова и гильбертова пространств. Приведите примеры банаховых и гильбертовых пространств.

5. Объясните, какие из следующих утверждений истинны: а) всякий компакт — полное пространство; б) всякое полное пространство компактно.

6. Может ли полное подпространство метрического пространства быть незамкнутым в нем?

7. Может ли замкнутое подпространство полного метрического пространства быть неполным в нем?

8. При доказательстве полноты пространства $\mathbf{R}_2^\infty$ (пример 13.7) имеется фраза: «Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ ...». Объясните, на основании каких теорем анализа это допустимо.

9. Из какого неравенства в примере 13.7 делается вывод, что $x \in \mathbf{R}_2^\infty$? Почему? На основании каких теорем из теории рядов получено это неравенство?

10. Дайте определение ограниченного отображения.

11. Сформулируйте достаточное условие полноты пространства ограниченных отображений.

12. При доказательстве теоремы 13.11 утверждается, что числовая функция $r(f(x), \varphi(x))$ непрерывна на X. Докажите, что это следует из соотношения (8.1).

13. Докажите, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных отображений является непрерывным отображением.

14. При каком условии пространство непрерывных отображений полно? Объясните, почему из теоремы 13.11 вытекает полнота пространства $\mathbf{C}[a; b]$.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 8. № 3, 7, 10, 14, 20—25.

§ 14. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Многие задачи из различных разделов математики можно свести к вопросу о существовании неподвижной точки некоторого отображения. Поэтому важно знать различные условия существования неподвижных точек. Выводу и применениям одного из этих условий и посвящен настоящий параграф.

1. Неподвижные точки. Пусть дано некоторое отображение F метрического пространства M в себя. Точка a из M называется *неподвижной точкой отображения* F, если $F(a) = a$.

Пример **14.1.** Неподвижными точками отображения F: $x \to x^2$ числовой прямой в себя служат корни уравнения $x^2 = x$, т. е. числа 0 и 1.

Пример **14.2.** Формулы

$$\begin{cases} u = 2x + 3y - 2, \\ v = x + y + 1 \end{cases}$$

задают отображение плоскости в себя. Неподвижной точкой этого отображения является решение системы

$$\begin{cases} x = 2x + 3y - 2, \\ y = x + y + 1, \end{cases}$$

т. е. точка $(-1; 1)$.

Пример **14.3.** Если $x \to y(x)$ — непрерывная на отрезке $[0; 1]$ функция, то и функция $x \to y^2(x) - y(x) - x^2$ тоже непрерывна на $[0; 1]$. Поэтому формула $F(y) = y^2 - y - x^2$ задает отображение пространства $\mathbf{C}[0; 1]$ в себя. Неподвижными «точками» этого отображения являются решения функционального уравнения $y^2(x) - y(x) - x^2 = y(x)$, т. е. функции $y = 1 + \sqrt{1 + x^2}$ и $y = 1 - \sqrt{1 + x^2}$.

Пример **14.4.** Если функция $x \to y(x)$ непрерывна на отрезке $[0; 1]$, то и функция $x \to \int_0^x ty(t)\,dt + 1$ тоже непрерывна на $[0; 1]$. Поэтому формула

$$F(y) = \int_0^x ty(t)\,dt + 1$$

задает отображение пространства $\mathbf{C}[0; 1]$ в себя. Его неподвижные точки — решения интегрального уравнения

$$y(x) = 1 + \int_0^x ty(t)\,dt$$

или, что то же самое, дифференциального уравнения $y' = xy$ при начальном условии $y(0) = 1$. Таким решением служит функция $y = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

Рассмотренные примеры показывают, что понятие неподвижной точки объединяет в себе многие известные понятия: решение алгебраического уравнения или системы таких уравнений, решение функционального, интегрального или дифференциального уравнений.

2. Сжимающие отображения. Отображение F метрического пространства M в себя называется *сжимающим*, если существует такое число α, что $0 < \alpha < 1$, и при любом выборе в этом пространстве двух точек x и y выполняется неравенство

$$\rho(F(x), F(y)) \leqslant \alpha \rho(x, y). \tag{14.1}$$

Число α, входящее в (14.1), будем называть *константой сжатия*.

Из неравенства (14.1), в частности, следует, что при сжимающем отображении расстояние между образами любых двух точек меньше, чем расстояние между самими точками:

$$\rho(F(x), F(y)) < \rho(x, y). \tag{14.2}$$

Пример **14.5.** Формула $f(x) = x^2$ задает, очевидно, отображение отрезка $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ в себя. Это сжимающее отображение, так как при любых x и y из $\left[0; \frac{1}{3}\right]$

$$\rho(f(x), f(y)) = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y| \leqslant \frac{2}{3}\rho(x, y).$$

Пример **14.6.** Формулы

$$\begin{cases} u = 0{,}7x + 0{,}8y, \\ v = 0{,}2x - 0{,}05y \end{cases}$$

задают отображение F плоскости $\mathbf{R}_2^2$ в себя, которое не является сжимающим.

Действительно, рассмотрим точки $M_1(0; 0)$ и $M_2(10; 10)$. Найдем их образы: $P_1(0; 0)$, $P_2(15; 1{,}5)$. Так как $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{200}$, $\rho(P_1, P_2) > \sqrt{225}$, то расстояние между образами этих точек даже больше, чем расстояние между самими точками.

Пример **14.7.** Отображение F:

$$y(x) \to \frac{1}{3}\int_0^x y(t)\,dt$$

пространства $\mathbf{C}[0; 2]$ в себя является сжимающим.

Действительно, рассмотрим две произвольные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ из $\mathbf{C}[0; 2]$. Обозначим через $u_1(x)$ и $u_2(x)$ их образы при отображении F. В силу известных свойств определенного интеграла, для любого x из $[0; 2]$ имеем:

$$|u_1(x) - u_2(x)| = \left|\frac{1}{3}\int_0^x y_1(t)\,dt - \frac{1}{3}\int_0^x y_2(t)\,dt\right| = \frac{1}{3}\left|\int_0^x (y_1(t) - y_2(t))\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3}\int_0^x |y_1(t) - y_2(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{3}x \max_{0\leqslant t\leqslant x} |y_1(t) - y_2(t)| \leqslant \frac{2}{3}\rho(y_1, y_2).$$

Поэтому

$$\rho(F(y_1), F(y_2)) = \max_{0\leqslant x\leqslant 2} |u_1(x) - u_2(x)| \leqslant \frac{2}{3}\rho(y_1, y_2).$$

Теорема 14.1. *Всякое сжимающее отображение f: $M \to M$ непрерывно на M.*

Доказательство. Пусть a — произвольная точка пространства M и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для всех $x \in M$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, a) < \varepsilon$, в силу (14.1), имеем:

$$\rho(f(x), f(a)) \leqslant \alpha \rho(x, y) < \alpha \varepsilon < \varepsilon.$$

Это и означает, что f непрерывно в любой точке $a \in M$, т.е. непрерывно на M.

3. Принцип сжимающих отображений.

Теорема 14.2 (теорема Банаха). *Всякое сжимающее отображение f полного метрического пространства M в себя имеет, и притом единственную, неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть a_0 — произвольная точка пространства M. Так как f отображает пространство M в себя, то образ точки a_0 также принадлежит M. Обозначим его через a_1. Найдем образ точки a_1 и обозначим его через a_2. Неограниченно продолжая этот процесс, получим последовательность точек из M:

$$a_1 = f(a_0), \ \ldots, \ a_{n+1} = f(a_n), \ \ldots . \tag{14.3}$$

Покажем, что для последовательности (a_n) справедливо неравенство

$$\rho(a_n, a_{n+1}) \leqslant \alpha^n \cdot r, \tag{14.4}$$

где $r = \rho(a_0, a_1)$, α — константа сжатия данного отображения f.

Действительно, при $n = 1$ это неравенство справедливо. Предположим, что оно верно для $n = k$:

$$\rho(a_k, a_{k+1}) \leqslant \alpha^k \cdot r.$$

Так как $f(a_k) = a_{k+1}$, $f(a_{k+1}) = a_{k+2}$, то

$$\rho(a_{k+1}, a_{k+2}) = \rho(f(a_k), f(a_{k+1})) \leqslant \alpha \rho(a_k, a_{k+1}) \leqslant \alpha^{k+1} \cdot r,$$

потому неравенство (14.4) верно и при $n = k + 1$. По принципу математической индукции оно верно для любого натурального n.

Так как $0 < \alpha < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r\, \alpha^n$ сходится, а тогда, в силу неравенства (14.4), сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho(a_n, a_{n+1})$. Поэтому (см. теорему 13.5) последовательность (a_n) фундаментальна. Вследствие полноты M она сходится к некоторому элементу $a \in M$.

Покажем, что a — неподвижная точка отображения f. Действительно, так как $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, а отображение f непрерывно, то

$$f(a) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$$

Итак, отображение f имеет неподвижную точку a. Убедимся теперь, что неподвижная точка является единственной. Допустим, что b $(b \neq a)$ — другая неподвижная точка отображения f. Тогда $a = f(a)$, $b = f(b)$ и потому

$$\rho(a, b) = \rho(f(a), f(b)) \leqslant \alpha\, \rho(a, b),$$

т. е.

$$\rho(a, b) \leqslant \alpha\, \rho(a, b). \tag{14.5}$$

Так как $\rho(a, b) > 0$ при $a \neq b$, то обе части последнего неравенства можно поделить на $\rho(a, b)$. В результате получаем: $\alpha \geqslant 1$, что нёверно. Следовательно, f имеет лишь одну неподвижную точку. ■

4. Метод последовательных приближений. Последовательность (14.3) иногда называют *последовательностью итераций* (приближений) для отображения f. Одновременно с теоремой Банаха мы доказали, что *если f — сжимающее отображение полного метрического пространства в себя, то любая последовательность итераций для f сходится к неподвижной точке этого отображения.*

Для нахождения неподвижной точки (существование которой гарантируется теоремой Банаха) с любой требуемой точностью применяют так называемый *метод итераций* (*метод последовательных приближений*). При этом сначала выбирают — обычно на основании весьма грубой прикидки — «нулевое приближение» a_0 к искомой неподвижной точке, после чего строят последовательность (14.3). Так как эта последовательность сходится к неподвижной точке a отображения f, то через некоторое число шагов мы получим приближенное значение a с нужной точностью.

Пример **14.8.** Дадим математическое обоснование итерационной формулы[1] для приближенного извлечения квадратного корня из положительного числа a:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right),\quad a_0 \geqslant \sqrt{a}. \tag{14.6}$$

Последовательность (14.6) представляет собой последовательность итераций для отображения

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

С помощью известного неравенства $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ находим, что $f(x) \geqslant \sqrt{a}$ при любом $x > 0$, в частности при $x \geqslant \sqrt{a}$. Поэтому f отображает луч $[\sqrt{a}; +\infty[$ в себя. Это — сжимающее отображение, так как по теореме Лагранжа

$$\rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x - y)| =$$
$$= \frac{1}{2}\left|\left(1 - \frac{a}{\xi^2}\right)(x - y)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|x - y\right| = \frac{1}{2}\rho(x, y)$$

при любых x и y из $[\sqrt{a}; +\infty[$.

---

[1] См.: Алгебра. Учебник для 7-го класса средней школы. Под ред. А. И. Маркушевича. М., 1979.

Луч $[\sqrt{a}; +\infty[$ — как замкнутая часть полного пространства $\mathbf{R}$ — полное пространство. Поэтому (a_n) — последовательность итераций сжимающего отображения f полного пространства в себя. Значит, (a_n) сходится к неподвижной точке отображения f, т. е. к корню уравнения

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),$$

принадлежащему лучу $[\sqrt{a}; +\infty[$. Таким корнем служит число $\sqrt{a}$.

Итак, последовательность (14.6) сходится к $\sqrt{a}$, а потому, действительно, может служить для нахождения приближенных значений $\sqrt{a}$.

5. Теоремы существования. Теорема Банаха находит широкое применение в различных областях математики, прежде всего — при доказательстве различных «теорем существования». Рассмотрим некоторые из них.

Теорема 14.3. *Если заданная на отрезке $[a; b]$ функция f отображает отрезок $[a; b]$ в себя, дифференцируема на этом отрезке и ее производная ограничена по модулю на $[a; b]$ некоторой константой q $(0 < q < 1)$, то уравнение $x = f(x)$ имеет на $[a; b]$ одно и только одно решение.*

Доказательство. Согласно теореме Лагранжа для любых x_1 и x_2 из $[a; b]$

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = |f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2|,$$

где $\xi \in]x_1; x_2[$, а значит, $\rho(f(x_1), f(x_2)) \leqslant q\, \rho(x_1, x_2)$. Поэтому отображение f является сжимающим, причем в качестве константы сжатия можно принять число q. Так как отрезок $[a; b]$ — полное пространство, то справедливость данного утверждения следует из теоремы Банаха. ■

Теорема 14.3, очевидно, справедлива и для всей прямой, и для любого замкнутого луча.

Теорема 14.4 (существования и единственности решения дифференциального уравнения). *Пусть f — функция, непрерывная в некотором прямоугольнике $D = \{(x; y) \mid |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$ и удовлетворяющая в D условию Липшица:*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant K\, |y_1 - y_2|.$$

Тогда в некоторой окрестности точки x_0 существует — и притом только одно — решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Доказательство. Данное уравнение вместе с начальным условием, очевидно, эквивалентно интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt,$$

а решение данного уравнения есть неподвижная точка отображения $F\colon y(x) \to y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$. Поэтому нам достаточно показать (в силу теоремы Банаха), что F — сжимающее отображение некоторого полного метрического пространства E в себя.

По теореме Вейерштрасса функция f ограничена в области D: $|f(x, y)| \leqslant M$. Выберем число $h > 0$ так, чтобы выполнялись условия: $h < \frac{1}{K}$, $h \leqslant a$, $h \leqslant \frac{b}{M}$. Введем обозначения: $c = x_0 - h$, $d = x_0 + h$ — и рассмотрим подмножество E функций пространства $\mathbf{C}[c; d]$, удовлетворяющих на $[c; d]$ соотношению

$$|y(x) - y_0| \leqslant b. \tag{14.7}$$

Множество E — замкнутый шар в $\mathbf{C}[c; d]$ и, как всякая замкнутая часть полного пространства, является полным метрическим пространством.

Обозначим образ функции y при отображении F через z. Так как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции — функция непрерывная (даже дифференцируемая), то образ z любой функции $y \in E$ — непрерывная функция. Поскольку при любом $t \in [c; d]$ выполняется неравенство $|f(t, \mathbf{y}(t))| \leqslant M$, то

$$|z(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt\right| \leqslant M\,|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b,$$

а потому z удовлетворяет неравенству (14.7), т. е. $z \in E$. Итак, F отображает полное пространство E в себя.

Покажем, что это отображение сжимающее. Действительно,

$$|z_1(x) - z_2(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} (f(t, y_1) - f(t, y_2))\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1) - f(t, y_2)|\,dt. \tag{14.8}$$

Но, в силу условия Липшица, имеем:

$$\begin{aligned} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &\leqslant K|y_1(t) - y_2(t)| \leqslant \\ &\leqslant K \max_{c\leqslant t\leqslant d} |y_1(t) - y_2(t)| \leqslant K\rho(y_1, y_2). \end{aligned} \tag{14.9}$$

Из (14.8) и (14.9) получаем:

$$|z_1(x) - z_2(x)| \leqslant K\,|x - x_0|\,\rho(y_1, y_2) \leqslant K\,h\,\rho(y_1, y_2).$$

Значит,

$$\begin{aligned} \rho(F(y_1), F(y_2)) &= \max_{c\leqslant x\leqslant d} |z_1(x) - z_2(x)| \leqslant \\ &\leqslant K\,h\,\rho(y_1, y_2) \leqslant \alpha\,\rho(y_1, y_2), \end{aligned}$$

где $\alpha = K\,h < 1$ в силу выбора h. ■

Рассмотренные теоремы убедительно показывают, насколько полезны абстрактные математические построения, ярко иллюстрируют пользу изучения различных метрических пространств. Одновременно читатель еще раз убеждается, что, как и другие науки, математика развивается по знаменитой ленинской формуле: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности»[1].

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие точки называются неподвижными при отображении пространства в себя?
2. Приведите примеры приложения понятия неподвижной точки.
3. Какие отображения называются сжимающими? Что такое константа сжатия?
4. Приведите примеры сжимающих и несжимающих отображений пространства R_2^2 в себя.
5. Сформулируйте теорему Банаха о сжимающих отображениях. Дайте определения всем понятиям (и тем понятиям, на которые они опираются), входящим в условие этой теоремы.
6. При доказательстве теоремы Банаха использовалось условие: $\lim\limits_{n \to \infty} a_{n+1} = a$. Покажите его истинность.
7. В чем суть метода последовательных приближений?
8. Для каких отображений можно гарантировать сходимость метода последовательных приближений?

УПРАЖНЕНИЯ

§ 9. № 2, 3, 5, 7, 9, 13, 21—22, 25, 27, 29, 31, 35.

---

[1] Ленин В. И. Соч., 4-е изд., т. 38, с. 161.

ГЛАВА III

ИНТЕГРАЛ И МЕРА ЛЕБЕГА

§ 15. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

1. Интеграл Римана. Понятие (определенного) интеграла в течение последних полутора веков претерпело в своем развитии серьезные изменения. Как известно, первое строгое определение интеграла предложил французский математик Коши в 1823 г. применительно к непрерывным функциям. Более общий взгляд на интеграл — принятый в настоящее время во многих учебниках по анализу — принадлежит Риману[1]. Напомним определение интеграла по Риману[2].

Пусть f — функция, определенная и ограниченная на отрезке $[a; b]$. Рассмотрим какое-нибудь разбиение (обозначим его буквой σ) отрезка на промежутки точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$, где $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Так как f ограничена на $[a; b]$, то она ограничена и на каждом промежутке этого разбиения. Поэтому множество значений f на k-м промежутке ($k = 1, \ldots, n$) имеет нижнюю грань m_k и верхнюю грань M_k. Составим суммы:

$$s = s(f;\ \sigma) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \quad S = S(f;\ \sigma) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k,$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Эти суммы называют соответственно *нижней и верхней интегральными суммами* (или суммами Дарбу[3]) для функции f, соответствующими заданному разбиению σ. Понятно, что различным разбиениям отрезка $[a; b]$ соответствуют, вообще говоря, различные верхние и различные нижние интегральные суммы.

---

[1] Бернхард Риман (1826—1866) — выдающийся немецкий математик, профессор Геттингенского университета. Им были заложены основы топологии, неевклидовой геометрии (Римана), общей теории многообразий, геометрической теории функций комплексного переменного. Теории интеграла посвящена его работа «О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда» (1867 г.).

[2] См.: Виленкин Н. Я., Куницкая Е. С., Мордкович А. Г. «Интегральное исчисление». М., 1979.

[3] Жан Гастон Дарбу (1842—1917) — видный французский математик, известный своими работами в области дифференциальной геометрии.

Рассмотрим для функции f множество A_f всевозможных нижних интегральных сумм и множество B_f всевозможных верхних интегральных сумм, т. е. множества сумм, соответствующих всевозможным разбиениям σ отрезка $[a; b]$. Можно доказать, что множество A_f расположено на числовой оси левее[1] множества B_f, а потому они разделяются хотя бы одним числом.

Если множества A_f и B_f разделяются единственным числом, то говорят, что функция f *интегрируема на отрезке* $[a; b]$, а само разделяющее число I называют *интегралом* (в смысле Римана) функции f на $[a; b]$ и обозначают так: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Таким образом,

$$s(f;\ \sigma_1) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant S(f;\ \sigma_2),$$

где σ_1 и σ_2 — произвольные разбиения отрезка $[a; b]$.

Пример **15.1.** Функция Дирихле[2]

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \text{ иррациональном}, \\ 1 & \text{при } x \text{ рациональном} \end{cases}$$

не интегрируема по Риману на отрезке $[0; 1]$.

В самом деле, при любом разбиении σ отрезка $[0; 1]$ для каждого номера k $(k = 1, \ldots, n)$ имеем: $m_k = 0$, $M_k = 1$. Поэтому

$$s(D; \sigma) = 0;\ S(D; \sigma) = 1 \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = 1.$$

Значит, множество A_D состоит из одного числа 0, а B_D — из одного числа 1. Но такие множества разделяются любым числом из отрезка $[0; 1]$; так что D не интегрируема на $[0; 1]$.

В курсе интегрального исчисления доказывается критерий интегрируемости по Риману: *для интегрируемости функции на отрезке* $[a; b]$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *можно было найти такое разбиение этого отрезка, что*

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \varepsilon.$$

Тот факт, что сравнительно простые функции (вроде функции Дирихле) оказываются неинтегрируемыми, послужил одним из поводов (но далеко не единственной причиной) для попыток дальнейшего расширения, обобщения понятия интеграла. Над этой проблемой работали многие математики конца XIX в. Наиболее удач-

---

[1] Иными словами, каждое число из A_f не превосходит ни одного числа из B_f.

[2] Петер Лежен Дирихле (1805—1859) — известный немецкий математик, работавший в области математического анализа, теории чисел и математической физики.

ное определение интеграла было предложено Анри Лебегом[1]. Вот как сам Лебег объясняет необходимость своей работы:

«Может возникнуть вопрос, интересно ли заниматься усложнениями и не лучше ли ограничиться изучением функций, требующих лишь простых определений. Если мы решили бы ограничиться рассмотрением таких хороших функций, то нам пришлось бы отказаться от решения давно уже поставленных и весьма просто формулируемых проблем. Именно для решения этих проблем, а не из любви к усложнениям я и ввел определение интеграла более общее, чем римановское, и содержащее это последнее как частный случай. Я полагаю, что внимательный читатель, сожалея, быть может, что вещи не так просты, согласится, однако, со мной, что определение это необходимо и естественно»[2].

Известный коллектив математиков, объединенный псевдонимом Н. Бурбаки, в своих очерках по истории математики отмечает, что в результате открытия Лебега были получены бесчисленные достижения в области классических проблем анализа. Остановимся лишь на двух из таких проблем.

1) Пусть (f_n) — последовательность ограниченных в совокупности функций, определенных и интегрируемых по Риману на отрезке $[a; b]$. Пусть (f_n) сходится на $[a; b]$ к некоторой функции f. Известно, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx,$$

если выполняется дополнительное условие — условие существования интеграла в смысле Римана от предельной функции. Оказалось, что при использовании интеграла в смысле Лебега последнее условие выполняется автоматически.

2) Как известно, метрические пространства $\mathbf{C}_1[a; b]$ и $\mathbf{C}_2[a; b]$ не являются полными, что существенно ограничивает возможность их применения. Попытка дополнения этих пространств всеми интегрируемыми по Риману на $[a; b]$ функциями не спасает положения. Оказывается, что введение интеграла Лебега позволяет добавить к этим пространствам такие функции, что пространства становятся полными.

При введении интеграла Лебега удобно опираться на так называемые ступенчатые функции и функции, ε-малые по Лебегу. Рассмотрим вначале эти функции.

---

[1] Анри Лебег (1875—1941) — известный французский математик. Им были введены мера и интеграл, названные впоследствии его именем. Заслуженной известностью пользуется его книга «Об измерении величин», посвященная проблемам преподавания математики в средней школе.

[2] См.: А. Лебег. Интегрирование и отыскание примитивных. М.—Л., 1934, с. 3.

2. Ступенчатые функции. Функцию φ называют *ступенчатой*, если существует такой отрезок $[a; b]$ и такое разбиение $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ этого отрезка, что $\varphi(x) = 0$ вне $[a; b]$, а на каждом из интервалов $]x_{k-1}; x_k[$ функция φ постоянна. Значения функции φ в точках $x_0, \dots, x_n$, вообще говоря, произвольны, но мы обычно будем считать, что $\varphi(x_k - 0) \leqslant \varphi(x_k) \leqslant \varphi(x_k + 0)$, $k = 1, \dots, n$. Примером такой функции может служить функция $\varphi(x) \equiv 0$, а также изучаемая в школе функция $f(x) = [x]$, если дополнительно положить, что $f(x) = 0$ при $|x| > M$.

Для любых двух ступенчатых функций φ и ψ можно найти отрезок $[a; b]$ и его разбиение $\{x_0, \dots, x_n\}$ такие, чтобы обе функции были постоянны на интервалах $]x_{k-1}; x_k[$ и равны нулю вне $[a; b]$. Для этого достаточно взять наименьший отрезок, содержащий оба отрезка, вне которых функции φ и ψ обращаются в нуль, а за точки разбиения взять точки разбиений для обеих функций φ и ψ. Значит, сумма двух ступенчатых функций является ступенчатой функцией.

Очевидно, что если φ — ступенчатая функция, то и $\lambda\varphi$, где $\lambda \in \mathbf{R}$, также ступенчатая функция. Таким образом, *множество всех ступенчатых функций образует линейное пространство.*

Пусть φ — ступенчатая функция. Тогда существует отрезок $[a; b]$ и такое разбиение $\{x_0, \dots, x_n\}$ этого отрезка, что $\varphi(x) = c_k$ при $x \in]x_{k-1}; x_k[$ $(k = 1, \dots, n)$ и $\varphi(x) = 0$ вне $[a; b]$. Назовем *интегралом* функции φ по множеству $\mathbf{R}$ число $I(\varphi) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \Delta x_k$, где $I(\varphi)$ — сокращенное обозначение для $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx$. Значение интеграла не зависит ни от выбора отрезка $[a; b]$, ни от выбора разбиения σ — лишь бы φ обращалось в нуль вне $[a; b]$ и была постоянна на промежутках выбранного разбиения.

Очевидно, что если функция φ неотрицательна, то $I(\varphi)$ равно площади ступенчатой фигуры, изображенной на рисунке 21. Отметим, что эта фигура компактна.

Интеграл от ступенчатых функций обладает следующими очевидными свойствами:

а) $I\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k I(\varphi_k)$;

б) $|I(\varphi)| \leqslant I(|\varphi|)$;

в) если $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ при любом x, то $I(\varphi) \leqslant I(\psi)$.

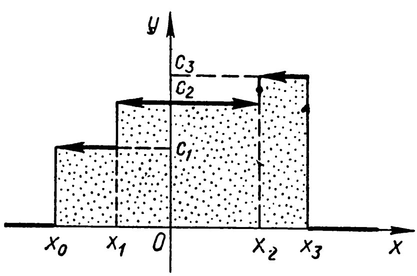

Рис. 21

3. Функции, ε-малые по Лебегу. Мы намерены вначале ввести понятие интеграла Лебега по всей числовой оси $\mathbf{R}$. Поэтому будем рассматривать функции, определенные на $\mathbf{R}$.

Рассмотрим некоторое счетное множество S неотрицательных ступенчатых функций. Составленный из таких функций ряд при любом x имеет конечную или бесконечную сумму, не зависящую от порядка слагаемых. Пусть из множества S составлен ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n$ и пусть дана некоторая функция f. Будем писать, что $f \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n$, если $f(x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ при любом x из области сходимости (к конечной сумме) рассматриваемого ряда.

Пусть выбрано некоторое положительное число ε. Функция f называется ε-*малой*, если существует такая последовательность неотрицательных ступенчатых функций (φ_n), что $|f| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} I(\varphi_n) < \varepsilon$. Последовательность (φ_n), обладающую указанными свойствами, будем называть ε-*последовательностью* для функции f.

Пример 15.2. Ступенчатая функция φ является ε-малой при любом $\varepsilon > I(|\varphi|)$.

В самом деле, в качестве ε-последовательности для φ можно взять последовательность (φ_n), где $\varphi_1 = |\varphi|$, $\varphi_n = 0$ при $n \geqslant 2$.

Пример 15.3. Функция f, отличная от нуля лишь в одной точке x_0, является ε-малой при любом $\varepsilon > 0$.

Действительно, для заданного $\varepsilon > 0$ выберем такой отрезок Δ с центром в точке x_0, что $|f(x_0)| \cdot |\Delta| < \varepsilon$, где $|\Delta|$ — длина Δ, и положим $\varphi(x) = |f(x_0)|$ на Δ и $\varphi(x) = 0$ вне Δ. Рассмотрим последовательность (φ_n), у которой $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_n = 0$ при $n \geqslant 2$.

Так как $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n = \varphi$, то $|f| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} I(\varphi_n) = I(\varphi) = |f(x_0)| \cdot |\Delta| < \varepsilon$. Значит, (φ_n) может служить ε-последовательностью для f, а потому функция f является ε-малой.

Пример 15.4. Рассмотрим функцию Кантора k, равную единице на канторовом троичном множестве F_0 и нулю вне этого множества. Эта функция ε-мала при любом $\varepsilon > 0$. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое m, что $\left(\frac{2}{3}\right)^m < \varepsilon$. Обозначим через φ функцию, равную единице на всех отрезках, получаемых на m-м шагу канторова процесса (см. с. 51), и нулю вне объединения этих отрезков. Так как сумма длин указанных отрезков равна $\left(\frac{2}{3}\right)^m$, то $I(\varphi) = \left(\frac{2}{3}\right)^m < \varepsilon$, причем, очевидно, $|k(x)| \leqslant \varphi(x)$. Из сказанного ясно, что (φ_n), где $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_n \equiv 0$ при $n \geqslant 2$, является ε-последовательностью функции k.

Из самого определения ε-малых функций вытекает справедливость следующих двух утверждений:

Теорема 15. 1. *Функция f тогда и только тогда ε-мала, когда ε-мала функция $|f|$.*

Теорема 15.2. *Если функция f является ε-малой, а $|g(x)| \leqslant |f(x)|$ при любом x, то ε-мала и функция g.*

В дальнейшем нам понадобятся и другие, менее очевидные свойства ε-малых функций.

Пусть функция f ε-мала, а λ — некоторое действительное число. Тогда функция λf является $|\lambda|$ε-малой.

В силу ε-малости функции f для нее можно подобрать ε-последовательность (φ_n). Функции $|\lambda|\varphi_n$ $(n \in \mathbf{N})$ являются ступенчатыми, причем у рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda|\varphi_n$ одинаковые области сходимости. Если x — точка сходимости этих рядов, то, по условию, выполняется неравенство: $|f(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$. Но тогда

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| \leqslant |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|\varphi_n(x).$$

Значит, $|\lambda f| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|\varphi_n$. А так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} I(|\lambda|\varphi_n) = |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty} I(\varphi_n) < |\lambda|\varepsilon,$$

то $(|\lambda|\varphi_n)$ может служить $|\lambda|$ε-последовательностью функции λf. Поэтому функция λf является $|\lambda|$ε-малой.

Убедимся теперь, что *если функции f_k являются ε_k-малыми $(k = 1, \ldots, m)$, а $\varepsilon = \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k$, то функция $f = \sum_{k=1}^{n} f_k$ будет ε-малой.*

В силу ε_k-малости функции f_k у нее имеется ε_k-последовательность $(\varphi_n^{(k)})$. Множество всех функций $\varphi_n^{(k)}$ $(n \in \mathbf{N};\ k = 1, \ldots, m)$ счетно как объединение конечного числа счетных множеств. Поэтому все функции этого множества можно расположить в одну последовательность (ψ_r), $r \in \mathbf{N}$, где $\psi_r = \varphi_n^{(k)}$ при некоторых $n \in \mathbf{N}$ и $k \in \{1, \ldots, m\}$. Допустим, что при данном x знакоположительный ряд $\sum_{r=1}^{\infty}\psi_r(x)$ сходится. Так как сумма этого ряда не зависит от порядка слагаемых, то

$$\sum_{r=1}^{\infty}\psi_r(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{(k)}(x). \tag{15.1}$$

А так как, по условию, $|f_k(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{(k)}(x)$, то

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{(k)}(x). \tag{15.2}$$

Из (15.1) и (15.2) следует, что $|f| \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \psi_r$. Аналогично находим, что

$$\sum_{r=1}^{\infty} I(\psi_r) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} I(\varphi_n^{(k)}) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k = \varepsilon.$$

Значит, (ψ_r) может служить ε-последовательностью для функции f.

Из только что установленных фактов вытекает справедливость следующего утверждения:

Теорема 15.3. *Если функции f_k $(k = 1, \ldots, n)$ являются ε_k-малыми и $\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \varepsilon_k$, то функция $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ будет ε-малой.*

Теорема 15.4. *Пусть f — сумма сходящегося при всех x функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ $(\varepsilon_k > 0)$, f_k — неотрицательная ε_k-малая функция. Тогда функция f является ε-малой.*

Доказательство. Рассуждая, как и выше, рассмотрим ε_k-последовательность $(\varphi_n^{(k)})$ функции f_k. Множество $\{\varphi_n^{(k)} \mid n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{N}\}$ счетно как объединение счетного семейства счетных множеств. Его можно записать в виде одной последовательности (ψ_r). Имеем далее:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \psi_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(k)}(x)$$

для любого x из области сходимости ряда $\sum_{r=1}^{\infty} \psi_r$. А так как $f_k(x) \geqslant 0$, то

$$|f(x)| = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(k)}(x).$$

Значит, $|f| \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \psi_r$. Как и в предыдущем доказательстве, убеждаемся далее, что $\sum_{r=1}^{\infty} I(\psi_r) < \varepsilon$. Значит, (ψ_r) служит ε-последовательностью функции f. ■

Пример 15.5. Функция f, отличная от нуля лишь на счетном множестве точек $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, является ε-малой при любом $\varepsilon > 0$.

Действительно, положим

$$f_n(x) = \begin{cases} |f(x_n)| & \text{при } x = x_n, \\ 0 & \text{при } x \neq x_n. \end{cases}$$

Так как функция f_n отлична от нуля лишь в одной точке, то она $\frac{\varepsilon}{2^n}$-мала (см. пример 15.3). При этом, очевидно,

$$|f| = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon, \quad f_n(x) \geqslant 0.$$

Но тогда неотрицательная функция $|f|$ ε-мала в силу теоремы 15.4, а значит (см. теорему 15.1), и f обладает тем же свойством.

Например, функция Дирихле (см. пример 15.1) ε-мала при любом положительном ε, поскольку $D(x) \neq 0$ на $\mathbf{Q}$, а это множество счетно.

Установим теперь некоторые свойства ε-малых ступенчатых функций.

Лемма 15.1. *Если ступенчатая функция* φ *является* ε*-малой, то для нее можно указать такую* ε*-последовательность* (φ_n), *что в точках сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ *выполняется строгое неравенство* $|\varphi(x)| < \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, *и, кроме того, в точках разрыва* $x_1, \ldots, x_k$ *функции* φ *выполняются неравенства*

$$|\varphi(x_i \pm 0)| < \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_i) \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Доказательство. В силу ε-малости функции φ имеется такая последовательность неотрицательных ступенчатых функций (ψ_n), что число $I = \sum_{n=1}^{\infty} I(\psi_n)$ меньше ε, а $|\varphi(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$ при всех x из области сходимости рассматриваемого ряда.

Нам надо заменить указанное нестрогое неравенство на строгое и добиться, чтобы в точках разрыва сумма ряда давала оценку сверху не только для $|\varphi(x)|$, но и для $|\varphi(x \pm 0)|$. Для этого дополним систему функций (ψ_n) некоторыми ступенчатыми функциями $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

В качестве α_0 возьмем функцию, постоянную на отрезке $[a; b]$, вне которого φ обращается в нуль, причем значение α_0 на $[a; b]$ достаточно малое число $\delta_0 > 0$, а вне $[a; b]$ — нуль. После ее присоединения нестрогое неравенство заменится на строгое. В качестве же α_i $(i = 1, \ldots, n)$ возьмем функцию, принимающую значение

$$\mu_i = \max\{|\varphi(x_i - 0)|, \ |\varphi(x_i + 0)|\}$$

на достаточно малом отрезке Δ_i с центром в точке разрыва x_i функции φ. Рассмотрим теперь последовательность (φ_n), где $\varphi_n = \alpha_{n-1}$ при $n \leqslant k + 1$ и $\varphi_n = \psi_{n-k-1}$ при $n \geqslant k + 1$. Нетрудно видеть, что сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ будет оценивать сверху и числа $|\varphi(x_i \pm 0)|$.

Малость чисел δ_0 и $|\Delta_i|$ должна быть такой, чтобы выполнялось неравенство $\sum_{n=1}^{\infty} I(\varphi_n) < \varepsilon$. Предоставляем читателю проверить, что для этого достаточно положить

$$|\Delta_i| = \frac{\varepsilon - I}{2(k+1)\mu_i}, \quad \delta_0 = \frac{\varepsilon - I}{2(k+1)(b-a)}. \blacksquare$$

В дальнейшем, выбирая функции φ_n для ε-малой ступенчатой функции φ, будем предполагать, что выполняются требования, указанные в лемме 15.1.

Теорема 15.5. *Если неотрицательная ступенчатая функция α является ε-малой, то $I(\alpha) \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Положим[1] $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$ и обозначим через Φ_n ступенчатую фигуру, ограниченную осью абсцисс, графиком функции σ_n и конечным числом вертикальных отрезков, проведенных в точках разрыва функции σ_n (см. рис. 21). Через Φ обозначим аналогичную ступенчатую фигуру, соответствующую функции α. Так как все функции φ_n неотрицательны, то $\sigma_n(x) \leqslant \sigma_{n+1}(x)$ и потому $\Phi_n \subset \Phi_{n+1}$. При этом, поскольку для всех x либо $\alpha(x) < \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$, либо $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) = +\infty$, то для любого x найдется такое n, что $\alpha(x) < \sigma_n(x)$. Поэтому $\Phi \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$.

Зададим $\delta > 0$ и заменим каждую из фигур Φ_n содержащим ее открытым ступенчатым множеством Ω_n («окаймим» фигуру Φ_n). При этом потребуем, чтобы площадь[2] «каймы» $\Omega_n \setminus \Phi_n$ не превосходила $\frac{\delta}{2^n}$. Так как $\Phi \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ и $\Phi_n \subset \Omega_n$, то $\Phi \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$. Но множество Φ компактно, множества же Ω_n открыты. Поэтому в силу теоремы о конечном покрытии найдется такое n, что

$$\Phi \subset \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n} \Phi_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} (\Omega_k \setminus \Phi_k)\right).$$

Так как $\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \ldots \subset \Phi_n \subset \ldots$, то $\bigcup_{k=1}^{n} \Phi_k = \Phi_n$ и потому

$$\Phi = \Phi_n \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} (\Omega_k \setminus \Phi_k)\right).$$

Отсюда следует такая оценка площади фигуры Φ:

$$|\Phi| \leqslant |\Phi_n| + \sum_{k=1}^{n} |\Omega_k \setminus \Phi_k| \leqslant |\Phi_n| + \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta}{2^k} < |\Phi_n| + \delta. \quad (15.3)$$

[1] Здесь (φ_n)—ε-последовательность для функции α.

[2] О понятии квадрируемости и свойствах площадей см. книгу, указанную в сноске на с. 89. Здесь и в дальнейшем площадь фигуры Φ обозначается как $|\Phi|$.

Но $|\Phi| = I(\alpha)$, $|\Phi_n| = I(\sigma_n)$. Поэтому из неравенства (15.3) получаем:

$$I(\alpha) < I(\sigma_n) + \delta = \sum_{k=1}^{n} I(\varphi_k) + \delta.$$

Так как $\varphi_k(x) \geqslant 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} I(\varphi_k) < \varepsilon$, то

$$I(\alpha) < \sum_{k=1}^{\infty} I(\varphi_k) + \delta < \varepsilon + \delta.$$

В силу произвольности $\delta > 0$ отсюда и вытекает доказываемое неравенство. ■

4. ε-приближения функции. Понятие ε-малости функции позволяет ввести важное для наших построений понятие ε-приближения функции.

Назовем *ε-приближением* функции f такую ступенчатую функцию φ_ε, что функция $f - \varphi_\varepsilon$ является ε-малой.

Теорема 15.6. *Если функция φ_δ является δ-приближением функции f, а φ_ε является ε-приближением той же функции, то выполняется неравенство*

$$I(\varphi_\delta) - \delta \leqslant I(\varphi_\varepsilon) + \varepsilon. \tag{15.4}$$

Доказательство. Так как, по условию, функция $f - \varphi_\delta$ является δ-малой, а функция $f - \varphi_\varepsilon$ является ε-малой, то по теореме 15.3 разность функций $f - \varphi_\delta$ и $f - \varphi_\varepsilon$, т. е. функция $\varphi_\varepsilon - \varphi_\delta$, будет $(\varepsilon + \delta)$-малой. Но в таком случае (см. теорему 15.1) будет $(\varepsilon + \delta)$-малой и неотрицательная ступенчатая функция $|\varphi_\varepsilon - \varphi_\delta|$. А тогда по теореме 15.5 выполняется неравенство

$$|I(\varphi_\varepsilon) - I(\varphi_\delta)| = |I(\varphi_\varepsilon - \varphi_\delta)| \leqslant I(|\varphi_\varepsilon - \varphi_\delta|) \leqslant \delta + \varepsilon.$$

Из него следует, что $I(\varphi_\delta) - I(\varphi_\varepsilon) \leqslant \delta + \varepsilon$, откуда и вытекает неравенство (15.4). ■

5. Интеграл Лебега. Дадим, наконец, новое (отличное от римановского) определение понятия интегрируемой функции и интеграла. При этом мы будем существенно опираться на предварительно введенное нами вспомогательное понятие интеграла $I(\varphi)$ от ступенчатой функции.

Назовем функцию f *интегрируемой* или *суммируемой* (по Лебегу на всей числовой оси $\mathbf{R}$), если для любого $\varepsilon > 0$ она имеет ε-приближение φ_ε.

Поставим в соответствие интегрируемой функции f два числовых множества:

$$X_f = \{I(\varphi_\varepsilon) - \varepsilon\}, \quad Y_f = \{I(\varphi_\varepsilon) + \varepsilon\},$$

где ε пробегает множество всех положительных чисел, а функция φ_ε при заданном $\varepsilon > 0$ пробегает множество всех ε-приближений функции f. В силу теоремы 15.6 множество X_f расположено левее множества Y_f, и потому эти множества разделяются хотя бы одним числом[1].

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как f интегрируема, то у нее есть $\frac{\varepsilon}{2}$-приближение φ. Но в таком случае $a = I(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \in X_f$, $b = I(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2} \in Y_f$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такие числа $a \in X_f$ и $b \in Y_f$, что $b - a < \varepsilon$. В силу критерия единственности разделяющего числа, *множества X_f и Y_f разделяются единственным числом.*

Единственное разделяющее число множеств X_f и Y_f интегрируемой функции f называется *интегралом Лебега* функции f и обозначается так: $(L)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Наряду с этим обозначением мы будем использовать и более короткое: $I_L(f)$. Здесь буква L подчеркивает, что интеграл понимается в смысле Лебега.

Из определения интеграла вытекает, что для любого ε-приближения φ_ε интегрируемой функции f справедливы неравенства:

$$I(\varphi_\varepsilon) - \varepsilon \leqslant I_L(f) \leqslant I(\varphi_\varepsilon) + \varepsilon \tag{15.5}$$

и потому

$$|I_L(f) - I(\varphi_\varepsilon)| \leqslant \varepsilon. \tag{15.6}$$

Легко заметить, что *всякая ступенчатая функция φ интегрируема по Лебегу, причем ранее определенный ее интеграл $I(\varphi)$ совпадает с ее интегралом $I_L(\varphi)$ в новом, лебеговском смысле.*

Действительно, пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Так как функция $\varphi - \varphi$, очевидно, ε-мала (в качестве ε-последовательности можно взять последовательность нулевых функций), то сама функция φ может служить для себя ε-приближением. Отсюда следует интегрируемость φ по Лебегу. В силу неравенства (15.6) имеем далее, что $|I_L(\varphi) - I(\varphi)| \leqslant \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Это и означает, что $I_L(\varphi) = I(\varphi)$.

Отметим еще, что поскольку ступенчатая функция $0 \equiv 0$ может при каждом $\varepsilon > 0$ служить ε-приближением для функции, ε-малой при любом ε, а $I(\theta) = 0$, то *функция f, ε-малая при любом $\varepsilon > 0$, интегрируема по Лебегу, причем $I_L(f) = 0$.*

Например, функция Кантора k (см. пример 15.4), как ε-малая при любом $\varepsilon > 0$, интегрируема по Лебегу, и $I_L(k) = 0$. То же самое можно сказать и про функцию Дирихле.

Пример **15.6.** Покажем, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ при } x \in [0; 1[, \\ 0 \text{ при } x \notin [0; 1[\end{cases}$$

интегрируема по Лебегу, и найдем ее интеграл.

[1] См., Н. Я. Виленкин, Е. С. Куницкая. Математический анализ. Введение в анализ. М., 1973, с. 24.

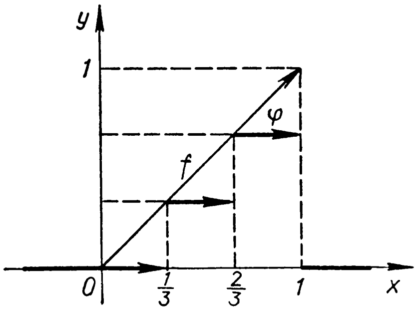

Рис. 22

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем натуральное число m так, что $\frac{1}{m} < \varepsilon$, и рассмотрим ступенчатые функции (рис. 22, где $m = 3$):

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{m}, \text{ если } \frac{k-1}{m} \leqslant x < \frac{k}{m}, \\ 0, \text{ если } x \notin [0;\ 1[, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{m}, \text{ если } x \in [0;\ 1], \\ 0, \text{ если } x \notin [0;\ 1] \end{cases}$$

и последовательность (φ_n), где $\varphi_1 = \psi$, $\varphi_n = 0$ при $n \geqslant 2$. Так как

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x); \qquad \sum_{n=1}^{\infty} I(\varphi_n) = I(\psi) = \frac{1}{m} < \varepsilon,$$

то функция $f - \varphi$ является ε-малой, а φ может служить ε-приближением функции f. Интегрируемость f доказана.

Имеем далее:

$$I(\varphi) = \sum_{k=1}^{m} \frac{k-1}{m^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}.$$

Поэтому, в силу неравенства (15.3), получаем, что при всех достаточно больших m выполняется неравенство

$$\left| I_L(f) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2m} \right| < \varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем:

$$\left| I_L(f) - \frac{1}{2} \right| \leqslant \varepsilon,$$

а это — в силу произвольности ε — означает, что $I_L(f) = \frac{1}{2}$.

6. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана. Пусть функция f определена на отрезке $[a;\ b]$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\bar{f}$ такую, что $\bar{f}(x) = f(x)$ на $[a;\ b]$ и $\bar{f}(x) = 0$ вне $[a;\ b]$. К функции $\bar{f}$ применимы определения предыдущего пункта. Будем говорить, что функция f *интегрируема по Лебегу на отрезке* $[a;\ b]$, если функция $\bar{f}$ интегрируема (на всем $\mathbf{R}$) по Лебегу. При этом положим: $(L)\int\limits_a^b f(x)dx = I_L(\bar{f})$. Договоримся в этом пункте для различия интеграл Римана функции f по отрезку $[a;b]$ обозначать так: $(R)\int\limits_a^b f(x)dx$.

Пример 15.7. Функция Дирихле D интегрируема по Лебегу на любом отрезке $[a;\ b]$, причем $(L)\int\limits_a^b D(x)\,dx = 0$.

В самом деле, функция $\overline{D}$ отлична от нуля (равна 1) лишь на множестве рациональных чисел отрезка $[a; b]$. Так как это множество счетно, то функция $\overline{D}$ является ε-малой при любом $\varepsilon > 0$, а значит, она интегрируема (см. с. 99) и $(L)\int\limits_a^b D(x)\,dx = I_L(\overline{D}) = 0$.

Итак, функция Дирихле, не интегрируемая на отрезке по Риману, оказывается, интегрируема по Лебегу. Убедимся, что обратное явление невозможно ни для какой функции.

Теорема 15.7. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$ по Риману, то она интегрируема на этом отрезке и по Лебегу, причем оба интеграла от f равны.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу критерия интегрируемости функции по Риману существует такое разбиение $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$ (см. с. 90), что

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \varepsilon.$$

Рассмотрим ступенчатую функцию φ такую, что $\varphi(x) = m_k$, если $x_{k-1} \leqslant x < x_k$, $\varphi(b) = b$ и $\varphi(x) = 0$ вне $[a; b]$. Покажем, что функция $\overline{f} - \varphi$ является ε-малой. Для этого рассмотрим ступенчатую функцию ψ такую, что $\psi(x) = M_k - m_k$ при $x \in [x_{k-1}; x_k[$, $\psi(b) = f(b)$, $\psi(x) = 0$ вне $[a; b]$. Поскольку при $x \in [x_{k-1}; x_k[$ выполняется соотношение $m_k \leqslant \overline{f}(x) \leqslant M_k$, то $0 \leqslant f(x) - m_k \leqslant$ $\leqslant M_k - m_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ при тех же x, а значит, $|\overline{f}(x) - \varphi(x)| \leqslant$ $\leqslant \psi(x)$ при всех x. А так как

$$I(\psi) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \varepsilon,$$

то последовательность (φ_n), где $\varphi_1 = \psi$, $\varphi_n = 0$ при $n \geqslant 2$, является ε-последовательностью для $\overline{f} - \varphi$, чем и доказана ε-малость функции $\overline{f} - \varphi$. Интегрируемость функции f по Лебегу на $[a; b]$ доказана.

Для доказательства равенства интегралов рассмотрим еще одну ступенчатую функцию α такую, что $\alpha(x) = M_k$ при $x \in$ $\in [x_{k-1}; x_k[$, $\alpha(b) = f(b)$, $\alpha(x) = 0$ вне $[a; b]$. Имеем:

$$I(\varphi) = \sum_{k=1}^{m} m_k \,\Delta x_k, \quad I(\alpha) = \sum_{k=1}^{m} M_k \,\Delta x_k, \quad I(\alpha) - I(\varphi) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} (M_k - m_k) < \varepsilon.$$

Значит, выполняется неравенство

$$I(\alpha) < I(\varphi) + \varepsilon. \tag{15.7}$$

В силу определения интеграла Римана выполняется соотношение:

$$\sum_{k=1}^{m} m_k \Delta x_k \leqslant (R)\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{m} M_k \Delta x_k \text{ или } I(\varphi) \leqslant (R)\int_a^b f(x)\,dx \leqslant I(\alpha).$$

Значит,

$$I(\varphi) - \varepsilon \leqslant (R)\int_a^b f(x)dx \leqslant I(\varphi) + \varepsilon. \tag{15.8}$$

С другой стороны, φ является ε-приближением для функции $\overline{f}$. Поэтому, согласно определению интеграла Лебега, выполняется такое соотношение:

$$I(\varphi) - \varepsilon \leqslant (L)\int_a^b f(x)dx \leqslant I(\varphi) + \varepsilon. \tag{15.9}$$

Из неравенств (15.8) и (15.9) находим:

$$\left|(R)\int_a^b f(x)dx - (L)\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant 2\varepsilon$$

при любом $\varepsilon > 0$. Отсюда и вытекает равенство обоих интегралов. ■

Теорема 15.7 и пример 15.7 показывают, что класс интегрируемых на отрезке по Лебегу функций шире класса функций, интегрируемых по Риману.

При доказательстве теоремы 15.7 мы обнаружили, что для интегрируемой по Риману на отрезке $[a; b]$ функции f можно подобрать такую ступенчатую функцию φ (равную нулю вне отрезка), что функция $f - \varphi$ является ε-малой. При этом «роль» ε-последовательности для $f - \varphi$ «играет» одна неотрицательная ступенчатая функция. Если назвать ε-малыми по Риману функции f, для которых можно подобрать неотрицательную ступенчатую функцию ψ такую, что $|f(x)| \leqslant \psi(x)$ при любом x, причем $I(\psi) < \varepsilon$, а затем буквально повторить принятое выше определение интегрируемости и интеграла (рассматривая лишь такие ступенчатые функции, которые обращаются в нуль вне рассматриваемого отрезка), то получится понятие интегрируемости (и интеграла), равносильное определению Римана. Таким образом, определение Лебега расширяет определение Римана, изменяя всего лишь понятие ε-малости путем рассмотрения не только ступенчатых функций, но и их счетных сумм.

7. Свойства интеграла Лебега. Убедимся теперь, что для интеграла Лебега сохраняются важнейшие свойства интеграла Римана. Мы будем снова рассматривать интеграл Лебега по всей прямой, обозначая его $I(f)$; интегрируемость будем также всюду понимать как интегрируемость по Лебегу на $\mathbf{R}$.

Теорема 15.8. *Если интегрируемая функция f ε-мала, то $|I(f)| \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Так как функция f ε-мала, то функция $\theta \equiv 0$ является ее ε-приближением. А тогда в силу неравенства (15.6) имеем: $|I(f)| = |I(f) - I(\theta)| \leqslant \varepsilon$. ■

Теорема 15.9. *Если функция f интегрируема, то функция $|f|$ тоже интегрируема.*

Доказательство. Для любых чисел a и b имеет место неравенство $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$. Поэтому для всех $x \in \mathbf{R}$ имеем:

$$||f(x)| - |\varphi(x)|| \leqslant |f(x) - \varphi(x)|.$$

Отсюда вытекает, что если φ является ε-приближением для f, то $|\varphi|$ является ε-приближением для $|f|$. Поэтому $|f|$ тоже интегрируемая функция.■

Теорема 15.10. *Если функции f_k $(k = 1, \ldots, n)$ интегрируемы и $\lambda_k \in \mathbf{R}$, то функция $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ интегрируема, причем*

$$I(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k I(f_k). \tag{15.10}$$

Доказательство. Положим $\lambda = \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|$ и зададим $\varepsilon > 0$. У каждой из функций f_k есть $\frac{\varepsilon}{\lambda}$-приближение φ_k. Положим $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k$. Так как функция $f_k - \varphi_k$ является $\frac{\varepsilon}{\lambda}$-малой, а

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{\varepsilon\lambda}{\lambda} = \varepsilon,$$

$$f - \varphi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (f_k - \varphi_k),$$

то, по теореме 15.3, функция $f - \varphi$ является ε-малой. Функция φ ступенчата как линейная комбинация ступенчатых функций. Значит, функция f при любом $\varepsilon > 0$ имеет ε-приближение φ и потому интегрируема. При этом имеют место неравенства:

$$|I(f) - I(\varphi)| < \varepsilon, \tag{15.11}$$

$$|I(f_k) - I(\varphi_k)| < \frac{\varepsilon}{\lambda} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{15.12}$$

Из неравенства (15.12) следует, что

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k I(f_k) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k I(\varphi_k) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (I(f_k) - I(\varphi_k)) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \cdot |I(f_k) - I(\varphi_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon. \tag{15.13}$$

Но для ступенчатых функций имеем:

$$I(\varphi) = I\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k I(\varphi_k).$$

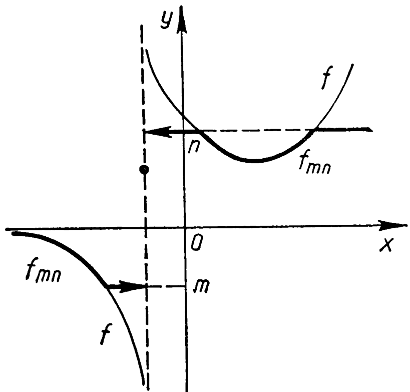

Рис. 23

Значит, в силу неравенств (15.11) и (15.13),

$$\left| I(f) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k I(f_k) \right| \leqslant \left| I(f) - I(\varphi) \right| + \left| I(\varphi) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k I(f_k) \right| = \left| I(f) - I(\varphi) \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k I(\varphi_k) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k I(f_k) \right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, отсюда и вытекает доказываемое соотношение. ■

В теории интеграла Лебега, а также в практике его вычисления важную роль играют так называемые срезки функции. Познакомимся с ними.

Функция f_{mn} ($m \leqslant 0 \leqslant n$) такая, что (рис. 23)

$$f_{mn}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } m \leqslant f(x) \leqslant n, \\ m, & \text{если } f(x) < m, \\ n, & \text{если } f(x) > n, \end{cases}$$

называется (m, n)-*срезкой* функции f, а функции

$$f_{-\infty n}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leqslant n, \\ n, & \text{если } f(x) > n \end{cases} \qquad f_{m\infty}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant m, \\ m, & \text{если } f(x) < m \end{cases}$$

($m \leqslant 0 \leqslant n$) называются соответственно *срезками сверху* и *снизу* функции f.

Рассмотрим две функции f и g и их срезки f_{mn} и g_{mn}. Если $m \leqslant f(x) \leqslant n$ и $m \leqslant g(x) \leqslant n$, то $f_{mn}(x) = f(x)$, $g_{mn}(x) = g(x)$. Если $f(x) > n$, а $m \leqslant g(x) \leqslant n$, то

$$|f_{mn}(x) - g_{mn}(x)| = |n - g(x)| < |f(x) - g(x)|.$$

Разбирая все остальные случаи (в том числе и случаи $m = -\infty$ или $n = \infty$), приходим к выводу, что для любых срезок выполняется неравенство

$$|f_{mn}(x) - g_{mn}(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| \quad (x \in \mathbf{R}). \qquad (15.14)$$

Из этого неравенства непосредственно вытекает, что *если ступенчатая функция* φ *является* ε*-приближением для функции* f, *то ступенчатая функция* φ_{mn} ($m \leqslant 0 \leqslant n$, а также $m = -\infty$ или $n = \infty$) *будет* ε*-приближением для* f_{mn}. Но в таком случае справедлива следующая теорема:

Теорема 15.11. *Если функция интегрируема, то и любая ее срезка интегрируема.*

Теорема 15.12. *Если все значения интегрируемой функции f или принадлежат отрезку $[m; n]$, где $m \leqslant 0 \leqslant n$, или неположительны, или неотрицательны, то при любом $\varepsilon > 0$ у этой функции имеется ε-приближение, обладающее тем же свойством.*

Доказательство. Так как, в силу условия, $f = f_{mn}$, то для любого ε-приближения φ функции f ступенчатая функция φ_{mn} и будет искомым ε-приближением.■

Теорема 15.13. *Если функция f интегрируема и неотрицательна, то $I(f) \geqslant 0$.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ функция f имеет неотрицательное ε-приближение φ. Так как для неотрицательных ступенчатых функций доказываемое неравенство верно, то, в силу неравенства (15.5),

$$I(f) \geqslant I(\varphi) - \varepsilon \geqslant -\varepsilon,$$

откуда, благодаря произвольности ε, и вытекает доказываемое неравенство.■

Из теорем 15.10 и 15.13 следует, очевидно, справедливость следующего свойства:

Теорема 15.14. *Если f и g интегрируемы, причем $f(x) \leqslant g(x)$ при всех x, то $I(f) \leqslant I(g)$.*

Теорема 15.15. *Если функция f интегрируема и φ — ее ε-приближение, то функция $|f - \varphi|$ интегрируема, причем*

$$0 \leqslant I(|f - \varphi|) \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Функция $|f - \varphi|$ интегрируема в силу теорем 15.9 и 15.10. При этом, поскольку она ε-мала, то ее интеграл не превосходит ε в силу теоремы 15.8.■

Теорема 15.16. *Если функция f неотрицательна, причем $I(f) < \varepsilon$, то эта функция $(\varepsilon + \delta)$-мала при любом $\delta > 0$.*

Доказательство. Обозначим через φ неотрицательное $\frac{\delta}{2}$-приближение функции f (см. теорему 15.12). Тогда функция $f - \varphi$ является $\frac{\delta}{2}$-малой и потому имеет $\frac{\delta}{2}$-последовательность (φ_n). Рассмотрим последовательность (ψ_n), где $\psi_1 = \varphi$, $\psi_n = \varphi_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. В каждой точке сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n$ имеем:

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x) + |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varphi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x). \quad (15.15)$$

При этом поскольку $|\varphi(x)| \leqslant |f(x)| + |\varphi(x) - f(x)|$ при всех x, то по теоремам 15.10, 15.14 и 15.15

$$I(\varphi) \leqslant I(f) + I(|\varphi - f|) < \varepsilon + \frac{\delta}{2}.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} I(\psi_n) = I(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} I(\varphi_n) < \varepsilon + \delta. \qquad (15.16)$$

Неравенства (15.15) и (15.16) показывают, что (ψ_n) является $(\delta + \varepsilon)$-последовательностью функции f, что и доказывает $(\delta + \varepsilon)$-малость f.■

Теорема 15.17. *Если $|f(x)| \leqslant g(x)$ при всех x и $I(g) = 0$, то функция f интегрируема и $I(f) = 0$.*

Доказательство. В силу теоремы 15.16 функция g является ε-малой при любом $\varepsilon > 0$. Но тогда (см. теорему 15.2) ε-мала и функция f. А значит, функция $\theta \equiv 0$ является ε-приближением для f при всех $\varepsilon > 0$. Поэтому f интегрируема, причем (см. теорему 15.8) $|I(f)| < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, т. е. $I(f) = 0$.■

Наконец, докажем теорему об интегрируемости произведения.

Теорема 15.18. *Пусть функции f_1 и f_2 интегрируемы и функция f_2 ограничена по модулю числом M_2. Тогда функция $f_1 f_2$ интегрируема, причем $|I(f_1 f_2)| \leqslant M_2 I(|f_1|)$.*

Доказательство. По условию существует такое M_2, что для всех x имеем: $|f_2(x)| \leqslant M_2$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\frac{\varepsilon}{2M_2}$-приближение φ_1 для f_1. Так как ступенчатая функция φ_1 ограничена, то найдется такое M_1, что $|\varphi_1(x)| \leqslant M_1$ для всех x. Возьмем $\frac{\varepsilon}{2M_1}$-приближение φ_2 для f_2. Покажем, что ступенчатая функция $\varphi_1\varphi_2$ является ε-приближением для $f_1 f_2$.

В самом деле, для любого x имеем:

$$|f_1(x)f_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(x)| = |f_1(x)f_2(x) - \varphi_1(x)f_2(x) + \\ + \varphi_1(x)f_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(x)| \leqslant |f_2(x)| \cdot |f_1(x) - \varphi_1(x)| + \\ + |\varphi_1(x)| \cdot |f_2(x) - \varphi_2(x)|.$$

Так как $|\varphi_1(x)| \leqslant M_1$ и $|f_2(x)| \leqslant M_2$, то

$$|f_1(x)f_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(x)| \leqslant M_2 |f_1(x) - \varphi_1(x)| + M_1 |f_2(x) - \varphi_2(x)|.$$

Поскольку $M_2 \cdot \frac{\varepsilon}{2M_2} + M_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2M_1} = \varepsilon$, то, по теоремам 15.2 и 15.3, $\varphi_1\varphi_2$ является ε-приближением для $f_1 f_2$.

Мы доказали, что функция $f_1 f_2$ имеет ε-приближение для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому она интегрируема. Указанное в теореме неравенство вытекает из неравенства $|f_1(x)f_2(x)| \leqslant M_2 |f_1(x)|$ и теорем 15.10 и 15.14.■

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение интеграла Римана. Приведите примеры интегрируемых и неинтегрируемых по Риману функций.

2. Дайте определение ступенчатой функции. Приведите пример такой функции, постройте ее график.

3. Можно ли утверждать, что сумма счетной совокупности ступенчатых функций ступенчата?

4. Дайте определение ε-малой функции. Приведите пример ε-малой функции при $\varepsilon = 1$.

5. Дайте определение ε-приближения функции. Укажите какое-нибудь ε-приближение при $\varepsilon = 0{,}1$ для функции f такой, что $f(x) = x^2$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $f(x) = 0$ вне $[0; 1]$.

6. Из каких чисел состоят множества X_f и Y_f? Укажите хотя бы по одному числу из этих множеств для функции f, указанной в предыдущем вопросе.

7. Какая функция называется интегрируемой по Лебегу на $\mathbf{R}$? Какое число называется ее интегралом?

8. Какая функция называется интегрируемой по Лебегу на отрезке? Можно ли указать функцию, интегрируемую на отрезке по Риману, но не интегрируемую по Лебегу? Можно ли указать функцию, интегрируемую на отрезке по Лебегу, но не интегрируемую по Риману?

9. Какие из свойств интеграла Лебега, доказанных в пункте 7, были доказаны в курсе интегрального исчисления для интеграла Римана?

10. Что называется (m, n)-срезкой функции? Постройте графики срезок f_{mn} для функции $f(x) = x^2 - 4$ при: а) $m = n = 2$; б) $m = n = 5$; в) $m = -\infty$, $n = 4$.

11. Дайте полное доказательство неравенства (15.14).

12. Что можно сказать об интегрируемости срезок интегрируемой функции?

УПРАЖНЕНИЯ[1]

§ 12. № 1, 2, 10, 14, 19 (положить $E = \mathbf{R}$).

§ 16. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

1. Интегрирование сходящихся по Лебегу последовательностей функций. Доказанные выше свойства интеграла Лебега в основном аналогичны соответствующим свойствам интеграла Римана. Сейчас мы изучим вопрос о предельном переходе под знаком интеграла Лебега. Напомним, что такой переход в случае интеграла Римана возможен лишь при весьма жестких ограничительных предположениях.

Назовем последовательность функций (f_n) *сходящейся по Лебегу* к функции f, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое M, что при всех $n \geqslant M$ функция $f - f_n$ является ε-малой.

Теорема 16.1. *Если функции f_n $(n \in \mathbf{N})$ интегрируемы (по Лебегу) и последовательность (f_n) сходится по Лебегу к функции f, то функция f интегрируема, причем*

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n). \qquad (16.1)$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. По условию найдется такое p, что функция $f - f_p$ является ε-малой. Так как функция f_p интегрируема, то у нее есть $\frac{\varepsilon}{2}$-приближение φ_p. Поскольку функ-

[1] В задачнике принята иная трактовка интеграла Лебега. Поэтому при решении указанных задач следует опираться на соответствующий теоретический материал и рассмотренные примеры в этой книге.

ции $f - f_p$ и $f_p - \varphi_p$ являются $\frac{\varepsilon}{2}$-малыми, то, в силу теоремы 15.3, функция $f - \varphi_p = (f - f_p) + (f_p - \varphi_p)$ будет ε-малой. Но тогда ступенчатая функция φ_p является ε-приближением функции f.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-приближение φ_p функции f, и потому эта функция интегрируема. Далее, по условию, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое M, что при $n \geqslant M$ функция $f - f_n$ ε-мала. Но тогда по теореме 15.8 при $n \geqslant M$ выполняется неравенство $|I(f - f_n)| \leqslant \varepsilon$, а значит (см. теорему 15.10), и неравенство

$$|I(f) - I(f_n)| \leqslant \varepsilon. \tag{16.2}$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое M, что при $n \geqslant M$ выполняется неравенство (16.2). Это и значит, что справедливо равенство (16.1).■

Не всегда легко проверить, сходится ли последовательность (f_n) к f по Лебегу. Ниже мы дадим более простые условия выполнения равенства (16.1).

2. Интегрирование функциональных рядов и последовательностей, сходящихся в каждой точке. Докажем вначале одно вспомогательное утверждение.

Лемма 16.1. *Пусть функция f — сумма сходящегося на* $\mathbf{R}$ *ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f$, *составленного из интегрируемых функций, причем* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} I(|f_n|) <$ $< \varepsilon$. *Тогда функция f является* $(\varepsilon + \delta)$-*малой при любом* $\delta > 0$.

Доказательство. Обозначим $I(|f_n|)$ через ε_n, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon$. По теореме 15.16 функция f_n является $\left(\varepsilon_n + \frac{\delta}{2^n}\right)$- малой. Но тогда и $|f_n|$ обладает таким же свойством. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varepsilon_n + \frac{\delta}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^n} < \varepsilon + \delta,$$

то функция $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, в силу теоремы 15.3, будет $(\varepsilon + \delta)$-мала.■

Теорема 16.2. *Пусть функция f — сумма сходящегося на* $\mathbf{R}$ *ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, *составленного из интегрируемых функций, причем числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |I(f_n)|$ *сходится. Тогда функция f интегрируема, причем* $I(f) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} I(f_n)$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Найдется такое число M, что при $n \geqslant M$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} I(|f_k|) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда из леммы 16.1 следует, что функция $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$ является ε-малой. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое M, что при $n \geqslant M$ функция $r_n = f - s_n$, где $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, ε-мала. Поэтому последовательность функций (s_n) сходится по Лебегу к функции f. При этом функции s_n интегрируемы в силу теоремы 15.10. Но тогда, в силу теоремы 16.1, функция f интегрируема и $I(f) = \lim\limits_{n\to\infty} I(s_n)$. А так как (см. теорему 15.10) $I(s_n) = \sum_{k=1}^{n} I(f_k)$, то

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} I(f_k) = \sum_{k=1}^{\infty} I(f_k). \ \blacksquare$$

Пример 16.1. Покажем, что функция f, равная $\frac{1}{2^n}$ на интервалах (их называют интервалами n-го ранга), удаляемых из отрезка на n-м шаге построения множества Кантора, и равная 0 при остальных x, интегрируема, и найдем ее интеграл.

Обозначим через A_n объединение всех (их 2^{n-1}) интервалов n-го ранга и рассмотрим функцию

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \text{ при } x \in A_n, \\ 0 \text{ при } x \notin A_n. \end{cases}$$

Это ступенчатая функция, а значит, она интегрируема, причем (поскольку длина одного интервала n-го ранга равна $\frac{1}{3^n}$)

$$I(f_n) = \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится на всей числовой оси, а f является его суммой, то в силу теоремы 16.2 функция f интегрируема, причем

$$I(f) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{4}.$$

Теорема 16.3. *Пусть функция s — предел сходящейся в каждой точке числовой оси последовательности неотрицательных инте-*

грируемых функций (s_n), *причем последовательность* $(I(s_n))$ *также сходится. Тогда* s *интегрируема, причем* $I(s) = \lim\limits_{n\to\infty} I(s_n)$.

Доказательство. Функция s_n — n-я частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, где $f_1 = s_1$, $f_n = s_n - s_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Так как $\sum\limits_{k=1}^{n} |I(f_k)| = I\left(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right) = I(s_n)$, то f является суммой ряда, удовлетворяющего всем условиям теоремы 16.2. Значит, f интегрируема, причем

$$I(f) = \sum_{k=1}^{\infty} I(f_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} I(f_k) = \lim_{n\to\infty} I\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right) = \lim_{n\to\infty} I(s_n). \quad \blacksquare$$

Теорема 16.3 позволяет установить важную для практических целей зависимость между интегралом от функции и интегралами от ее срезок.

3. Связь интеграла от функции с интегралами от ее срезок.

Теорема 16.4. *Для того чтобы неотрицательная функция* f *была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы были интегрируемы ее срезки* f_{0n} *при любом* $n \in \mathbf{N}$ *и сходилась последовательность* $(I(f_{0n}))$. *В этом случае*

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_{0n}). \tag{16.3}$$

Доказательство. Заметим вначале, что при любом x найдется такое натуральное число M, которое превосходит $f(x)$, а потому $f_{0n}(x) = f(x)$ при $n > M$. Это означает, что последовательность $(f_{0n}(x))$ сходится к $f(x)$ при любом x. Отметим еще одно очевидное свойство срезок: $f_{0n}(x) \leqslant f_{0n+1}(x)$ при любом x, т. е. последовательность (f_{0n}) неубывающая.

Пусть теперь нам известно, что f интегрируема. Тогда, в силу теоремы 15.11, ее срезки f_{0n} интегрируемы. Так как $f_{0n}(x) \leqslant f(x)$ при любом x, то (см. теорему 15.14) $I(f_{0n}) \leqslant I(f)$, т. е. последовательность $(I(f_{0n}))$ ограничена сверху. Из монотонности последовательности срезок вытекает монотонность последовательности $(I(f_{0n}))$. Значит, эта последовательность сходится.

Мы доказали необходимость условий теоремы. Их достаточность непосредственно вытекает из теоремы 16.3, откуда одновременно следует и справедливость равенства (16.3). $\blacksquare$

Наряду с изученными нами срезками f_{mn} (срезки «сверху» и «снизу») можно ввести в рассмотрение и срезки другого типа (как бы «справа» и «слева»):

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |x| \leqslant n, \\ 0, & \text{если } |x| > n. \end{cases}$$

Изучив свойства этих срезок (они аналогичны свойствам срезок f_{mn}), для них можно получить следующий аналог теоремы 16.4:

Теорема 16.5. *Для того чтобы неотрицательная функция* f

была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы были интегрируемы ее срезки f_n при любом $n \in \mathbf{N}$ и сходилась последовательность $(I(f_n))$. При этом

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n).$$

Теоремы 16.4 и 16.5 верны, очевидно, и для интегралов по отрезкам. Они позволяют свести вычисление интеграла от неограниченной функции к интегралам от ограниченных функций или интегралов по всему $\mathbf{R}$ к интегралам по отрезкам. Рассмотрим на примерах, как это делается.

Пример 16.2. Покажем, что функция f такая, что $f(0) = 0$ и $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ при $x \neq 0$, интегрируема на отрезке $[-1; 8]$, и найдем ее интеграл.

Функция принимает значения разных знаков. Поэтому непосредственно воспользоваться доказанными теоремами нельзя. Представим f в виде разности двух неотрицательных функций $f = f^+ - f^-$, где

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geqslant 0, \\ 0, \text{ если } f(x) < 0. \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) \text{ если } f(x) \leqslant 0, \\ 0, \text{ если } f(x) > 0. \end{cases}$$

Функция f^+ задана на ограниченном множестве, но она неограниченная. Рассмотрим ее срезки:

$$f^+_{0n}(x) = \begin{cases} n \text{ при } 0 < x < \frac{1}{n^3}, \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ при } \frac{1}{n^3} \leqslant x \leqslant 8, \\ 0 \text{ при } -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

Эти функции на рассматриваемом отрезке интегрируемы по Риману (как имеющие конечное число точек разрыва), причем

$$\int_{-1}^{8} f^+_{0n}(x)\,dx = \int_{0}^{1/n^3} n\,dx + \int_{1/n^3}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 6 - \frac{1}{2n^2}.$$

По теореме 16.4 получаем, что f^+ интегрируема на рассматриваемом отрезке, причем

$$\int_{-1}^{8} f^+(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(6 - \frac{1}{2n^2}\right) = 6.$$

Аналогично убеждаемся, что функция f^- также интегрируема и ее интеграл по рассматриваемому отрезку равен $\frac{3}{2}$. Тогда f интегрируема как разность интегрируемых функций, и

$$\int_{-1}^{8} f(x)\,dx = \int_{-1}^{8} f^+(x)\,dx - \int_{-1}^{8} f^-(x)\,dx = \frac{9}{2}.$$

Пример 16.3. Покажем, что функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ интегрируема на $\mathbf{R}$, и найдем ее интеграл.

Рассмотрим «боковую» срезку f_n. Она интегрируема по Риману на $[-n; n]$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-n}^{n} \frac{dx}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} n.$$

Из теоремы 16.5 тогда вытекает, что f интегрируема на $\mathbf{R}$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \pi.$$

Заметим, что по Риману функции из рассмотренных примеров проинтегрировать нельзя. Раньше при их интегрировании мы прибегали к особому понятию, обобщающему понятие интеграла Римана, — несобственному интегралу. При интегрировании по Лебегу, как видим, в этом не возникает необходимости.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что означает фраза «последовательность функций (f_n) сходится к функции f по Лебегу»?
2. Сформулируйте достаточное условие, позволяющее интегрировать функциональные ряды.
3. При каких условиях $I(\lim\limits_{n\to\infty} f_n) = \lim\limits_{n\to\infty} I(f_n)$?
4. При каких условиях выполняется равенство (16.3)?
5. Дайте определение «боковых» срезок функции. Постройте график срезки f_n при $n = 4$ для функции $f(x) = x^2$.
6. Какая существует зависимость между интегралом от функции и интегралами от ее «боковых» срезок?

УПРАЖНЕНИЯ

§ 12. № 24, 26, 36—38.

§ 17. МЕРА ЛЕБЕГА

1. Мера Лебега и ее свойства. Длина отрезка Δ оси абсцисс численно равна площади построенного на нем прямоугольника высоты, равной 1, т. е. интегралу от функции

$$\chi_\Delta(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in \Delta, \\ 0 \text{ при } x \notin \Delta. \end{cases}$$

По аналогии назовем числовое множество E *измеримым* по Лебегу, если функция

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in E, \\ 0 \text{ при } x \notin E \end{cases}$$

интегрируема по Лебегу. Такую функцию χ_E будем называть *характеристической функцией множества* E. Число $I(\chi_E)$ назовем *мерой* Лебега множества E и обозначим $|E|$.

Пример 17.1. Ранее (см. с. 99) было показано, что функция Дирихле интегрируема, причем интеграл от нее равен нулю. Эта функция является характеристической для множества рациональных чисел (равна единице для рациональных чисел и нулю для остальных). Значит, множество рациональных чисел измеримо, причем его мера Лебега равна нулю: $|\mathbf{Q}| = 0$.

Точно так же можно убедиться, что измеримо и множество $\mathbf{Q}_\Delta$ рациональных чисел любого отрезка Δ, причем $|\mathbf{Q}_\Delta| = 0$.

Пример 17.2. Функция Кантора k (см. пример 15.4) — характеристическая функция канторова троичного множества F_0. Так как k интегрируема и $I(k) = 0$, то множество F_0 измеримо, причем $|F_0| = 0$.

Поскольку мера множества — обобщение понятия длины отрезка, то естественно ожидать, что мера обладает важнейшими свойствами длины. Убедимся, что это действительно так.

Теорема 17.1. *Мера любого измеримого множества неотрицательна.*

Доказательство. Так как характеристическая функция χ_E измеримого множества E интегрируема и неотрицательна, то, в силу теоремы 15.13, имеем: $|E| = I(\chi_E) \geqslant 0$.■

Теорема 17.2 (свойство монотонности меры). *Если множества A и B измеримы* и $A \subset B$, *то* $|A| \leqslant |B|$.

Доказательство. Так как $A \subset B$, то $\chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$ при любом x, а в таком случае справедливость нашего утверждения вытекает из теоремы 15.14.■

Теорема 17.3 (свойство аддитивности меры). *Если множества $E_1, \ldots, E_n$ измеримы и попарно не пересекаются, то и их объединение E измеримо, причем*

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |E_k|.$$

Доказательство. Обозначим через $\chi_1, \ldots, \chi_n$ характеристические функции множеств $E_1, \ldots, E_n$. По условию эти функции интегрируемы. Значит, интегрируема и сумма этих функций χ. Но множества E_k $(k = 1, \ldots, n)$ попарно не пересекаются. Поэтому $\chi(x) = 1$ при $x \in E$ и $\chi(x) = 0$ при $x \notin E$, т. е. функция χ является характеристической для множества E. Измеримость E доказана. Одновременно из теоремы 15.10 вытекает, что

$$|E| = I(\chi) = \sum_{k=1}^{n} I(\chi_k) = \sum_{k=1}^{n} |E_k|. \quad ■$$

Теорема 17.3 может быть обобщена и на случай счетной совокупности множеств.

Теорема 17.4 (свойство счетной аддитивности меры). *Если множества E_n $(n \in \mathbf{N})$ попарно не пересекаются и измеримы, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |E_n|$ сходится, то множество $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ также измеримо,* *причем*

$$|E| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|.$$

Доказательство. Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n$, где χ_n — характеристическая функция множества E_n. Пусть $x \in E$. Так как множества E_n $(n \in \mathbf{N})$ попарно не пересекаются, то найдется, и притом единственный, номер k такой, что $x \in E_k$. Это означает, что $\chi_k(x) = 1$, $\chi_n(x) = 0$ при $n \neq k$. Отсюда следует, что частичные суммы числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(x)$, начиная с k-й, равны 1. Поэтому рассматриваемый функциональный ряд при таких x сходится к числу 1. Если же $x \notin E$, то x не принадлежит ни одному из множеств E_n, а это означает, что $\chi_k(x) = 0$ при всех k. При таком x наш функциональный ряд сходится к нулю.

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n$ сходится при любом x к характеристической функции χ множества E. Вытекающая из условий теоремы интегрируемость функций χ_k $(k \in \mathbf{N})$ и сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} I(\chi_k)$ позволяет воспользоваться теоремой 16.2. Из нее и следует, что функция χ интегрируема (т. е. E измеримо), причем

$$|E| = I(\chi) = \sum_{k=1}^{\infty} I(\chi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|. \blacksquare$$

Следствие. *Если множества E_n $(n \in \mathbf{N})$ попарно не пересекаются и измеримы, а их объединение $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ограничено, то оно измеримо и $|E| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$.*

Доказательство. Так как множество E ограничено, то оно принадлежит некоторому отрезку F. Но тогда и $\bigcup_{n=1}^{k} E_n \subset F$ при любом k. В силу аддитивности и монотонности меры это означает, что $\sum_{n=1}^{k} |E_n| \leqslant |F|$. Отсюда следует, что неубывающая последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$ ограничена сверху. Значит, этот ряд сходится и справедливость следствия вытекает из предыдущей теоремы. ■

Пример 17.3. Пусть E — множество чисел отрезка $F = [0; 1]$, десятичное разложение которых невозможно без цифры 7. Покажем, что E измеримо, и найдем его меру.

Выясним, как устроено множество E. Для этого отберем сначала множество E_1 тех чисел из F, в десятичном разложении которых первой цифрой после запятой будет непременно цифра 7. Ясно, что E_1 состоит из одного интервала[1] $]0{,}7; 0{,}8[$ длины 0,1. Затем из $F \setminus E_1$ отберем множество E_2 тех чисел, в десятичном разложении которых второй цифрой после запятой будет непременно цифра 7. Ясно, что E_2 состоит из девяти интервалов ($]0{,}07; 0{,}08[$, $]0{,}17; 0{,}18[$, ..., $]0{,}67; 0{,}68[$, $]0{,}87; 0{,}88[$, $]0{,}97; 0{,}98[$) длины 0,01 каждый.

Аналогично обнаружим, что те числа из $F \setminus (E_1 \cup E_2)$, в десятичном разложении которых на третьем месте после запятой окажется непременно цифра 7, составляют множество E_3, являющееся объединением 81 интервала длиной 0,001 каждый, и т. д. Ясно, что $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Так как множества E_n — как объединения конечного числа интервалов — измеримы и попарно не пересекаются, то в силу следствия из теоремы 17.4 множество E измеримо, причем

$$|E| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n| = \frac{1}{10} + \ldots + \frac{9^{n-1}}{10^n} + \ldots = 1.$$

Теорема 17.5. *Объединение, пересечение и разность двух измеримых множеств измеримы.*

Доказательство. Пусть $E = E_1 \cap E_2$, где E_1 и E_2 — измеримые множества. Обозначим через χ_1 и χ_2 характеристические функции множеств E_1 и E_2. Эти функции интегрируемы. Тогда интегрируема и функция $\chi = \chi_1 + \chi_2 - 1$, а значит, интегрируема и ее срезка $\chi_{0\infty}$ (см. с. 110), которая, очевидно, и является характеристической функцией множества E. Измеримость пересечения доказана.

Интегрируема и функция $\chi_1 + \chi_2 - \chi_{0\infty}$, которая, как легко проверить, является характеристической функцией для $E_1 \cup E_2$, откуда и вытекает измеримость объединения. Измеримость разности $E_1 \setminus E_2$ вытекает из того, что ее характеристической функцией является $\chi_1 - \chi_{0\infty}$. ■

Пример 17.4. Множество $\mathbf{I}_E$ иррациональных чисел любого отрезка E измеримо, причем $|\mathbf{I}_E| = |E|$.

В самом деле, $\mathbf{I}_E = E \setminus \mathbf{Q}_E$, где $\mathbf{Q}_E$ — множество рациональных чисел отрезка E. Поэтому измеримость рассматриваемого множества вытекает из теоремы 17.5 в силу измеримости отрезка и множества $\mathbf{Q}_E$ (см. пример 17.1). Так как далее $\mathbf{I}_E \cap \mathbf{Q}_E = \varnothing$, то из теоремы 17.3 следует, что

$$|\mathbf{I}_E| = |E| - |\mathbf{Q}_E| = |E|.$$

[1] Число 0,7 не попадает в E_1, так как его можно записать без использования цифры 7, а именно: $0{,}7 = 0{,}6999\ldots$.

Теорема 17.6. *Если множества* $E_k\ (k \in \mathbf{N})$ *измеримы и меры множеств* $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ *при любом* n *ограничены сверху некоторым числом* M, *то множество* $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ *измеримо.*

Доказательство. Положим $G_1 = F_1$, $G_n = F_n \setminus F_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Из теоремы 17.5 получаем с помощью математической индукции, что все множества F_n измеримы, а потому и все G_n измеримы. Но так как $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, то $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, причем G_k попарно не пересекаются. При этом знакоположительный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |G_k|$ сходится, так как его частичные суммы ограничены сверху числом M:

$$\sum_{k=1}^{n} |G_k| = |\bigcup_{k=1}^{n} G_k| = |F_n| \leqslant M.$$

По теореме 17.4 получаем, что множество E измеримо.■

Теорема 17.7. *Если множества* $E_k\ (k \in \mathbf{N})$ *измеримы, то и множество* $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ *измеримо.*

Доказательство. По теореме 17.5 все множества $T_k = E_1 \setminus E_k$ измеримы. При этом $T_k \subset E_1$, а потому совокупность чисел $|\bigcup_{k=1}^{n} T_k|$ ограничена сверху числом $|E_1|$. По теореме 17.6 получаем, что множество $T = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$ измеримо, а значит, измеримо и множество $E_1 \setminus T$. Но это множество получается удалением из множества E_1 всех элементов, не принадлежащих хотя бы одному из множеств $E_k\ (k \geqslant 2)$, а потому в него входят лишь элементы, принадлежащие всем E_k. Таким образом, измеримое множество $E_1 \setminus T$ совпадает с множеством E, откуда и следует измеримость E.■

Теорема 17.8. *Если множества* $E_n\ (n \in \mathbf{N})$ *измеримы, причем* $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$ *и числовая последовательность* $(|E_n|)$ *ограничена, то множество* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *измеримо, последовательность* $(|E_n|)$ *сходится и* $|E| = \lim_{n\to\infty} |E_n|$.

Доказательство. Сходимость последовательности $(|E_n|)$ вытекает из ее ограниченности и монотонности. Рассмотрим вспомогательные множества: $G_1 = E_1$, $G_n = E_n \setminus E_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Эти множества измеримы, попарно не пересекаются, а их объединение равно E. Так как $\bigcup_{k=1}^{n} G_k = E_n$, то $\bigcup_{k=1}^{n} |G_k| = |E_n|$, а это означает, что $|E_n|$ есть n-я частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |G_k|$. Из ограниченности последовательности ($|E_n|$) вытекает сходимость рассматриваемого ряда. Но в таком случае последовательность множеств (G_n) удовлетворяет всем условиям теоремы 17.4, из которой и вытекает, что E измеримо, причем

$$|E| = \sum_{k=1}^{\infty} |G_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |G_k| = \lim_{n\to\infty} |E_n|. \blacksquare$$

Пример 17.5 Любое ограниченное открытое множество G измеримо. В самом деле, множество G является (см. с. 67) объединением конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов P_i. А так как каждый интервал измерим (его характеристическая функция ступенчата), то измеримость G вытекает из следствия теоремы 17.4.

Пример 17.6. Любое ограниченное замкнутое множество F измеримо. Действительно, пусть $i = \inf F$, $s = \sup F$. Тогда $F = [i; s] \setminus G$, где G открыто. Поэтому F измеримо как разность двух измеримых множеств.

2. Множества меры нуль. В теории интеграла особую роль играют множества нулевой меры. Изучим их свойства.

Пусть E — множество нулевой меры, а F — его подмножество. Тогда выполняются соотношения:

$$|\chi_F(x)| \leqslant \chi_E(x), \quad I(\chi_E) = 0,$$

которые в силу теоремы 15.17 означают, что функция χ_F интегрируема и $I(\chi_F) = 0$. Поэтому справедливо следующее утверждение:

Теорема 17.9. *Всякое подмножество множества меры нуль измеримо, и его мера равна нулю.*

Теорема 17.10. *Объединение конечного или счетного числа множеств нулевой меры измеримо и имеет нулевую меру.*

Доказательство. Пусть $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где $|E_k| = 0$ (случай объединения конечного числа множеств можно свести к рассматриваемому, положив $E_k = \varnothing$ при $k > n$). Положим $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Очевидно, выполняется соотношение

$$0 \leqslant \chi_{F_n}(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}(x)$$

при любом x. А так как, по условию,

$$I\left(\sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} |E_k| = 0,$$

то из теоремы 17.17 вытекает, что F_n измеримо и $|F_n| = 0$. Но $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, причем $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$. Тогда в силу теоремы 17.8 множество E измеримо, причем $|E| = \lim_{n\to\infty} |F_n| = 0. \blacksquare$

Из доказанного утверждения вытекает, в частности, что любое счетное множество — множество меры нуль: оно является объединением счетной совокупности точек, а мера каждой точки равна нулю.

В дальнейшем будем говорить, что некоторое свойство выполняется *почти всюду на множестве* E, если оно выполняется для всех $x \in E$, за исключением, быть может, множества меры нуль. Например, можно сказать, что ступенчатая функция почти всюду (на прямой) непрерывна, функция Дирихле почти всюду (на прямой) равна нулю.

В курсе интегрального исчисления изучались различные условия интегрируемости функции по Риману. Понятие меры Лебега позволяет дать исчерпывающую характеристику класса интегрируемых по Риману функций. Лебег доказал, что *для интегрируемости по Риману функции, ограниченной на отрезке, необходимо и достаточно, чтобы функция была почти всюду непрерывна на этом отрезке.*

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое характеристическая функция множества? Постройте график характеристической функции множества $E =]0; 1] \bigcup]2; 3[$.
2. Какое множество называется измеримым по Лебегу? Какое число называется его мерой? Докажите, что любой интервал $]a; b[$ измерим, и найдите его меру.
3. Может ли оказаться неизмеримым ограниченное множество, которое получается с помощью операций объединения и пересечения, применяемых к счетным семействам открытых или замкнутых множеств?
4. В чем заключается свойство счетной аддитивности меры?
5. Что означает фраза «свойство выполняется почти всюду на множестве E»? Верно ли, что почти всюду на $\mathbf{R}$ а) $\sin x \neq 0$; б) $\sin x > 0$?

УПРАЖНЕНИЯ

§ 11. № 39, 46—47, 50—55.

§ 18. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА ПО ИЗМЕРИМОМУ В СМЫСЛЕ ЛЕБЕГА МНОЖЕСТВУ

1. Интеграл по измеримому множеству. Понятие меры позволяет ввести интегрирование не только по всей числовой оси или отрезку, но и по любому измеримому множеству.

Пусть функция f определена на измеримом множестве E. Рассмотрим вспомогательную функцию f_E такую, что $f_E(x) = f(x)$ при $x \in E$ и $f_E(x) = 0$ при $x \notin E$. Если функция f_E интегрируема (на $\mathbf{R}$), то будем считать, что f *интегрируема на* E, и будем полагать по определению: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_E(x)dx = \int\limits_E f(x)dx$. Вместо записи $\int\limits_E f(x)dx$ будем употреблять также более короткую: $I_E(f)$.

Теорема 18.1. *Если функция f интегрируема на* $\mathbf{R}$, *то она интегрируема и на любом измеримом множестве.*

Доказательство. В данном случае $f_E = f\chi_E$. Так как f интегрируема на $\mathbf{R}$ по условию, а χ_E ограничена, то f_E интегрируема на $\mathbf{R}$ в силу теоремы 15.18. А это, по определению, и означает, что f интегрируема на E. ■

С помощью доказанной теоремы легко проверить, что *все установленные выше свойства интеграла* (по всей числовой оси) *справедливы и для интегралов по измеримому множеству* E. Докажем некоторые дополнительные свойства интегралов по измеримому множеству.

Теорема 18.2. *Пусть множество E представляет собой объединение попарно непересекающихся измеримых множеств:* $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$. *Функция f тогда и только тогда интегрируема на E, когда она интегрируема на каждом из множеств E_k. При этом справедливо соотношение*

$$I_E(f) = \sum_{k=1}^{n} I_{E_k}(f).$$

Доказательство. Пусть f интегрируема на E. Это означает, что функция f_E интегрируема на $\mathbf{R}$, откуда в силу теоремы 18.1 следует, что f_E интегрируема на E_k. Это же, в свою очередь, означает, что функция $(f_E)_{E_k}$ интегрируема на $\mathbf{R}$. Но $(f_E)_{E_k} = f_{E_k}$. Поэтому f_{E_k} интегрируема на $\mathbf{R}$, т. е. f интегрируема на E_k.

Пусть теперь известно, что f интегрируема на E_k $(k = 1, \ldots, n)$. Так как множества E_k попарно не пересекаются, то $f_E = \sum\limits_{k=1}^{n} f_{E_k}$. Отсюда, в силу теоремы 15.10, вытекает интегрируемость f_E на $\mathbf{R}$, что и является условием интегрируемости f на E. Из этого же соотношения в силу той же теоремы получаем:

$$I_E(f) = I(f_E) = \sum_{k=1}^{n} I(f_{E_k}) = \sum_{k=1}^{n} I_{E_k}(f). \blacksquare$$

Теорема 18.3. *Пусть функция f интегрируема и неотрицательна на измеримом множестве E. Тогда множество E_a тех x из E, при которых $f(x) > a$, измеримо при любом $a > 0$, причем выполняется следующее неравенство* (неравенство Чебышева):

$$|E_a| \leqslant \frac{1}{a} I_E(f).$$

Доказательство. Так как функция f_E, в силу условия, интегрируема на $\mathbf{R}$, то интегрируемы (на $\mathbf{R}$) и ее срезки $\varphi_a =$

$= (f_E)_{0a}$ и $\varphi_n = (f_E)_{0a+\frac{1}{n}}$ при любом $n \in \mathbf{N}$. Значит, интегрируемы и функции $\psi_n = \frac{1}{n}(\varphi_n - \varphi_a)$. Так как $f(x) \geqslant 0$, то

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} f_E(x), & \text{если } f_E(x) \leqslant a, \\ a, & \text{если } f_E(x) > a, \end{cases} \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} f_E(x), & \text{если } f_E(x) \leqslant a + \frac{1}{n}, \\ a + \frac{1}{n}, & \text{если } f_E(x) > a + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Отсюда видно, что

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f_E(x) \leqslant a, \\ n(f_E(x) - a), & \text{если } a < f_E(x) \leqslant a + \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{если } f_E(x) > a + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Замечаем, что функциональная последовательность (ψ_n) в каждой точке x сходится к характеристической функции множества E_a.

Легко увидеть, что последовательность (ψ_n) обладает следующими свойствами:

$$\psi_n(x) \leqslant \psi_{n+1}(x), \quad 0 \leqslant \psi_n(x) \leqslant \chi_E(x)$$

при любом x. Отсюда вытекает, что последовательность $(I(\psi_n))$ неубывающая и ограниченная сверху $(I(\psi_n) \leqslant I(\chi_E) = |E|)$, а потому она сходящаяся. Но в таком случае функциональная последовательность (ψ_n) удовлетворяет всем условиям теоремы 16.3, откуда и следует, что ее предел χ_{E_a} — функция интегрируемая. Измеримость множества E_a доказана.

Имеем далее:

$$f_E(x) \geqslant f_E(x)\chi_{E_a}(x) \geqslant a\,\chi_{E_a}(x)$$

при любом x. Отсюда в силу теоремы 15.14 получаем:

$$I_E(f) = I(f_E) \geqslant I(a\chi_{E_a}) = aI(\chi_{E_a}) = a\,|E_a|,$$

откуда и вытекает неравенство Чебышева. ■

2. Эквивалентные функции. Опираясь на понятие «почти всюду», разобьем множество функций на классы.

Функции f и g называются *эквивалентными* (пишут: $f \sim g$) на множестве E, если они определены на этом множестве и принимают почти всюду на E одинаковые значения. Например, функция Дирихле эквивалентна нулю (как на всем $\mathbf{R}$, так и на любом его подмножестве).

По самому определению отношение эквивалентности функций обладает свойствами рефлексивности и симметричности. Покажем, что оно транзитивно.

Пусть $f \sim g$ и $g \sim h$ на E. Обозначим через E_1 множество, на котором $f(x) \neq g(x)$, а через E_2 — множество, на котором $h(x) \neq$

$\neq g(x)$. Тогда $|E_1| = |E_2| = 0$. Если $x \notin G = E_1 \cup E_2$, то $f(x) = g(x)$ и $g(x) = h(x)$, а потому $f(x) = h(x)$. Значит, $f(x) \neq h(x)$ лишь на некотором подмножестве F множества G. Но множество G имеет меру нуль как объединение двух множеств нулевой меры (см. теорему 17.10), а значит (см. теорему 17.9), и $|F| = 0$. Отсюда и следует, что $f \sim h$.

Таким образом, введенное отношение эквивалентности обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности и потому задает разбиение совокупности всех функций (определенных на данном множестве) на непересекающиеся классы, состоящие из эквивалентных друг другу функций.

Рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве свойства транзитивности, показывают, что *суммы двух пар эквивалентных функций также эквивалентны.*

Пример 18.1. Никакая непрерывная в точке $x = 0$ функция не может быть эквивалентна функции

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ 1 \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

В самом деле, пусть f — произвольная непрерывная в точке $x = 0$ функция, и пусть $f(0) = a$. Рассмотрим интервал $I = \left]a - \frac{1}{3};\ a + \frac{1}{3}\right[$. В силу непрерывности f найдется такое $\delta > 0$, что $f(x) \in I$ для всех $x \in]-\delta;\ \delta[$. Но так как $|I| = \frac{2}{3}$, то хотя бы одно из чисел 0 и 1 не принадлежит интервалу I. Это означает, что функция f на интервале $]-\delta;\ \delta[$ ни разу не принимает хотя бы одного из значений 0 и 1. А в таком случае либо на интервале $]-\delta;\ 0[$, либо на интервале $]0;\ \delta[$ функции f и g принимают различные значения, и потому они не эквивалентны.

Теорема 18.4. *Если функция f эквивалентна нулю на измеримом множестве E, то она интегрируема на E, причем $I_E(f) = 0$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда функция f ограничена, т. е. существует такое n, что $|f(x)| \leqslant n$ при всех x из E. Но тогда $|f(x)| \leqslant n\chi_F(x)$, где F — множество, на котором $f(x) \neq 0$. А так как

$$I_E(n\chi_F) = I\ (n\chi_F) = n\,|F| = 0,$$

то справедливость теоремы вытекает из теоремы 15:17 (которая, как мы уже отмечали, верна не только для $\mathbf{R}$, но и для любого измеримого множества).

Пусть теперь функция f не ограничена. Так как она эквивалентна нулю, то, в силу теоремы 17.9, эквивалентна нулю и неотрицательная функция f^+ (см. пример 16.2), а следовательно, эквивалентны нулю и все ее срезки f^+_{0n}. Но срезки ограничены, а значит, по только что доказанному, они интегрируемы, причем $I_E(f^+_{0n}) = 0$. В таком случае из теоремы 16.4 вытекает, что функция f^+ интегрируема и

$$I_E(f^+) = \lim_{n\to\infty} I\ (f^+_{0n}) = 0.$$

Точно так же доказывается, что неотрицательная функция f^- интегрируема и $I_E(f^-) = 0$. Но $f = f^+ - f^-$, откуда, в силу теоремы 15.10, и вытекает, что f интегрируема, а $I_E(f) = 0$.■

Теорема 18.5. *Функция f, эквивалентная интегрируемой на измеримом множестве E функции g, интегрируема и $I_E(f) = I_E(g)$.*

Доказательство. Так как функция $\varphi = f - g$ эквивалентна нулю, а $f = \varphi + g$, то, в силу теорем 18.4 и 15.10, заключаем, что f интегрируема и

$$I_E(f) = I_E(\varphi + g) = I_E(\varphi) + I_E(g) = I_E(g).\blacksquare$$

Пример 18.2. Функция $f(x) = x^2 - x^2 k(x)$, где k — функция Кантора (см. пример 17.2), интегрируема на отрезке $[0; 1]$, так как на нем $f \sim x^2$ (k почти всюду на $[0; 1]$ обращается в нуль), причем

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Теорема 18.5 показывает, что значения функции на множестве нулевой меры не влияют на величину интеграла. Это обстоятельство позволяет в несколько ином, более общем виде, формулировать многие важнейшие свойства интеграла. Убедимся, например, в справедливости такого обобщения теоремы 15.14:

Теорема 18.6. *Если $f(x) \leqslant g(x)$ почти всюду на измеримом множестве E и обе функции на этом множестве интегрируемы, то $I_E(f) \leqslant I_E(g)$.*

Доказательство. Обозначим через F множество, на котором $f(x) \leqslant g(x)$, и рассмотрим функции φ и ψ такие, что $\varphi(x) = f(x)$ и $\psi(x) = g(x)$ на F и $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ на $E \setminus F$. Тогда $\varphi \sim f$, $\psi \sim g$ на E и $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ всюду на E. Поэтому, в силу теорем 18.5 и 15.14, имеем: $I_E(f) = I_E(\varphi) \leqslant I_E(\psi) = I_E(g)$.■

Для неотрицательных функций справедлива теорема, обратная теореме 18.4:

Теорема 18.7. *Если интеграл по измеримому множеству E от неотрицательной функции f равен нулю, то f эквивалентна нулю на E.*

Доказательство. Обозначим через F множество, на котором $f(x) > 0$, а через F_n — множество, на котором $f(x) > \frac{1}{n}$. Ясно, что $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, причем $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$. Все множества F_n измеримы, и, в силу неравенства Чебышева,

$$0 \leqslant |F_n| \leqslant n\, I_E(f) = 0.$$

Поэтому $|F_n| = 0$ при любом n. Из полученных соотношений, в силу теоремы 17.8, вытекает, что F измеримо, причем $|F| = \lim_{n\to\infty} |F_n| = 0$.■

Докажем, наконец, важные обобщения теорем 16.2 и 16.3 о предельном переходе под знаком интеграла.

Теорема 18.8. *Пусть (f_n) — неубывающая последовательность неотрицательных интегрируемых на измеримом множестве E функций такая, что $I(f_n) \leqslant K$ при всех n. Тогда (f_n) почти всюду на E сходится к некоторой интегрируемой на E функции f, причем*

$$\lim_{n\to\infty} I_E(f_n) = I_E(f). \tag{18.1}$$

Доказательство. Из монотонности последовательности (f_n) вытекает, что при любом x из E числовая последовательность $(f_n(x))$ либо сходится к некоторому числу, либо стремится к $+\infty$. Зададим функцию f так: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, если этот предел существует, и $f(x) = 0$ при остальных x.

Введем в рассмотрение следующие подмножества множества E: F — множество таких x, где $f_n(x) \to +\infty$; $F_m^{(n)}$ — множество таких x, где $f_n(x) > m$ $(m, n \in \mathbf{N})$; $F_m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_m^{(n)}$. В силу неравенства Чебышева $|F_m^{(n)}| \leqslant \frac{K}{m}$ при любом n. А так как $F_m^{(1)} \subset F_m^{(2)} \subset \ldots$ $\ldots \subset F_m^{(n)} \subset \ldots$, то (см. теорему 17.8) множество F_m измеримо, причем

$$|F_m| = \lim_{n\to\infty} |F_m^{(n)}| \leqslant \frac{K}{m} \tag{18.2}$$

при любом $m \in \mathbf{N}$.

Замечаем далее, что $F = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_m$. Значит, F измеримо как пересечение счетной совокупности измеримых множеств. А так как $F \subset F_m$ при любом m, то, в силу монотонности меры и неравенства (18.2), получаем: $|F| \leqslant \frac{K}{m}$ при любом $m \in \mathbf{N}$. Отсюда и вытекает, что $|F| = 0$. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства равенства (18.1) рассмотрим вспомогательную последовательность (φ_n), где $\varphi_n(x) = f_n(x)$ при $x \in E \setminus F$ и $\varphi_n(x) = 0$ при $x \in F$. Так как $|F| = 0$, то $\varphi_n \sim f_n$ на E, а потому φ_n интегрируема на E, причем $I_E(\varphi_n) = I_E(f_n) \leqslant K$. Последовательность (φ_n) сходится к функции f в каждой точке $x \in E$ и удовлетворяет всем условиям теоремы 16.3, из которой и следует, что f интегрируема на E, причем

$$I_E(f) = \lim_{n\to\infty} I_E(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} I_E(f_n). \quad \blacksquare$$

Теорема 18.9. *Если функции f_n $(n \in \mathbf{N})$ интегрируемы на E, а числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} I_E(|f_n|)$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$*

почти всюду на E сходится к некоторой интегрируемой на E функции f, причем

$$I_E(f) = \sum_{n=1}^{\infty} I_E(f_n). \tag{18.3}$$

Доказательство. Представим функции f_n в таком виде: $f_n = f_n^+ - f_n^-$. Так как $0 \leqslant f_n^+(x) \leqslant |f_n(x)|$ при любом $x \in E$ и функции f_n^+ интегрируемы (как срезки) на E, то из сходимости указанного в условии числового ряда вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} I_E(f_n^+)$.

В таком случае последовательность частичных сумм (s_n) ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^+$ удовлетворяет всем условиям теоремы 18.8. Значит, эта последовательность почти всюду на E сходится к некоторой интегрируемой функции f^+, причем

$$I_E(f^+) = \lim_{n\to\infty} I_E(s_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} I_E(f_k^+) = \sum_{k=1}^{\infty} I_E(f_k^+).$$

Точно так же убеждаемся, что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^-$ почти всюду на E сходится к некоторой интегрируемой функции f^-, причем $I_E(f^-) = \sum_{k=1}^{\infty} I_E(f_k^-)$. Но $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k^+ - f_k^-)$. Из доказанного ясно, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ почти всюду на E сходится к функции $f = f^+ - f^-$ и выполняется равенство (18.3). ■

Замечание. При доказательстве теоремы 18.9 мы установили — и это нам пригодится в дальнейшем, — что, если последовательность (f_k) удовлетворяет условиям этой теоремы, то функции $s_n^+ = \sum_{k=1}^{n} f_k^+$ и $s_n^- = \sum_{k=1}^{n} f_k^-$ удовлетворяют всем условиям теоремы 18.8; причем последовательности (s_n^+), (s_n^-) и (s_n) почти всюду на E сходятся соответственно к интегрируемым функциям f^+, f^- и $f = f^+ - f^-$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что значит, что функция f интегрируема на измеримом множестве E? Какое число называется интегралом от f по E? Может ли интегрируемая на $\mathbf{R}$ функция оказаться неинтегрируемой на некотором измеримом множестве?

2. Докажите, что свойство аддитивности интеграла остается справедливым и для интегралов по измеримому множеству.

3. Дайте определение эквивалентных функций. Приведите примеры эквивалентных и неэквивалентных функций.

4. Докажите, что суммы двух пар эквивалентных функций эквивалентны.

5. Запишите неравенство Чебышева; проверьте его справедливость для функции $f(x) = x^2$ при $a = 4$, $E = [-3; 4]$.

6. Что можно сказать об интегралах от эквивалентных функций?

7. Какие из рассмотренных в § 15 свойств интеграла можно усилить с помощью слов «почти всюду»? Докажите такой усиленный вариант какого-либо свойства.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 12. № 10, 14, 15—17, 21, 27, 29—34.

§ 19. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА $\mathbf{L}^1$ И $\mathbf{L}^2$

1. Пространство $\mathbf{L}^1\,[a;\,b]$. В этом параграфе договоримся рассматривать функции, определенные и интегрируемые по Лебегу на произвольном, но в дальнейших рассуждениях фиксированном отрезке $[a;\,b]$. При этом будем рассматривать не отдельные функции, а классы эквивалентных функций. Обозначим множество таких классов (с указанной ниже нормой) через $\mathbf{L}^1\,[a;\,b]$ или короче: $\mathbf{L}^1$ (поскольку отрезок у нас фиксирован).

Определим в $\mathbf{L}^1$ операции сложения классов и умножения класса на число, а также норму класса. Назовем суммой двух классов $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ эквивалентных функций класс $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$, содержащий функцию $f+g$, где f — функция класса $\boldsymbol{f}$, а g — функция класса $\boldsymbol{g}$. Из сказанного выше (см. с. 121) о двух парах эквивалентных функций ясно, что класс $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ не зависит от выбора представителей f и g. Аналогично определяется произведение $\lambda\boldsymbol{f}$ класса $\boldsymbol{f}$ на число λ.

Нормой класса $\boldsymbol{f}$ назовем число $\|\boldsymbol{f}\| = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, где f — одна из функций класса $\boldsymbol{f}$. Несложно показать (предоставляем это читателю), что при таком определении линейных операций и нормы $\mathbf{L}^1$ превращается в линейное нормированное пространство. Нейтральный элемент θ этого пространства — класс функций, эквивалентных нулю.

Заметим, что если бы в качестве элементов пространства мы рассматривали не классы эквивалентных функций, а отдельные функции, то $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ мы не смогли бы назвать нормой функции, поскольку из того, что $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx = 0$, не следует, что $f \equiv 0$ (а следует лишь, что $f \sim 0$), и, значит, не выполнялось бы первая аксиома нормы.

Поскольку все операции над классами сводятся к операциям над входящими в них функциями, будем для краткости класс $\boldsymbol{f}$ обозначать через f. Другими словами, будем считать, что пространство $\mathbf{L}^1$ состоит из ф у н к ц и й, отождествляя при этом все эквивалентные между собой функции.

Точно так же, как выход в более широкое пространство $\mathbf{R}$ позволяет легко обнаружить неполноту пространства $\mathbf{Q}$, так и введение пространства $\mathbf{L}^1$ сразу же обнаруживает неполноту пространства $\mathbf{C}_1$.

Действительно, положим для простоты $\mathbf{L}^1 = \mathbf{L}^1[-1; 1]$, $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1[-1; 1]$ и рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -1 \leqslant x < 0, \\ nx, & \text{при } \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{при } \quad \frac{1}{n} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Эта последовательность сходится в пространстве $\mathbf{L}^1$ к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 \text{ при } \quad 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

поскольку

$$\|f - f_n\| = \int_{-1}^{1} \left| f(x) - f_n(x) \right| dx = \int_{0}^{\frac{1}{n}} (1 - nx)\, dx = \frac{1}{2n},$$

а $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2n} = 0$. В силу единственности предела (в метрическом пространстве $\mathbf{L}^1$) никакая функция, не эквивалентная функции f, не может быть пределом последовательности (f_n). Отсюда вытекает (см. пример 18.1), что последовательность (f_n) не может сходиться по рассматриваемой норме ни к какой непрерывной функции. Другими словами, последовательность (f_n) из пространства $\mathbf{C}_1$ не имеет в этом пространстве предела. А так как последовательность (f_n) фундаментальна в $\mathbf{C}_1$ (см. пример 13.4), то этим и доказано, что *пространство* $\mathbf{C}_1$ *неполно.*

Докажем одну из важнейших теорем, справедливых для интегрируемых по Лебегу функций.

Теорема 19.1. *Пространство* $\mathbf{L}^1$ *полное.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (s_n) — фундаментальная последовательность функций из $\mathbf{L}^1$. Из нее можно (см. теорему 13.6) выделить такую подпоследовательность (s_{n_k}), что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| s_{n_{k+1}} - s_{n_k} \| = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \left| s_{n_{k+1}}(x) - s_{n_k}(x) \right| dx$$

сходится. Положив $f_1 = s_{n_1}$, $f_k = s_{n_k} - s_{n_{k-1}}$ при $k \geqslant 2$, получаем, что сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b |f_k(x)|\, dx$. В таком случае, в силу теоремы

18.9, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ (а также ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|$) почти всюду на $[a; b]$ сходится к некоторой интегрируемой функции f. Но

$$\sum_{i=1}^{k} f_k = s_1 + \sum_{i=2}^{k} (s_{n_k} - s_{n_{k-1}}) = s_{n_k}.$$

Значит, последовательность (s_{n_k}) почти всюду на $[a; b]$ сходится к функции $f \in \mathbf{L}^1$.

Покажем теперь, что (s_{n_k}) сходится к f не только почти всюду, но и по норме. Для этого зафиксируем произвольное $k \in \mathbf{N}$ и рассмотрим ряды:

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} f_i, \quad \sum_{i=k+1}^{\infty} |f_i|, \quad \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_a^b |f_i(x)|\,dx.$$

Из сказанного выше ясно, что первые два ряда почти всюду сходятся к некоторым интегрируемым функциям (обозначим их соответственно через T_k и R_k), а третий ряд сходится к некоторому числу r_k; при этом $\int\limits_a^b R_k(x)dx = r_k$ (в силу теоремы 18.9). Но так как $|T_k(x)| \leqslant R_k(x)$ почти всюду, то

$$\int_a^b |T_k(x)|\,dx \leqslant \int_a^b R_k(x)\,dx = r_k,$$

а потому

$$0 \leqslant \|f - s_{n_k}\| = \int_a^b |f(x) - s_{n_k}(x)|\,dx = \int_a^b |T_k(x)|\,dx \leqslant r_k.$$

Но r_k есть k-й остаточный член сходящегося ряда. Поэтому $r_k \to 0$ при $k \to \infty$, а значит,

$$\lim_{k\to\infty} \|f - s_{n_k}\| = 0,$$

что и доказывает сходимость (s_{n_k}) к f по норме.

В силу теоремы 13.4 из сходимости подпоследовательности фундаментальной последовательности к f следует, что и сама последовательность (s_n) сходится в $\mathbf{L}^1$ к f. Итак, всякая фундаментальная последовательность из $\mathbf{L}^1$ сходится в $\mathbf{L}^1$, т. е. $\mathbf{L}^1$ полно. ■

2. Пространство $\mathbf{L}^2[a; b]$. Рассмотрим теперь множество интегрируемых на отрезке $[a; b]$ *функций, имеющих интегрируемый квадрат* (т. е. таких интегрируемых функций f, что и функция f^2 интегрируема), снова отождествляя эквивалентные между собой функции. Такое множество (с указанной ниже нормой) обозначается $\mathbf{L}^2[a; b]$ или просто $\mathbf{L}^2$, если ясно, что отрезок в соответствующих рассуждениях фиксирован.

Докажем, что $\mathbf{L}^2$ является предгильбертовым пространством относительно обычных алгебраических операций и скалярного произведения:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx. \tag{19.1}$$

Для этого нужно доказать, что функция fg интегрируема для любых f и g из $\mathbf{L}^2$, а также, что $\mathbf{L}^2$ является линейным пространством, причем выполнены аксиомы скалярного произведения.

Справедливо равенство

$$fg = (f^+ - f^-)(g^+ - g^-) = f^+g^+ - f^+g^- - f^-g^+ + f^-g^-.$$

Значит, доказав, что произведение двух неотрицательных функций из $\mathbf{L}^2$ интегрируемо, мы докажем это для любых функций из $\mathbf{L}^2$.

Итак, пусть f и g — неотрицательные функции из $\mathbf{L}^2$. Рассмотрим срезки g_{0n} функции g. Так как функции f и g_{0n} интегрируемы, а функция g_{0n} ограничена, то fg_{0n} интегрируема в силу теоремы 15.18. При этом для любых n и x имеем:

$$f(x)\, g_{0n}(x) \leqslant f(x)\, g_{0n+1}(x),$$

$$f(x)\, g_{0n}(x) \leqslant f(x)\, g(x) \leqslant \frac{1}{2}(f^2(x) + g^2(x)).$$

Так как функции f^2 и g^2 интегрируемы, то неубывающая последовательность $\left(\int_a^b f(x)\, g_{0n}(x)\, dx\right)$ ограничена сверху числом $\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\, dx + \frac{1}{2}\int_a^b g^2(x)\, dx$, а потому эта последовательность сходится. Применяя теорему 16.3, получаем, что и функция

$$f(x)\, g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x)\, g_{0n}(x)$$

интегрируема. Отсюда, как было сказано выше, следует, что функция fg интегрируема при любых f и g из $\mathbf{L}^2$.

Тем самым доказано, что скалярное произведение (19.1) определено для любых функций f и g из $\mathbf{L}^2$.

Пусть f и g — функции из пространства $\mathbf{L}^2$. Это означает, что функции f, g, f^2 и g^2 интегрируемы. Но тогда интегрируема и функция $(f+g)^2$, поскольку $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$.

Поскольку очевидно, что $\lambda f \in \mathbf{L}^2$, если $f \in \mathbf{L}^2$, то $\mathbf{L}^2$ является линейным пространством.

Легко доказать, что выполняются все аксиомы скалярного произведения. Например, $(f, f) = 0$ в силу теоремы 18.7 лишь для функций, почти всюду равных нулю. Но все такие функции мы договорились отождествлять с нулем. Остальные аксиомы также непосредственно следуют из свойств интеграла Лебега.

Таким образом, мы доказали, что $\mathbf{L}^2$ *является предгильбертовым пространством*. Отсюда вытекает, в частности, что для любых функций f и g из $\mathbf{L}^2$ выполняется неравенство $|(f, g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$, т. е.

$$\left(\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\, dx \cdot \int_a^b g^2(x)\, dx.$$

Полагая в этом неравенстве $f \equiv 1$, $g = |f|$, получаем, что для любой функции $f \in \mathbf{L}^2$

$$\left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right)^2 \leqslant (b-a) \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{19.2}$$

Если обозначить норму функции f в $\mathbf{L}^1$ через $\|f\|_1$, а в $\mathbf{L}^2$ — через $\|f\|_2$, то из (19.2) следует, что

$$\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\, \|f\|_2. \tag{19.3}$$

Докажем теперь, что $\mathbf{L}^2$ является гильбертовым пространством.

Теорема 19.2. *Пространство* $\mathbf{L}^2$ *полное.*

Доказательство. Пусть (s_n) — фундаментальная последовательность функций из $\mathbf{L}^2$. Из неравенства (19.3) следует, что эта последовательность фундаментальна и в $\mathbf{L}^1$. Но тогда, как это было показано при доказательстве теоремы 19.1, из рассматриваемой последовательности можно извлечь такую подпоследовательность (s_{n_k}), что функции $f_1 = s_{n_1}$, $f_k = s_{n_k} - s_{n_{k-1}}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ удовлетворяют условиям теоремы 18.9. А это, в свою очередь, означает (см. замечание на с. 124), что последовательность $(s_{n_k}^+)$ удовлетворяет условиям теоремы 18.8. Поэтому

$$s_{n_k}^+(x) \leqslant s_{n_{k+1}}^+(x) \tag{19.4}$$

и $(s_{n_k}^+)$ почти всюду сходится к интегрируемой функции f^+.

Так как для любых функций φ и ψ из $\mathbf{L}^2$ справедливо неравенство $\|\varphi^+ - \psi^+\|_2 \leqslant \|\varphi - \psi\|_2$, то последовательность $(s_{n_k}^+)$ фундаментальна в $\mathbf{L}^2$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое K_1, что при $k, t > K_1$ имеем: $\|s_{n_t}^+ - s_{n_k}^+\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда вытекает, что

$$\int_a^b (s_{n_t}^+(x) - s_{n_k}^+(x))^2\, dx < \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{19.5}$$

Как видно из неравенства (19.4), функции $\varphi_t = (s_{n_t}^+ - s_{n_k}^+)^2$, $t > k > K_1$ удовлетворяют условиям теоремы 18.8. Поэтому предел $(f^+ - s_{n_k})^2$ последовательности (φ_t) (в смысле сходимости почти всюду) — функция интегрируемая. Другими словами, это означает, что функция $\varphi^+ = f^+ - s^+_{n_k}$ принадлежит пространству $\mathbf{L}^2$. Отсюда вытекает, что и функция f^+ входит в $\mathbf{L}^2$ (как сумма функций φ^+ и $s^+_{n_k}$ из $\mathbf{L}^2$).

Одновременно из теоремы 18.8 следует, что при $t > K_1$

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b \varphi_t(x)\,dx = \int_a^b (\lim_{t\to\infty}\varphi_t(x))\,dx = \int_a^b (f^+(x) - s_{n_k}(x))^2\,dx,$$

а в этом случае из неравенства (19.5) вытекает, что при $t > K_1$

$$\int_a^b (f^+(x) - s^+_{n_k}(x))^2\,dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Это означает, что при $k > K_1$

$$\left\| f^+ - s^+_{n_k} \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Точно так же можно убедиться (обозначения см. в замечании на с. 124), что $f^- \in \mathbf{L}^2$ и при $k > K_2$ выполняется неравенство

$$\| f^- - s^-_{n_k} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда функция $f = f^+ - f^-$ входит в $\mathbf{L}^2$, причем существует такое K, что при $t > K$ имеем:

$$\| f - s_{n_k} \| = \| (f^+ - f^-) + (s^+_{n_k} - s^-_{n_k}) \| = \| (f^+ - s^+_{n_k}) + (s^-_{n_k} - f^-) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| f^+ - s^+_{n_k} \| + \| f^- - s^-_{n_k} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что последовательность (s_{n_k}) сходится в пространстве $\mathbf{L}^2$ к функции $f \in \mathbf{L}^2$. Завершается доказательство теоремы точно так же, как и доказательство предыдущей теоремы.■

Поскольку $\mathbf{L}^2$ — полное предгильбертово пространство, то оно гильбертово. Мы построили пример гильбертова пространства, состоящего из функций.

Нам понадобятся в дальнейшем и пространства $\mathbf{L}^2$, состоящие из комплекснозначных функций. Для них скалярное произведение определяется формулой

$$(f,\ g) = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx,$$

а норма — формулой

$$\| f \| = \left(\int_a^b | f(x) |^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Они также полны, т. е. являются гильбертовыми.

3. Всюду плотные подмножества в пространствах $\mathbf{L}^1$ и $\mathbf{L}^2$. Во многих вопросах, связанных с применением пространств $\mathbf{L}^1$ и $\mathbf{L}^2$, приходится опираться на различные всюду плотные подмножества в этих пространствах. Поэтому важно знать такие подмножества.

Ниже мы снова будем для краткости через $\mathbf{L}^1$ и $\mathbf{L}^2$ обозначать пространства $\mathbf{L}^1 [a; b]$ и $\mathbf{L}^2 [a; b]$, считая отрезок $[a; b]$ фиксированным.

Теорема 19.3. *Подпространство S ступенчатых функций всюду плотно в пространстве* $\mathbf{L}^1$.

Доказательство. По определению интеграла Лебега для любой функции f из $\mathbf{L}^1$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая ступенчатая функция φ, что функция $f - \varphi$, а следовательно и функция $|f - \varphi|$, является ε-малой. Но тогда, по теореме 15.8,

$$\|f - \varphi\| = \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx \leqslant \varepsilon.$$

Это означает, что в любой окрестности функции f из $\mathbf{L}^1$ есть ступенчатые функции, а потому множество ступенчатых функций всюду плотно в $\mathbf{L}^1$.■

Теорема 19.4. *Подпространство непрерывных функций всюду плотно в пространстве* $\mathbf{L}^1$.

Доказательство. В силу теоремы 9.7 достаточно доказать, что для любой ступенчатой функции φ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывная функция ψ, что $\|\varphi - \psi\| < \varepsilon$. Зададим такую функцию графически (рис. 24). При этом $\delta > 0$ возьмем настолько малым, чтобы сумма площадей всех заштрихованных треугольников оказалась меньше ε. Эта сумма и равна

$$\int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)|\, dx, \text{ т. е. } \|\varphi - \psi\|.\blacksquare$$

Отметим, что на самом деле мы доказали более сильное утверждение:

Теорема 19.5. *В пространстве* $\mathbf{L}^1$ *всюду плотно подпространство кусочно-линейных непрерывных функций.*

Теорема 19.6. *В пространстве* $\mathbf{L}^1$ *всюду плотно подпространство функций, имеющих непрерывную производную.*

Доказательство. В силу теоремы 19.5 достаточно показать, что для любой кусочно-линейной непрерывной функции ψ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция ω, имеющая непрерывную производную, что

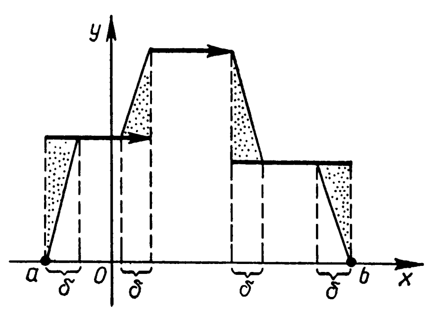

Рис. 24

$\|\omega - \varphi\| < \varepsilon$. Чтобы получить график такой функции, достаточно «сгладить» график функции ψ, проведя сопрягающие окружности достаточно малого радиуса.■

Отметим, что если вместо дуг окружностей взять переходные кривые с непрерывно меняющейся кривизной, то можно добиться, чтобы сглаженная функция оказалась бесконечно дифференцируемой. Поэтому в $\mathbf{L}^1$ *всюду плотно подпространство бесконечно дифференцируемых функций.*

Отметим еще одно утверждение, которое понадобится нам в следующем параграфе:

Теорема 19.7. *В пространстве* $\mathbf{L}^1$ *всюду плотно подпространство функций* φ, *имеющих на* $[a; b]$ *непрерывную вторую производную и таких, что* $\varphi(a) = \varphi(b)$, $\varphi'(a) = \varphi'(b)$ *и* $\varphi''(a) = \varphi''(b)$.

Эта теорема также доказывается соответствующим сглаживанием кусочно-линейных непрерывных функций.

Перейдем теперь к изучению всюду плотных подмножеств пространства $\mathbf{L}^2$.

Теорема 19.8. *Подпространство B ограниченных функций всюду плотно в* $\mathbf{L}^2$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathbf{L}^2$. Из определения срезки f_{nn} следует, что

$$(f(x) - f_{nn}(x))\, f_{nn}(x) \geqslant 0 \tag{19.6}$$

при $x \in [a; b]$. В самом деле, если $-n \leqslant f(x) \leqslant n$, то $f(x) - f_{nn}(x) = 0$; если $f(x) > n$, то $(f(x) - f_{nn}(x))\, f_{nn}(x) = (f(x) - n)\, n > 0$, а если $f(x) < -n$, то $(f(x) - f_{nn}(x))\, f_{nn}(x) = (f(x) + n)(-n) > 0$.

Из неравенства (19.6) следует, что

$$(f(x) - f_{nn}(x))^2 \leqslant f^2(x) - f_{nn}^2(x). \tag{19.7}$$

Так как $(f^2)_{0m} = (f_{nn})^2$, где $m = n^2$, и

$$\int_a^b f^2(x)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_a^b (f^2)_{0m}(x)\, dx,$$

то

$$\int_a^b f^2(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_{nn}(x))^2\, dx,$$

и потому

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f^2(x) - f_{nn}^2(x))\, dx = 0.$$

Из неравенства (19.7) следует, что тогда и

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(x) - f_{nn}(x))^2\, dx = 0,$$

т. е., что в пространстве $\mathbf{L}^2$ последовательность ограниченных функций (f_{nn}) сходится к функции f. ■

Пусть f и g — две ограниченные функции из $\mathbf{L}^2$. Тогда существует такое число M, что $|f(x)| \leqslant M$ и $|g(x)| \leqslant M$, а потому $|f(x) - g(x)| \leqslant 2M$ при всех x из $[a; b]$. В таком случае

$$\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \leqslant 2M \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

или

$$\| f - g \|_2 \leqslant \sqrt{2M \| f - g \|_1}.$$

Поэтому, если последовательность (φ_n) сходится к f по норме $\mathbf{L}^1$, причем функции f и φ_n ($n \in \mathbf{N}$) ограничены числом M, то эта последовательность сходится к f и по норме $\mathbf{L}^2$. Отсюда, в силу теоремы 9.7, заключаем, что теоремы 19.3 — 19.7 остаются справедливыми при замене в них $\mathbf{L}^1$ на $\mathbf{L}^2$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Из каких элементов состоит пространство $\mathbf{L}^1[a; b]$? Что является нулем этого пространства?
2. Запишите формулу для нормы в пространстве $\mathbf{L}^1[a; b]$, докажите выполнимость всех аксиом нормы.
3. Дайте определение пространства $\mathbf{L}^2[a; b]$; докажите, что формула (19.1) действительно задает скалярное произведение.
4. Докажите неравенство $\| \varphi^+ - \psi^+ \|_2 \leqslant \| \varphi - \psi \|_2$.
5. Укажите несколько подпространств, всюду плотных в пространстве $\mathbf{L}^1$.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 12. № 39—42.

§ 20. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ БАЗИСЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Задача о наилучшем приближении. В различных разделах математики и ее приложений встречается следующая задача: дано линейное нормированное пространство L, в нем выбрано конечное число элементов (векторов) $(e_1, \ldots, e_n)$; требуется для каждого вектора a из L подобрать такие числа[1] $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что вектор $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ отклоняется от a меньше, чем всякий другой вектор вида $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$, т. е. $\| a - (\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) \|$ принимает наименьшее значение, если $\lambda_1 = \alpha_1, \ldots, \lambda_n = \alpha_n$. Совокупность всех векторов вида $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — произвольные числа, образует линейное конечномерное подпространство

[1] Ради конкретности будем полагать, что речь идет о действительных числах. При переходе к случаю комплексных чисел усложнения несущественны.

L^n в L. В геометрических терминах данную задачу можно перефразировать так: для заданной точки a из L найти в подпространстве L^n точку, ближайшую к точке a.

Эта задача упрощается, если L — гильбертово пространство, а векторы $e_1, \ldots, e_n$ попарно ортогональны (см. § 7, п. 3). Будем также предполагать, что $\|e_k\| = 1$ при $k = 1, \ldots, n$. Всякую конечную или счетную систему $(e_1, \ldots, e_n, \ldots)$ попарно ортогональных векторов гильбертова пространства L, нормы которых равны единице, называют *ортонормированной системой*.

В случае гильбертова пространства решение интересующей нас задачи дается следующей теоремой:

Теорема 20.1. *Если* $(e_1, \ldots, e_n)$ — *ортонормированная система векторов в гильбертовом пространстве* L, *и* $a \in L$, *то отклонение* $d = \|a - (\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n)\|$ *будет наименьшим, если в качестве коэффициентов* λ_k *выбрать числа*

$$\alpha_k = (a, e_k) \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{20.1}$$

Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называют *коэффициентами Фурье*[1] вектора a относительно ортонормированной системы векторов $(e_1, \ldots, e_n)$.

Доказательство. Так как норма каждого вектора — неотрицательное число, то отклонение d принимает наименьшее значение тогда и только тогда, когда величина $d^2 = \|a - (\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n)\|^2$ минимальна. Но

$$d^2 = (a - \lambda_1 e_1 - \ldots - \lambda_n e_n,\ a - \lambda_1 e_1 - \ldots - \lambda_n e_n) = (a, a) - $$
$$- 2\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a, e_k) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \lambda_k (e_i, e_k).$$

Учитывая, что $(e_i, e_k) = 0$ при $i \neq k$, $(e_i, e_k) = 1$ при $i = k$ и $(a, e_k) = \alpha_k$, получаем:

$$d^2 = (a, a) - 2\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = (a, a) + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^2 - 2\lambda_k \alpha_k + \alpha_k^2) -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|a\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \alpha_k)^2.$$

Отсюда видно, что величина d^2 имеет наименьшее значение, если $\lambda_k = \alpha_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. ■

Следствие 1. *Наименьшее отклонение* $d_{\min}$ *вектора a гильбертова пространства* L *от подпространства* L^n, *порожденного ортонормированной системой векторов* $(e_1, \ldots, e_n)$, *задается формулой*

$$d_{\min}^2 = \|a\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2. \tag{20.2}$$

---

[1] Жан Батист Жозеф Фурье (1768—1830) — выдающийся французский математик. Наиболее известна его работа «Аналитическая теория тепла», в которой заложены основы теории тригонометрических рядов.

Иначе говоря, расстояние точки $a \in L$ от подпространства L^n, порожденного ортонормированной системой векторов $(e_1, \ldots, e_n)$, задается формулой (20.2).

Следствие 2. *Если a — какой-либо вектор из гильбертова пространства L, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — коэффициенты Фурье вектора a относительно ортонормированной системы векторов $(e_1, \ldots, e_n)$, то*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \leqslant \|a\|^2. \tag{20.3}$$

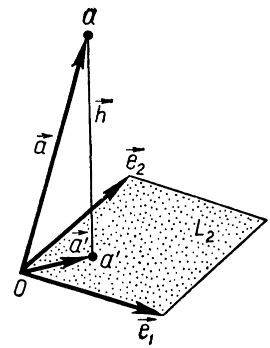

Рис. 25

Неравенство (20.3) называют *неравенством Бесселя*[1].

Легко проверить, что вектор $h = a - (\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n)$ ортогонален подпространству L^n в том смысле, что он ортогонален каждому вектору из L^n. Вектор h можно по аналогии с $\mathbf{R}_2^3$ толковать как «перпендикуляр, опущенный из точки a на подпространство L^n». Что касается вектора $a' = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, то его в таком случае можно (рис. 25) толковать как «проекцию» вектора a на подпространство L^n. Поскольку число $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2}$ — это норма вектора a', то неравенство Бесселя выражает тот интуитивно очевидный факт, что норма проекции a' вектора a на подпространство L^n меньше нормы самого вектора a; исключение составляет лишь тот случай, когда вектор a лежит в подпространстве L^n (тогда в (20.3) имеет место равенство). Теорема 20.1 на геометрическом языке утверждает, что ближайшей к точке a из L точкой подпространства L^n является основание перпендикуляра, опущенного из точки a на L^n.

2. Ортонормированные базисы. Из курса алгебры мы знаем, что во всяком n-мерном векторном пространстве E^n существует базис, т. е. такая система векторов $(e_1, \ldots, e_n)$, что всякий вектор a из E^n можно представить в виде

$$a = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n, \tag{20.4}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — некоторые числа. В случае бесконечномерных векторных пространств (по самому их определению) такой конеч-

[1] Фридрих Вильгельм Бессель (1784—1846) — выдающийся немецкий астроном, широко использовавший математические методы (метод наименьших квадратов, теорию вероятностей и др.) при обработке результатов астрономических наблюдений.

ной системы векторов не существует. Однако если рассматривать бесконечномерные нормированные векторные пространства L, то в них наряду с конечными суммами (20.4) можно рассматривать бесконечные суммы, т. е. ряды (поскольку можно говорить о пределе частичных сумм), и потому естественно поставить вопрос о существовании *счетного базиса* — такой последовательности векторов (e_n) из L, что любой вектор a из L допускает представление: $a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$. Не во всяком бесконечномерном нормированном пространстве имеется такой базис. Пространства со счетным базисом называют *счетномерными*.

Наибольший интерес для практических приложений имеет вопрос об отыскании счетного ортонормированного базиса в гильбертовых пространствах. Рассмотрением этого вопроса мы сейчас и займемся.

Пример 20.1. Выберем в $\mathbf{R}_2^{\infty}$ векторы вида $e_k=(0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ (единица на k-м месте, а остальные координаты вектора e_k — нули). Покажем, что система векторов (e_k), $k \in \mathbf{N}$, образует ортонормированный базис в $\mathbf{R}_2^{\infty}$.

Так как в $\mathbf{R}_2^{\infty}$ скалярное произведение векторов $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ определяется по формуле

$$(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n,$$

то ясно, что $(e_i, e_k) = 0$ при $i \neq k$ и $\|e_k\|^2 = (e_k, e_k) = 1$. Поэтому (e_k) — ортонормированная система.

Далее, пусть $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ — произвольный вектор из $\mathbf{R}_2^{\infty}$. Тогда, по определению $\mathbf{R}_2^{\infty}$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходится и поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер m, что $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k^2 < \varepsilon^2$. Так как

$$a - (a_1 e_1 + \ldots + a_m e_m) = (0, \ldots, 0, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots),$$

то

$$\left\| a - \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k^2 < \varepsilon^2.$$

Это и означает, что (e_k) — ортонормированный базис.

Конечно, не всегда удается так просто, как в примере 20.1, убедиться, что данная ортонормированная система образует базис. Выведем два критерия, которые часто упрощают подобное исследование. Предварительно обобщим неравенство Бесселя (20.3).

Пусть (e_k) — счетная ортонормированная система векторов в гильбертовом пространстве L. Возьмем первые n векторов этой системы. Тогда при любом выборе вектора a в L справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \leqslant \|a\|^2,$$

где, напомним, $\alpha_k = (a, e_k)$. Так как n — произвольный номер, то отсюда видно, что все частичные суммы знакоположительного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ ограничены сверху числом $\|a\|^2$. Следовательно, этот ряд сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \leqslant \|a\|^2. \tag{20.5}$$

Это неравенство называется неравенством Бесселя для бесконечной ортонормированной системы функций.

Теорема 20.2 (критерий В. А. Стеклова[1]). *Для того чтобы счетная ортонормированная система векторов (e_k) образовывала базис в гильбертовом пространстве L, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты Фурье $\alpha_k \doteq (a, e_k)$ каждого вектора a из L удовлетворяли равенству*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \|a\|^2. \tag{20.6}$$

При этом $a = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$.

Доказательство. Пусть (20.6) выполняется для каждого вектора $a \in L$. Обозначим через d_n расстояние от a до линейного пространства L^n, натянутого на векторы $e_1, \ldots, e_n$. Так как, в силу (17.2),

$$d_n^2 = \|a\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2, \tag{20.7}$$

то, в силу (20.6), имеем:

$$\lim_{n\to\infty} d_n^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2 = 0.$$

Но это и означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ сходится к вектору a. Поэтому система векторов (e_k) образует базис в L.

---

[1] Владимир Андреевич Стеклов (1864—1926) — выдающийся русский математик. Его научные исследования относятся преимущественно к математической физике. Имя Стеклова носит институт математики Академии наук СССР, созданный по его инициативе.

Обратно, пусть векторы (e_k) образуют базис в L. Тогда для произвольного вектора a и любого $\varepsilon > 0$ найдутся номер n и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такие, что $\|a - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\| < \varepsilon$. Так как вектор $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ принадлежит подпространству L^n, натянутому на векторы $(e_1, \ldots, e_n)$, а число $d_n = \|a - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|$ — наименьшее из отклонений вектора a от векторов подпространства L^n, то подавно $d_n < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$, а следовательно, в силу (20.7), выполняется (20.6). ■

Равенство (20.6) является бесконечномерным аналогом теоремы Пифагора.

Теорема 20.3. *Для того чтобы счетная ортонормированная система векторов (e_k) гильбертова пространства L была базисом в этом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы лишь нулевой вектор θ в L был ортогонален всем векторам системы (e_k).*

Наглядный смысл этой теоремы состоит в том, что ортонормированная система образует базис в том и только том случае, когда ее нельзя дополнить ни одним вектором, не нарушая условия ортонормированности (свойство *полноты* ортонормированной системы). Например, орты осей координат $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ в трехмерном евклидовом пространстве составляют ортонормированную систему, но не образуют базис в $\mathbf{R}_2^3$, так как существует ненулевой вектор $\boldsymbol{k}$, ортогональный им обоим.

Доказательство. Пусть (e_k) — ортонормированный базис в L и пусть некоторый вектор $a \in L$ ортогонален всем векторам e_k, т. е. $\alpha_k = (a, e_k) = 0$ при $k \in \mathbf{N}$. Так как система (e_k) — базис для L, то должно выполняться равенство (20.6), поэтому $\|a\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = 0$. Но тогда $a = \theta$.

Обратно, пусть в L нет ненулевых векторов, ортогональных всем векторам системы (e_k). Выберем в L произвольный вектор. Пусть α_k — его коэффициенты Фурье. В силу неравенства Бесселя ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ сходится. Отсюда следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется (согласно критерию Коши) такой номер N, что при $n > N$, $m > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_k^2 < \varepsilon^2.$$

Но тогда, в силу ортонормированности системы (e_k), имеем:

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_k e_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_k e_k \right) = \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_k^2 < \varepsilon^2.$$

Это означает, что последовательность (s_n) частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ фундаментальна. Но гильбертово пространство L полно. Поэтому последовательность (s_n) сходится в L к некоторому вектору b.

Покажем, что $b = a$. В самом деле, для каждого $n \in \mathbf{N}$ функция (x, e_n) в L непрерывна (см. теорему 11.2), и поэтому $(b, e_n) = = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k e_k, e_n) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k (e_k, e_n) = \alpha_n$. Тогда для всех $n \in \mathbf{N}$ имеем: $(a - b, e_n) = (a, e_n) - (b, e_n) = \alpha_n - \alpha_n = 0$, т. е. вектор $a - b$ ортогонален всем векторам системы (e_n). Это же, в силу условия, означает, что $a - b = \theta$ или $a = b$. Поэтому

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k. \blacksquare$$

Критерий Стеклова позволяет доказать следующую важную теорему:

Теорема 20.4. *Всякое гильбертово пространство со счетным базисом изометрично пространству* $\mathbf{R}_2^{\infty}$.

Доказательство. Пусть (e_k) — счетный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве L. Тогда каждый вектор $a \in L$ можно представить в виде $a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, где α_k — коэффициенты Фурье. Поставим в соответствие вектору a последовательность $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$. В силу критерия Стеклова все такие последовательности принадлежат $\mathbf{R}_2^{\infty}$, причем любая последовательность из $\mathbf{R}_2^{\infty}$ является образом одного из элементов $a \in L$. При этом выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \|a\|^2,$$

показывающее, что $\|a\|_L = \|\alpha\|_{R_2^{\infty}}$, т. е. что отображение $a \to \alpha$ изометрично. $\blacksquare$

3. Тригонометрический базис в пространстве $\mathbf{L}^2[0; 2\pi]$. Рассмотрим систему функций $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ $(n \in \mathbf{Z})$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}^2[0; 2\pi]$ комплекснозначных функций. По определению скалярного произведения в этом пространстве

$$(e_k,\ e_m) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ikx}\cdot e^{-imx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-m)x}\,dx.$$

Если $k \neq m$, то

$$(e_k,\ e_m) = \frac{1}{2\pi i\,(k-m)}\,e^{i(k-m)x}\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

так как $e^{2\pi(k-m)i} = e^0 = 1$. Если же $k = m$, то

$$(e_k,\ e_m) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} dx = 1.$$

Значит, рассматриваемая система функций ортонормирована.

Для приложений существенно то, что *эта система образует в* $\mathbf{L}^2\,[0;\,2\pi]$ *базис*, т. е. для любой функции $f \in \mathbf{L}^2\,[0;\,2\pi]$ найдутся такие числа λ_k $(k \in \mathbf{Z})$, что ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ сходится к f в пространстве $\mathbf{L}^2\,[0;\,2\pi]$.

Докажем это.

Ранее в курсе анализа было доказано, что ряд Фурье $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k e_k(x)$ функции f, имеющей на отрезке $[0;\,2\pi]$ непрерывную вторую производную, сходится на этом отрезке равномерно к функции f. Отсюда, очевидно, следует, что последовательность (s_n) частичных сумм этого ряда сходится к f и по норме пространства $\mathbf{L}^2\,[0;\,2\pi]$. Это означает (см. теорему 9.6), что линейные комбинации системы функций (e_k) всюду плотны в подпространстве $D^2\,[0;\,2\,\pi]$ пространства $\mathbf{L}^2$ ($[0;\,2\,\pi]$, состоящем из дважды непрерывно дифференцируемых функций. А так как D^2 всюду плотно в $\mathbf{L}^2$ (см. с. 132—133), то из теоремы 9.7 следует, что линейные комбинации системы (e_k) всюду плотны и в $\mathbf{L}^2$.

Пусть g — функция из $\mathbf{L}^2\,[0;\,2\,\pi]$, отрогональная всем функциям системы (e_k). Тогда g ортогональна и любой линейной комбинации функций этой системы. А так как эти линейные комбинации всюду плотны в $\mathbf{L}^2\,[0;\,2\,\pi]$, то существует (см. теорему 9.6) их последовательность (s_n), сходящаяся к g. В силу непрерывности скалярного произведения получаем

$$(g,\ g) = \lim_{n\to\infty}(s_n,\ g) = 0,$$

т. е. $g = \theta$. Значит, в силу теоремы 20.3, система (e_k) образует базис в $\mathbf{L}^2\,[0;\,2\pi]$.■

Из доказанного, в силу теоремы Стеклова, вытекает, что всякая функция из $\mathbf{L}^2\,[0;\,2\,\pi]$ может быть представлена в виде ряда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k e^{ikx}$$

(напомним, что равенство понимается в том смысле, что f есть предел частичных сумм ряда в смысле сходимости по норме), где α_k — коэффициент Фурье функции f:

$$\alpha_k = (f,\ e_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$

Таким образом, мы видим, что теория абстрактных метрических пространств делает более полными наши знания и о такой классической области математики, как теория тригонометрических рядов. Это обстоятельство еще раз подтверждает справедливость известной мысли В. И. Ленина о том, что «... *все* научные (правильные, серьезные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, *п о л н е е*»[1].

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как ставится задача о наилучшем приближении? Как она решается в гильбертовом пространстве?

2. Что означает равенство $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ в линейном нормированном пространстве?

3. Дайте определение счетного базиса в линейном нормированном пространстве. Что такое счетный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве?

4. Какие имеются критерии того, что счетная ортонормированная система векторов образует в гильбертовом пространстве базис?

5. Объясните, почему равенство (20.6) является обобщением теоремы Пифагора.

6. Укажите счетный ортонормированный базис в пространстве $\mathbf{L}^2\,[0;\ 2\pi]$.

---

[1] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 152.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Наум Яковлевич Виленкин,

Марк Беневич Балк,

Виктор Алексеевич Петров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

МОЩНОСТЬ
МЕТРИКА
ИНТЕГРАЛ

Редактор *Л. В. Привезенцева*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *М. Е. Тургенева*
Корректор *Р. Б. Штутман*

Сдано в набор 06. 04. 79. Подписано к печати 20. 03. 80. $60\times90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 3. Гарнит. литер. Печать высокая. Усл. печ. л. 9,0. Уч.-изд. л. 8,39. Тираж 27 000 экз. Заказ № 92. Цена 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.