Н. Я. Виленкин

Рассказы о множествах

Н. Я. Виленкин

Рассказы о множествах

3-е издание

МЦНМО
2005

УДК 510.2
ББК 22.12
В44

Виленкин Н. Я.

В44 Рассказы о множествах. 3-е издание. — М.: МЦНМО, 2005. — 150 с.

ISBN 5-94057-036-4

В 70-х годах XIX века немецкий математик Г. Кантор создал новую область математики — теорию бесконечных множеств. Через несколько десятилетий почти вся математика была перестроена на теоретико-множественной основе. Понятия теории множеств отражают наиболее общие свойства математических объектов.

Обычно теорию множеств излагают в учебниках для университетов. В настоящей книге в популярной форме описываются основные понятия и результаты теории множеств.

Книга предназначена для учащихся старших классов средней школы, интересующихся математикой, а также для широких кругов читателей, желающих узнать, что такое теория множеств.

ББК 22.12

Виленкин Наум Яковлевич

РАССКАЗЫ О МНОЖЕСТВАХ

Дизайн обложки Соповой У. В.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано к печати 03.11.2003 г.
Формат $60 \times 88/16$. Печать офсетная. Объем 9.5 печ. л. Доп. тираж 2000 экз.
Заказ № .

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

ISBN 5-94057-036-4

Предисловие ко второму изданию

О теории множеств мне довелось услышать, когда я учился в восьмом классе. Однажды я попал на лекцию, которую прочел для московских школьников И. М. Гельфанд — тогда начинающий доцент, а ныне член-корреспондент АН СССР[1]. В течение двух часов он рассказывал нам о совершенно невероятных вещах: что натуральных чисел столько же, сколько и четных, рациональных столько же, сколько и натуральных, а точек на отрезке столько же, сколько и в квадрате.

Знакомство с теорией множеств было продолжено в годы обучения на механико-математическом факультете МГУ. Наряду с лекциями и семинарами там существовал своеобразный метод обучения, о котором, возможно, и не подозревали профессора и доценты. После занятий (а иногда — что уж греха таить — и во время не слишком интересных лекций) студенты бродили по коридорам старого здания на Моховой и обсуждали друг с другом интересные задачи, неожиданные примеры и остроумные доказательства. Именно в этих разговорах студенты-первокурсники узнавали от своих старших товарищей, как строить кривую, проходящую через все точки квадрата, или функцию, не имеющую нигде производной, и т. д.

Разумеется, объяснения давались, как говорится, «на пальцах», и идти сдавать экзамен, прослушав эти объяснения, было бы непростительным легкомыслием. Но ведь об экзамене не было и речи — по учебному плану курс теории функций действительного переменного надо было сдавать еще через два года. Но как же потом, при слушании лекций и сдаче экзаменов, помогала «коридорная» подготовка! По поводу каждой теоремы вспоминались интересные задачи, которые приходилось решать раньше, остроумные сравнения, наглядные образы.

Мне захотелось рассказать читателю о теории множеств примерно в том же стиле, в каком я сам изучал ее, проходя «коридорный» курс обучения. Поэтому основное внимание будет обращено на то, чтобы сделать ясной постановку задач, рассказать о неожиданных и удивительных примерах, сплошь и рядом противоречащих

[1]В настоящее время — академик РАН. — *Прим. ред.*

наивному представлению, которыми так богата теория функций действительного переменного. И если, прочтя эту книгу, школьник старших классов или студент первых курсов университета или пединститута почувствует желание более глубоко изучить теорию множеств, теорию функций действительного переменного, автор будет считать, что его цель достигнута.

* * *

Из серьезных курсов можно было бы рекомендовать следующие:[1]

1. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948.

2. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа, Изд-во МГУ, ч. 1, 1954, ч. 2, 1960; Наука, 1981.

3. *Лузин Н. Н.* Теория функций действительного переменного, Учпедгиз, 1948.

4. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1950; Наука, 1974.

5. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств, ОНТИ, 1937.

6. *Куратовский К.*, *Мостовский А.* Теория множеств, «Мир», 1970.

Много интересных задач по теории множеств собрано в книге Ю. С. Очана «Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного» («Просвещение», 1965).

По некоторым вопросам, затронутым здесь, много интересных сведений содержится в книге А. С. Пархоменко «Что такое линия» (ГИТТЛ, 1954). В конце книги приведен ряд задач по теории функций действительного переменного, решение которых будет полезно читателю. Отметим еще, что некоторые более трудные места можно при первом чтении пропустить без ущерба для понимания дальнейшего. Эти места мы отметили звездочками.

[1] Список литературы обновлён. — *Прим. ред.*

Глава I. Множества и действия над ними

Что такое множество

В этой главе будет рассказано о том, что такое множества и какие действия можно выполнять над ними. К сожалению, основному понятию теории — понятию множества — нельзя дать строгого определения. Разумеется, можно сказать, что множество — это «совокупность», «собрание», «ансамбль», «коллекция», «семейство», «система», «класс» и т. д. Однако все это было бы не математическим определением, а скорее злоупотреблением словарным богатством русского языка.

Для того чтобы определить какое-либо понятие, нужно прежде всего указать, частным случаем какого более общего понятия оно является. Для понятия множества сделать это невозможно, потому что более общего понятия, чем множество, в математике нет.

Поэтому вместо того, чтобы дать определение понятию множества, мы проиллюстрируем его на примерах.

Часто приходится говорить о нескольких вещах, объединенных некоторым общим признаком. Так, можно говорить о множестве всех стульев в комнате, о множестве всех атомов на Юпитере, о множестве всех клеток человеческого тела, о множестве всех картофелин в данном мешке, о множестве всех рыб в океане, о множестве всех квадратов на плоскости, о множестве всех точек на данной окружности и т. д.

Предметы, составляющие данное множество, называются его *элементами.* Для того чтобы указать, что данное множество A состоит из элементов x, y, ..., z, обычно пишут

$$A = \{x,\ y,\ \dots,\ z\}.$$

Например, множество дней недели состоит из элементов {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье}, множество месяцев — из элементов {январь, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь}, множество арифметических действий — из элементов {сложение, вычитание, умножение, деление}, а множество корней квадратного уравнения $x^2 - 2x - 24 = 0$ — из двух чисел: -4 и 6, то есть имеет вид $\{-4,\ 6\}$.

Фигурные скобки в обозначении множества показывают, что элементы объединены в одно целое — множество A. Тот факт, что элемент x принадлежит множеству A, записывают с помощью знака $\in$ так: $x \in A$. Если же данный элемент x не принадлежит множеству A, то пишут $x \overline{\in} A$. Например, если A означает множество всех четных натуральных чисел, то $6 \in A$, а $3 \overline{\in} A$. Если A — множество всех месяцев в году, то май $\in A$, а среда $\overline{\in} A$.

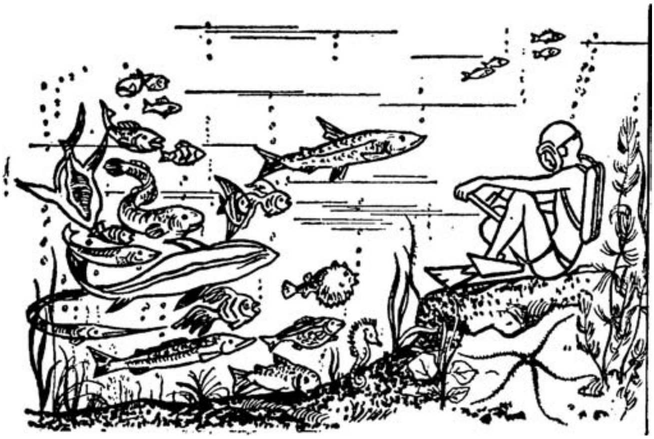
Таким образом, когда мы говорим о множестве, то объединяем некоторые предметы в одно целое, а именно в множество, элементами которого они являются. Основатель теории множеств Георг Кантор подчеркнул это следующими словами: «*Множество есть многое, мыслимое нами как единое*». Собственно говоря, элементы множества могут и не быть реально существующими предметами — в богословских трактатах всерьез изучаются взаимоотношения в множествах архангелов, злых духов и т. д.

Для того чтобы наглядно представить себе понятие множества, академик Н. Н. Лузин предложил следующий образ. Представим прозрачную непроницаемую оболочку, нечто вроде плотно закрытого прозрачного мешка. Предположим, что внутри этой оболочки заключены все элементы данного множества A, и что кроме них внутри оболочки никаких других предметов не находится. Эта оболочка с предметами x, находящимися внутри нее, и может служить образом множества A, составленного из элементов x. Сама же эта прозрачная оболочка, охватывающая все элементы (и ничего другого кроме них), довольно хорошо изображает тот акт объединения элементов x, в результате которого создается множество A.

Если множество содержит конечное число элементов, то его называют *конечным*, а если в нем бесконечно много элементов, то *бесконечным*. Так, множество деревьев в лесу конечно, а множество точек на окружности бесконечно.

Как задают множества

Возможны различные способы задания множества. Один из них состоит в том, что дается полный список элементов, входящих в множество. Например, множество учеников данного класса определяется их списком в классном журнале, множество всех стран на земном шаре — их списком в географическом атласе, множество всех костей в человеческом скелете — их списком в учебнике анатомии.



Великая перепись рыб

Но этот способ применим только к конечным множествам, да и то далеко не ко всем. Например, хотя множество всех рыб в океане и конечно, вряд ли его можно задать списком. А уж бесконечные множества никак нельзя определять с помощью списка; попробуйте, например, составить список всех натуральных чисел или список всех точек окружности — ясно, что составление этого списка никогда не закончится.

В тех случаях, когда множество нельзя задать при помощи списка, его задают путем указания некоторого характеристического свойства — такого свойства, что элементы множества им обладают, а все остальное на свете не обладает. Например, мы можем говорить о множестве всех натуральных чисел. Тогда ясно, что число 73 принадлежит этому множеству, а число $\frac{3}{4}$ или крокодил не принадлежат. Точно так же $\sqrt{2}$ и планета Сатурн не принадлежат множеству всех рациональных чисел, а $\frac{7}{15}$ принадлежит этому множеству.

В геометрии часто приходится иметь дело с множествами точек, заданными теми или иными характеристическими свойствами. Обычно, следуя древним традициям, множество точек с данным характеристическим свойством в геометрии называют *геометрическим местом точек.* Например, говорят так: «Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки этой плоскости». Это означает, что множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки этой плоскости, совпадает с множеством точек некоторой окружности.

Крокодил не входит в множество натуральных чисел

Задание множеств их характеристическими свойствами иногда приводит к осложнениям. Может случиться, что два различных характеристических свойства задают одно и то же множество, то есть всякий элемент, обладающий одним свойством, обладает и другим, и обратно. Например, множество толстокожих сухопутных животных, имеющих два бивня, совпадает с множеством толстокожих животных, имеющих хобот, — это множество слонов.

В геометрии свойство «точка M равноудалена от сторон угла AOB» задает то же точечное множество, что и свойство «угол AOM равен углу MOB» (здесь рассматриваются точки плоскости, лежащие внутри угла AOB, см. рис. 1). А в арифметике свойство «целое число делится на 2» задает то же множество, что и свойство «последняя цифра целого числа делится на 2».

Иногда бывает трудно доказать равносильность двух характеристических свойств. Попробуйте, например, доказать, что следующие свойства задают одно и то же множество точек, лежащих в одной плоскости с треугольником ABC:

а) основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны треугольника ABC, лежат на одной прямой;

б) точка M лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC (рис. 2).

(Совпадение этих множеств составляет содержание так называемой теоремы Симсона и теоремы, обратной ей.)

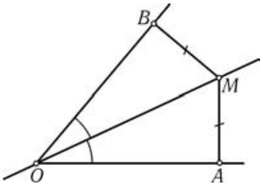


Рис. 1

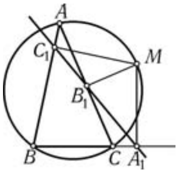


Рис. 2

Вообще, во многих математических теоремах речь идет о совпадении двух множеств, например множества равносторонних треугольников с множеством равноугольных треугольников, множества описанных четырехугольников с множеством четырехугольников, суммы противоположных сторон которых равны, и т. д. В некоторых случаях проблема совпадения или различия двух множеств, заданных своими характеристическими свойствами, не решена до сих пор. Так, до сих пор неизвестно, совпадает ли множество $\{1093, 3511\}$ с множеством простых чисел n, для которых $2^n - 2$ делится на n^2.

Еще большие трудности при задании множеств их характеристическими свойствами возникают из-за недостаточной четкости обыденного языка, неоднозначности человеческой речи. Большое число промежуточных форм затрудняет разграничение объектов на принадлежащие и не принадлежащие данному множеству. Пусть, например, речь идет о множестве всех деревьев на земном шаре. В первую очередь здесь надо определить, идет ли речь обо всех деревьях, которые существовали и будут существовать на Земле, или о деревьях, существовавших в течение некоторого фиксированного промежутка времени (например, с 1 мая по 1 сентября 1965 года). Но тогда возникает вопрос, как быть с деревьями, спиленными за этот промежуток времени? Кроме того, существует целый ряд промежуточных форм между деревьями и другими растениями, и надо решить, какие из них относятся к множеству деревьев, а какие нет.

Даже множество планет Солнечной системы определено не вполне однозначно. Наряду с большими планетами (Меркурием, Венерой, Землей, Марсом, Юпитером, Сатурном, Ураном, Нептуном и Плутоном) вокруг Солнца обращается около 1600 малых планет, так называемых астероидов. Поперечники некоторых таких планет (Цереры, Паллады, Юноны и других) измеряются сотнями километров, но есть и астероиды, поперечник которых не превышает 1 км. По мере улучшения методов наблюдения астрономы будут открывать все более и более мелкие планеты, и наконец возникнет вопрос, где же кончаются планеты и начинаются метеориты и космическая пыль. Аналогичное затруднение было у одного героя Бабеля, вопившего после налета банды Бени Крика: «Где начинается полиция и где кончается Беня?» Как известно, мудрые одесситы отвечали ему, что полиция кончается именно там, где начинается Беня Крик. Но вряд ли фраза «Планеты кончаются именно там, где начинаются метеориты» устроит кого-либо в качестве точного определения множества планет Солнечной системы.

Впрочем, разница между планетами и метеоритами интересует в основном астрономов. А вот разница между домом и хибаркой существенна для обитателя любого жилища. Но легко представить себе, что одно и то же здание получит от одного человека уважительное название «дом», а от другого — пренебрежительное прозвище «хибарка». Разумеется, и отнесение того или иного здания к множеству дворцов существенно зависит от того, кому поручено составить список этого множества.

Точно так же рассмотрение множества всех стихотворений, опубликованных в России, осложняется наличием многочисленных промежуточных форм между стихами и прозой (ритмическая проза, белые стихи и т. д.). Не слишком точно определено и множество лиц, пользующихся правом бесплатного проезда по железным дорогам страны. К этому множеству относятся, в частности, дети до 5 лет. Но может случиться, что малолетнему пассажиру исполнится 5 лет в пути, и тогда неясно, относится ли он к этому множеству (рассказывают, что один пунктуальный отец включил стоп-кран в момент, когда его сыну исполнилось пять лет, чтобы точно определить оставшийся отрезок пути, за который ему следовало уплатить).

Тонкости возникают и в более простых случаях и связаны с неточностью и несовершенством обычного языка. Пусть, например, A есть множество, состоящее из первых n натуральных чисел, $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, где n — число букв первой строки основного текста «Евгения Онегина». Такое определение можно понимать двояко. С одной стороны, под числом n можно понимать совокупное количество всех вхождений букв в первую строку (так сказать, общее количество типографских знаков в строке). Выпишем эту строку и отметим различные вхождения одной и той же буквы соответствующими порядковыми номерами:

$$\text{М}_1,\ \text{О}_1,\ \text{Й}_1,\quad \text{Д}_1,\ \text{Я}_1,\ \text{Д}_2,\ \text{Я}_2,\quad \text{С}_1,\ \text{А}_1,\ \text{М}_2,\ \text{Ы}_1,\ \text{Х}_1,$$
$$\text{Ч}_1,\ \text{Е}_1,\ \text{С}_2,\ \text{Т}_1,\ \text{Н}_1,\ \text{Ы}_2,\ \text{Х}_2,\quad \text{П}_1,\ \text{Р}_1,\ \text{А}_2,\ \text{В}_1,\ \text{И}_1,\ \text{Л}_1.$$

Получается, что $n=25$ и $A=\{1,\,2,\,\ldots,\,25\}$.

С другой стороны, под числом n можно понимать общее число различных букв русского алфавита, встречающихся в первой строке. Вот эти буквы:

М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т, Н, П, Р, В, И, Л.

Тогда получается, что $n=18$ и $A=\{1,\,2,\,\ldots,\,18\}$.

Приведенный пример показывает, с какой тщательностью нужно формулировать определение множества, чтобы избежать неясности и двусмысленности, свойственных обычному нашему языку.

Брить или не брить?

Не всегда затруднения с определением состава множества зависят только от недостатков языка. Иногда причина лежит гораздо глубже. Приведем следующий пример. Как правило, сами множества не являются своими собственными элементами (например, множество всех натуральных чисел не является натуральным числом, множество всех треугольников не является треугольником и т. д.).

Однако бывают и такие множества, которые содержат себя в качестве одного из своих элементов. Скажем, множество абстрактных понятий само является абстрактным понятием (не правда ли?). Так как такие множества рассматриваются редко, назовем их *экстраординарными*, а все остальные множества — *ординарными*.

Образуем теперь множество A, элементами которого являются все ординарные множества. На первый взгляд кажется, что в этом определении нет ничего плохого; не видно, почему фраза «множество всех ординарных множеств» хуже, чем фраза «множество всех треугольников». Но на самом деле здесь возникает серьезное логическое противоречие. Попробуем выяснить, каким же является само полученное множество A — ординарным или экстраординарным. Если оно ординарно, то оно входит в себя как один из элементов (мы ведь собрали вместе все ординарные множества). Но тогда по определению оно является экстраординарным. Если же множество A экстраординарно, то по определению экстраординарности оно должно быть своим собственным элементом, а среди элементов множества A есть лишь ординарные множества, экстраординарных множеств мы не брали!

Получилось логическое противоречие — множество A не может быть ни ординарным, ни экстраординарным. Впрочем, такие логические противоречия возникают и в гораздо более простых случаях. Например, одному солдату приказали брить тех и только тех солдат его взвода, которые не бреются сами. Возник вопрос, как ему поступать с самим собой. Если он будет брить себя, то его следует отнести к числу солдат, которые бреются сами, а брить таких солдат он не имеет права. Если же он себя брить не будет, то его придется отнести к числу солдат, которые сами не бреются, а тогда по приказу он должен себя брить.

Брить или не брить?

Известны и другие примеры, когда множество, на первый взгляд вполне определенное, оказывается определенным очень плохо, а лучше сказать — совсем неопределенным. Например, пусть множество A состоит из всех рациональных чисел, которые можно определить при помощи не более чем двухсот русских слов (включая сюда и слова «нуль», «один», «два» и т. д.).

Так как множество всех русских слов конечно (для простоты будем считать, что берутся лишь слова из словаря Ожегова и их грамматические формы), то и множество таких чисел конечно. Пусть это будут числа r_1, r_2, $\ldots$, r_N. Определим теперь рациональное число r следующим образом:

$$r = 0{,}n_1 n_2 \ldots n_N,$$

где n_i (i-й десятичный знак числа r) равен 1, если i-й десятичный знак числа r_i отличен от единицы, в противном же случае $n_i = 2$.

Число r не совпадает с r_1, так как отличается от него первым десятичным знаком, не совпадает с r_2, так как отличается от него вторым десятичным знаком, и т. д. Поэтому число r не входит в множество A. Между тем это число определено нами при помощи не более чем двухсот слов.

С этим парадоксом тесно связан следующий:

Каково то *наименьшее целое число, которое нельзя определить при помощи фразы, имеющей менее ста русских слов?*

Такое число существует, поскольку число слов в русском языке конечно, а значит, есть числа, которые нельзя определить фразой, имеющей менее ста слов. Но тогда среди этих чисел есть наименьшее.

С другой стороны, такого числа не существует, ибо оно определяется фразой из менее чем ста слов, напечатанной выше курсивом, а по смыслу этой фразы оно не может быть определено подобным образом.

★ А вот более сложный пример конечного множества, относительно которого оказывается невозможным сказать, содержит ли оно данный элемент. Разделим все прилагательные в русском языке на два класса. К первому классу отнесем все прилагательные, для которых выражающее их слово само обладает свойством, описываемым этим прилагательным, а ко второму — прилагательные, не обладающие описываемым им свойством. Например, прилагательное «русское» отнесем к первому классу, так как слово «русское» принадлежит к словарному запасу русского языка. К тому же классу отнесем и прилагательное «пятисложное», так как в слове «пятисложное» именно пять слогов. А прилагательное «немецкое» отнесем во второй класс, так как слово «немецкое» входит в словарный состав русского, а не немецкого языка. Во второй класс попадет и слово «односложное», так как в этом слове не один, а пять слогов. Туда же попадет и слово «синее», так как это слово само цветом не обладает, а только выражает некоторый цвет.

Казалось бы, все в полном порядке и каждое прилагательное нашло свое место. Но для того, чтобы отличить полученные два класса друг от друга, введем еще два прилагательных. Назовем все прилагательные первого класса «автологичными» (от греческих слов «авто» — сам и «логос» — смысл, закон), а прилагательные второго класса «гетерологичными» («гетерос» — другой). Слова «автологичный» и «гетерологичный» являются прилагательными, и их надо разместить по нашим классам. Слово «автологичный» можно отправить в первый класс, и тогда оно будет обладать именно тем свойством, которое само выражает, — ведь в первом классе собраны именно автологичные слова. Но и во втором классе оно будет смотреться неплохо (не обладая «гетерологичностью»). А вот слово «гетерологичный», напротив, относить некуда — оно доставляет те же трудности, что и взводный цирюльник.

Его нельзя отнести в класс автологичных слов, так как тогда слово «гетерологичный» должно было бы само обладать свойством, выражаемым этим словом, а это свойство заключается в том, что ему надо быть не в первом, а во втором классе. Нельзя его отнести и во второй класс, так как тогда оно должно было бы не обладать выражаемым им свойством гетерологичности, а потому быть автологичным, второй же класс автологичных слов не содержит. ★

В теории множеств накопилось много таких случаев, когда определение множества было внутренне противоречивым. Изучение вопроса, при каких условиях это может иметь место, привело к глубоким исследованиям в области логики, совершенно изменившим лицо этой науки. Многие из этих исследований впоследствии были использованы для построения теории быстродействующих вычислительных машин, теории автоматов и т. д. Но эти исследования относятся уже к математической логике, и мы оставим их в стороне.

Мы будем в дальнейшем рассматривать лишь множества, которые определены точно и без противоречий и состав которых не вызывает сомнений (такие, как множество всех натуральных чисел, всех квадратов на плоскости и т. д.).

Пустое множество

Само название «множество» наводит на мысль, что каждое множество должно содержать много (по крайней мере два) элементов. Но это не так. В математике приходится рассматривать и множества, содержащие только один элемент, и даже множество, не имеющее ни одного элемента. Это множество называют *пустым* и обозначают $\varnothing$.

Примерами пустых множеств могут служить множество лошадей, пасущихся на Луне, множество десятиногих млекопитающих, множество трехлетних гроссмейстеров, множество действительных корней уравнения $x^4+16=0$, множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2x-5y=1, \\ 4x-10y=6. \end{cases}$$

Зачем же вводят пустое множество? Во-первых, отметим, что когда множество задано своим характеристическим свойством, то не всегда заранее известно, существует ли хоть один элемент с таким свойством. Например, пусть множество A состоит из всех четырехугольников таких, что

а) все их углы прямые,

б) диагонали имеют различную длину.

Для человека, не знающего геометрии, ничего противоречивого в этих требованиях нет. Однако из теоремы о равенстве диагоналей прямоугольника следует, что множество таких четырехугольников пусто. Пусто и множество треугольников, сумма углов которых отлична от 180°. Множество квадратных трехчленов, имеющих более двух корней, тоже пусто. Вообще многие математические утверждения можно сформулировать как утверждения о пустоте некоторого множества (попробуйте сформулировать так теорему Пифагора).

Не решая уравнения $x^4-7x^2-6x+26=0$, было бы трудно установить, пусто или нет множество его действительных корней. Впрочем, если переписать это уравнение в виде

$$(x^2-4)^2+(x-3)^2+1=0,$$

то станет ясно, что оно не имеет действительных корней.

Иногда бывает трудно сказать, пусты ли те или иные множества нематематической природы. Если кто-нибудь плохо знает зоологию, он не сможет ответить на вопрос, пусто ли множество акул, живущих в Байкале, или множество тигров, живущих на свободе в Австралии.

Долго было неизвестно, пусто ли множество всех натуральных чисел n таких, что $n>2$, а уравнение $x^n+y^n=z^n$ имеет положительные целочисленные решения (в этом состояла знаменитая проблема Ферма). Лишь в 1995 г. Э. Уайлс установил, что это множество пусто. До сих пор неизвестно, пусто ли множество цифр, входящих лишь конечное число раз в десятичное разложение числа π (хотя это число и вычислено с точностью до многих тысяч десятичных знаков, неизвестно, все ли цифры входят в его десятичное разложение бесконечно много раз или какая-нибудь цифра встречается лишь конечное число раз).

До сих пор не выяснено, пусто ли множество целых решений уравнения $x^3+y^3+z^3=30$ (при этом допускаются как положительные, так и отрицательные целые решения; то, что множество решений этого уравнения в натуральных числах пусто, совершенно очевидно).

Неизвестно и то, пусто ли множество всех живых плезиозавров на земном шаре, — если чудовище озера Лох-Несс действительно окажется плезиозавром, то это множество не пусто.

Теория множеств и школьная математика

Множества могут состоять из самых различных элементов — рыб, домов, квадратов, чисел, точек и т. д. Именно этим объясняется чрезвычайная широта теории множеств и ее приложимость к самым разным областям знания (математике, механике, физике, биологии, лингвистике и т. д.). Для математики особо важную роль играют множества, составленные из «математических» объектов — геометрических фигур, чисел, алгебраических выражений, функций и т. д. С некоторыми такими множествами имеют дело в школьной математике, но там обычно избегают самого слова «множество» (за исключением школ и классов с углублённым изучением математики).

На самом же деле школьная математика имеет дело с множествами на каждом шагу. Особенно часто встречаются числовые множества, то есть множества, составленные из чисел. Примерами таких множеств могут служить:

а) множество всех натуральных чисел,

б) множество всех целых чисел (положительных, отрицательных и нуля),

в) множество всех рациональных чисел,
г) множество всех действительных чисел,
д) множество всех комплексных чисел,
е) множество площадей правильных многоугольников, вписанных в данный круг, и т. д.

★ С каждым уравнением связаны два числовых множества. Первым из них является множество чисел, при которых выражения, входящие в уравнение, имеют смысл. Это числовое множество называется *областью допустимых значений* неизвестного. Например, для уравнения

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{x-1}{x^2-9}=-\frac{1}{3}$$

область допустимых значений состоит из всех чисел x, для которых $x^2-4\neq 0$ и $x^2-9\neq 0$, то есть из всех чисел, кроме чисел множества $\{2, -2, 3, -3\}$. А для уравнения

$$\sqrt{-x^2+x+12}+x=2+\sqrt{10}$$

область допустимых значений состоит из чисел, для которых $-x^2+x+12\geqslant 0$. Это неравенство выполняется, если $-3\leqslant x\leqslant 4$.

Вторым множеством, связанным с данными уравнением или неравенством, является множество его решений. Например, для уравнения $x^2-7x+12=0$ множество корней состоит из двух чисел $\{3, 4\}$, а для уравнения $\sin \pi x=0$ — из бесчисленного множества чисел, а именно из всех целых чисел. Когда уравнение задано, множество M его корней определено характеристическим свойством — тем, что числа x, входящие в M, удовлетворяют данному уравнению. После того, как уравнение решено, множество M задано списком (если оно конечно) или более простым характеристическим свойством (если оно бесконечно), например, свойством, что все его элементы — целые числа.

В то время как множество решений уравнения состоит обычно из нескольких чисел или (для большинства тригонометрических уравнений) из нескольких последовательностей чисел, множество решений неравенства, как правило, сплошь заполняет некоторые участки множества действительных чисел. Например, неравенство $4-x^2\geqslant 0$ выполняется на отрезке $-2\leqslant x\leqslant 2$, обозначаемом $[-2; 2]$, а неравенство

$$(4-x^2)(x-3)(x-5)\geqslant 0$$

— на отрезках $-2 \leqslant x \leqslant 2$ и $3 \leqslant x \leqslant 5$. Если вместо нестрогих взять строгие неравенства, то получатся отрезки с отброшенными концами, так называемые *числовые промежутки*. Например, множество решений неравенства

$$(4 - x^2)(x - 3)(x - 5) > 0$$

состоит из промежутков $-2 < x < 2$ и $3 < x < 5$, обозначаемых $(-2; 2)$ и $(3; 5)$. Концы -2, 2, 3, 5 этих промежутков не удовлетворяют неравенству. Встречаются в качестве решений неравенства и более сложные множества. Например, решением неравенства $\dfrac{x-1}{4-x} \geqslant 0$ является множество чисел x таких, что $1 \leqslant x < 4$, обозначаемое $[1; 4)$. Здесь один конец отрезка (а именно 1) принадлежит множеству решений, а другой — число 4 — не принадлежит ему.

Так как каждое действительное число изображается точкой на числовой оси, числовые множества можно изображать как некоторые множества точек на прямой. Например, на рис. 3 *а* изображено множество чисел x таких, что $-4 \leqslant x \leqslant 1$, а на рис. 3 *б* изображено множество таких чисел x, что $-2 < x < 3$.

а) *б*)

Рис. 3

Особенно удобно геометрическое изображение множеств, состоящих из пар или троек чисел. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 25$ задает множество M пар чисел $(x; y)$, при подстановке которых уравнение обращается в тождество. Пары чисел $(-5; 0)$, $(3; -4)$ принадлежат множеству M, так как $(-5)^2 + 0^2 = 25$, $3^2 + (-4)^2 = 25$, а пара чисел $(1; 6)$ не принадлежит множеству M, так как $1^2 + 6^2 = 37 \neq 25$. Однако такое описание множества M не очень наглядно. Чтобы описать это множество нагляднее, воспользуемся методом координат. Выберем на плоскости систему декартовых координат (это те самые координаты, которые изучаются в школе). Тогда каждой паре чисел $(x; y)$ соответствует точка A на плоскости с координатами x и y, а каждой точке плоскости — пара x и y ее координат (рис. 4).

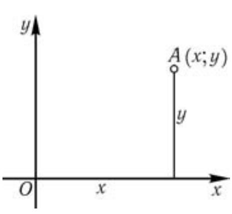


Рис. 4

Если изобразить на плоскости все пары чисел $(x;\, y)$, для которых $x^2+y^2=25$, то легко заметить, что они ложатся на одну и ту же линию, а именно на окружность радиуса 5 с центром в начале координат (рис. 5). Если вспомнить теорему Пифагора, то сразу станет ясно, что множество всех точек $A(x;\, y)$, для которых $x^2+y^2=25$, совпадает с множеством точек этой окружности (рис. 6).

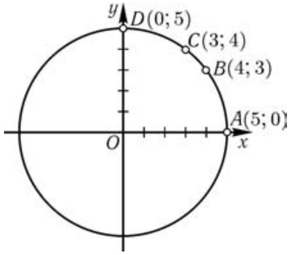


Рис. 5

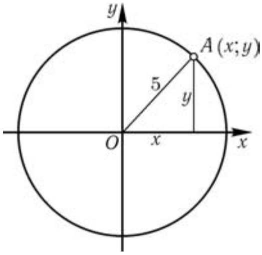


Рис. 6

Неравенства, содержащие два неизвестных, обычно задают не линии, а целые области на плоскости. Например, неравенство $x^2+y^2 \leqslant 25$ задает на плоскости множество точек, расстояние которых от начала координат не превосходит 5, то есть множество точек круга радиуса 5 с центром в начале координат. При этом сама окружность входит в указанное множество. А неравенство $x^2+y^2<25$ задает тот же круг, но без граничной окружности. ★

В геометрии мы сталкиваемся с двумя типами множеств. Во-первых, теоремы геометрии обычно говорят о свойствах некоторого множества геометрических фигур. Например, теорема о том, что диагонали параллелограмма делят друг друга пополам, касается множества всех параллелограммов. Во-вторых, сами геометрические фигуры являются множествами, состоящими из входящих в них точек. Мы можем поэтому говорить о множестве всех точек данного круга, о множестве всех точек данного конуса и т. д.

В алгебре мы встречаемся с такими множествами, как множество всех многочленов от двух переменных, множество всех квадратных уравнений, множество всех алгебраических уравнений и т. д. Одним словом, почти каждый раздел школьной математики так или иначе связан с теорией множеств.

Подмножества

Введение понятия множества в математику оказалось очень полезным. Из-за того, что элементами множеств могут быть вещи самой различной природы, одни и те же утверждения, касающиеся множеств, можно истолковать и как утверждения о точках геометрических фигур, и как утверждения о натуральных числах, и как утверждения о животных или растениях, и как утверждения об атомах или молекулах. Понятия и теоремы теории множеств обладают очень большой общностью. Мы расскажем сейчас о некоторых из них.

В первую очередь познакомимся с понятием *подмножества*. Оно возникает каждый раз, когда приходится рассматривать некоторое множество не самостоятельно, а как часть другого, более широкого множества. Именно, говорят, что множество B является подмножеством другого множества A, если каждый элемент x из B является вместе с тем и элементом множества A. В этом случае пишут $B \subset A$.

Например, если взять какую-нибудь среднюю школу, то множество учеников десятых классов этой школы является подмножеством в множестве всех учеников данной школы. В свою очередь множество учеников этой школы является подмножеством в множестве всех школьников.

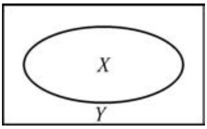


Рис. 7

Множество всех лис является подмножеством в множестве всех хищных зверей, множество хищных зверей — подмножеством в множестве млекопитающих, а множество млекопитающих — подмножеством в множестве позвоночных. Если геометрическая фигура X является частью геометрической фигуры Y, то множество точек фигуры X есть подмножество множества точек фигуры Y (рис. 7).

В геометрии также часто приходится иметь дело с подмножествами некоторых множеств геометрических фигур. Возьмем, например, следующие множества: множество A состоит из всех четырехугольников; множество B состоит из всех трапеций; множество C состоит из всех параллелограммов; множество D состоит из всех прямоугольников; множество E состоит из всех квадратов. В этом списке фигура каждого следующего типа является частным случаем фигуры предыдущего типа (трапеция — частный случай четырехугольника, параллелограмм — частный случай трапеции[1] и т. д.). Но это и означает, что каждое следующее множество является подмножеством предыдущего:

$$A \supset B \supset C \supset D \supset E.$$

Точно так же в следующем списке каждое следующее множество является подмножеством предыдущего: множество всех комплексных чисел; множество всех действительных чисел; множество всех рациональных чисел; множество всех целых чисел; множество всех натуральных чисел. Во многих случаях, чтобы выделить в данном множестве некоторое подмножество, добавляют к характеристическому признаку множества то или иное дополнительное условие. Например, подмножество натуральных чисел выделяется в множестве целых чисел добавлением условия $n > 0$, а подмножество равносторонних треугольников в множестве всех треугольников — добавлением условия $a = b = c$.

★ Мы уже говорили, что многие теоремы формулируются как теоремы о совпадении двух множеств. Наряду с ними встречаются и теоремы, в которых речь идет лишь о том, что одно множество является частью другого. Например, в теореме «Диагонали четырехугольника с равными сторонами (ромба) взаимно перпендикулярны» речь идет о двух множествах: A — множество всех ромбов, B — множество всех четырехугольников с взаимно перпендикулярными диагоналями. И теорема состоит в том, что $A \subset B$.

Если множество A является подмножеством множества B, $A \subset B$, то принадлежность множеству A является достаточным условием принадлежности к множеству B, а принадлежность к множеству B — необходимым условием принадлежности множеству A. Например, пусть B — множество всех четных положительных чисел, а A — множество натуральных чисел, последней цифрой которых является 4. Ясно, что $A \subset B$. Поэтому для того, чтобы целое число n было четным, достаточно, чтобы его последней цифрой было 4. С другой стороны, для того чтобы последней цифрой целого числа было 4, необходимо, чтобы это число было четным.

В случае, когда множества A и B совпадают, принадлежность к A необходима и достаточна для принадлежности к B. Иными словами, теоремы о том, что некоторое условие является

[1] Хотя в некоторых курсах геометрии параллелограмм не считается трапецией.

необходимым и достаточным, — это теоремы о совпадении двух множеств.

Так, для того чтобы целое число n делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы его последней цифрой был 0. Иными словами, множество A чисел, кратных 10, совпадает с множеством B целых чисел, последней цифрой которых является 0.

Точно так же множество всех ромбов совпадает с множеством параллелограммов, имеющих взаимно перпендикулярные диагонали. Поэтому для того, чтобы параллелограмм был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны. ★

Теория множеств и комбинаторика ★

Подсчитаем, сколько подмножеств имеет конечное множество (в число подмножеств мы включаем и пустое множество, и само множество). Множество, состоящее из одного элемента a, имеет два подмножества: $\varnothing$ и $\{a\}$. Множество, состоящее из двух элементов a и b, имеет уже четыре подмножества: те же подмножества $\varnothing$ и $\{a\}$ и еще $\{b\}$ и $\{a, b\}$. Если прибавить к множеству третий элемент c, то кроме уже найденных четырех подмножеств $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$ и $\{a, b\}$ появятся еще четыре подмножества: $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ и $\{a, b, c\}$, получаемые добавлением элемента c к каждому из имевшихся ранее подмножеств. Ясно, что каждый раз добавление нового элемента удваивает число подмножеств. Поэтому множество, содержащее n элементов, имеет 2^n подмножеств.

Подмножества конечного множества можно расклассифицировать по числу входящих в них элементов. Если множество содержит n элементов, то его подмножества, состоящие из k элементов, называются *сочетаниями из n по k*. Их число обозначается C_n^k. Так как общее число подмножеств равно 2^n, то справедливо равенство

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Для чисел C_n^k существует немало любопытных соотношений, многие из которых удается вывести, рассматривая некоторые подмножества с определенными свойствами. Докажем, например, соотношение

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \tag{1}$$

в предположении $1 \leqslant k < n$. С этой целью среди всех сочетаний из n элементов $a_1, \ldots, a_n$ по k выберем сочетания, содержащие элемент a_n. Остальные $k-1$ мест в сочетании могут занимать любые из $n-1$ элементов $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Поэтому число выбранных сочетаний равно C_{n-1}^{k-1}. Теперь подсчитаем, сколько сочетаний из элементов $a_1, \ldots, a_n$ по k не содержат элемента a_n. Эти сочетания составлены из элементов $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Так как в сочетание входят k элементов, то число таких сочетаний равно C_{n-1}^{k}. Поскольку в каждое из C_n^k сочетаний либо входит, либо не входит элемент a_n, то должно выполняться равенство (1).

Отметим еще, что $C_n^0 = 1$ при любом $n \geqslant 0$, так как каждое множество имеет лишь одно пустое подмножество. Точно так же очевидно, что $C_n^n = 1$.

Пользуясь сделанными замечаниями, можно последовательно подсчитывать числа C_n^k сначала при $n=0$, потом при $n=1$, потом при $n=2$ и т. д. Таблица чисел C_n^k записывается обычно в виде

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
\multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

(так называемый треугольник Паскаля).

Так как $C_n^0 = C_n^n = 1$, то на сторонах треугольника Паскаля стоят единицы. А остальные числа последовательно вычисляем, учитывая, что в силу соотношения (1) каждое число равно сумме чисел, стоящих в предыдущей строке слева и справа от него. В результате получаем следующую таблицу:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\multicolumn{11}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

Существует формула для непосредственного вычисления чисел C_n^k. Она имеет вид

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ и $0! = 1$. Предоставляем читателю проверить, что определяемые этой формулой числа действительно удовлетворяют соотношению (1) и равенствам $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Универсальное множество

Крайне редко может встретиться случай, когда в одном и том же рассуждении пойдет речь и о множестве всех комплексных чисел и о множестве всех китов в океане (хотя, конечно, не исключено, что методы теории функций комплексного переменного будут прилагаться к изучению движения кита в воде). Обычно все множества, с которыми имеют дело в том или ином рассуждении, являются подмножествами некоторого фиксированного множества I. Мы будем называть в этом случае множество I *универсальным множеством.*

Например, все числовые множества являются подмножествами множества действительных чисел, множество точек любой геометрической фигуры — подмножеством в множестве всех точек геометрического пространства, множество сторон плоского многоугольника — подмножеством в множестве всех отрезков на плоскости и т. д.

Пересечение множеств

В сентябре 1887 года знаменитому сыщику Шерлоку Холмсу понадобилось выяснить название одного парусного судна[1]. Он знал об этом корабле не слишком много: в январе или феврале 1883 года оно было в Пондишери, в январе 1885 года — в Данди, а сейчас стояло в Лондонском порту. Пользуясь этими данными, он все-таки установил название корабля. Для этого достаточно было сравнить три множества: множество парусников, бывших в указанное время в Пондишери, множество парусников, находившихся в январе 1885 года в Данди, и множество парусников, находившихся сейчас в Лондоне. Оказалось, что только одно судно входило во все три множества — американский корабль «Одинокая звезда». А так как Шерлок Холмс полагал к тому же, что преступники родом из Америки, то круг замкнулся и преступление было раскрыто.

Искать общие элементы множеств приходится не только сыщикам. Ученый-бактериолог, ищущий возбудителя болезни, наблюдает

[1] Отсылаем читателя за подробностями к рассказу Конан Дойля «Пять апельсиновых зернышек».

В какую секцию пойти?

у одного больного этой болезнью одних микробов, у другого — других, у третьего — третьих. Множества микробов, наблюдаемых у разных больных, различны, но обычно два или три микроба наблюдаются у всех больных этой болезнью. На них и падает подозрение как на возбудителей болезни. И дальнейшее исследование показывает, кто же истинный виновник заболевания.

Множество, состоящее из общих элементов нескольких множеств A, B, C, $\ldots$, называется *пересечением* этих множеств или их *произведением*. Пересечение двух множеств A и B обозначается AB или $A \cap B$. Итак, пересечением нескольких множеств A, B, C, $\ldots$ называют новое множество, содержащее те и только те элементы, которые входят в каждое из множеств A, B, C, $\ldots$

Например, пусть ученики данной школы участвуют в четырех спортивных секциях: футбольной, плавания, шахматной и бокса. Пересечение множеств участников каждой секции состоит из спортсменов-универсалов, которые могут и забить пенальти, и переплыть широкую реку, и создать грозную атаку на короля противника, и отразить нападение хулигана.

★ Разумеется, и в самой математике понятие пересечения множеств находит многочисленные приложения. Одним из основных методов решения задач на построение является *метод геометрических* *мест.* Если надо построить точку, удовлетворяющую каким-нибудь двум условиям, то сначала сохраняют только одно из этих условий и опускают второе. Множество точек, удовлетворяющих первому условию, заполняет некоторую линию (геометрическое место точек). Точно так же множество точек, удовлетворяющих только второму условию, заполняет другую линию. А тогда искомая точка является пересечением этих двух линий (геометрических мест). Может, конечно, оказаться, что эти линии пересекаются не в одной, а в нескольких точках. Тогда задача имеет несколько решений. А если эти линии совсем не пересекаются, то задача не имеет решения. Например, пусть надо найти точку C, удаленную на расстояние a от точки O и равноудаленную от точек A и B. Искомая точка должна, во-первых, лежать на окружности радиуса a с центром в O, а во-вторых, на перпендикуляре к отрезку AB, проходящему через середину этого отрезка. Значит, чтобы найти точки, удовлетворяющие поставленным условиям, достаточно взять точки пересечения прямой и окружности (здесь могут получиться две, одна или ни одной точки пересечения, см. рис. 8).

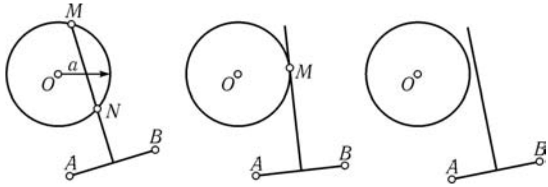


Рис. 8

Иногда приходится пересекать множества геометрических фигур или чисел. Например, множество всех квадратов является пересечением множества всех прямоугольников с множеством всех ромбов. Множество правильных треугольников является пересечением множества всех треугольников с множеством правильных многоугольников. Пересечением множества натуральных чисел, делящихся на 2, и множества натуральных чисел, делящихся на 3, является множество натуральных чисел, делящихся на 6.

Решение систем уравнений и неравенств, по сути дела, сводится к отысканию пересечения некоторых множеств (впрочем, можно сказать и наоборот: пересечение некоторых множеств ищется путем решения систем уравнений или неравенств). Пусть, например, надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7. \end{cases} \tag{1}$$

С точки зрения алгебры перед нами задача найти все пары чисел $(x;\, y)$, при подстановке которых в оба уравнения системы получаются тождества. Но уравнения системы можно рассматривать по отдельности. Обозначим через M множество всех пар чисел $(x;\, y)$, удовлетворяющих первому из наших уравнений, а через N — множество всех пар чисел $(x;\, y)$, удовлетворяющих второму уравнению. Тогда решениями системы будут все пары чисел, принадлежащие как множеству M, так и множеству N. Иными словами, множеством решений системы (1) является пересечение множеств M и N.

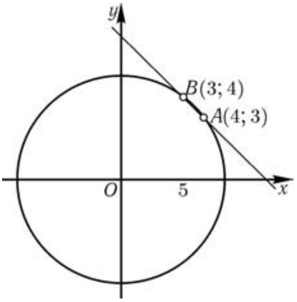


Рис. 9

Это замечание лежит в основе геометрического метода решения систем — строят линии, выражаемые каждым из уравнений системы, и находят их пересечение. Например, мы уже знаем, что точки $A(x;\, y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 25$, лежат на окружности радиуса 5 с центром в начале координат. А уравнение $x + y = 7$ — это уравнение прямой, отсекающей на обеих координатных осях отрезки длины 7. Если начертить эти линии, то окажется, что они пересекаются в двух точках: $A(4;\, 3)$ и $B(3;\, 4)$. Значит, наша система имеет два решения: $x_1 = 3$, $y_1 = 4$ и $x_2 = 4$, $y_2 = 3$ (рис. 9). Рассмотрим теперь систему неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ y \leqslant 8 - x^2. \end{cases} \tag{2}$$

Множество M решений неравенства $y \geqslant x^2$ состоит из точек $A(x;\, y)$, лежащих на параболе $y = x^2$ и выше этой параболы. А множество N решений неравенства $y \leqslant 8 - x^2$ состоит из точек плоскости, лежащих на параболе $y = 8 - x^2$ и ниже этой параболы (рис. 10). На рис. 10 множество M заштриховано горизонтальными линиями, а множество N — вертикальными линиями. Решением системы неравенств (2) является пересечение P множеств M и N. На рис. 10

оно отмечено двойной штриховкой. При этом точки границы множества P принадлежат этому множеству.

Точно так же устанавливаем, что решением системы

$$\begin{cases} y > x^2, \\ y = 2x + 3 \end{cases} \tag{3}$$

является часть прямой $y = 2x + 3$, лежащая выше параболы $y = x^2$. Прямая пересекается с параболой в точках $A(-1;\,1)$ и $B(3;\,9)$, и выше параболы лежит часть прямой, заключенная между точками A и B (сами точки A и B не принадлежат множеству решений системы, см. рис. 11).

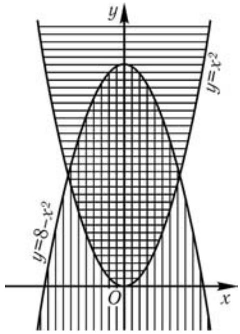


Рис. 10

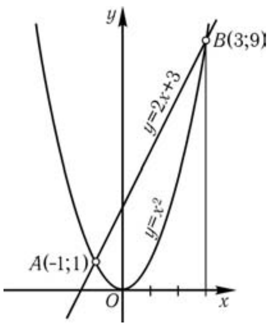


Рис. 11

А теперь путем изучения пересечения множеств покажем, что иррациональное уравнение

$$\sqrt{2 + x - x^2} + \sqrt{8x - x^2 - 15} = 7 \tag{4}$$

не имеет решений. Конечно, можно было бы начать решать это уравнение, уединив радикал и возведя обе части уравнения в квадрат, и лишь в самом конце, после проверки получившихся корней, убедиться, что уравнение не имеет решений. Но мы сделаем по-другому. Сначала выясним, при каких значениях x имеют смысл радикалы, входящие в это уравнение. Радикал $\sqrt{2 + x - x^2}$ имеет смысл, если $2 + x - x^2 \geqslant 0$. Решая это неравенство, получим, что $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Точно так же обнаруживаем, что радикал $\sqrt{8x - x^2 - 15}$ имеет смысл, лишь если $3 \leqslant x \leqslant 5$. Но отрезки $-1 \leqslant x \leqslant 2$ и $3 \leqslant x \leqslant 5$ не имеют общих точек, их пересечение пусто. Поэтому ни одно значение x не может удовлетворять уравнению (4). ★

Сложение множеств

Еще чаще, чем пересекать множества, приходится объединять их. Уже первоклассник, складывая три палочки и две палочки, объединяет два множества. Вообще, действие сложения натуральных чисел связано с подсчетом числа элементов объединения двух множеств. Но здесь надо иметь в виду одну тонкость. Пусть есть два сплава. Один сплав содержит железо, углерод, ванадий и марганец, а второй — железо, углерод, хром и никель. В каждый сплав входят по 4 химических элемента, но если мы сплавим их вместе, то в новый сплав войдут только 6 элементов: железо, углерод, ванадий, марганец, хром и никель. Дело в том, что железо и углерод были в обоих сплавах, то есть объединяемые множества элементов имели непустое пересечение. Поэтому будет правильнее сказать, что сложение натуральных чисел связано с объединением непересекающихся множеств.

Если же пересечение множеств не пусто, то в их объединении повторяющиеся элементы считаются лишь по одному разу. Таким образом, *суммой* нескольких множеств A, B, ... называют новое множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят хоть в одно из слагаемых множеств. Сумму множеств A и B обычно обозначают $A+B$ или $A \cup B$. На рис. 12 изображено объединение множества A точек круга Γ_1 и множества B точек круга Γ_2.

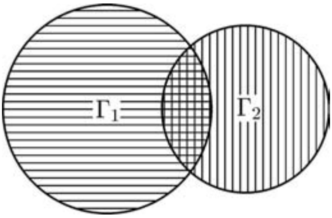


Рис. 12

Если некоторые элементы входят не в одно, а в несколько слагаемых множеств, в сумму они все равно входят только один раз.

Поэтому для конечных множеств число элементов суммы может оказаться меньше, чем сумма чисел элементов слагаемых. Например, пусть первое множество состоит из различных букв русского алфавита, входящих в первую строку «Евгения Онегина», а второе — из различных букв, входящих во вторую строку этой поэмы. Первое множество мы уже выписывали. Оно состоит из 18 букв (см. с. 11):

М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т, Н, П, Р, В, И, Л.

Второе же множество состоит из 13 букв:

К, О, Г, Д, А, Н, Е, В, Ш, У, Т, З, М.

Суммой этих двух множеств является следующий набор 23 букв:

М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т, Н, П, Р, В, И, Л, К, Г, Ш, У, З.

Буквы О, Д, А, Н, Е, В, Т, М, входящие в пересечение наших множеств, вошли в сумму только один раз, и поэтому мы получили только 23 буквы, а не $18 + 13 = 31$ букву. Вот еще один пример, когда складываемые множества имеют общие элементы. Множество всех учеников в классе является суммой следующих трех множеств:

а) множества успевающих учеников,
б) множества девочек,
в) множества неуспевающих мальчиков.

Ясно, что каждый учащийся этого класса принадлежит хотя бы одному из указанных множеств. Однако эти множества могут иметь общие элементы: успевающие девочки входят и в первое, и во второе множество.

Иногда сумма состоит из бесконечного числа слагаемых множеств. Например, обозначим через A_n множество всех положительных дробей со знаменателем n:

$$A_1 = \left\{ \frac{m}{1} \right\}, \ A_2 = \left\{ \frac{m}{2} \right\}, \ \ldots, \ A_n = \left\{ \frac{m}{n} \right\}, \ \ldots$$

Суммой всех множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ является множество всех положительных дробей, то есть дробей вида $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа.

Обозначим через A_3 множество правильных треугольников, через A_4 — множество правильных четырехугольников, через A_5 — множество правильных пятиугольников и т. д. Тогда суммой всех этих множеств является множество A всех правильных многоугольников.

★ Поговорим теперь о сложении множеств в алгебре.

В одном из своих рассказов известный американский писатель Эдгар По пишет:

«Я никогда не встречал математика, который не держался бы как за Символ Веры за то, что $x^2 + px + q$ абсолютно и безусловно равно нулю. Скажите одному из этих джентльменов, если вам угодно, в виде опыта, что, на ваш взгляд, могут существовать случаи, когда

x^2+px+q не целиком равно нулю, и, втолковав ему то, что вы разумеете, возможно скорее спасайтесь из пределов его досягаемости, так как, без сомнения, он попытается вас поколотить».

Разумеется, читатель понимает, что x^2+px+q может быть равно нулю при одних значениях x и отличаться от нуля при других. Но нас интересует иной вопрос: почему математики всегда стараются записать уравнение так, чтобы одна его часть была равна нулю? Чтобы это стало яснее, рассмотрим такое уравнение: $x^2(x^2-7)=-12$. Из того, что произведение двух выражений равно -12, трудно вывести что-либо о величине каждого из этих выражений. Поэтому решать уравнение в таком виде весьма затруднительно. А если перенести -12 в левую часть уравнения и разложить получившееся выражение на множители, то получим уравнение

$$(x^2-4)(x^2-3)=0. \tag{1}$$

Теперь уже можно применить известное рассуждение: *для того чтобы произведение было равно нулю, надо, чтобы хоть один из множителей был равен нулю.*

Поэтому решение уравнения (1) сводится к решению двух уравнений: $x^2-4=0$ и $x^2-3=0$. Но в отличие от случая решения системы уравнений здесь надо искать не числа, которые удовлетворяют сразу *обоим* уравнениям, а числа, которые удовлетворяют *хотя бы одному* из двух уравнений. Иными словами, нам надо теперь искать не пересечение, а объединение множеств корней. Решая первое уравнение, получим корни $x_1=2$, $x_2=-2$, а решая второе уравнение, находим еще два корня: $x_3=\sqrt{3}$, $x_4=-\sqrt{3}$. Объединяя множества $\{2, -2\}$ и $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$, получаем множество корней $\{2, -2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ заданного уравнения. Точно так же уравнение

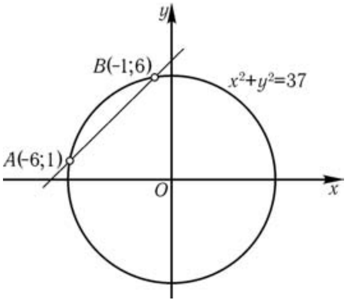


Рис. 13

$$(x^2+y^2-37)(y-x-7)=0 \tag{2}$$

задает множество, состоящее из окружности с уравнением x^2+ $+y^2-37=0$ и прямой, имеющей уравнение $y-x-7=0$ (рис. 13).

Если бы вместо этого уравнения была задана система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 37 = 0, \\ y - x - 7 = 0, \end{cases}$$

то она задавала бы не всю фигуру, изображенную на рис. 13, а лишь две точки $A(-6;\ 1)$ и $B(-1;\ 6)$, в которых прямая пересекает окружность. ★

Разбиение множеств

Вообще говоря, слагаемые множества могут иметь общие элементы. Однако часто бывает, что некоторое множество является суммой своих подмножеств, никакие два из которых не имеют общих элементов (или, как обычно говорят, не пересекаются). В этом случае говорят, что множество A *разбито на непересекающиеся подмножества.*

Разбиение на подмножества часто используется для классификации объектов. Например, когда составляют каталог книг в библиотеке, то все множество книг разбивают на книги беллетристического характера, книги по общественно-политическим наукам, по естественным наукам и т. д.

В биологии все множество животных разбивается на типы, типы — на классы, классы — на отряды, отряды — на семейства, семейства — на роды, а роды — на виды.

Конечно, одно и то же множество можно разными способами разбивать на подмножества. Когда в той же библиотеке составляют алфавитный каталог, то сначала книги разбиваются на подмножество книг, фамилии авторов которых начинаются на А, подмножество книг, фамилии авторов которых начинаются на Б, и т. д. После этого каждое полученное подмножество разбивают в соответствии со второй буквой фамилии авторов и т. д.

★ При разбиении множества на подмножества часто используют понятие *эквивалентности* элементов. Для этого определяют, что значит «элемент x эквивалентен элементу y», после чего объединяют эквивалентные элементы в одно подмножество. Однако не всякое понятие эквивалентности годится для такого разбиения. Например, назовем двух людей эквивалентными, если они знакомы друг с другом. Такое определение эквивалентности окажется неудачным. Ведь может случиться, что человек X знаком с человеком Y, человек Y

знаком с человеком Z, а люди X и Z друг с другом незнакомы. Тогда нам придется сначала отнести в одно подмножество людей X и Y (они друг с другом знакомы), потом в то же подмножество включить и Z (он знаком с Y), и у нас в одном подмножестве окажутся незнакомые друг с другом X и Z. Чтобы не было таких неприятностей, нужно, чтобы для понятия эквивалентности выполнялись следующие три условия:

а) каждый элемент сам себе эквивалентен;

б) если элемент x эквивалентен элементу y, то элемент y эквивалентен элементу x;

в) если элемент x эквивалентен элементу y, а элемент y эквивалентен элементу z, то элемент x эквивалентен z.

Можно доказать, что выполнение этих условий необходимо и достаточно для того, чтобы множество A можно было разбить на подмножества эквивалентных между собой элементов (и притом так, что разные подмножества не имеют общих элементов).

Например, назовем два целых числа x и y эквивалентными, если их разность — четное число. Легко проверить, что при этом выполняются все три условия а)–в). Объединяя эквивалентные целые числа, мы разобьем множество всех целых чисел на два подмножества: множество четных чисел и множество нечетных чисел. ★

Арифметика остатков ★

Если m — любое натуральное число, большее 1, то с его помощью множество натуральных чисел можно разбить следующим образом на классы. Назовем два числа *сравнимыми по модулю m*, если их разность делится на m. Например, числа 7 и 19 сравнимы по модулю 4, но не сравнимы по модулю 5, так как $19-7=12$ делится на 4, но не делится на 5. Легко проверить, что сравнимость чисел по данному модулю обладает всеми свойствами эквивалентности. Поэтому множество целых чисел разбивается на классы чисел, сравнимых между собой по модулю m. Число таких классов равно m, и все числа данного класса при делении на m дают один и тот же остаток. Например, если $m=3$, то получается 3 класса: класс чисел, кратных 3, класс чисел, дающих при делении на 3 остаток 1, и класс чисел, дающих при делении на 3 остаток 2.

Составим теперь новое множество, элементами которого являются классы чисел, сравнимых по заданному модулю m. Множество M

состоит из m элементов. В этом множестве можно определить действия сложения и умножения элементов. Например, пусть $m=5$. Возьмем класс A чисел, дающих при делении на 5 остаток 2, и класс B чисел, дающих при делении на 5 остаток 4. Если взять любое число класса A и прибавить к нему любое число класса B, то получится число, дающее при делении на 5 остаток 1 (в самом деле, $(5a+2)+(5b+4)=5(a+b+1)+1$). Поэтому можно сказать, что суммой класса A и класса B является класс C чисел, дающих при делении на 5 остаток 1. Если умножить любое число класса A на любое число класса B, то получится число, дающее при делении на 5 остаток 3 (так как $(5a+2)(5b+4)=5(5ab+4a+2b+1)+3$).

Мы получили любопытную арифметику, в которой имеют дело не с бесконечным множеством целых чисел, а всего с пятью элементами — пятью классами чисел. Будем обозначать класс чисел, дающих при делении на 5 остаток a, через $\boldsymbol{a}$ (например, класс чисел $\{\ldots, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\}$ обозначим просто $\mathbf{1}$). Для «чисел» **0, 1, 2, 3, 4** арифметика задается следующими таблицами сложения и умножения:

Таблица сложения

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**0**
2	**2**	**3**	**4**	**0**	**1**
3	**3**	**4**	**0**	**1**	**2**
4	**4**	**0**	**1**	**2**	**3**

Таблица умножения

×	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
2	**0**	**2**	**4**	**1**	**3**
3	**0**	**3**	**1**	**4**	**2**
4	**0**	**4**	**3**	**2**	**1**

Особенно простой вид принимают эти таблицы для случая $m=2$:

+	**0**	**1**
0	**0**	**1**
1	**1**	**0**

×	**0**	**1**
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

Первая таблица показывает, что сумма двух четных или нечетных чисел четна, а сумма четного и нечетного числа нечетна. Вторая же таблица показывает, что произведение двух целых чисел нечетно лишь в случае, когда нечетны оба сомножителя. Арифметика классов по данному модулю изучается в отделе математики, называемом *теорией чисел.*

Вычитание множеств

Полицейский-инспектор Варнике осмотрел сейф, закурил свою трубку и сказал: «Электродрелью вскрывают сейфы только пять взломщиков: Алек Кунце, Фриц Шмидт, Густав Хойгер, Генрих Кунтцман и Томас Мюллер. Но Алек, Фриц и Густав сейчас находятся в тюрьме Моабит. Придется спросить Генриха и Томаса, где они провели прошлую ночь...»

Метод, которым воспользовался инспектор Варнике, основан на операции вычитания множеств. Он имел дело с двумя множествами — множеством A взломщиков, пользовавшихся электродрелью, и множеством B всех обитателей тюрьмы Моабит. Удалив из множества A все элементы, принадлежащие множеству B, он сузил круг подозреваемых преступников.

Вообще, *разностью* двух множеств A и B называют новое множество, обозначаемое $A - B$ или $A \setminus B$, в которое входят все элементы множества A, не принадлежащие B.

Мы видим, что для того, чтобы из множества A можно было вычесть множество B, совершенно не обязательно, чтобы множество B было частью множества A — вычитание B из A сводится к удалению из A общей части A и B:

$$A - B = A - AB.$$

Например, инспектору Варнике надо было из числа пяти взломщиков отбросить трех — тех, что пользовались электродрелью и в то же время находились в данный момент в тюрьме. Если A — множество точек первого круга на рис. 14, а B — множество точек второго круга, то их разностью является множество точек заштрихованной серповидной фигуры (без дуги MN). Если A — множество всех учеников данного класса какой-либо школы, а B — множество всех девочек, учащихся в этой школе, то $A - B$ — множество всех мальчиков, которые учатся в данном классе этой школы. В случае, когда B является частью множества A, $A - B$ называют *дополнением* к множеству B в A и обозначают B'_A (разумеется, одно и то же

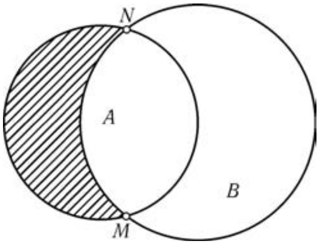


Рис. 14

множество B имеет разные дополнения в разных содержащих его множествах A). Например, дополнением множества четных чисел в множестве всех целых чисел является множество нечетных чисел. Дополнением множества всех квадратов в множестве прямоугольников является множество всех прямоугольников с неравными сторонами. А дополнением того же множества квадратов в множестве всех ромбов является множество ромбов с неравными диагоналями.

Если все множества рассматриваются как подмножества универсального множества I, то обычно под дополнением множества B понимают его дополнение в I. В этом случае вместо B'_I пишут просто B'.

Алгебра множеств ⋆

Мы познакомились с основными действиями над множествами — сложением, вычитанием и умножением (пересечением) множеств. Эти действия обладают целым рядом свойств, напоминающих свойства действий над числами. Как известно, вся алгебра многочленов построена на немногих законах действий над числами, которые выражаются следующими равенствами:

а) $a+b=b+a$ (коммутативность сложения),
б) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ассоциативность сложения),
в) $a+0=a$ (свойство нуля),
г) $a+(-a)=a-a=0$ (свойство противоположного элемента),
д) $ab=ba$ (коммутативность умножения),
е) $(ab)c=a(bc)$ (ассоциативность умножения),
ж) $a(b+c)=ab+ac$ (дистрибутивность умножения относительно сложения),
з) $a\cdot 1=a$ (свойство единицы).

Большинство этих свойств действий над числами сохраняется и для действий над множествами. Например, ясно, что для любых двух множеств имеем $A+B=B+A$ ($A+B$ и $B+A$ обозначают одно и то же множество, в которое входят все элементы из A и из B и не входят никакие другие элементы). Точно так же ясно, что

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

— оба множества составлены из всех элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A, B и C. Так же доказывается, что $AB=BA$ и $(AB)C=A(BC)$ (множества AB и BA состоят из общих элементов множеств A и B, а множества $(AB)C$ и $A(BC)$ — из общих элементов множеств A, B и C).

Несколько сложнее доказать дистрибутивность умножения множеств относительно сложения, то есть выполнение равенства

$$A(B+C)=AB+AC. \tag{1}$$

Строгое логическое доказательство этого равенства несложно, но несколько кропотливо. Мы ограничимся поэтому двумя рисунками, поясняющими это равенство (рис. 15). На первом из этих рисунков заштриховано пересечение множества A с множеством $B+C$, а на втором — пересечения A с B и A с C.

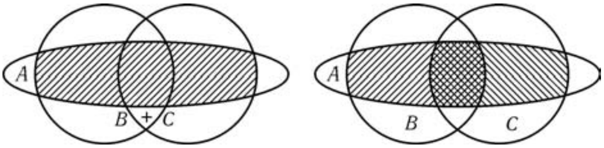


Рис. 15

Роль нуля и единицы в действиях над множествами играют множества $\varnothing$ (пустое множество) и I (универсальное множество). Именно, справедливы равенства

$$A+\varnothing=A, \quad A\cdot\varnothing=\varnothing, \quad A\cdot I=A,$$

соответствующие равенствам

$$a+0=a, \quad a\cdot 0=0, \quad a\cdot 1=a$$

для чисел.

Таким образом, сложение и умножение множеств обладают теми же свойствами, что и сложение и умножение чисел.

Поэтому все формулы алгебры многочленов, в которые входят лишь действия сложения и умножения, остаются справедливыми и для множеств. Например, тождеству

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

соответствует тождество

$$(A+B)^2=A^2+B^2+2AB, \tag{2}$$

где положено $A^2=A\cdot A$ и $2AB=AB+AB$.

Но алгебра множеств имеет и своеобразные черты. Ее основное своеобразие состоит в том, что если одно из множеств A и B является подмножеством другого, то формулы для суммы и произведения множеств упрощаются, а именно: если $A \subset B$, то $A+B=B$ и $AB=A$. Это сразу становится ясно из рис. 16.

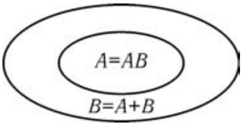


Рис. 16

В частности, так как $A \subset A$, то $A+A=AA=A$, а так как $A \subset I$, то $A+I=I$.

Это позволяет упростить формулы алгебры множеств. Например, так как $A^2=A$, $B^2=B$, $AB \subset A$, то $A^2+2AB=A+2AB=A$ и формула (2) принимает вид $(A+B)^2=A+B$. Вообще, в алгебре множеств не имеет смысла говорить о степенях, так как для любого n имеем $A^n=A$.

Покажем теперь, что для множеств есть и второй «распределительный закон», которого нет для чисел. Он выражается формулой

$$A+BC=(A+B)(A+C).$$

Чтобы доказать его, достаточно раскрыть справа скобки по правилу (1) и заметить, что множества AB и AC являются подмножествами в A: $AC \subset A$ и $AB \subset A$. Кроме того, $AA=A$, а поэтому

$$AA+AC+BA+BC=A+BC.$$

Отметим, далее, что операция вычитания множеств уже не похожа по своим свойствам на операцию вычитания чисел. Для любых трех чисел a, b, c верно равенство $a+(b-c)=(a+b)-c$. А для трех множеств A, B, C, вообще говоря,

$$A+(B-C) \neq (A+B)-C.$$

Дело в том, что при сложении множеств повторяющиеся элементы берутся только один раз, а вычитать можно и множество, не содержащееся в уменьшаемом. Поэтому, если, например, все три множества A, B, C совпадают, $A=B=C$, то $A+B=A$ и потому $(A+B)-C=A-A=\varnothing$ — пустое множество, а $A+(B-C)=A+\varnothing=A$.

В теории множеств есть еще операция, отсутствующая в обычной алгебре. Это операция перехода от данного множества A к его дополнению $A'=I-A$. Ясно, что множества A и A' не пересекаются, а в сумме составляют все универсальное множество I. Таким образом, $AA' = \varnothing$ и $A + A' = I$. Кроме того, ясно, что $\varnothing' = I$ (дополнение пустого множества совпадает с универсальным множеством) и $I' = \varnothing$. Далее, имеет место равенство $(A')' = A$ (рис. 17).

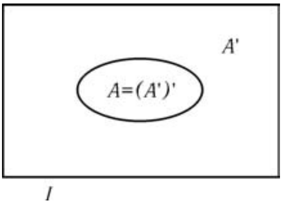


Рис. 17

Покажем теперь, что если $A \subset B$, то $A' \supset B'$. В самом деле, чем больше само множество, тем меньше элементов останется в его дополнении. На рис. 18 универсальное множество I изображено в виде прямоугольника, а множества A и B — в виде кругов. Дополнение к множеству A состоит из точек прямоугольника, лежащих вне меньшего круга, а дополнение к множеству B — из точек прямоугольника, лежащих вне большого круга. Ясно, что $A' \supset B'$.

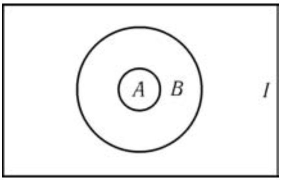


Рис. 18

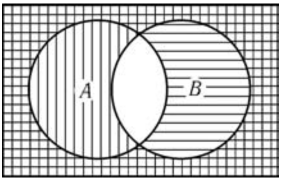


Рис. 19

Несколько сложнее доказываются следующие формулы:

$$(A + B)' = A'B'$$

и

$$(AB)' = A' + B'.$$

На рис. 19 дополнение к множеству A заштриховано горизонтальными линиями, а дополнение к множеству B — вертикальными линиями. Дополнение к множеству $A + B$ состоит из точек прямоугольника, не попавших ни в один из кругов. Это как раз точки, лежащие в области, покрытой обеими штриховками, то есть точки из $A'B'$. Поэтому ясно, что $(A + B)' = A'B'$. Точно так же этот рисунок иллюстрирует и формулу $(AB)' = A' + B'$.

Мы установили ряд свойств действий над множествами. Ради удобства приведем список этих свойств (как обычно, через $\varnothing$

мы обозначаем пустое множество, через I — универсальное множество, через A' — дополнение множества A в универсальном множестве).

1) $A \subset A$.
2) Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.
3) Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.
4) $\varnothing \subset A$.
5) $A \subset I$.
6) $A + B = B + A$.
7) $AB = BA$.
8) $A + (B + C) = (A + B) + C$.
9) $A(BC) = (AB)C$.
10) $A + A = A$.
11) $AA = A$.
12) $A(B + C) = AB + AC$.
13) $A + BC = (A + B)(A + C)$.
14) $A + \varnothing = A$.
15) $AI = A$.
16) $A + I = I$.
17) $A\varnothing = \varnothing$.
18) Соотношение $A \subset B$ эквивалентно каждому из соотношений $A + B = B$, $AB = A$.
19) $A + A' = I$.
20) $AA' = \varnothing$.
21) $\varnothing' = I$.
22) $I' = \varnothing$.
23) $(A')' = A$.
24) Соотношение $A \subset B$ эквивалентно $B' \subset A'$.
25) $(A + B)' = A'B'$.
26) $(AB)' = A' + B'$.

Отметим следующее замечательное «соотношение двойственности». Если в каждом из свойств 1)–26) заменить друг на друга символы «$\subset$» и «$\supset$», «$\varnothing$» и «I», «$+$» и «$\cdot$», то в результате получится снова одно из этих свойств. Например, таким путем из свойства 6) получается свойство 7), из свойства 12) — свойство 13) и т. д.

Отсюда вытекает, что каждой теореме, которая может быть выведена из свойств 1)–26), соответствует другая «двойственная» ей теорема, получающаяся из первой посредством указанных перестановок символов.

Разумеется, запомнить все свойства 1)–26) не слишком легко. Но это и не нужно. Дело в том, что можно ограничиться двумя основными операциями: сложением множеств и образованием дополнения, потребовав, чтобы выполнялись следующие три соотношения:

а) $A + B = B + A$,

б) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

в) $(A' + B')' + (A' + B)' = A$.

Определим теперь действие умножения AB, соотношение включения $A \subset B$ и множества I, $\varnothing$ формулами

г) AB по определению равно $(A' + B')'$;

д) $A \subset B$ по определению означает, что $A + B = B$;

е) $I = A + A'$, $\varnothing = I'$.

Тогда все свойства 1)–26) вытекают из формул а)–е).

Планета мифов

Однажды во время беседы за чашкой кофе в клубе Межгалактических путешественников знаменитый член этого клуба, Мюнхгаузен космической эры, Йон Тихий[1] рассказал:

«Высадка на планету Гесиод была очень трудна. Но когда я оказался на поверхности, то пожалел, что решил опуститься: на ней жили чудовища, более страшные, чем описанные в древних мифах греков. Навстречу мне вышла делегация из 1000 жителей планеты. У 811 из них был один глаз, как у циклопа Полифема, у 752 — вместо волос были змеи, как у Медузы Горгоны, а 418 имели рыбий хвост, как нереиды. При этом 570 чудовищ были одноглазы и змееволосы, 356 — одноглазы и имели рыбий хвост, 348 — змееволосы и с рыбьим хвостом, а 297 — одноглазы, змееволосы и с рыбьим хвостом. Старший из них обратился ко мне и сказал...»

Но члены клуба так и не узнали, что услышал Йон Тихий на планете чудовищ. Слушавший рассказ путешественника профессор Тарантога мгновенно произвел в уме какие-то выкладки и воскликнул:

«Дорогой Йон! Я готов поверить, что на этой планете жили существа с одним глазом, со змеями вместо волос и с рыбьими хвостами.

[1]Путешествия Йона Тихого описаны известным польским писателем-фантастом Станиславом Лемом в «Звездных дневниках Иона Тихого». Автор «Рассказов о множествах» надеется, что С. Лем простит ему неумелую попытку подражания, а читатели не будут обвинять С. Лема в литературных недочетах изложения автора.

Тебе приходилось встречать еще более страшных чудовищ — вспомни о курдлях. Но я надеюсь, что законы математики на этой планете не превратились в мифы».

И Тарантога взял со стола бумажную салфетку и нарисовал на ней следующую схему (рис. 20). Он сказал:

«Обозначим через I множество всех членов делегации, через A — множество одноглазых, через B — множество змееволосых делегатов, а через C — имеющих рыбьи хвосты. Эти множества изображены на рис. 20 в виде кругов. Три круга делят прямоугольник на 8 частей. Подсчитаем, сколько элементов входит в каждую часть. По условию в множество AB (то есть одноглазых и змееволосых) входило 570 существ, а в множество ABC (одноглазых, змееволосых и с рыбьими хвостами) — 297. Значит, в множество $AB - ABC$ входит 273 существа. Это то самое множество, которое на рис. 20 заштриховано горизонтальными линиями. Точно так же находим, что множество $AC - ABC$ состоит из 59 существ (это множество на рис. 20 заштриховано вертикальными линиями), а множество $BC - ABC$ — из 51 существа (это множество заштриховано косыми линиями).

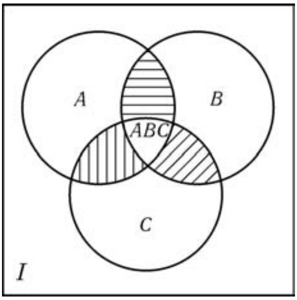


Рис. 20

Теперь уже легко найти численность части множества A, не принадлежащей $B + C$. Для этого из 811 надо вычесть 570 (численность множества AB) и еще 59 (численность множества $AC - ABC$). Останется 182 существа, которые одноглазы, но не имеют ни змей на голове, ни рыбьих хвостов. Точно так же устанавливаем, что численность множества $B - (A + C)$ равна 131, а множества $C - (A + B)$ равна 11. Результаты подсчетов изображены на рис. 21.

Подсчитаем теперь, сколько же членов делегации не были ни одноглазыми, ни змееволосыми и не имели рыбьих хвостов, то есть сколько элементов содержит множество $I - A - B - C$. Так как отдельные множества на рис. 21 не пересекаются, то для этого надо просто отнять от 1000 сумму $297 + 273 + 59 + 51 + 182 + 131 + 11$. Но эта сумма равна 1004, и потому множество $I - A - B - C$ насчитывает -4 существа. Но согласись сам, дорогой Йон, даже на планете мифов ни одно множество не может иметь отрицательной численности. Даже для тебя такие выдумки слишком невероятны».

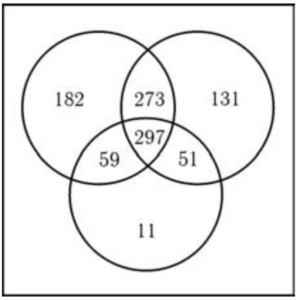


Рис. 21

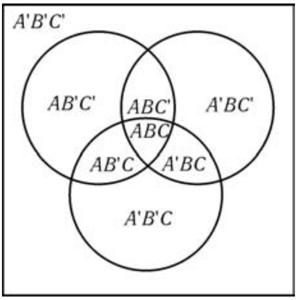


Рис. 22

★ Оставим Йона Тихого объясняться с профессором Тарантогой (скоро мы снова встретимся с нашим героем) и сделаем несколько замечаний. Мы разложили все множество I на 8 подмножеств и нашли их численность. Смысл этого разложения состоял в том, что полученные подмножества попарно не пересекались. Но это же разложение можно было бы получить иначе. Мы знаем, что $I = A + A' = B + B' = C + C'$ и потому

$$I = (A + A')(B + B')(C + C') = ABC + ABC' + AB'C + \\ + AB'C' + A'BC + A'BC' + A'B'C + A'B'C'.$$

Получилось разложение множества I на 8 подмножеств. Это те же самые подмножества, которые получил ранее профессор Тарантога (рис. 22).

Из предыдущей формулы сразу вытекает, что

$$N(A'B'C') = N(I) - N(ABC) - N(ABC') - N(AB'C) - \\ - N(AB'C') - N(A'BC) - N(A'BC') - N(A'B'C),$$

где через $N(D)$ обозначена численность множества D. Эту формулу можно преобразовать так, чтобы в нее не входили дополнения A', B', C' множеств A, B, C. С этой целью заменим C' на $I - C$. Мы получим, что

$$ABC' = AB(I - C) = AB - ABC$$

и потому

$$N(ABC') = N(AB) - N(ABC), \quad N(AB'C') = N(AB') - N(AB'C)$$

и т. д.

Заменим потом B' на $I-B$ и, наконец, A' на $I-A$, получим в конце концов равенство

$$N(A'B'C') = N(I) - N(A) - N(B) - N(C) + \\ + N(AB) + N(AC) + N(BC) - N(ABC).$$

Эта формула называется *формулой включений и исключений* и позволяет решать многие задачи, аналогичные рассмотренной выше.

Например, Тарантога мог сразу подсчитать по этой формуле, что

$$N(A'B'C') = 1000 - 811 - 752 - 418 + 570 + 356 + 348 - 297 = -4. \quad \bigstar$$

Вот еще одна задача, связанная с подсчетом численности конечных множеств. Она принадлежит известному детскому писателю Льюису Кэрроллу, автору «Алисы в стране чудес». Любопытно, что под псевдонимом Льюис Кэрролл писал математик Доджсон.

В одной из повестей Кэрролла есть следующая задача:

«В ожесточенном бою 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, 75 — одно ухо, 80 — одну руку и 85 — одну ногу. Каково минимальное число потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу?»

Обозначим через A множество одноглазых, через B — множество одноухих, через C — множество одноруких и через D — множество одноногих. В задаче требуется оценить численность множества $ABCD$. Ясно, что все универсальное множество I можно представить как сумму этого множества $ABCD$ и множества пиратов, сохранивших либо оба глаза, либо оба уха, либо обе руки, либо обе ноги. Поэтому

$$I = A' + B' + C' + D' + ABCD.$$

Отсюда следует, что численность множества I не больше суммы численностей множеств A', B', C', D' и $ABCD$ (она была бы равна этой сумме, если бы множества A', B', C' и D' попарно не пересекались). Но численность множества A' равна 30, множества B' — 25, множества C' — 20 и множества D' — 15. Так как численность универсального множества равна 100, то имеем

$$100 \leqslant 30 + 25 + 20 + 15 + N(ABCD).$$

Отсюда

$$N(ABCD) \geqslant 100 - 30 - 25 - 20 - 15 = 10.$$

Итак, не менее 10 пиратов лишились и глаза, и уха, и руки, и ноги.

Булевы алгебры ⋆

В математике встречаются и другие объекты, кроме множеств, для которых определены действия сложения и умножения, удовлетворяющие условиям 1)–26). Такие системы объектов изучил в 1847 году английский математик Буль (отец писательницы Этель Лилиан Войнич — автора знаменитой книги «Овод»). Поэтому такие системы назвали *булевыми алгебрами*. Но когда это название уже укоренилось, выяснилось, что Буль имел предшественников — в 1685 году братья Бернулли изучали «алгебру» с теми же законами.

Совпадение интересов братьев Бернулли и Буля вполне понятно: все они интересовались алгеброй логики, возможностью представить в алгебраической форме рассуждения, высказывания. А булевы алгебры специально приспособлены к этой цели. Высказыванием в математической логике называют предложение, которое может быть верно или ложно. При этом в логике не интересуются вопросом, верно или ложно данное высказывание на самом деле. Там обсуждают лишь проблему, по каким правилам можно из данных высказываний получать более сложные и как из знания истинности или ложности исходных высказываний выводить истинность или ложность сложных высказываний.

Над высказываниями можно делать следующие операции:

1) Отрицание — замена данного высказывания X противоположным высказыванием $\overline{X}$, которое истинно, если данное высказывание ложно, и ложно, если высказывание X истинно.
2) Конъюнкция — образование из данных двух высказываний X и Y третьего высказывания $X \wedge Y$, истинного лишь в случае, если истинны оба высказывания X и Y.
3) Дизъюнкция — образование из данных двух высказываний X и Y третьего высказывания $X \vee Y$, истинного в случае, когда истинно хоть одно из данных высказываний.
4) Импликация — образование из высказываний X и Y третьего высказывания $X \to Y$, ложного лишь в случае, когда X истинно и Y ложно.

Во многих случаях высказывание состоит в том, что некоторый элемент x принадлежит подмножеству A некоторого универсального множества I. В этом случае операции 1)–4) над высказываниями соответствуют известным нам операциям над множествами. Например, отрицание высказывания «$x \in A$» есть высказывание «$x \in A'$».

Таким образом, взятию дополнения A соответствует отрицание высказывания «$x \in A$». Точно так же операции пересечения множеств A и B соответствует конъюнкция высказываний «$x \in A$» и «$x \in B$», операции сложения множеств — дизъюнкция высказываний и соотношению $A \subset B$ — импликация высказываний «$x \in A$» и «$x \in B$». При этом высказывание «$x \in I$» всегда истинно, а высказывание «$x \in \varnothing$» всегда ложно.

Отмеченная связь делает естественным предположение, что законы 1)–26) верны не только для множеств, но и для высказываний, если только понимать $A \cap B$ как конъюнкцию высказываний, $A \cup B$ — как их дизъюнкцию, A' — как отрицание высказывания A, $A \subset B$ — как импликацию высказываний, I — как всегда истинное, а $\varnothing$ — как всегда ложное высказывание. Оказалось, что это предположение верно — высказывания образуют булеву алгебру относительно операций 1)–4).

Но булевы алгебры можно строить не только из высказываний. Рассмотрим, например, множество всевозможных последовательностей, содержащих n цифр, причем каждая цифра равна нулю или единице. Определим сложение и умножение двух таких последовательностей «покоординатно», причем таблицы сложения и умножения зададим так:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

логическое сложение

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

логическое умножение

Например,

$$(1,\ 0,\ 0,\ 1) + (1,\ 1,\ 0,\ 1) = (1,\ 1,\ 0,\ 1);$$
$$(1,\ 0,\ 0,\ 1)(1,\ 1,\ 0,\ 1) = (1,\ 0,\ 0,\ 1).$$

Положим, далее, $x \subset y$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, если для каждой координаты имеем $x_k \leqslant y_k$. Заменяя в последовательности 0 на 1, а 1 на 0, получим новую последовательность, которую обозначим x'. Наконец, через $\varnothing$ обозначим последовательность $(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, а через I — последовательность $(1,\ 1,\ \ldots,\ 1)$. Предоставляем читателю проверить выполнение законов 1)–26) для введенных операций над последовательностями.

Интересный пример булевой алгебры получается, если рассмотреть все натуральные делители натурального числа N, которое является произведением нескольких различных простых чисел. В качестве операции сложения делителей выберем образование наименьшего общего кратного этих делителей, а в качестве операции умножения — образование их наибольшего общего делителя. Дополнением делителя n назовем число $n' = \frac{N}{n}$. Наконец, скажем, что $n \subset m$, если m делится на n. Нетрудно проверить, что введенные операции удовлетворяют условиям 1)–26) из пункта «Алгебра множеств», причем роль пустого множества $\varnothing$ играет число 1, а роль универсального множества I — число N.

Если, например, взять $N = 30$, то булева алгебра будет состоять из чисел $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. «Сумма» делителей 2 и 5 равна 10, а их «произведение» равно 1. Делителем, «обратным» делителю 3, является 10, $3' = 10$. Наконец, $5 \subset 15$, так как 15 делится на 5.

Глава II. В мире чудес бесконечного

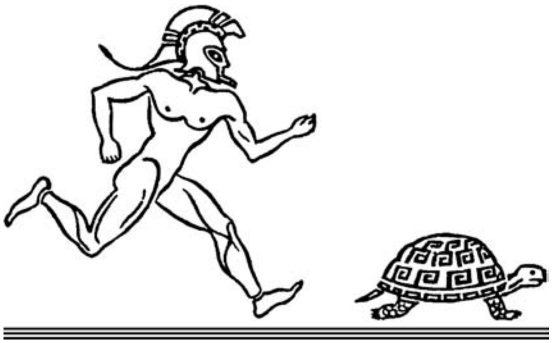
Тайны бесконечности

Не будет преувеличением сказать, что всю математику пронизывает идея бесконечности. Как правило, в математике интересуются не отдельными объектами (числами, геометрическими фигурами), а целыми классами таких объектов: совокупностями *всех* натуральных чисел, *всех* треугольников и т. д. А такие совокупности состоят из бесчисленного множества отдельных элементов.

Поэтому математики и философы всегда интересовались понятием бесконечности. Этот интерес возник с того самого момента, когда стало ясно, что за каждым натуральным числом идет следующее, то есть что числовой ряд бесконечен. Но уже первые попытки изучения бесконечности привели к многочисленным парадоксам.

Например, греческий философ Зенон, используя понятие бесконечности, доказывал невозможность движения. В самом деле, говорил он, для того чтобы стрела пролетела какой-то путь, сначала она должна сделать половину пути. Но прежде чем сделать полпути, надо пролететь четверть пути, восьмую часть пути и т. д. Так как процесс деления пополам никогда не кончится (вот она, бесконечность!), то стрела никогда не сможет сдвинуться с места. Точно так же он доказывал, что быстроногий Ахиллес никогда не догонит медлительную черепаху.

Из-за таких парадоксов и софизмов древнегреческие математики отказывались иметь дело с бесконечностью, изгоняли ее из математических рассуждений. Некоторые философы считали, что все геометрические фигуры состоят из конечного числа мельчайших неделимых частиц (атомов). Атомистическая теория легко устраняет парадоксы Зенона, поскольку в ней не допускается бесконечное деление — делить можно лишь до атомов, далее не делимых. Однако тут возникли новые трудности. Нельзя разделить пополам отрезок, если он состоит из нечетного числа неделимых (рис. 23). Круг тоже нельзя разделить на две равные части: центр будет принадлежать только одной из частей, а это противоречит их равенству.



Ахиллес и черепаха

Надо сказать, споры о бесконечности протекали порою довольно остро. Так, известный греческий философ Платон с такой непримиримостью относился к атомистической теории Демокрита, что повсюду разыскивал рукописи сочинений этого автора и уничтожал их — до изобретения книгопечатания такой метод идейной борьбы был весьма эффективен.

Методы, в которых использовалось понятие бесконечности, позволили греческим ученым получить ряд важных результатов, особенно в геометрии. Однако парадоксы Зенона приучили их к осторожности. Например, Евклид, формулируя свою знаменитую теорему о бесконечности множества простых чисел, выражается так: «Простых чисел существует больше всякого предложенного количества простых чисел». Итак, больше всякого предложенного количества, а бесконечно много или нет — об этом Евклид умалчивает. Вообще, древние греки с такой тщательностью маскировали применение методов, в которых существенную роль играло понятие бесконечности, что в XVI–XVII веках европейским математикам пришлось эти методы переоткрывать.

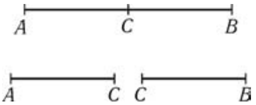
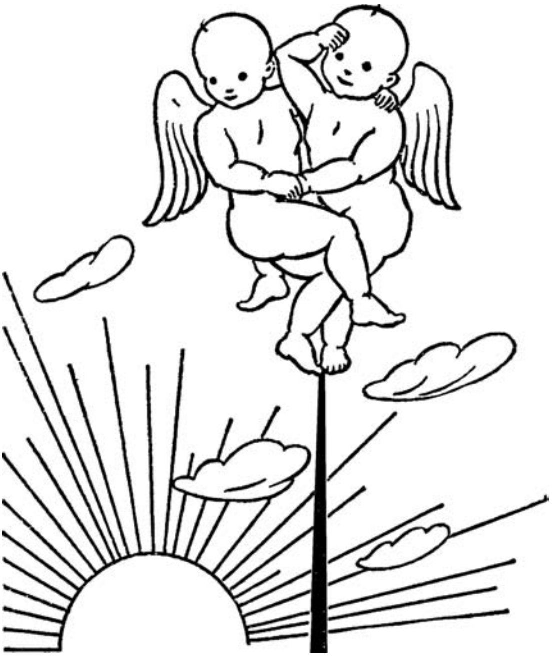


Рис. 23

В средние века проблемой бесконечного интересовались главным образом в связи с рассуждениями о том, конечно или нет множество ангелов, которое может поместиться на кончике иглы. Широкое использование бесконечности в математике началось с XVII века, когда был создан математический анализ. Такие понятия, как «бесконечно большая величина», «бесконечно малая величина», использовались в математических рассуждениях на каждом шаге. Однако в это время изучали не множества, содержащие бесконечно много элементов, а величины, которые в процессе своего изменения становятся все больше и больше, так что в конце концов они превосходят любое фиксированное значение. Такие величины называли «потенциально бесконечно большими» в том смысле, что они могут стать как угодно большими (potentia — возможность).



Сколько ангелов помещается на конце иглы?

И лишь в середине XIX века началось изучение множеств, состоящих из бесконечно большого количества элементов, приступили к анализу понятия бесконечности. Творцами математической теории бесконечных множеств были чешский ученый Бернард Больцано (основной труд которого был опубликован лишь много лет спустя после его смерти) и немецкий математик Георг Кантор. Этим замечательным ученым удалось преодолеть схоластику и превратить теорию множеств в важную часть математики.

Основным достижением Больцано и Кантора было изучение свойств бесконечных множеств, свойства конечных множеств были известны ученым и до них. Оказалось, что свойства конечных и бесконечных множеств совершенно непохожи друг на друга: многие вещи, невозможные для конечных множеств, легко выполняются для бесконечных. Попробуйте, например, поместить в гостиницу, каждый номер которой занят одним постояльцем, еще одного жильца, да так, чтобы в каждом номере снова жил лишь один человек. Не получается? Так это только потому, что число номеров в гостинице конечно! А если бы в ней было бесконечно много номеров... Но такие гостиницы могут встретиться разве что в рассказах нашего старого знакомого, межзвездного путешественника Йона Тихого. Итак, предоставим ему слово.

Необыкновенная гостиница, или тысяча первое путешествие Йона Тихого

Домой я вернулся довольно поздно — вечер воспоминаний в клубе «Туманность Андромеды» затянулся далеко за полночь. Всю ночь меня мучили кошмары. То мне снилось, что меня проглотил огромный курдль, то грезилось, что я снова лечу на планету Дурдиотов и не знаю, как избежать тамошней страшной машины, превращающей людей в шестиугольники, то... В общем, никому не советую мешать старку с выдержанным медом. Неожиданный телефонный звонок вернул меня в мир реальности. Звонил старый друг и коллега по межзвездным странствиям профессор Тарантога.

«Срочное задание, дорогой Йон, — услышал я. — Астрономы обнаружили в космосе какой-то странный объект — от одной галактики до другой тянется таинственная черная линия. Никто не понимает, в чем дело. Самые лучшие радиотелескопы, нейтриноскопы и гравитоскопы не могут помочь в раскрытии тайны. Осталась надежда лишь на тебя. Срочно вылетай в направлении туманности АЦД-1587».

На другой день я получил из ремонта свою старую фотонную ракету, установил на нее ускоритель времени и электронного робота, знавшего все языки космоса и все рассказы о звездопроходцах (это гарантировало от скуки), и вылетел по заданию.

Когда робот исчерпал весь свой запас рассказов и начал повторяться (нет ничего хуже, чем электронный робот, десятый раз повторяющий старую историю), вдали показалась цель моего путешествия. Туманности, застилавшие таинственную линию, оказались позади, и предо мною предстала... гостиница «Космос».

Выяснилось, что межзвездные скитальцы выгонты, которым я когда-то соорудил небольшую планету, растащили и ее на мелкие части и вновь остались без пристанища. Тогда, чтобы больше не скитаться по чужим галактикам, они решили построить грандиозное сооружение — гостиницу для всех путешествующих по космосу. Эта гостиница протянулась через почти все галактики. Говорю «почти все», потому что выгонты демонтировали некоторые необитаемые галактики, а из каждой оставшейся утащили по нескольку плохо лежавших созвездий.

Но гостиницу они отстроили на славу. В каждом номере были краны, из которых текла холодная и горячая плазма. При желании можно было на ночь распылиться, а утром портье собирал постояльцев по их атомным схемам.

А самое главное, *в гостинице было бесконечно много номеров.* Выгонты надеялись, что теперь никому больше не придется слышать порядком надоевшую им за время скитаний фразу «свободных номеров нет».

Тем не менее мне не повезло. Когда я вошел в вестибюль гостиницы, первое, что бросилось в глаза, был плакат: «Делегаты съезда космозоологов регистрируются на 127-м этаже».

Так как космозоологи приехали из всех галактик, а их — бесконечное множество, то все номера оказались занятыми участниками съезда. Для меня места уже не хватило.

Администратор пытался, правда, поселить меня с кем-нибудь из космозоологов. Но когда я выяснил, что один предполагаемый сосед дышит фтором, а другой считает нормальной для себя температурой окружающей среды 860°, то вежливо отказался от столь «приятного» соседства.

К счастью, директором гостиницы был выгонт, хорошо помнивший услуги, которые я когда-то оказал этому племени. Он постарался устроить меня в гостинице, — ведь, ночуя в межзвездном пространстве, можно было схватить воспаление легких. После некоторых размышлений он обратился к администратору и сказал:

Строительство гостиницы «Космос»

— Поселите его в № 1.

— Куда же я дену жильца этого номера? — удивленно спросил администратор.

— А его переселите в № 2. Жильца же из № 2 отправьте в № 3, из № 3— в № 4 и т. д.

Тут только я оценил необыкновенные свойства гостиницы. Если бы в ней было лишь конечное число номеров, то жителю последнего номера пришлось бы перебраться в межзвездное пространство. А из-за того, что гостиница имела бесконечно много номеров, всем хватило места, и мне удалось вселиться, не лишив места никого из космозоологов.

Я не удивился, когда на другое утро мне предложили переселиться в № 1 000 000. Просто в гостиницу прибыли запоздавшие космозоологи из галактики ВСК-3472, и надо было разместить еще 999 999 жильцов. Но когда на третий день пребывания в гостинице я зашел к администратору заплатить за номер, у меня потемнело в глазах. К окошку тянулась очередь, конец которой терялся где-то около Магеллановых облаков. В очереди слышались голоса: «Меняю две марки туманности Андромеды на марку Сириуса!» «У кого есть марка Кита 57-го года космической эры?» В недоумении я обратился к администратору и спросил:

— А это кто такие?

— Межгалактический съезд филателистов.

— И много их?

— Бесконечное множество — по одному представителю от каждой галактики.

— Но как же их разместят, ведь космозоологи выедут только завтра?

— Не знаю, об этом сейчас будут говорить на пятиминутке у директора.

Однако задача оказалась весьма сложной, и пятиминутка (как это часто бывает и на Земле) затянулась на целый час. Наконец администратор вышел от директора и приступил к расселению. В первую очередь он приказал переселить жильца из № 1 в № 2. Мне это показалось странным, так как по имевшемуся опыту я знал, что такое переселение освобождало лишь один номер, а разместить надо было ни много ни мало, а бесконечное множество филателистов. Но администратор продолжал командовать:

— А жильца из № 2 переселите в № 4, из № 3 — в № 6, вообще из номера n — в номер $2n$.

Теперь стал ясен его план: таким путем он освободил бесконечное множество нечетных номеров и мог расселять в них филателистов. В результате четные номера оказались занятыми космозоологами, а нечетные — филателистами (о себе не говорю — за три дня знакомства я так подружился с космозоологами, что был выбран почетным председателем их съезда; вместе со всеми космозоологами мне пришлось покинуть обжитый номер и переехать из № 1 000 000 в № 2 000 000). А мой знакомый филателист, стоявший в очереди 574-м, занял № 1147. Вообще филателисты, стоявшие в очереди n-ми, занимали номер $2n-1$.

На другой день положение с номерами стало легче — съезд космозоологов окончился, и они разъехались по домам. Я же переехал к директору гостиницы, в квартире которого освободилась одна комната. Но то, что хорошо для постояльцев, не всегда устраивает администрацию. Через несколько дней мой гостеприимный хозяин загрустил.

— В чем дело? — спросил я его.

— Половина номеров пустует. Финансовый план не выполняется.

Я, правда, не совсем понял, о каком финансовом плане шла речь, ведь плата поступала с бесконечного множества номеров, но тем не менее дал совет:

— А вы уплотните постояльцев, переселите их так, чтобы все номера оказались занятыми.

Это оказалось совсем просто сделать. Филателисты занимали лишь нечетные номера: 1, 3, 5, 7, 9 и т. д. Жильца из № 1 оставили в покое. Из № 3 переселили в № 2, из № 5 — в № 3, из № 7 — в № 4 и т. д. В результате все номера вновь оказались заполненными, хотя ни один новый жилец не въехал.

Но неприятности директора на этом не кончились. Выяснилось, что выгонты не ограничились возведением гостиницы «Космос». Неугомонные строители соорудили еще бесконечное множество гостиниц, каждая из которых имела бесконечно много номеров. При этом они демонтировали так много галактик, что нарушилось межгалактическое равновесие, а это могло повлечь за собой весьма тяжкие последствия. Поэтому им было предложено закрыть все гостиницы, кроме нашей, и вернуть использованный материал на место. Но выполнение этого приказа было затруднено, поскольку все гостиницы (в том числе и наша) были заполнены. Предстояло переселить жильцов из бесконечного множества гостиниц, каждая из которых имела бесконечно много постояльцев, в одну гостиницу, да и та была уже заполнена.

— С меня хватит! — воскликнул директор, — Сначала я в полную гостиницу поместил одного постояльца, потом еще 999 999, потом еще бесконечно много жильцов; а теперь от меня хотят, чтобы в нее вместилось еще бесконечное множество бесконечных множеств жильцов. Нет, гостиница не резиновая, пусть где хотят, там и помещают!

Но приказ есть приказ, и через пять дней надо было все подготовить к встрече новых постояльцев. Эти дни в гостинице никто не работал — все думали, как решить задачу. Был объявлен конкурс с премией — туристическим путешествием по одной из галактик. Но все предлагавшиеся решения отвергались, как неудачные. Так, младший повар предложил оставить жильца из первого номера нашей гостиницы в том же № 1, из второго номера переселить в № 1001, из третьего номера — в № 2001 и т. д. После этого поселить жильцов второй гостиницы в №№ 2, 1002, 2002 и т. д. нашей гостиницы, жильцов третьей гостиницы — в №№ 3, 1003, 2003 и т. д. Проект был отвергнут, так как уже жители первых 1000 гостиниц займут все номера и некуда будет поселить жителей 1001-й гостиницы.

Мне вспомнилось по этому поводу, что, когда раболепные римские сенаторы предложили императору Тиберию переименовать в его честь месяц сентябрь в «тиберий» (предыдущие месяцы уже получили имена императоров Юлия и Августа), он язвительно спросил их: «А что же вы предложите тринадцатому цезарю?»

Неплохой вариант предложил бухгалтер гостиницы. Он посоветовал воспользоваться свойствами геометрической прогрессии и расселить постояльцев так: жителей первой гостиницы — в №№ 2, 4, 8, 16, 32 и т. д. (эти числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2). Жителей второй гостиницы — в №№ 3, 9, 27, 81 и т. д. (а это члены геометрической прогрессии со знаменателем 3). Так же предложил он расселять и жителей остальных гостиниц. Но директор спросил его:

— А для третьей гостиницы надо использовать прогрессию со знаменателем 4?

— Конечно, — ответил бухгалтер.

— Тогда ничего не получится, ведь в четвертом номере уже живет обитатель первой гостиницы, а теперь туда же надо вселить и жителя третьей гостиницы.

Настала моя очередь показать, что не зря в Звездной академии пять лет изучают математику.

— Воспользуйтесь простыми числами! Поселите жителей первой гостиницы в №№ 2, 4, 8, 16, ..., второй — в №№ 3, 9, 27, 81, ... , третьей — в №№ 5, 25, 125, 625, ..., четвертой — в №№ 7, 49, 343, ...

— А не получится ли опять, что в один номер придется помещать двух постояльцев? — спросил директор.

— Нет! Ведь если взять два простых числа, то никакие их степени с натуральными показателями не могут оказаться равными. Если p и q — простые числа, причем $p \neq q$, а m и n — натуральные числа, то $p^m \neq q^n$.

Директор согласился со мной и тут же нашел усовершенствование предложенного способа, при котором использовались лишь два простых числа: 2 и 3. Именно, он предложил поселить жильца из m-го номера n-й гостиницы в номер $2^m 3^n$. Дело в том, что если $m \neq p$ или $n \neq q$, то $2^m 3^n \neq 2^p 3^q$. Поэтому в один и тот же номер не поселятся двое.

Это предложение привело всех в восторг. Была решена задача, всем казавшаяся неразрешимой. Но премии не получили ни я, ни директор, — при наших решениях слишком много номеров оставались пустыми (у меня — такие номера, как 6, 10, 12 и вообще все номера, которые не были степенями простых чисел, а у директора — номера, которые нельзя записать в виде $2^m 3^n$). Самое лучшее решение предложил один из филателистов — президент Математической академии галактики Лебедя.

Он посоветовал сначала составить таблицу, занумеровав ее строки номерами гостиниц, а столбцы — номерами комнат. Например, на пересечении четвертой строки и шестого столбца записывается шестая комната четвертой гостиницы. Вот эта таблица (вернее, ее левая верхняя часть, так как для записи всей таблицы надо бесконечно много строк и столбцов):

(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	...	(1; n)	...
(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	...	(2; n)	...
(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	...	(3; n)	...
(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	...	(4; n)	...
(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	...	(5; n)	...
....	....	....	....	....	...	....	...
(m; 1)	(m; 2)	(m; 3)	(m; 4)	(m; 5)	...	(m; n)	...
....	....	....	....	....	...	....	...

— А теперь расселяйте обитателей по квадратам, — сказал математик-филателист.

— Как? — не понял директор.

— По квадратам! В № 1 поселяется жилец из (1; 1), то есть из первого номера первой гостиницы; в № 2 — из (1; 2), то есть из второго номера первой гостиницы; в № 3 — из (2; 2) — второго номера второй гостиницы и в № 4 — из (2; 1) — первого номера второй гостиницы. Тем самым будут расселены жильцы из верхнего левого квадрата со стороной 2. После этого в № 5 поселяем жильца из (1; 3), в № 6 — из (2; 3), в № 7 — из (3; 3), в № 8 — из (3; 2), в № 9 — из (3; 1). (Эти номера образуют квадрат со стороной 3.)

И, взяв листок бумаги, он набросал на нем следующую схему расселения:

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
(1;\,1) & & (1;\,2) & & (1;\,3) & & (1;\,4) & & (1;\,5) & & \dots & & (1;\,n) & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
(2;\,1) & \leftarrow & (2;\,2) & & (2;\,3) & & (2;\,4) & & (2;\,5) & & \dots & & (2;\,n) & \dots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
(3;\,1) & \leftarrow & (3;\,2) & \leftarrow & (3;\,3) & & (3;\,4) & & (3;\,5) & & \dots & & (3;\,n) & \dots \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
(4;\,1) & \leftarrow & (4;\,2) & \leftarrow & (4;\,3) & \leftarrow & (4;\,4) & & (4;\,5) & & \dots & & (4;\,n) & \dots \\
 & & & & & & & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
(5;\,1) & \leftarrow & (5;\,2) & \leftarrow & (5;\,3) & \leftarrow & (5;\,4) & \leftarrow & (5;\,5) & & \dots & & (5;\,n) & \dots \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow & \\
\multicolumn{14}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow & \\
(n;\,1) & \leftarrow & (n;\,2) & \leftarrow & (n;\,3) & \leftarrow & (n;\,4) & \leftarrow & (n;\,5) & \leftarrow & \dots & \leftarrow & (n;\,n) & \dots \\
\multicolumn{14}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}
$$

— Неужели для всех хватит места? — усомнился директор.

— Конечно. Ведь в первые n^2 номеров мы поселяем при этой схеме жильцов из первых n номеров первых n гостиниц. Поэтому рано или поздно каждый жилец получит номер. Например, если это жилец из № 136 гостиницы № 217, то он получит номер на 217-м шаге. Легко даже сосчитать этот номер. Он равен $217^2 - 136 + 1$. Вообще, если жилец занимает номер n в m-й гостинице, то при $n \geqslant m$ он займет номер $(n-1)^2 + m$, а при $n < m$ — номер $m^2 - n + 1$.

Предложенный проект и был признан наилучшим — все жители из всех гостиниц были поселены в нашей гостинице, и ни один ее номер не пустовал. Математику-филателисту досталась премия — туристическая путевка в галактику ЛЦР-287.

В честь столь удачного размещения директор гостиницы устроил прием, на который пригласил всех ее жильцов. Этот прием также не обошелся без осложнений. Обитатели комнат с четными номерами задержались на полчаса, и, когда они появились, оказалось, что все стулья заняты, хотя гостеприимный хозяин поставил по стулу на каждого гостя. Пришлось подождать, пока все пересели на новые места и освободили необходимое количество стульев (разумеется, ни одного нового стула в зал не внесли). Зато когда стали подавать мороженое, то каждый гость получил по две порции, хотя повар заготовил в точности по одной порции на гостя. Надеюсь, что теперь читатель сам поймет, как все это случилось.

После конца приема я сел в свою фотонную ракету и полетел на Землю. Мне нужно было рассказать всем земным космонавтам о новом пристанище в космосе. Кроме того, я хотел проконсультироваться с виднейшими математиками Земли и моим другом профессором Тарантогой о свойствах бесконечных множеств.

От автора. На этом мы временно расстанемся с нашим героем. Многое в его рассказе вызывает сомнения — ведь по законам теории относительности невозможно передавать сигналы со скоростью, большей чем 300 000 км/с. Поэтому даже самая первая команда администратора потребовала бы для своего выполнения бесконечно большого промежутка времени. Но не будем требовать слишком многого от Йона Тихого — в его путешествиях бывали куда более невероятные приключения.

Дальнейшая часть книги посвящается рассказу о теории бесконечных множеств. И хотя события будут развертываться не в межзвездном пространстве, а на отрезке $[0; 1]$ или квадрате со стороной 1, многие из них окажутся не менее необычайными.

Как сравнивать множества

В главе 1 мы занимались свойствами, общими как для конечных, так и для бесконечных множеств. Теперь мы займемся свойствами, характерными только для бесконечных множеств. Из рассказа Йона Тихого уже известно, что эти свойства сильно отличаются от свойств конечных множеств, — вещи, невозможные для конечных множеств, оказываются возможными для бесконечных.

Первый вопрос, который мы сейчас разберем, это вопрос о сравнении друг с другом бесконечных множеств. Для конечных множеств самой разной природы всегда можно сказать, какое из них содержит больше элементов, а какое меньше. Для бесконечных же множеств этот вопрос становится гораздо более сложным. Например, чего больше, натуральных чисел или рациональных, рациональных или действительных? Где больше точек, на отрезке или на всей прямой, на прямой или в квадрате?

На первый взгляд кажется, что ответить на эти вопросы совсем просто. Ведь множество натуральных чисел является частью множества рациональных чисел, а отрезок — частью прямой. Не ясно ли, что поэтому натуральных чисел меньше, чем рациональных, а точек на отрезке меньше, чем точек на всей прямой? Оказывается, не ясно. Ведь ниоткуда не следует, что при переходе к бесконечным множествам сохранятся законы, выведенные из рассмотрения конечных множеств, например, закон о том, что «часть меньше целого».

А самое главное, попытка сравнения бесконечных множеств по тому признаку, что одно является частью другого, заранее обречена на неудачу. Например, где больше точек, в квадрате или на всей бесконечной прямой? Ведь ни квадрат нельзя вложить в прямую линию, ни прямую линию нельзя, не ломая ее, поместить в квадрат. Разумеется, можно разломать прямую линию на отрезки, длина которых равна стороне квадрата, и после этого каждый отрезок поместить в квадрат так, чтобы они не пересекались друг с другом. Но вдруг и квадрат можно как-то разбить на части, а потом эти части положить на прямую, чтобы они не задевали друг друга? А сколько есть бесконечных множеств, не являющихся частями друг друга! Множество квадратов на плоскости и множество кругов на той же плоскости не имеют ни одного общего элемента. Как же сравнить их? Как узнать, чего больше во вселенной — атомов азота или кислорода?

Итак, задача поставлена. В первую очередь мы выясним, в каком случае надо говорить, что одно множество содержит столько же элементов, сколько и второе. Иными словами, выясним, в каких случаях два бесконечных множества имеют «поровну» элементов.

На танцплощадке

Для конечных множеств задача сравнения решается просто. Чтобы узнать, одинаково ли число элементов в двух множествах, достаточно пересчитать их. Если получатся одинаковые числа, то, значит, в обоих множествах поровну элементов. Но для бесконечных множеств такой способ не годится, ибо, начав пересчитывать элементы бесконечного множества, мы рискуем посвятить этому делу всю свою жизнь и все же не закончить начатого предприятия.

Но и для конечных множеств метод пересчета не всегда удобен. Пойдем, например, на танцплощадку. Как узнать, поровну ли здесь юношей и девушек? Конечно, можно попросить юношей отойти в одну сторону, а девушек в другую, и заняться подсчетом как тех, так и других. Но, во-первых, мы получим при этом избыточную информацию, нас не интересует, сколько здесь юношей и девушек, а интересует лишь, поровну ли их. Во-вторых, не для того собралась молодежь на танцплощадке, чтобы стоять и ждать конца пересчета, а для того, чтобы потанцевать.

Ну что же. Удовлетворим их желание и попросим оркестр сыграть какой-нибудь танец, который все умеют танцевать. Тогда юноши пригласят девушек к танцу и... наша задача будет решена. Ведь если окажется, что все юноши и все девушки танцуют, то есть если вся молодежь разбилась на танцующие пары, то ясно, что на площадке ровно столько же юношей, сколько и девушек.

Совершенно тем же способом можно узнать, что число зрителей в театре равно числу театральных кресел. Если во время спектакля все места заняты, причем никто из зрителей не стоит в проходах и на каждом месте сидит один зритель, то можно быть уверенным, что зрителей ровно столько же, сколько и театральных кресел.

Когда в дождливую погоду по улице пробегают люди, то число людей такое же, как и число их зонтов; у каждого человека — один и только один зонт, и никто не рискнул выбежать на улицу без зонта.

На каждый прилив — по отливу

Мы познакомились с тем, как узнать, что два конечных множества имеют поровну элементов, не прибегая к пересчету этих множеств. Этот способ можно применить и для бесконечных множеств. Только здесь уж не удастся прибегнуть к помощи оркестра, а придется самим располагать элементы двух сравниваемых множеств в «танцующие пары».

Итак, пусть у нас даны два множества A и B. Говорят, что между ними установлено *взаимно однозначное соответствие*, если элементы этих множеств объединены в пары $(a;\, b)$ так, что:

1) элемент a принадлежит множеству A, а элемент b — множеству B;
2) каждый элемент обоих множеств попал в одну и только одну пару.

Например, если множество A состоит из юношей на танцплощадке, а множество B — из девушек на той же площадке, то пары $(a;\, b)$ образуются из танцующих друг с другом юноши и девушки. Если множество A состоит из зрителей, а множество B — из театральных кресел, то пара $(a;\, b)$ образуется из зрителя и кресла, на котором он сидит. Наконец, если A — множество людей на улице, а B — множество их зонтов, то пара $(a;\, b)$ образуется из человека и его зонта.

Разумеется, не всякое соответствие между множествами является взаимно однозначным. Если множество A состоит из всех деревьев на Земле, а множество B — из растущих на них плодов, то между этими множествами можно установить соответствие: каждому плоду сопоставить дерево, на котором он растет. Но это соответствие не будет взаимно однозначным: на некоторых деревьях растет помногу плодов, а другие сейчас не плодоносят. Поэтому одни элементы a (деревья) будут участвовать во многих парах, а другие элементы a не войдут ни в одну пару.

Существование взаимно однозначного соответствия для конечных множеств равносильно тому, что у них поровну элементов. Важнейшим поворотным пунктом в теории множества был момент, когда Кантор решил применить идею взаимно однозначного соответствия для сравнения бесконечных множеств.

Иными словами, по Кантору два (быть может и бесконечных) множества A и B имеют поровну элементов, если между этими множествами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Обычно математики не говорят, что «множества A и B имеют поровну элементов», а говорят, что «A и B имеют одинаковую *мощность*» или «множества A и B *эквивалентны*» и обозначают как $A \sim B$.

Таким образом, для бесконечных множеств слово «мощность» значит то же самое, что для конечных множеств «число элементов».

Еще до Кантора к понятию взаимно однозначного соответствия пришел чешский ученый Б. Больцано. Но он отступил перед трудностями, к которым вело это понятие. Как мы вскоре увидим, после принятия принципа сравнения бесконечных множеств с помощью взаимно однозначного соответствия пришлось расстаться со многими догмами.

Равна ли часть целому?

Основной догмой, которую пришлось отбросить, было положение, установленное на самой заре развития математики: «*часть меньше целого*». Это положение безусловно верно для конечных множеств, но для бесконечных множеств оно уже теряет силу. Вспомните, как расселил директор необыкновенной гостиницы космозоологов по четным номерам. При этом расселении жилец из номера n переезжал в номер $2n$. Иными словами, расселение шло по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 \ldots & 2n & \ldots \end{array}$$

Но эта схема устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

и его частью — множеством четных чисел

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$$

А мы договорились считать, что множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, содержат поровну элементов. Значит, множество натуральных чисел содержит столько же элементов, сколько и его часть — множество четных чисел.

Точно так же можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством чисел вида

$$10, 100, 1000, 10\,000, \ldots$$

Для этого надо сопоставить каждому натуральному числу n число 10^n:

$$n \to 10^n.$$

Этим желаемое взаимно однозначное соответствие и устанавливается. Точно так же устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством всех квадратов натуральных чисел:

$$n \to n^2$$

или множеством всех кубов натуральных чисел:

$$n \to n^3$$

и т. д.

Вообще, между множеством всех натуральных чисел и любой его бесконечной частью всегда можно установить взаимно однозначное соответствие. Для этого достаточно перенумеровать по порядку числа из этой части.

★ Впрочем, не зря говорят, что ничто не ново под Луной, а новое — это только хорошо забытое старое. Еще в начале XVII века Галилей размышлял о противоречиях бесконечного и обнаружил возможность взаимно однозначного соответствия между множеством натуральных чисел и множеством их квадратов. В его книге «Беседы и математические доказательства, относящиеся к механике по местному движению» (1638 год) приведен диалог, в котором Сальвиати, выражающий мысли самого Галилея, говорит:

«Сказанное нами относится к числу затруднений, происходящих вследствие того, что, рассуждая нашим ограниченным разумом о бесконечном, мы приписываем последнему свойства, известные нам по вещам конечным и ограниченным. Между тем это неправильно, так как такие свойства, как бóльшая и меньшая величина и равенство, неприменимы к бесконечному, относительно которого нельзя сказать, что одна бесконечность больше или меньше другой или равна ей».

В подтверждение своей мысли Сальвиати отмечает, что, с одной стороны, «квадратов столько же, сколько существует корней, так как каждый квадрат имеет свой корень, и каждый корень — свой квадрат; ни один квадрат не может иметь более одного корня, и ни один корень — более одного квадрата...[1] При этом число корней равно количеству всех чисел вообще, потому что нет ни одного числа, которое не могло бы быть корнем какого-нибудь квадрата; установив это, приходится сказать, что число квадратов равно общему количеству всех чисел...». С другой стороны, Сальвиати отмечает, что «количество всех чисел вместе — квадратов и неквадратов — больше, нежели одних только квадратов», причем «числа квадратов непрерывно и в весьма большой пропорции убывают по мере того, как мы переходим к большим числам». В качестве единственного выхода из обнаруженного противоречия Сальвиати предлагает следующее:

[1]Здесь имеются в виду только натуральные числа.

«Я не вижу возможности никакого другого решения, как признать, что бесконечно количество чисел вообще, бесконечно число квадратов, бесконечно и число корней. Нельзя сказать, что число квадратов меньше количества всех чисел, а последнее больше: в конечном выводе свойства равенства, а также большей и меньшей величины не имеют места там, где дело идет о бесконечности, и применимы только к конечным количествам».

Мы видим, что Галилей, по сути дела, владел идеей взаимно однозначного соответствия и видел, что такое соответствие можно установить между множеством всех натуральных чисел и множеством квадратов, а потому эти множества можно считать имеющими одинаковое количество элементов. Понимал он и то, что для бесконечных множеств часть может быть равной целому. Но отсюда он сделал неверный вывод, что все бесконечности одинаковы: он имел дело лишь с бесконечными подмножествами натурального ряда, а их можно перенумеровать.

Галилей не мог себе представить, что множество всех точек отрезка перенумеровать нельзя (это у нас вскоре будет показано). Подобно атомистам древности он полагал, что отрезок складывается из поддающейся пересчету бесконечной совокупности атомов. ★

Счетные множества

Все множества, которые имеют столько же элементов, сколько имеет множество натуральных чисел, называют *счетными*. Иными словами, множество называется счетным, если оно бесконечно, но его элементы можно перенумеровать натуральными номерами. Например, множество четных чисел, множество нечетных чисел, множество простых чисел, да и вообще любая бесконечная часть множества натуральных чисел являются счетными множествами.

Иногда для того, чтобы установить счетность того или иного множества, надо проявить изобретательность. Возьмем, например, множество всех целых чисел (как положительных, так и отрицательных):

$$\ldots,\ -n,\ \ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

Если мы попробуем нумеровать его по порядку, начиная с какого-нибудь места, то никогда эту нумерацию не закончим. Поэтому все числа до выбранного места останутся незанумерованными. Чтобы не пропустить при нумерации ни одного числа, надо записать это множество в виде двух строк:

$$\begin{array}{cccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots \\ -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6, & -7, & \ldots \end{array}$$

и нумеровать по столбцам. При этом 0 получит № 1, -1 — № 2, 1 — № 3, -2 — № 4 и т. д. Иными словами, все положительные числа и нуль нумеруются нечетными числами, а все отрицательные целые числа — четными. Это похоже на то, как директор гостиницы поместил всех филателистов в гостиницу, заполненную космозоологами.

Но если в то, что множество всех целых чисел счетно, легко поверить, то в счетность множества рациональных чисел поверить труднее. Ведь рациональные числа расположены очень густо — между любыми двумя рациональными числами найдется еще бесконечно много рациональных чисел. Поэтому совершенно непонятно, как их нумеровать; кажется, что между любыми двумя числами надо перенумеровать еще бесконечно много чисел, и этот процесс никогда не закончится. И действительно, занумеровать рациональные числа в порядке возрастания их величины невозможно. Однако если отказаться от расположения рациональных чисел в порядке возрастания, то занумеровать их все же удается. Сделаем так: выпишем сначала все положительные дроби со знаменателем 1, потом все положительные дроби со знаменателем 2, потом со знаменателем 3 и т. д. У нас получится таблица следующего вида:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \ldots \\[4pt] \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \ldots \\[4pt] \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \ldots \\[4pt] \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \ldots \\[4pt] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Ясно, что в этой таблице мы встретим любое положительное рациональное число, и притом не один раз. Например, число 3 встретится и в виде дроби $\frac{3}{1}$, и в виде дроби $\frac{6}{2}$, и в виде дроби $\frac{9}{3}$.

Теперь приступим к нумерации. Для этого вспомним последний подвиг директора необыкновенной гостиницы, который расселил в ней жителей из бесконечного множества таких же гостиниц. Он тогда воспользовался нумерацией по квадратам. Точно так же поступим и мы, только с тем осложнением, что некоторые дроби будем пропускать (например, так как $\frac{1}{1}$ получила уже № 1, то дроби $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$ и т. д. пропустим: они выражают то же самое число). Получится следующая нумерация положительных рациональных чисел:

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ \ldots$$

Мы занумеровали, таким образом, все положительные рациональные числа. А теперь уже легко понять, как нумеруются все (то есть положительные и отрицательные) рациональные числа. Для этого надо записать их отдельно в виде двух таблиц и числа одной таблицы нумеровать четными номерами, а второй — нечетными (и еще оставить один номер для нуля).

Вообще, складывая счетное множество счетных множеств, мы снова получим счетное множество. Это доказывается тем же самым приемом нумерации по квадратам.

Алгебраические числа ★

Нам удалось занумеровать все рациональные числа. Но рациональные числа получаются из натуральных чисел с помощью лишь одной операции — деления (и еще, быть может, изменения знака). А теперь мы добавим еще операцию извлечения корня и будем рассматривать все числа, которые можно получить из натуральных чисел с помощью этой операции и арифметических действий. Среди этих чисел будут такие, как $\sqrt[3]{2}+1$, $\sqrt[4]{3-\sqrt{5}}$ и даже такие «монстры», как

$$\sqrt[7]{\frac{\sqrt[15]{147+\sqrt{3}}-\sqrt[14]{6+\sqrt{2}}}{\sqrt[21]{289-\sqrt[5]{4+\sqrt{2}}}+1}}.$$

Возникает вопрос: можно ли занумеровать и множество всех таких чисел? Это кажется еще более трудным, чем занумеровать множество рациональных чисел. В самом деле, какому числу надо приписать меньший номер, $\sqrt[3]{2}$ или $\sqrt{3}$? Но оказывается, что и это множество счетно, то есть его элементы можно перенумеровать. Чтобы доказать это утверждение, отметим сначала, что каждое число рассматриваемого вида является корнем алгебраического уравнения вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{1}$$

где $a_0 \neq 0$ и $a_0, \ldots, a_n$ — целые числа. Например, $\dfrac{3}{7}$ — корень уравнения $7x - 3 = 0$, $\sqrt[3]{5}$ — корень уравнения $x^3 - 5 = 0$, а $\sqrt{2 + \sqrt[3]{3}}$ — корень уравнения $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 11 = 0$. Иногда бывает очень трудно написать уравнение, которому удовлетворяло бы число описанного выше вида, но тем не менее это всегда возможно. Попробуйте сами составить уравнение, которому удовлетворяло бы число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Заметим, что далеко не все корни уравнений вида (1), где $a_0, \ldots, a_n$ — целые числа, выражаются через натуральные числа с помощью арифметических действий и операции извлечения корня. Например, корни уравнения $x^5 - 3x + 3 = 0$ нельзя выразить в таком виде, оно, как говорят, не решается в радикалах. Все числа, являющиеся корнями уравнений вида (1) с целыми коэффициентами, называют *алгебраическими числами*. Таким образом, множество алгебраических чисел содержит в себе множество всех чисел, выражаемых через натуральные с помощью арифметических действий и извлечений корней. Поэтому, если нам удастся перенумеровать все алгебраические числа, то тем более мы решим задачу, поставленную в начале этого пункта.

Но прежде чем нумеровать алгебраические числа, надо перенумеровать сами алгебраические уравнения вида (1). А тогда задача будет уже решена. Ведь каждое алгебраическое уравнение n-й степени имеет не более n корней. Поэтому после того, как все уравнения с целыми коэффициентами будут перенумерованы, мы составим таблицу, в первой строке которой будут все различные корни первого уравнения, во второй — все различные корни второго уравнения, не попавшие в первую строку, в третьей — все различные корни третьего уравнения, не попавшие в первую или вторую строку, и т. д. Таблица получится такая:

$$\begin{array}{r} a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_k \to \\ \to b_1 \to b_2 \to \ldots \to b_i \to \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \to c_1 \to c_2 \to \ldots \to c_m \to \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Здесь же показано, как можно перенумеровать все числа этой таблицы (стрелки показывают порядок нумерации).

Итак, займемся нумерацией множества алгебраических уравнений с целыми коэффициентами. Это можно сделать двумя способами. Первый способ состоит в том, что каждому уравнению

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

ставится в соответствие его «высота», а именно число

$$h = n + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

Например, высота уравнения $2x^4 - 3x + 5 = 0$ равна

$$4 + 2 + 3 + 5 = 14.$$

Ясно, что число уравнений заданной высоты конечно. Например, высоту 2 имеют два уравнения: $x = 0$ и $-x = 0$, а высоту 3 имеют шесть уравнений: $x^2 = 0$, $-x^2 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $-x + 1 = 0$ и $-x - 1 = 0$. А теперь будем нумеровать уравнения так: сначала перенумеруем все уравнения высоты 2 (уравнений высоты 1 нет вообще), потом все уравнения высоты 3, затем все уравнения высоты 4 и т. д. Начало этой нумерации имеет следующий вид:

1	2	3	4	5
$x = 0$	$-x = 0$	$x^2 = 0$	$-x^2 = 0$	$x + 1 = 0$

6	7	8	9	10
$x - 1 = 0$	$-x + 1 = 0$	$-x - 1 = 0$	$x^3 = 0$	$-x^3 = 0$

В результате все уравнения окажутся занумерованнми, а тогда, как уже говорилось, нетрудно занумеровать и все алгебраические числа. Описанный способ нумерации уравнений имеет тот недостаток, что трудно сказать, какой именно номер получит данное уравнение (хотя, конечно, эта задача и разрешима). Другой способ нумерации основан на той же идее, с помощью которой пробовал решить свою самую трудную задачу директор гостиницы. Напомним, что он предложил воспользоваться числами вида 2^n3^m. Чтобы решить нашу задачу, придется использовать все простые числа. Читатель, конечно, помнит, что любое натуральное число единственным образом разлагается на простые множители.

Поступим следующим образом. Сначала перенумеруем все целые числа, как это было сделано на с. 66. Номер целого числа a обозначим через $\boldsymbol{a}$. Каждому уравнению вида

$$a_0x^n + \ldots + a_n = 0$$

(где, напомним, $a_0, \ldots, a_n$ — целые числа) поставим в соответствие число

$$2^{\boldsymbol{a}_n} 3^{\boldsymbol{a}_{n-1}} \ldots p_{n+1}^{\boldsymbol{a}_0}$$

(через p_{n+1} здесь обозначено $(n+1)$-е простое число). Например, уравнению $3x^2-2=0$ ставим в соответствие номер $2^4 3^1 5^5 = 150\ 000$ (потому что целое число -2 имеет номер 4, нуль — номер 1, а целое число 3 — номер 5). Теперь каждое уравнение получило свой номер, причем разным уравнениям соответствуют разные номера (каждый номер N единственным образом разлагается на простые множители, то есть единственным образом задает числа $\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{n-1}, \ldots, \boldsymbol{a}_0$; этим же числам соответствуют определенные целые числа $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, а тем самым и определенное уравнение $a_0x^n + \ldots + a_n = 0$).

Восьмерки на плоскости ★

Методы, с помощью которых мы перенумеровали все алгебраические числа, применимы и в других случаях. Общая ситуация здесь такова. Пусть дано счетное множество счетных множеств $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ Составим всевозможные конечные «наборы» из элементов этих множеств, причем в каждый набор входит не более одного элемента из каждого множества A_k. Иными словами, каждый набор имеет вид $(a_m, \ldots, a_t)$, где $a_m \in A_m, \ldots, a_t \in A_t$ (число элементов в наборе может быть разным в разных наборах, важно лишь, чтобы каждый набор состоял из конечного числа элементов). Тогда множество всех таких наборов счетно.

Для доказательства этого утверждения достаточно поставить в соответствие каждому набору $(a_m, \ldots, a_t)$ число

$$N = p_m^{\boldsymbol{a}_m} \ldots\ p_t^{\boldsymbol{a}_t},$$

где p_m есть m-е по порядку простое число и т. д., $\boldsymbol{a}_m$ — номер элемента a_m в множестве A_m и т. д. (при наших обозначениях значок m у элемента a_m показывает, какому из множеств принадлежит этот элемент, а не номер этого элемента в множестве A_m). Те же рассуждения, что и в случае алгебраических уравнений, показывают, что при этом разным наборам будут соответствовать разные числа N, т. е. что все наборы окажутся занумерованными. А при желании можно сделать и иначе: поставить каждому набору $(a_m, \ldots, a_t)$ в соответствие его «высоту» $h = n + \boldsymbol{a}_m + \ldots + \boldsymbol{a}_t$ и нумеровать сначала наборы высоты 2, потом наборы высоты 3 и т. д.

Из доказанного утверждения вытекает, что если элементы некоторого множества можно задать наборами вида $(a_1, \ldots, a_n)$, где элементы a_1 принадлежат счетному множеству A_1, элементы a_2 — счетному множеству A_2 и т. д., то само множество A или счетно, или конечно. В частности, счетно множество всех точек плоскости, обе координаты которых рациональны: такие точки задаются набором из двух рациональных чисел $(r_1; r_2)$, а множество рациональных чисел счетно.

Приведем более сложный пример доказательства счетности некоторого множества. Пусть на плоскости изображены буквы Т, причем никакие две буквы не имеют общих точек (размеры букв могут быть произвольными — рис. 24).

Покажем, что это множество букв или счетно, или конечно. Для этого выберем на плоскости систему координат и поставим в соответствие каждой букве Т треугольник, имеющий вершины с рациональными координатами и такой, что одна сторона треугольника пересекает «ножку» буквы Т, а две другие — «боковые ветви» этой буквы (рис. 25). Геометрически очевидно, что если две буквы Т соответствуют одному и тому же треугольнику, то они должны пересекаться — см. рис. 26 (впрочем, как это часто бывает в математике, строгое доказательство этого факта совсем не так просто). Поскольку по условию наши буквы попарно не имеют общих точек, то разным буквам соответствуют разные треугольники.

Рис. 24

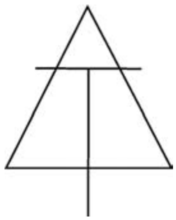


Рис. 25

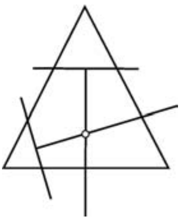


Рис. 26

Поэтому нам осталось показать, что множество выбранных треугольников счетно или конечно. А для этого заметим, что каждый треугольник задается своими тремя вершинами A, B, C, а каждая вершина — своими координатами. Так как мы условились выбирать лишь вершины, обе координаты которых рациональны, то каждый треугольник задается шестью рациональными числами — координатами его вершин. А множество шестерок рациональных чисел счетно. Поэтому множество треугольников с «рациональными» вершинами счетно, а тогда множество треугольников, которые мы построили для наших букв, или счетно, или конечно. Значит, или счетно, или конечно и множество самих букв.

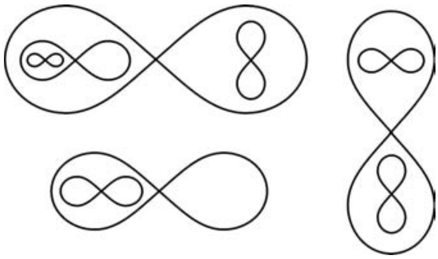


Рис. 27

Точно так же доказывается, что если на плоскости нарисованы не пересекающиеся друг с другом восьмерки (рис. 27), то их множество или счетно, или конечно.

Неравные множества

Мы уже выяснили, что значат слова «два множества имеют поровну элементов». А теперь выясним, что значит «одно множество имеет больше элементов, чем второе». Для конечных множеств это тоже можно выяснить, не прибегая к счету.

Вспомним наш пример с танцплощадкой. Если после того, как заиграет оркестр и юноши пригласят девушек танцевать, некоторые нерасторопные юноши окажутся не у дел, то ясно, что юношей больше. Если же часть девушек будет с грустью наблюдать за своими танцующими подругами, то ясно, что больше девушек.

В этих случаях мы поступали так: устанавливали взаимно однозначное соответствие между одним множеством и частью другого множества. Если это удавалось, то отсюда следовало, что второе множество содержит больше элементов, чем первое. Пользуясь этим методом, легко установить, например, что рыб в океане меньше, чем атомов на земном шаре (хотя оба эти множества и конечны,

Для него нет партнерши

их вряд ли возможно пересчитать). Для этого достаточно каждой рыбе поставить в соответствие один атом, входящий в состав ее тела. Тем самым будет установлено взаимно однозначное соответствие между множеством всех рыб и частью множества всех атомов на земном шаре.

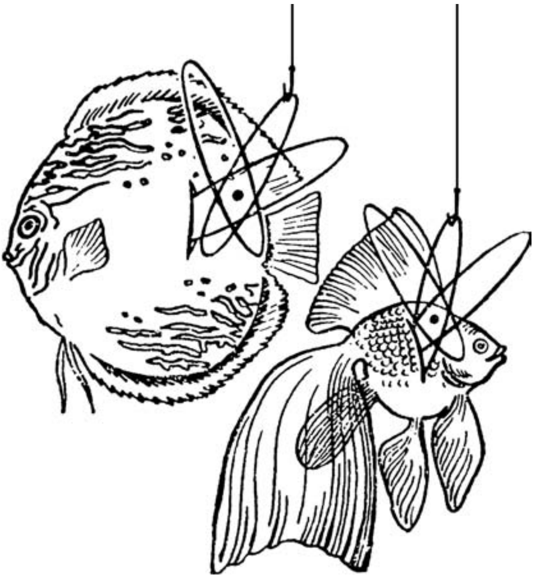
К сожалению, для бесконечных множеств так просто поступить нельзя. Ведь мы уже видели, что множество может иметь столько же элементов, сколько и его часть. Поэтому только из того факта, что множество A имеет столько же элементов, сколько и часть множества B, еще нельзя заключить, что оно имеет меньше элементов, чем все множество B.

Мы будем скромнее в выражениях и скажем, что если множество A можно поставить во взаимно однозначное соответствие с частью множества B, то множество B имеет *не меньше элементов, чем множество* A. Можно доказать, что это соотношение обладает всеми хорошими свойствами неравенств:

1) Каждое множество A имеет не меньше элементов, чем само это множество.

2) Если множество A имеет не меньше элементов, чем B, а B — не меньше элементов, чем C, то A имеет не меньше элементов, чем C.

3) Если множество A имеет не меньше элементов, чем B, а B — не меньше элементов, чем A, то они имеют поровну элементов (то есть между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие).



Из каждой рыбы по атому

Может случиться, что множество B имеет не меньше элементов, чем множество A, но эти множества не эквивалентны. Иными словами, может случиться, что есть взаимно однозначное соответствие между множеством A и частью B_1 множества B, но не существует взаимно однозначного соответствия между A и всем множеством B. Вот в этом случае мы и будем говорить, что B имеет больше элементов, чем A.

Счетное множество — самое маленькое из бесконечных ⋆

Мы уже говорили, что любая бесконечная часть множества натуральных чисел счетна. Это означает, что не может существовать бесконечное множество, мощность которого была бы меньше мощности счетного множества. Докажем теперь, что в каждом бесконечном множестве есть счетное подмножество. Отсюда будет следовать, что мощность счетного множества не больше мощности любого бесконечного множества, то есть что эта мощность — самая маленькая из бесконечных.

Чтобы выбрать счетное подмножество из бесконечного множества A, поступим так. Выберем один элемент x_1 — это можно сделать, так как множество A бесконечно и, во всяком случае, не пусто. Ясно, что после удаления элемента x_1 множество A не исчерпывается, и мы сможем выбрать из него второй элемент x_2. После этого выберем третий элемент x_3 и т. д. В результате мы извлечем из множества A счетное подмножество занумерованных элементов

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Немного усовершенствовав это доказательство, можно добиться, чтобы после удаления счетного подмножества осталось бесконечное множество. Для этого надо после извлечения подмножества X вернуть обратно все элементы с четными номерами. В результате получится, что мы извлекли счетное подмножество

$$Y = \{x_1, x_3, x_5, \ldots\},$$

а оставшееся множество еще содержит бесконечное множество элементов: $\{x_2, x_4, x_6, \ldots, x_{2n}, \ldots\}$ (и, быть может, еще много других элементов).

Нетрудно доказать следующие теоремы.

Мощность бесконечного множества не изменяется от прибавления к нему счетного множества.

Мощность несчетного множества не меняется от удаления из него счетного множества.

Эти теоремы еще раз подтверждают, что счетные множества — самые малые из бесконечных множеств.

Несчетные множества

Все построенные до сих пор множества оказались счетными. Это наводит на мысль, а не являются ли вообще все бесконечные множества счетными? Если бы это оказалось так, то жизнь математиков была бы легкой: все бесконечные множества имели бы поровну элементов и не понадобился бы никакой анализ бесконечности. Но выяснилось, что дело обстоит куда сложнее, несчетные множества существуют, и притом с разными мощностями. Одно несчетное множество всем хорошо знакомо — это множество всех точек на прямой линии.

Но прежде чем говорить об этом множестве, мы расскажем о другом, тесно связанном с ним множестве A вариантов заполнения необыкновенной гостиницы.

Заметим, что доказать несчетность какого-то множества вообще нелегко. Ведь доказать, что какое-то множество счетно, это значит просто придумать правило, по которому нумеруются его элементы. А доказать несчетность какого-то множества, это значит доказать, что такого правила нет и быть не может. Иными словами, какое бы правило мы ни придумали, всегда найдется незанумерованный элемент множества. Чтобы доказывать несчетность множеств, Кантор придумал очень остроумный способ, получивший название диагонального процесса (фактически мы с ним уже сталкивались на с. 13). Метод доказательства Кантора станет ясен из следующего рассказа Йона Тихого.

Несостоявшаяся перепись

До сих пор я рассказывал об удачах директора необыкновенной гостиницы: о том, как ему удалось вселить в заполненную гостиницу еще бесконечно много постояльцев, а потом даже жителей из бесконечного множества столь же необычных гостиниц. Но был случай, когда и этого мага и чародея постигла неудача.

Из треста космических гостиниц пришел приказ составить заранее все возможные варианты заполнения номеров. Эти варианты потребовали представить в виде таблицы, каждая строка которой изображала бы один из вариантов. При этом заполненные номера должны были изображаться единицами, а пустые нулями. Например вариант

$$101010101010\ldots$$

означал, что все нечетные номера заняты, а все четные пустые, вариант

$$11111111111\ldots$$

означал заполнение всей гостиницы, а вариант

$$000000000000\ldots$$

означал полный финансовый крах — все номера пустовали.

Директор был перегружен работой и поэтому придумал простой выход из положения. Каждой дежурной по этажу было поручено составить столько вариантов заполнения, сколько номеров было в ее ведении. При этом были приняты меры, чтобы варианты не повторялись. Через несколько дней списки были представлены директору, и он объединил их в один список.

— Уверены ли вы, что этот список полон? — спросил я директора. — Не пропущен ли какой-нибудь вариант?

— Не знаю, — ответил он. — Вариантов в списке бесконечно много, и я не понимаю, как проверить, нет ли еще какого-нибудь варианта.

И тут у меня блеснула идея (впрочем, быть может, я несколько преувеличиваю свои способности, просто беседы с профессором Тарантогой о бесконечных множествах не прошли бесследно).

— Могу ручаться, что список неполон. Я берусь указать вариант, который наверняка пропущен.

— С тем, что список неполон, я еще соглашусь. А вот пропущенного варианта указать не удастся — ведь здесь уже бесконечно много вариантов.

Мы заключили пари. Чтобы выиграть его, я предложил прибить каждый вариант на дверь того номера, которому он соответствовал (если читатель помнит, вариантов было составлено именно столько, сколько было номеров в гостинице). А потом я поступил очень просто. Подойдя к двери первого номера, я увидел, что соответствующий вариант начинается с цифры 0. Немедленно в блокноте появилась цифра 1; это и была первая цифра варианта, который мне хотелось составить.

Когда я подошел к двери второго номера, то первая цифра соответствующего варианта меня не интересовала, ведь первая цифра моего варианта была уже написана. Поэтому все внимание было обращено на вторую цифру. Увидев, что эта цифра 1, я записал в своем блокноте цифру 0. Точно так же, обнаружив, что третья цифра варианта, прибитого к двери третьего номера, тоже 1, я записал в блокноте цифру 0. Вообще, если я обнаруживал, что n-я цифра n-го варианта есть 0, то писал в своем блокноте на n-м месте цифру 1, если же n-я цифра n-го варианта была 1, то я писал у себя 0.

Когда я обошел все номера гостиницы[1], то в блокноте оказалась записанной последовательность нулей и единиц.

Войдя в кабинет директора, я сказал:

— Вот, полюбуйтесь на пропущенный вариант.

[1]Гм, гм, сколько же времени он затратил?

— А откуда известно, что он пропущен?

— Он не может быть первым, так как отличается от него первой цифрой; не может быть вторым, так как отличается от него второй цифрой; третьим, так как отличается от него третьей цифрой; и вообще n-м, так как отличается от него n-й цифрой.

Пари было выиграно, и я получил вечное право бесплатного проживания в этой гостинице.

Но одновременно стало ясно, что какое бы счетное множество вариантов ни взять, всегда найдется вариант, не вошедший в это множество (эти варианты всегда можно развесить по дверям номеров). А это и значит, что множество всех вариантов заполнения гостиницы несчетно, задача, поставленная перед директором, оказалась невыполнимой.

Было решено дать об этом телеграмму. Надо сказать, что и телеграф в необыкновенной гостинице был тоже необычным, он передавал телеграммы, состоящие не из конечного, а из бесконечного (точнее говоря, счетного) множества точек и тире. Например, они имели такой вид:

— · — · — — — · и т. д.

Я сразу сообразил, что и множество таких телеграмм тоже несчетно, ведь вместо точек и тире можно ставить нули и единицы, а тогда не будет никакой разницы между телеграммами со счетным множеством знаков и множеством всех вариантов заполнения гостиницы.

Отправив телеграмму, я тепло попрощался с директором гостиницы и полетел в галактику РЩ-8067, где должен был произвести астрографическую съемку...

Несчетность континуума

Теперь уже несложно доказать, что множество всех точек на прямой линии несчетно. Вместо этого множества можно говорить о множестве всех действительных чисел, так как каждой точке прямой соответствует действительное число и обратно.

Каждое действительное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби вида

$$a,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots$$

Некоторые из них имеют даже по две записи, например: 0,500000… и 0,49999999… — это одно и то же число. Для определенности будем пользоваться записью с нулями.

Предположим, что нам удалось каким-то образом перенумеровать все действительные числа. Чтобы доказать, что это предположение неверно, достаточно построить хоть одно незанумерованное число. Следуя примеру Йона Тихого, поступим следующим образом. Сначала напишем нуль и поставим после него запятую. Потом возьмем число, получившее первый номер, и посмотрим на его первый десятичный знак после запятой (то есть на число десятых). Если эта цифра отлична от 1, то в числе, которое мы пишем, поставим после запятой 1, а если эта цифра равна 1, то поставим после запятой 2. Затем перейдем к числу, получившему второй номер, и посмотрим на его вторую цифру после запятой. Снова, если эта цифра отлична от единицы, то в числе, которое мы пишем, поставим на месте сотых цифру 1, если же эта цифра является единицей, то поставим цифру 2. Точно так же будем действовать и дальше, каждый раз обращая внимание лишь на n-ю цифру числа, получившего n-й номер. В результате мы выпишем некоторое число, например:

$$N = 0{,}1121211\ldots$$

Ясно, что это число не получило никакого номера: в первом десятичном знаке оно отличается от числа с номером 1, во втором — от числа с номером 2, …, в n-м — от числа с номером n и т. д. (см. с. 13).

Чтобы читателю стало яснее, как выписывается число, не получившее номера, предположим, что при выбранной нумерации первые пять чисел имеют следующий вид:

$$\begin{array}{r} 4{,}27364\ldots \\ -1{,}31226\ldots \\ 7{,}95471\ldots \\ 0{,}62419\ldots \\ 8{,}56280\ldots \end{array}$$

Тогда число, не получившее номера, будет начинаться со следующих десятичных знаков:

$$0{,}12121\ldots$$

Разумеется, не только это, но и многие другие числа не получили номеров (мы могли бы заменять все цифры, кроме 2, на 2, а цифру 2 на 7 или выбрать еще какое-нибудь правило). Но нам достаточно существования одного-единственного числа, не получившего номера, чтобы опровергнуть гипотезу о возможности нумерации всех действительных чисел.

Существование трансцендентных чисел ⋆

Мы говорили, что *алгебраическими числами* называют числа, являющиеся корнями уравнений

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

с целыми коэффициентами. Числа же, не являющиеся корнями таких уравнений, называют *трансцендентными.*

В течение долгого времени математики имели дело лишь с алгебраическими числами, такими, как $\frac{7}{15}$, $\sqrt[8]{10}$, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ и т. д. Лишь ценой больших усилий французскому математику Лиувиллю удалось найти в 1844 году несколько трансцендентных чисел. А доказательство трансцендентности числа π, проведенное Линдеманом в 1882 году, было большим научным событием: ведь из него следовала невозможность квадратуры круга.

И вдруг оказалось, что алгебраические числа, которые встречаются на каждом шагу, на самом деле являются величайшей редкостью, а трансцендентные числа, которые так трудно строить, — обычным правилом. В самом деле, мы уже видели, что алгебраические числа образуют лишь счетное множество. Множество же всех действительных чисел, как мы только что обнаружили, несчетно. Значит, несчетна и разность множества действительных чисел и множества алгебраических чисел, то есть множество трансцендентных чисел.

Это доказательство существования трансцендентных чисел, проведенное Г. Кантором в 1873 году, произвело большое впечатление на математиков. Ведь Кантору удалось доказать существование трансцендентных чисел, не строя ни одного конкретного примера таких чисел, а лишь исходя из общих соображений. Но то, что является достоинством доказательства Кантора, в то же время является и его слабой стороной.

Из теорем Лиувилля вытекает простой путь построения конкретных примеров трансцендентных чисел. Например, трансцендентным является число 0,1010010000001…, в котором после первой единицы стоит один нуль, после второй — два, после третьей — шесть, после n-й — $n!$ нулей. Из доказательства же Кантора нельзя непосредственно извлечь никакого конкретного примера трансцендентного числа, это доказательство, как говорят математики, неконструктивно: здесь приводится к противоречию предположение о несуществовании трансцендентных чисел и только.

На длинном и коротком отрезках поровну точек

До тех пор, пока читатель не познакомился с удивительными свойствами бесконечных множеств, ответ на вопрос «где больше точек, на отрезке длиной в 1 мм или на отрезке длиной в 1 м?» вряд ли вызвал бы у него хоть тень сомнения — ясно, что на отрезке в 1 м куда больше точек, он ведь в 1000 раз длиннее. Но теперь, вероятно, читатель поостережется делать столь безапелляционные заявления — уж слишком непохожи свойства бесконечных множеств на то, чему учит обыденная жизнь. И действительно, на очень коротком и очень длинном отрезках точек поровну! Иными словами, всегда можно установить взаимно однозначное соответствие между точками этих отрезков. Как это сделать, лучше всего видно из рис. 28.

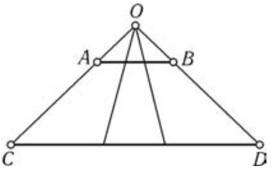


Рис. 28

Трудно примириться с мыслью, что дорога длиной в миллион световых лет имеет столько же точек, сколько и радиус атомного ядра!

Но еще неожиданнее оказалось то, что даже на всей бесконечной прямой не больше точек, чем на отрезке, то есть что между множеством точек на прямой и множеством точек на отрезке можно установить взаимно однозначное соответствие.

Мы возьмем даже не весь отрезок, а выбросим из него концы (как говорят, возьмем не отрезок, а промежуток). Как установить взаимно однозначное соответствие между промежутком и прямой, видно из рис. 29. Сначала точки промежутка отображают на полуокружность, а потом проектируют полуокружность на прямую. Ясно, что при этом каждой точке промежутка соответствует одна и только одна точка прямой, причем ни одна точка на прямой не пропущена.

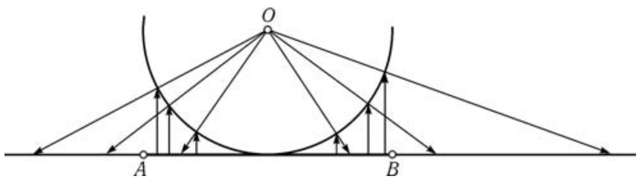


Рис. 29

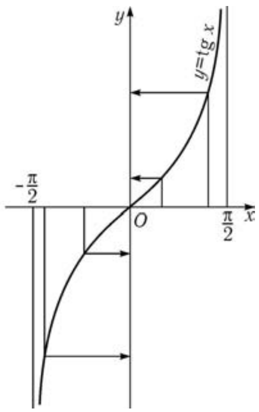


Рис. 30

То же самое соответствие можно установить и по-другому, с помощью кривой — тангенсоиды, графика функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 30).

Отрезок и квадрат

С тем, что на бесконечной прямой столько же точек, сколько и на отрезке, математики, скрепя сердце, примирились. Но следующий результат Кантора оказался еще более неожиданным. В поисках множества, имеющего больше элементов, чем отрезок, он обратился к множеству точек квадрата. Сомнения в результате не было: ведь отрезок целиком размещается на одной стороне квадрата, а множество всех отрезков, на которые можно разложить квадрат, само имеет ту же мощность, что и множество точек отрезка.

На протяжении трех лет (с 1871 по 1874) Кантор искал доказательство того, что взаимно однозначное соответствие между точками отрезка и точками квадрата невозможно.

Шли годы, а желанный результат не получался. И вдруг совершенно неожиданно ему удалось построить соответствие, которое он считал невозможным! Сначала он сам не поверил себе. Математику Дедекинду он писал: «Я вижу это, но не верю этому».

Но все же пришлось смириться с тем, что интуиция подвела и здесь, — в квадрате оказалось ровно столько же точек, сколько и на отрезке. Строгое доказательство этого утверждения несколько осложняется из-за неоднозначности десятичной записи чисел. Поэтому мы дадим лишь эскиз доказательства Кантора.

Возьмем отрезок [0; 1] и квадрат со стороной 1. Этот квадрат можно считать расположенным так, как на рис. 31. Нам надо установить взаимно однозначное соответствие между точками отрезка и квадрата. Проектирование точек квадрата на отрезок AB здесь не помогает, ведь при проектировании в одну точку отрезка перейдет бесконечное множество точек квадрата (например, в точку A — все точки отрезка DA.)

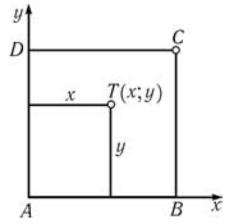


Рис. 31

Решение получается следующим образом. Каждую точку T квадрата $ABCD$ можно задать двумя числами — ее координатами x и y (или попросту ее расстояниями до сторон AD и AB). Эти числа можно записать как бесконечные десятичные дроби. Так как x и y не больше 1, то эти дроби имеют вид

$$x = 0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots, \tag{1}$$
$$y = 0{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots \tag{2}$$

(для простоты мы не берем точек квадрата, лежащих на его сторонах, а берем лишь внутренние точки). Здесь α_n и β_n — десятичные знаки чисел x и y, например, если $x = 0{,}63205\ldots$ и $y = 0{,}21357\ldots$, то $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 2$ и т. д., $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 3$ и т. д.

Нам надо теперь найти точку Q отрезка AB, соответствующую точке T. Достаточно указать длину отрезка AQ. Мы выберем эту длину равной числу z, десятичные знаки которого получаются путем «перетасовывания» десятичных знаков чисел x и y. Иными словами, сделаем из двух записей (1) и (2) третью, написав их десятичные знаки через один: $z=0{,}\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\ldots\alpha_n\beta_n\ldots$ Например, если $x=0{,}515623\ldots$, $y=0{,}734856\ldots$, то положим $z=0{,}571354682536\ldots$

Точка z лежит на отрезке $[0;\,1]$, и ясно, что различным точкам квадрата соответствуют при этом разные точки отрезка. Ведь если точки T и T' не совпадают, то в десятичных записях чисел x и x' или y и y' хоть один знак будет разный. Но это приведет к тому, что десятичные записи соответствующих чисел z и z' не совпадут. Несколько более подробный анализ показывает, что тогда не совпадают и сами эти точки.

Всех точек отрезка мы не получим. Например, точка $z=0{,}191919\ldots$ должна была бы получиться из пары $x=0{,}111\ldots$, $x=0{,}999\ldots$, соответствующей точке на стороне квадрата, а такие точки мы условились не брать. Поэтому при отображении квадрата на отрезок точка z не будет образом ни одной точки квадрата.

Мы установили, таким образом, взаимно однозначное соответствие между точками квадрата и частью точек отрезка $[0;\,1]$. Это показывает, что множество точек квадрата имеет не большую мощность, чем множество точек отрезка. Но его мощность и не меньше, а потому эти мощности совпадают.

★ Немного изменив рассуждение, можно получить взаимно однозначное соответствие между всеми точками квадрата и всеми точками отрезка. Для этого надо несколько осторожнее тасовать цифры координат.

Возьмем снова не весь квадрат $ABCD$, а лишь его часть, получающуюся при отбрасывании сторон BC и CD. Координаты точек этой части удовлетворяют неравенствам $0\leqslant x<1$ и $0\leqslant y<1$. Эти координаты можно записать в виде бесконечных десятичных дробей, причем, в силу сделанного выше условия, эти дроби не могут заканчиваться сплошными девятками.

А теперь разобьем цифры, входящие в десятичные записи x и y, на группы, ставя вертикальную черту после каждой цифры, отличной от девятки. Например, если

$$x=0{,}3994599967\ldots,\qquad y=0{,}959978090\ldots,$$

то разбиение имеет вид

$$x\sim 3|994|5|9996|7|\ldots,\qquad y\sim 95|997|8|0|90|\ldots$$

Перетасуем полученные *группы* цифр так же, как раньше мы тасовали сами цифры. Получим бесконечную последовательность групп цифр

$$3|95|994|997|5|8|9996|0|7|90|\ldots$$

Поставим впереди этой последовательности нуль и опустим черточки. Получим десятичную дробь

$$z = 0{,}3959949975899960790\ldots,$$

соответствующую точке квадрата $M(x;\, y)$.

Можно показать, что это соответствие между точками квадрата $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < 1$ и промежутка $0 \leqslant z < 1$ взаимно однозначно. Теперь уже легко получить соответствие между точками всего квадрата $ABCD$ и точками некоторого отрезка. Для этого достаточно взять отрезок длины 3 и взаимно однозначно отобразить часть квадрата $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < 1$ на промежуток $0 \leqslant z < 1$, а ломаную BCD — на отрезок $1 \leqslant z \leqslant 3$. ★

Не только квадрат, но и куб имеет столько же точек, сколько и отрезок. Вообще любая геометрическая фигура, содержащая хоть одну линию, имеет столько же точек, сколько и отрезок. Такие множества назвали множествами мощности *континуума* (от латинского continuum — непрерывный). Мощность континуума имеет и множество бесконечных телеграмм.

Одна задача почему-то не выходит

Мы познакомились пока что с двумя типами бесконечных множеств. Одни из них имеют столько же элементов, сколько и множество натуральных чисел, а другие — столько же, сколько и множество точек на прямой. Оказалось, что во втором множестве больше элементов. Естественно, возникает вопрос, а нет ли «промежуточного» множества, которое имело бы больше элементов, чем множество натуральных чисел, и меньше, чем множество точек на прямой? Этот вопрос получил название *проблемы континуума*. Над ним думали многие выдающиеся математики, начиная с самого Георга Кантора, но до самого последнего времени проблема оставалась нерешенной.

В течение долгих лет думал над проблемой континуума один из крупнейших математиков, основатель отечественной научной школы теории функций действительного переменного, академик Н. Н. Лузин. Но решение ускользало, как мираж в пустыне (правда, в ходе размышлений над этой проблемой Н. Н. Лузин решил целый ряд труднейших задач теории множеств и создал целый отдел математики — дескриптивную теорию множеств).

Однажды к Н. Н. Лузину привели пятнадцатилетнего мальчика Льва Шнирельмана, обладавшего исключительными математическими способностями (впоследствии он стал одним из виднейших советских математиков, членом-корреспондентом АН СССР). Чтобы проверить способности юного математика, Н. Н. Лузин предложил ему тридцать труднейших задач. Решения 29 задач он знал, а одной была... проблема континуума. Но, увы, через неделю молодой математик пришел к Н. Н. Лузину и грустно сказал: «Одна задача почему-то не выходит».

Неудачи попыток решить проблему континуума не были случайными. Положение дел здесь напоминает историю постулата о параллельных прямых. Этот постулат пытались на протяжении двух тысячелетий вывести из остальных аксиом геометрии. После работ Лобачевского, Гильберта и других ученых выяснилось, что он не противоречит остальным аксиомам, но и не может быть выведен из них.

Точно так же оказалось, что для подходящей аксиоматики теории множеств утверждение о существовании промежуточной мощности не противоречит остальным аксиомам (результат немецкого математика К. Гёделя, 1938 г.), но и не выводимо из них (это почти одновременно и независимо друг от друга доказали американец Коэн, 1963–1964 гг. и чех Вопенка, 1964 г.).

Существует ли множество самой большой мощности? ★

Пока что самой большой мощностью, которую мы знаем, является мощность множества точек на прямой, то есть мощность континуума. Ни множество точек квадрата, ни множество точек куба не имеют большей мощности. Не является ли мощность континуума самой большой? Оказывается, что нет. Более того, вообще нет множества самой большой мощности. Для любого множества A есть множество, мощность которого больше мощности A. Этим множеством является, например, множество B всех функций, заданных на множестве A и принимающих значения 0 и 1.

Покажем сначала, что мощность множества B не меньше, чем мощность множества A. Для этого каждой точке a множества A

поставим в соответствие функцию $f_a(x)$, принимающую в этой точке значение 1, а в остальных точках значение 0. Ясно, что разным точкам соответствуют разные функции. Например, если множество A состоит из трех точек 1, 2, 3, то точке 1 соответствует функция, принимающая в этой точке значение 1, а точке 2 — функция, принимающая в точке 1 значение 0. Эти функции не равны друг другу.

Итак, мощность множества B не меньше мощности множества A. Покажем теперь, что эти мощности не равны друг другу, то есть, что нет взаимно однозначного соответствия между элементами множеств A и B. В самом деле, предположим, что такое соответствие существует.

Обозначим тогда функцию, соответствующую элементу a из A, через $f_a(x)$. Напомним, что все функции $f_a(x)$ принимают только два значения 0 и 1.

Составим новую функцию $\varphi(x)$, заданную равенством

$$\varphi(x) = 1 - f_x(x).$$

Таким образом, чтобы найти значение функции $\varphi(x)$ в некоторой точке a из A, надо найти сначала соответствующую этой точке функцию $f_a(x)$ и вычесть из 1 значение этой функции при $x = a$. Ясно, что функция $\varphi(x)$ также задана на множестве A и принимает значения 0 и 1. Следовательно, $\varphi(x)$ является элементом множества B. Но тогда, по предположению, $\varphi(x)$ соответствует некоторой точке b из A, а значит, $\varphi(x) = f_b(x)$. Учитывая первое равенство для $\varphi(x)$, получаем, что для всех x из A $1 - f_x(x) = f_b(x)$. Положим в этом равенстве $x = b$. Мы найдем тогда, что $1 - f_b(b) = f_b(b)$ и потому

$$f_b(b) = \frac{1}{2}.$$

Но это противоречит тому, что значения функции $f_b(x)$ равны 0 и 1. Полученное противоречие показывает, что взаимно однозначного соответствия между множествами A и B быть не может.

Итак, для любого множества A можно построить множество B большей мощности. Поэтому *множества самой большой мощности не существует.*

Заметим, что множество B можно построить и иначе. Именно, B можно рассматривать как множество всех подмножеств множества A. В самом деле, пусть C — некоторое подмножество в A. Возьмем функцию $f(x)$, принимающую значение 1, если $x \in C$, и значение 0, если $x \overline{\in} C$. Ясно, что разным подмножествам соответствуют различные функции. Наоборот, каждой функции $f(x)$, принимающей два значения 0 и 1, соответствует подмножество в A, состоящее из элементов x, в которых функция принимает значение 1. Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между множеством функций, заданных на множестве A и принимающих значения 0 и 1, и множеством всех подмножеств в A.

Арифметика бесконечного ★

Мы познакомились с мощностями различных множеств. Как уже говорилось, понятие мощности является обобщением понятия числа элементов конечного множества. Но над натуральными числами можно производить арифметические операции — их можно складывать, вычитать, умножать и т. д. Эти операции отражают некоторые операции над множествами. Например, сложение натуральных чисел соответствует сложению двух непересекающихся конечных множеств. Если в одном множестве m элементов, а в другом n элементов, то в их сумме будет $m+n$ элементов.

Аналогично определяются операции над мощностями. Мы будем при этом обозначать мощности особыми знаками, Например, мощность счетного множества обозначают $\aleph_0$ ($\aleph$ — первая буква древнееврейского алфавита, называемая *алеф*). Мощность континуума обозначают $\mathfrak{c}$ (це готическое), мощность множества всех функций, заданных на действительной оси, — через $\mathfrak{f}$ и т. д.

Мощности можно складывать точно так же, как складывают натуральные числа. Именно, если мощность множества A равна $\mathfrak{m}$, а мощность множества B равна $\mathfrak{n}$, причем A и B не пересекаются, то через $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ обозначают мощность множества $A+B$. Из свойств сложения множеств следует, что

$$\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{n}+\mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m}+(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})=(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})+\mathfrak{p}.$$

Однако многие правила сложения бесконечных мощностей непохожи на обычные правила арифметики. Но это и не удивительно, ведь свойства бесконечных множеств, как мы уже знаем, совсем непохожи на свойства конечных множеств. Например, в арифметике бесконечного имеют место равенства:

$$1)\ n+\aleph_0=\aleph_0, \quad 3)\ \aleph_0+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}, \quad 5)\ \mathfrak{c}+\mathfrak{f}=\mathfrak{f}.$$
$$2)\ \aleph_0+\aleph_0=\aleph_0, \quad 4)\ \mathfrak{c}+\mathfrak{c}=\mathfrak{c},$$

Первое из них означает, что сумма конечного и счетного множеств является счетным множеством, второе — что сумма двух счетных множеств есть счетное множество, третье — что прибавление счетного множества к множеству мощности континуума дает множество мощности континуума. Читатель легко истолкует остальные равенства.

Теперь посмотрим, как умножают друг на друга бесконечные мощности. Для этого надо сначала понять, с какой операцией над множествами связано умножение натуральных чисел. Пусть A — конечное множество, состоящее из n элементов, а B — конечное множество, состоящее из m элементов. Образуем новое множество $A \times B$, элементами которого являются всевозможные пары $(a;\, b)$, где $a \in A$ и $b \in B$. Если обозначить элементы первого множества через $a_1, \ldots, a_m$, а второго — через $b_1, \ldots, b_n$, то эти пары можно расположить в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{c}
(a_1;\, b_1)\ \ldots\ (a_1;\, b_n)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(a_m;\, b_1)\ \ldots (a_m;\, b_n)
\end{array}$$

Отсюда ясно, что число таких пар равно mn, то есть произведению чисел m и n.

Перенесем эту операцию на бесконечные множества. Пусть A и B — бесконечные множества. Назовем их *прямым произведением* множество $A \times B$, элементами которого являются всевозможные пары $(a;\, b)$, где $a \in A$, $b \in B$. Например, если A — множество точек отрезка $[0;\, 1]$, а B — множество точек отрезка $[1;\, 3]$, то множество $A \times B$ можно изобразить точками прямоугольника, показанного на рис. 32. В самом деле, каждой точке этого прямоугольника соответствуют ее две проекции на оси.

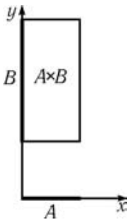


Рис. 32

Если мощность множества A равна $\mathfrak{m}$, а мощность множества B равна $\mathfrak{n}$, то через $\mathfrak{mn}$ мы обозначим мощность множества $A \times B$. Имеют место следующие законы умножения мощностей:

$$\mathfrak{mn} = \mathfrak{nm}, \quad (\mathfrak{mn})\mathfrak{p} = \mathfrak{m}(\mathfrak{np}), \quad \mathfrak{m}(\mathfrak{n} + \mathfrak{p}) = \mathfrak{mn} + \mathfrak{mp}.$$

Далее, справедливы равенства

$$\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0\mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{cc} = \mathfrak{c}.$$

Первое из этих равенств означает, что если A и B — счетные множества, то и множество всех пар $(a; b)$, $a \in A$, $b \in B$, счетно. Это другая формулировка утверждения, что сумма счетного множества счетных множеств является счетным множеством. А равенство $\mathfrak{c}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ означает, что число точек на отрезке и в квадрате — одно и то же. Ведь $\mathfrak{c}$ — это число точек на отрезке, а $\mathfrak{c}\mathfrak{c}$ — число точек в прямом произведении отрезка на себя, то есть число точек в квадрате.

Возведение в бесконечную степень ★

Поскольку мы уже умеем умножать мощности друг на друга, то любую мощность можно возвести в любую степень с натуральным показателем. А теперь выясним, как возводить мощности в степени с бесконечным показателем, то есть выясним, что означает запись $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$. Для этого снова надо вернуться к конечным множествам и дать описание множества, число элементов которого равно n^m.

Это делается следующим образом. Пусть множество A содержит m элементов, а множество B содержит n элементов. Обозначим B^A множество, элементами которого являются всевозможные функции, заданные на множестве A и принимающие значения в множестве B. Иными словами, каждый элемент множества B^A указывает закон, по которому элементам a из A сопоставляются элементы $b = f(a)$ из B. Пусть, например, множество A состоит из трех чисел: 1, 2, 3, а множество B — из двух элементов: точки и тире. Тогда элементы множества B^A состоят из «функций» вида $f(1) = \cdot$, $f(2) = \cdot$, $f(3) = -$, или $f(1) = -$, $f(2) = \cdot$, $f(3) = \cdot$. Эти «функции» можно просто задавать последовательностями точек и тире, состоящими из трех знаков. Легко видеть, что число таких последовательностей равно 8, то есть 2^3. Именно, имеем такие последовательности:

$$\begin{array}{llll} 1)\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ; & 2)\ \cdot\ \cdot\ -\ ; & 3)\ \cdot\ -\ \cdot\ ; & 4)\ \cdot\ -\ -\ ; \\ 5)\ -\ \cdot\ \cdot\ ; & 6)\ -\ \cdot\ -\ ; & 7)\ -\ -\ \cdot\ ; & 8)\ -\ -\ -\ . \end{array}$$

Мы получили $8 = 2^3$ последовательностей. Это не случайно. Если множество A состоит из m элементов, а множество B — из n элементов, то B^A состоит из n^m элементов. Предоставляем читателю самому доказать это утверждение.

А теперь мы уже можем объяснить, что значит символ $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$, если $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ — бесконечные мощности. Именно, возьмем множество A мощности $\mathfrak{m}$ и множество B мощности $\mathfrak{n}$ и обозначим через B^A множество всех «функций», заданных на A и принимающих значения в B. Его мощность и есть $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Выше мы показали, что для любого множества A мощность множества функций, заданных на A и принимающих два значения 0 и 1, больше, чем мощность самого множества A. Это значит, что для любой мощности $\mathfrak{m}$ выполняется неравенство $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$. Отметим еще, что $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. В самом деле, мы видели выше, что множество всех бесконечных телеграмм имеет мощность континуума. Но каждая бесконечная телеграмма есть не что иное, как функция, заданная на множестве натуральных чисел и принимающая лишь два значения: точка и тире. Поэтому множество всех бесконечных телеграмм имеет мощность $2^{\aleph_0}$. Тем самым наше равенство доказано.

По порядку номеров...

Мощности множеств (или, как их еще называют, *кардинальные числа*) выполняют лишь половину работы натуральных чисел. Ведь натуральные числа применяются не только для того, чтобы ответить на вопрос «сколько?», но и для того, чтобы ответить на вопрос «какой по порядку?». Иными словами, мы говорим не только «два», «пять», «двадцать», но и «второй», «пятый», «двадцатый». А мощности ничего не говорят о том, в каком порядке идут элементы. И хотя множество натуральных чисел имеет столько же элементов, сколько и множество всех целых чисел, упорядочены они совсем по-разному. У множества натуральных чисел есть самый первый элемент, а у множества всех целых чисел первого элемента нет.

Поэтому, чтобы изучить порядок расположения элементов в множестве, кардинальных чисел (мощностей) недостаточно, нужны новые понятия. Сначала введем понятие *упорядоченного множества*.

Говорят, что множество A упорядочено, если для любой пары его элементов определено понятие неравенства $a < b$, обладающее следующими свойствами:

1) если $a < b$, то $a \neq b$;
2) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Легко упорядочить множества всех действительных чисел, всех рациональных чисел, всех натуральных чисел и т. д. В множество всех комплексных чисел тоже можно ввести порядок. Именно, мы скажем, что $a + bi < c + di$, если либо $a < c$, либо $a = c$, но $b < d$. Например, $2 + 15i < 3 + 10i$, $2 + 4i < 2 + 5i$. Аналогичным образом можно упорядочить множество всех многочленов. Разумеется, одно и то же множество можно упорядочить различными способами.

Например, рассмотрим множество всех различных слов, входящих в эту книгу. Это множество можно, например, упорядочить так: взять книгу и, читая ее подряд, выписывать все встречающиеся в ней слова в том порядке, как они встречаются. В этом случае закон упорядочивания можно сформулировать так: слово A предшествует слову B, если при чтении книги подряд слово A встречается ранее слова B.

Можно, однако, поступить и другим образом: считать, что слово A предшествует слову B, если слово A в алфавитном порядке предшествует слову B. Ясно, что эти два упорядочивания одного и того же множества окажутся различными.

Говорят, что два упорядоченных множества A и B имеют один и тот же *порядковый тип*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок элементов. Иными словами, если $a_1 \leftrightarrow b_1$ и $a_2 \leftrightarrow b_2$, то из $a_1 < a_2$ следует, что $b_1 < b_2$. Например, любые два отрезка имеют один и тот же порядковый тип. Отображение, показанное на рис. 28, сохраняет порядок точек. Сохраняет порядок и отображение всей прямой на промежуток (отрезок с отброшенными концами), изображенное на рис. 29. А вот отрезок и прямая имеют разные порядковые типы. Хотя между ними и можно установить взаимно однозначное соответствие, это соответствие обязательно нарушит порядок — ведь у отрезка есть начальная и конечная точки, а у всей прямой их нет.

Вполне упорядоченные множества

Даже счетное множество может быть упорядочено самыми различными способами. Ведь счетными являются и множество всех натуральных чисел, и множество всех целых чисел, и множество всех рациональных чисел. А упорядочены эти множества совсем по-разному. В множестве натуральных чисел есть самый первый элемент (число 1), а ни во множестве всех целых чисел, ни во множестве всех рациональных чисел первого элемента нет. С другой стороны, во множествах натуральных и целых чисел можно указать пары элементов, между которыми нет других элементов этих множеств (например, числа 5 и 6), а во множестве всех рациональных чисел между любыми двумя элементами лежит бесконечно много других элементов того же множества.

Чтобы хоть как-нибудь разобраться в этом разнообразии упорядочений, Г. Кантор выделил особый класс упорядоченных множеств, некоторые свойства которых весьма напоминали свойства множества натуральных чисел. Если во множестве натуральных чисел выбрать любое непустое подмножество, то среди его элементов обязательно окажется самый меньший, самый левый. Множества, обладающие таким свойством, Г. Кантор назвал вполне упорядоченными. Иными словами, упорядоченное множество A называют *вполне упорядоченным*, если любое его непустое подмножество имеет первый элемент.

Как мы уже говорили, самым простым вполне упорядоченным множеством является множество натуральных чисел. Его можно изобразить точками 1, 2, 3, … на луче $(0; \infty)$. Но отображение прямой на промежуток, изображенное на рис. 29, сохраняет порядок точек. При этом луч $(0; \infty)$ переходит в промежуток $(0; 1)$. Поэтому вместо точек 1, 2, 3, … можно брать точки на промежутке $(0; 1)$. Мы получим бесконечное множество точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, приближающихся к точке 1 (см. рис. 33 *а*).

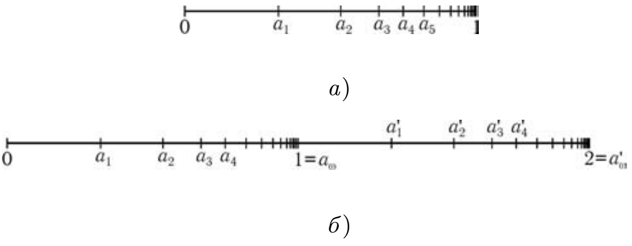


Рис. 33

Рассмотрим теперь точку 1. Эту точку уже невозможно занумеровать обычными числами — мы истратили их на нумерацию точек $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Чтобы занумеровать и эту точку, нам понадобится новое число, не являющееся натуральным. Так как точка 1 лежит за всеми точками $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, которые уже занумерованы с помощью обычных чисел, то это новое число назовем «трансфинитным» (от латинских слов trans — через, finitus — конечный). Принято обозначать трансфинитное число, сразу идущее за всеми натуральными числами 1, 2, 3, …, через ω. Поэтому точку 1 обозначим a_ω. Множество A всех точек $a_1, \ldots, a_n, \ldots, a_\omega$ также является вполне упорядоченным (подумайте, почему!).

А теперь возьмем и сдвинем получившееся множество A вперед на 1. При этом точка a_1 перейдет в точку $a'_1 = a_1 + 1$, точка a_2 — в точку $a'_2 = a'_1 + 1$ и т. д. В результате получится множество B, состоящее из точек $a'_1, \ldots, a'_n, \ldots, a'_\omega$. Нетрудно проверить, что множество $A + B$ вполне упорядочено. Постараемся занумеровать его элементы. Точки множества A мы уже умеем нумеровать. А точка a'_1 идет сразу после точки a_ω (см. рис. 33 *б*). Поэтому ее естественно занумеровать трансфинитным числом $\omega + 1$, то есть положить $a'_1 = a_{\omega+1}$. Точно так же следующую точку, то есть a'_2, естественно занумеровать трансфинитным числом $\omega + 2$ и т. д. А точку a'_ω, которая идет за всеми точками $a_{\omega+1}, \ldots, a_{\omega+n}, \ldots$, занумеруем трансфинитным числом 2ω: $a'_\omega = a_{2\omega}$.

Читатель, вероятно, уже догадался, что мы теперь сдвинем точки множества A на 2 вправо и получим новые точки, которые надо нумеровать трансфинитными числами $2\omega + 1, \ldots, 2\omega + n, \ldots, 3\omega$. Продолжая таким же путем, мы получим вполне упорядоченное множество, состоящее из точек, нумеруемых трансфинитными числами вида $k\omega + n$, где k и n — натуральные числа.

Но на этом построение трансфинитных чисел не заканчивается. Ведь у нас снова получилось множество, расположенное на всем луче $(0; \infty)$. При этом на каждом отрезке $[n; n + 1]$ этого луча есть бесконечно много точек нашего множества. Отобразим снова луч $(0; \infty)$ на промежуток $(0; 1)$. Мы получим множество точек, приближающихся к точке 1. Чтобы теперь занумеровать точку 1, понадобится новое трансфинитное число, которое обозначают через ω^2. А дальше строят трансфинитные числа $\omega^2 + 1, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^n, \ldots$ и даже ω^ω. Есть и такое трансфинитное число:

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

но мы не будем подробнее останавливаться на этих вопросах.

Непонятная аксиома

Мы уже говорили, что некоторые множества можно упорядочивать различными способами. А можно ли вообще упорядочить любое множество, и если можно, то всегда ли удается из данного множества получить вполне упорядоченное? Над этой задачей работали многие математики — ведь из положительного решения следовало бы, что любое множество можно перенумеровать с помощью трансфинитных чисел.

Неожиданно простое и короткое решение опубликовал в 1904 году Цермело: ему удалось доказать, что всякое множество можно вполне упорядочить (Г. Кантор предугадал этот ответ еще в 1883 году). Однако доказательство Цермело понравилось далеко не всем математикам. Дело в том, что это доказательство опиралось на одно утверждение, которое ему самому, да и другим математикам, казалось далеко не очевидным. Это утверждение, названное впоследствии *аксиомой выбора* или *аксиомой Цермело*, заключается в следующем.

Представьте себе, что перед вами лежат несколько кучек яблок. Ясно, что можно выбрать по одному яблоку из каждой кучки и сложить их в новую кучку. Казалось бы, то же самое можно сделать и в случае, когда каждая кучка содержит бесконечно много яблок, а самих кучек тоже бесконечно много. В этом и состоит аксиома выбора:

Если дано бесконечное множество бесконечных множеств, то из каждого множества можно выбрать по одному элементу, не указывая заранее закона выбора.

Вот в этих-то последних словах все дело — аксиома выбора приводит к совершенно неконструктивным доказательствам: удается, например, доказать, что не может быть, чтобы множество нельзя было упорядочить, но никакого конкретного способа упорядочения из этого доказательства не извлекается. Долгие годы математики пользовались аксиомой выбора, считая ее совершенно очевидной. Но когда над ней стали глубже задумываться, она стала казаться все более и более загадочной. Многие из теорем, доказанных с помощью аксиомы выбора, совершенно противоречили наглядности. Поэтому один из видных математиков Бертран Рассел так высказался об этой аксиоме:

«Сначала она кажется очевидной; но чем больше вдумываешься в нее, тем более странными кажутся выводы из этой аксиомы; под конец же перестаешь понимать, что же она означает».

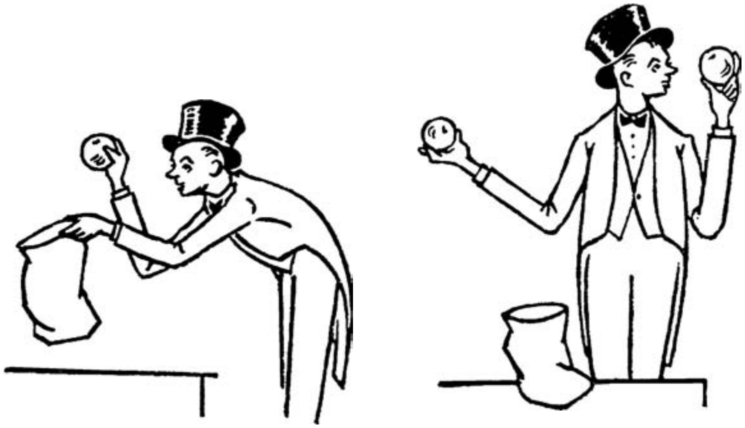
Тем не менее большинство математиков спокойно пользуется в своих исследованиях аксиомой выбора.

В последнее время удалось доказать, что с аксиомой выбора дело обстоит так же, как и с континуум-гипотезой, то есть что эта аксиома не противоречит остальным аксиомам теории множеств и не выводима из них.

Из одного яблока — два

Расскажем об одном из самых удивительных следствий аксиомы выбора. Вам, вероятно, приходилось наблюдать, как работает на эстраде ловкий фокусник. Вот он показал зрителям пустой мешочек, потом опустил туда шарик, а вынул … два; опустив два шарика, он вынимает четыре, опустив четыре, вынимает восемь. Конечно, все понимают, что здесь нет никаких чудес, а только, как говорится, «ловкость рук». Но в теории множеств такие чудеса бывают.

Возьмем самое обычное яблоко и разрежем его любым образом на четыре части. Кажется ясным, что если взять только две из этих частей, то из них нельзя составить целое яблоко (точно так же, как, съев половину апельсина, нельзя составить из оставшихся долек целый апельсин).



Однако математикам удалось так разбить шар на четыре равные части, что из двух частей можно составить целый шар того же радиуса, ничего к ним не прибавив, а только двигая их, как твердые тела. Из двух других частей можно составить второй точно такой же шар. Таким образом, из одного шара получилось два равных ему шара. Жаль, что эта проблема решена только теоретически, иначе из одного яблока можно было бы сделать два таких же яблока, потом

Ловкость рук...

четыре, потом восемь и т. д. Конечно, практическое решение задачи и невозможно — оно противоречило бы закону сохранения материи.

Такое разбиение шара на четыре части и основано как раз на аксиоме выбора.

О других, также весьма странных следствиях этой аксиомы мы не будем сейчас говорить.

Конечные разбиения ★

Читатель, вероятно, помнит из курса геометрии, что такое равносоставленные фигуры. Две фигуры X и Y называют *равносоставленными*, если их можно разбить на фигуры $X_1, \ldots, X_m$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ соответственно — так, что фигуры X_1 и Y_1 одинаковы, фигуры X_2 и Y_2 одинаковы, …, фигуры X_m и Y_m одинаковы. Например, ясно, что квадрат со стороной a и равнобедренный прямоугольный треугольник с основанием $2a$ равносоставлены (рис. 34).

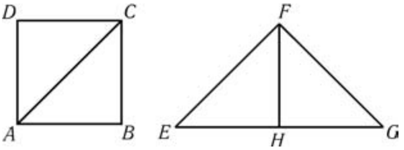


Рис. 34

Но с точки зрения теории множеств это определение не столь уж ясно. Ведь при разрезании фигуры мы как бы удваиваем точки, лежащие на линии разреза: из каждой такой точки получаются две точки — по одной в каждой части. И на самом деле, разбиение квадрата $ABCD$ и треугольника EFG на рис. 34 не годится в смысле теории множеств: после разрезания треугольника и складывания из полученных частей квадрата точки катетов EF и FG сливаются и дают одну диагональ AC квадрата, зато точки высоты FH «раздваиваются» и дают стороны квадрата AB и CD.

Поэтому в теории множеств равносоставленность фигур надо определять по-другому. Назовем фигуры X и Y равносоставленными, если их можно разбить на конечное множество *попарно непересекающихся* частей

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m, \quad Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_m$$

так, что X_1 и Y_1 одинаковы, X_2 и Y_2 одинаковы, $\ldots$, X_m и Y_m одинаковы.

Оказывается, что и с этой точки зрения квадрат $ABCD$ равносоставлен с треугольником EFG. Однако теперь доказать это утверждение гораздо труднее. Читатель, желающий познакомиться с этим доказательством, может найти его в книге В. Серпинского «О теории множеств», изд-во «Просвещение», 1966, с. 49–52.

Польские математики С. Банах и А. Тарский доказали, что необходимым и достаточным условием того, чтобы два плоских многоугольника были равносоставлены в смысле теории множеств, является равенство их площадей. Казалось бы естественным ожидать, что для многогранников таким условием является равенство их объемов. Однако это совсем не так. С помощью теоремы выбора С. Банах и А. Тарский доказали, что любые два (ограниченных) многогранника равносоставлены в смысле теории множеств, даже если их объемы различны. Более того, они доказали, что шар равносоставлен в этом смысле с кубом и вообще любые два ограниченных тела равносоставлены. Разумеется, как и в случае разбиения шара, о котором мы говорили выше, равносоставленность шара и куба доказывается лишь с помощью операции произвольного выбора. Указать конкретный способ разбиения здесь невозможно. В предлагаемом же разбиении получаются очень уж «чудные» части: у них нет объемов, они, как говорят математики, неизмеримы.

Глава III. Удивительные функции и линии, или прогулки по математической кунсткамере

Как развивалось понятие функции

Большинство математических понятий прошло долгий путь развития. Первоначально они возникали как обобщение каких-то наглядных представлений, повседневного опыта. Постепенно из этих наглядных представлений путем отбрасывания частного и случайного выкристаллизовывались точные математические определения. Но часто оказывалось, что эти определения охватывают не только те объекты, изучение которых привело к формулировке данного определения, но и многие объекты, о которых раньше и не думали. Начиналось изучение этих новых объектов, переход к абстракции более высокого уровня, а потом на этой базе — расширение первоначально введенных определений. При этом в математические понятия вкладывался все более и более широкий смысл, они охватывали все более и более широкий круг объектов, получали все более разнообразные приложения.

Какой большой путь прошло, например, понятие числа от доисторических времен, когда умели считать лишь «один, два, много», до наших дней! Натуральные числа, дроби, отрицательные числа, комплексные числа, кватернионы, гиперкомплексные числа... И надо сказать, что не всегда новое обобщение того или иного понятия с восторгом встречалось всеми математиками. Например, долгое время не только комплексные, но даже отрицательные числа не признавались многими учеными за настоящие.

Сложный путь прошло и понятие функции. Идея зависимости некоторых величин восходит, по-видимому, к древнегреческой науке. Но там величины имели лишь геометрическую природу. Даже Ньютон, один из основателей математического анализа, при рассмотрении зависимых величин использовал геометрический язык. Хотя фактически понятием функции пользовались уже Ферма и Декарт, сам термин «функция» возник лишь в 1694 году в работах немецкого ученого Лейбница, делящего с Ньютоном заслугу создания математического анализа. Однако у Лейбница понятие функции имело очень узкий смысл и касалось только некоторых отрезков, зависящих от положения точки на кривой: ординаты, подкасательной и поднормали, радиуса кривизны и т. д. Таким образом, и Лейбниц оставался в круге геометрических представлений. Только ученик Лейбница И. Бернулли дал в 1718 году определение функции, свободное от геометрических образов: «Функцией переменной величины называется количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных».

Следующий шаг в развитии понятия функции связан с именем гениального ученика И. Бернулли петербургского академика Леонарда Эйлера. В своем «Дифференциальном исчислении» он определяет функцию так: «Величины, зависящие от других так, что с изменением вторых меняются и первые, принято называть их функциями».

Однако понятие функции у Эйлера и математиков его времени было связано с возможностью выразить функцию формулой. С точки зрения математиков XVIII века запись

$$\begin{cases} x, & \text{если } x < 0, \\ x^2, & \text{если } x \geqslant 0 \end{cases}$$

определяла не одну, а две функции.

Вскоре выяснилось, что дело обстоит значительно сложнее. Решая задачу о колебании струны, Д. Бернулли получил ответ в виде так называемого *тригонометрического ряда*. Мы не будем сейчас говорить, что это такое, а скажем лишь, что форма струны задавалась единой формулой (хотя и содержавшей бесконечно много членов).

Ту же самую задачу о колебаниях струны решил французский ученый Даламбер. Решение Даламбера имело совсем иной вид, чем у Бернулли, и могло задаваться различными формулами для разных значений аргумента.

Перед математикой XVIII века возникло казавшееся неразрешимым противоречие: для одной и той же задачи получилось два ответа, причем один выражался для всех значений аргумента одной и той же формулой, а другой — несколькими формулами. Из-за этого решение Д. Бернулли было подвергнуто сомнению: думали, что он нашел не все решения задачи, а лишь решения, выражающиеся одной формулой. Возник ожесточенный спор, в котором приняли участие все крупнейшие математики XVIII века — Эйлер, Даламбер и др.

По сути дела, спор шел о понятии функции, о связи между функциональной зависимостью и возможностью выразить эту зависимость формулой. Окончательное решение вопроса было получено в начале XIX века, когда французский ученый Ж. Фурье показал, что сумма бесконечного ряда, состоящего из тригонометрических функций, может на различных участках выражаться различными формулами. После этого он дал новое определение функции, подчеркнув в нем, что главным является задание значений функции, а совершается ли это задание некоторой единой формулой или нет, несущественно.

Результаты Фурье были уточнены немецким математиком Дирихле, который показал, что графиком суммы тригонометрического ряда может быть любая, произвольно проведенная линия. Требуется лишь, чтобы число максимумов и минимумов на этой линии было конечным, и линия не поднималась бесконечно высоко. Дирихле же уточнил определение функции, данное Фурье, и придал ему тот вид, которым пользуются и сейчас (близкое определение несколько ранее Дирихле дали Лакруа, Лобачевский и некоторые другие математики). Определение Дирихле: «Переменная величина y называется функцией переменной величины x, если каждому значению величины x соответствует единственное определенное значение величины y».

В дальнейшем к словам «каждому значению величины x» добавили слова «принадлежащему некоторому множеству» (ведь функция не обязательно определена для всех значений x).

Это определение было чрезвычайно общим, в нем ни слова не говорилось о том, что функция должна задаваться одной и той же формулой на всем отрезке, где она определена. Более того, она могла совсем не задаваться какой-то формулой, а определяться словами. Например, сам Дирихле рассмотрел такую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число.} \end{cases}$$

С точки зрения математиков XVIII века, это определение не задавало никакой функции, ведь не было дано формулы, по которой можно вычислить эту функцию. Тем не менее это определение полностью задает функцию. (Теперь она называется *функцией Дирихле*.) Из него совершенно ясно, что, например,

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=1, \quad f(\sqrt{2})=0.$$

По сути дела, определение Дирихле (с указанным уточнением) было окончательным для числовых функций числового аргумента. Дальнейшее развитие состояло в том, что стали рассматривать функции, заданные на произвольных множествах и принимающие значения также на произвольных множествах. Именно, пусть даны два множества A и B, и пусть каждому элементу a множества A поставлен в соответствие элемент b множества B. Тогда говорят, что задана функция на множестве A со значениями в множестве B. В столь общей формулировке понятие функции сливается с понятиями *соответствия, отображения, преобразования*.

Например, с этой точки зрения площадь треугольника есть функция, заданная на множестве всех треугольников и принимающая значения в множестве положительных чисел. А вписанная в треугольник окружность есть функция, заданная на множестве всех треугольников со значениями в множестве окружностей. Но мы не будем становиться здесь на столь общую точку зрения и ограничимся функциями, заданными на числовых множествах и принимающими числовые значения.

Джинн выходит из бутылки

Определение Дирихле позволило строить функции с самыми причудливыми свойствами. Если раньше для построения функции с каким-нибудь необычным свойством надо было долго комбинировать различные формулы, то теперь дело упростилось. Появилась возможность строить и изучать различные функции, не думая о том, существует ли единая формула, выражающая изучаемую функцию. И за последние полтора столетия были построены функции, свойства которых совершенно отличаются от свойств «добропорядочных» функций. Наверное, сам Дирихле не думал, что могут быть такие «уроды».

Необычной является уже сама функция Дирихле, о которой говорилось выше. Ведь на самом маленьком отрезке оси абсцисс бесконечно много и рациональных чисел, и иррациональных чисел. Но функция Дирихле для рациональных чисел равна единице, а для иррациональных — нулю. Поэтому, когда x пробегает ось абсцисс, то значение функции все время прыгает от 0 к 1 и обратно. Построить график этой функции совершенно невозможно, потому что эта функция во всех точках разрывна.

Но и среди непрерывных функций есть функции с неожиданными свойствами. Например, может ли непрерывная функция иметь на конечном отрезке бесконечно много максимумов и минимумов? На первый взгляд это совершенно невозможно. Ведь функция должна успеть опуститься из точки максимума в точку минимума, потом опять подняться в точку максимума и т. д. Как же ей сделать все это на конечном отрезке? Тем не менее оказалось, что такие странные функции существуют, причем построить их совсем нетрудно.

Построим такую функцию на отрезке [0; 1]. Для этого разделим отрезок пополам и построим на левой половине равносторонний треугольник. Теперь разделим оставшуюся правую половину снова на две равные части и на части $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ построим второй равносторонний треугольник. Выполним описанную операцию бесконечно много раз. У нас получится горная цепь, состоящая из бесконечного числа вершин, постепенно опускающаяся к точке 1 (рис. 35). Примем полученную ломаную за график функции $f(x)$. Тогда функция будет определена в каждой точке отрезка [0; 1], за исключением крайней правой точки 1. В этой точке положим $f(1) = 0$.

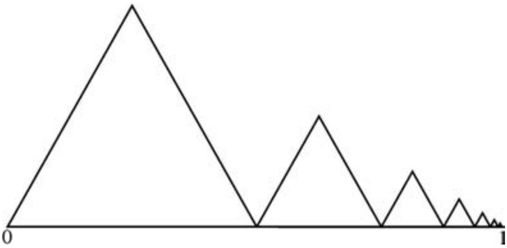


Рис. 35

Так как при приближении к точке 1 высоты вершин стремятся к нулю, полученная нами функция непрерывна во всех точках отрезка [0; 1]. А число максимумов и минимумов на этом отрезке бесконечно велико!

Математику XVIII века, чтобы построить такую странную функцию, понадобилось бы долго комбинировать различные функции, прежде чем он догадался бы, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много максимумов и минимумов на отрезке [0; 1] (рис. 36).

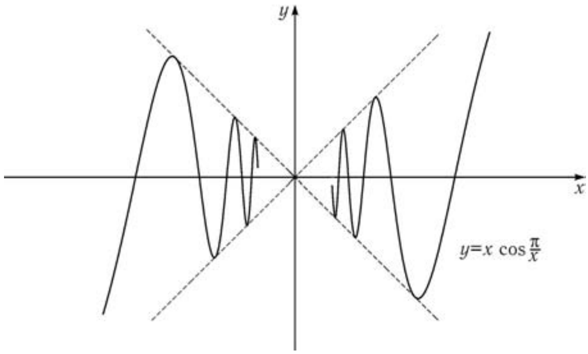


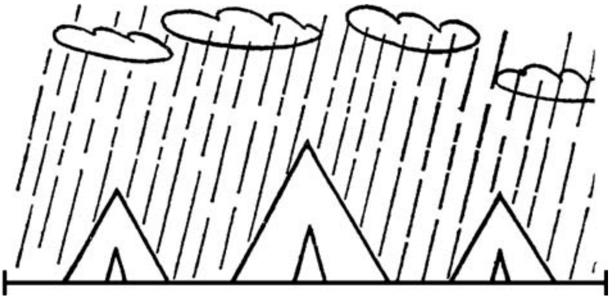
Рис. 36

Но функции с бесконечным числом максимумов и минимумов были лишь началом неприятностей, ожидавших математиков. Джинн только начал выходить из бутылки.

Мокрые точки

У функции, которую мы построили в предыдущем пункте, есть лишь одна точка, около которой бесконечно много максимумов и минимумов, а именно точка 1. Сейчас мы построим другую функцию, у которой таких точек будет куда больше.

Предположим, что на отрезок [0; 1] оси абсцисс падает сверху дождь. Для защиты от дождя поступим следующим образом. Разделим отрезок [0; 1] на три равные части и возведем над средней частью палатку в форме равностороннего треугольника. Она защитит от дождя все точки средней части (кроме точек $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ — концов этой части). Теперь каждую из оставшихся двух частей снова разделим на три равные части и защитим средние части палатками той же



Дождь идет

формы (но втрое меньшего размера). У нас получится линия, изображенная на рис. 37. На третьем шаге процесса мы построим еще четыре палатки, потом еще восемь и т. д.

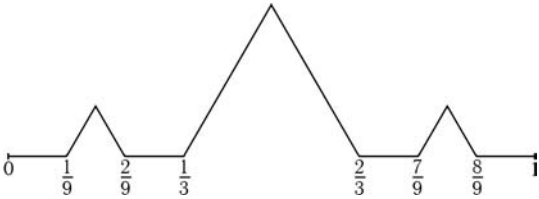


Рис. 37

Возникает вопрос: все ли точки отрезка защищены получившейся пилообразной линией или остались точки, которые дождь намочит? Некоторые из таких «мокрых» точек указать легко — ими являются концы защищаемых отрезков (то есть такие точки, как $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$ и т. д.). Все эти точки остаются без защиты при возведении соответствующей палатки, а последующие палатки их тоже не защищают. Легко видеть, что таких концов будет бесконечное, но лишь счетное множество.

Но оказывается, что кроме этого счетного множества «мокрых» точек найдется еще целый континуум таких точек. Чтобы описать их, удобно прибегнуть к троичной системе счисления. Как известно, эта система строится так же, как и десятичная, только единица высшего разряда равна не десяти, а лишь трем единицам низшего разряда. Поэтому в троичной системе счисления для записи чисел вместо десяти цифр применяются лишь три цифры: 0, 1 и 2.

Легко научиться переводить числа из троичной системы счисления в десятичную. Например, число, записываемое в троичной системе так: 0,02020202…, в десятичной системе счисления изображается бесконечной геометрической прогрессией

$$\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}+\ldots$$

Сумма этой прогрессии равна $\frac{1}{4}$. Поэтому

$$\frac{1}{4}=0{,}020202\ldots$$

Теперь мы уже можем точно сказать, какие точки останутся мокрыми после того, как все защитные палатки будут построены. Первая палатка защищает точки, лежащие между $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Но это те самые точки, которые в троичной системе имеют запись вида

$$0{,}1\ldots,$$

где точками обозначена любая последовательность цифр 0, 1 и 2 (точно так же, как в десятичной системе счисления между точками $\frac{1}{10}$ и $\frac{2}{10}$ лежат все точки, десятичная запись которых начинается с цифры 1, то есть имеет вид 0,1…).

После первого шага мокрыми останутся точки, троичная запись которых имеет вид 0,0… или вид 0,2…

Точно так же доказывается, что после возведения двух палаток на втором шаге мокрыми остаются лишь точки, троичная запись которых начинается с одной из следующих четырех комбинаций: 0,00…, 0,02…, 0,20…, 0,22…. Итак, шаг за шагом защищаются от дождя точки, в троичную запись которых входят единицы. В конце концов останутся мокрыми лишь точки, которые можно записать в троичной системе счисления, не используя 1. Например, останется мокрой точка

$$\frac{1}{4}=0{,}020202\ldots,$$

точка

$$\frac{3}{4}=0{,}20202\ldots$$

и т. д.

А теперь уже ясно, почему множество «мокрых» точек имеет мощность континуума. Ведь это множество можно поставить во взаимно однозначное соответствие с множеством бесконечных телеграмм (см. с. 78). Для этого нужно лишь каждой точке вида

$$0{,}20220200\ldots$$

поставить в соответствие бесконечную телеграмму, заменив 0 на точку, а 2 на тире. При этом разным числам будут соответствовать разные телеграммы. Мы знаем, что множество бесконечных телеграмм имеет мощность континуума. Поэтому и множество мокрых точек имеет ту же мощность.

Множество точек, которые мы назвали мокрыми, впервые построил Кантор, и его называют *канторовым множеством*. Из построения палаток видно, что около каждой точки канторова множества есть бесконечно много максимумов и минимумов пилообразной линии.

Чертова лестница

С тем же самым канторовым множеством связана еще одна интересная функция. Она строится следующим образом. Снова разделим отрезок $[0;\,1]$ на три равные части и положим, что во всех точках средней части наша функция равна $\frac{1}{2}$. Потом левую и правую трети снова разделим на три равные части и положим, что от $\frac{1}{9}$ до $\frac{2}{9}$ функция равна $\frac{1}{4}$, а от $\frac{7}{9}$ до $\frac{8}{9}$ она равна $\frac{3}{4}$.

Теперь у нас остались четыре отрезка, на которых функция еще не определена: $\left[0;\,\frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9};\,\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3};\,\frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9};\,1\right]$. Разделим каждый из них на три равные части и на каждой из средних частей положим функцию равной соответственно $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$.

Продолжая этот процесс, мы получим функцию, которая определена во всех «сухих» точках, то есть во всех точках, не принадлежащих канторову множеству. Ее легко определить и в точках этого множества так, чтобы она стала после этого непрерывной и неубывающей. График получившейся функции приближенно изображен на рис. 38. Он имеет вид лестницы с бесконечным числом ступенек (на графике изображены не все ступени).

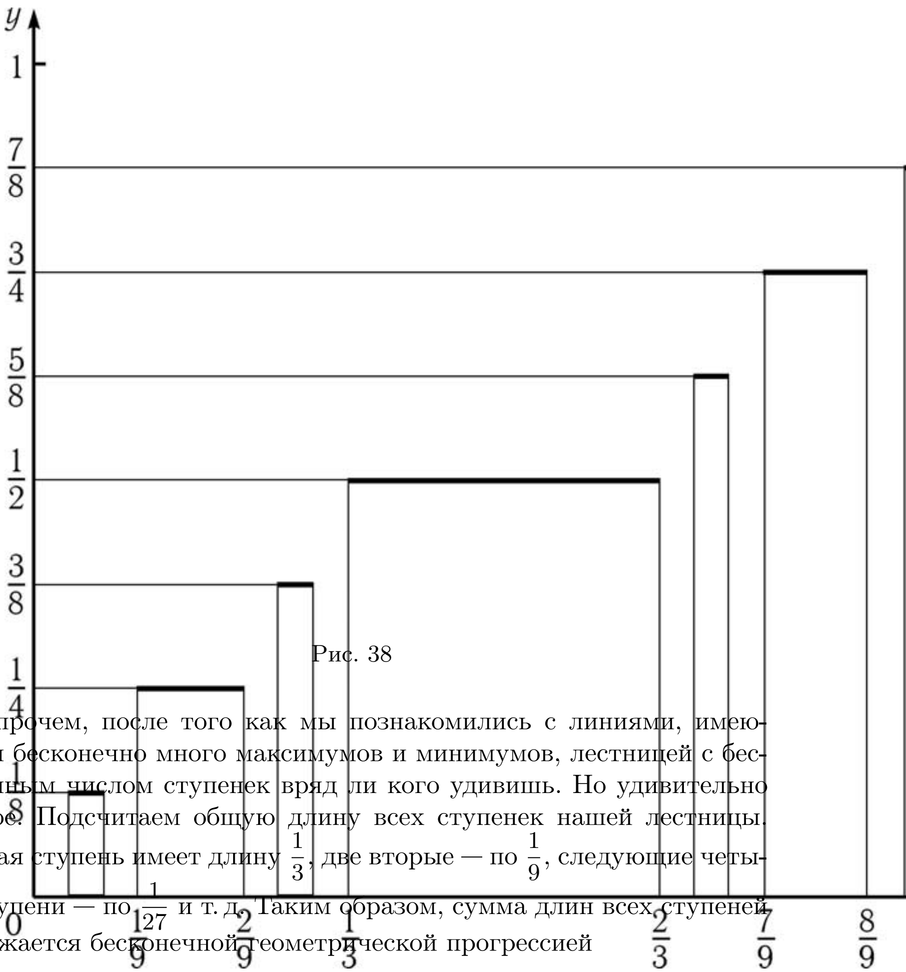


Рис. 38

Впрочем, после того как мы познакомились с линиями, имеющими бесконечно много максимумов и минимумов, лестницей с бесконечным числом ступенек вряд ли кого удивишь. Но удивительно другое. Подсчитаем общую длину всех ступенек нашей лестницы. Первая ступень имеет длину $\frac{1}{3}$, две вторые — по $\frac{1}{9}$, следующие четыре ступени — по $\frac{1}{27}$ и т. д. Таким образом, сумма длин всех ступеней выражается бесконечной геометрической прогрессией

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots$$

Сумма этой прогрессии равна

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

Таким образом, общая длина всех ступеней равна 1. Но на этих ступеньках функция совсем не поднимается вверх, весь ее подъем сосредоточен в точках канторова множества. А на долю этого множества осталось очень «мало» точек — хотя его мощность и равна континууму, но длина равна нулю! Ведь длина всего отрезка [0; 1] равна 1, и общая длина ступенек тоже равна 1, так что на долю канторова множества остается лишь нулевая длина. Таким образом, наша функция умудряется подняться вверх на 1, хотя растет только на множестве нулевой длины и не делает нигде скачков! Не правда ли, удивительно?

Колючая линия

На протяжении многих столетий математики имели дело лишь с линиями, почти в каждой точке которых можно было провести касательную. Если и встречались исключения, то только в нескольких точках. В этих точках линия как бы ломалась, и потому их называли точками излома. Линия, изображенная на рис. 39 *а*, имеет две точки излома, а линия, изображенная на рис. 39 *б*, — десять точек излома.

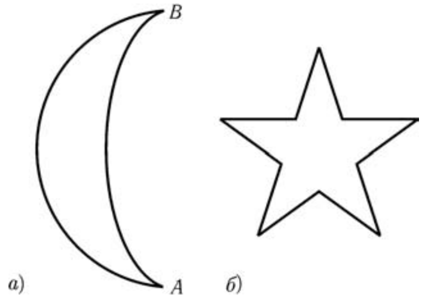


Рис. 39

Но линии, которые мы только что построили, имеют уже бесконечно много точек излома: линия на рис. 35 — счетное множество таких точек, а линия на рис. 37 — целый континуум точек излома. Она ломается во всех точках канторова множества, а кроме того, в вершинах всех треугольников. Однако даже линия на рис. 37 имеет изломы на сравнительно «маленьком» множестве точек, длина которого равна нулю.

В течение долгого времени никто из математиков не верил, что может существовать непрерывная линия, целиком состоящая из зубцов, изломов и колючек. Велико было изумление математиков, когда удалось построить такую линию, более того, функцию, график которой был такой колючей изгородью. Первым сделал это чешский ученый Больцано. Но его работа осталась неопубликованной, и впервые такой пример опубликовал немецкий математик К. Вейерштрасс. Однако пример Вейерштрасса очень трудно изложить — он основан на теории тригонометрических рядов. Пример же Больцано совсем простой и очень напоминает линии, которые мы строили раньше.

Мы расскажем сейчас пример Больцано с небольшими изменениями. Разделим отрезок [0; 1] на четыре равные части и над двумя средними частями построим равнобедренный прямоугольный треугольник (рис. 40 *а*). Получившаяся линия является графиком некоторой функции, которую обозначим через $y = f_1(x)$.

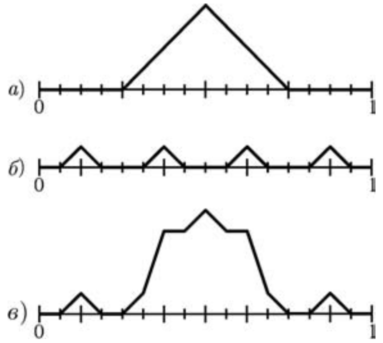


Рис. 40

Разделим теперь каждую из четырех частей еще на четыре равные части и в соответствии с этим построим еще четыре равнобедренных прямоугольных треугольника (рис. 40 *б*). Мы получим график второй функции $y = f_2(x)$. Если сложить эти две функции, то график суммы $y = f_1(x) + f_2(x)$ будет иметь вид, изображенный на рис. 40 *в*. Видно, что получившаяся линия имеет уже больше изломов и эти изломы гуще расположены. На следующем шаге мы снова разделим каждую часть еще на четыре части, построим 16 равнобедренных прямоугольных треугольников и прибавим соответствующую функцию $y = f_3(x)$ к функции $y = f_1(x) + f_2(x)$.

Продолжая этот процесс, мы будем получать все более и более изломанные линии. В пределе получится линия, у которой излом в каждой точке, и ни в одной точке к ней нельзя провести касательную.

Похожий пример линии, нигде не имеющей касательной, построил голландский ученый Ван-дер-Варден. Он взял равносторонний треугольник, разделил каждую его сторону на три равные части и на средних частях построил новые равносторонние треугольники, смотрящие наружу. У него получилась шестиугольная звезда (рис. 41 *а*). Теперь каждую из двенадцати сторон этой звезды он разделил еще на три части и снова на каждой из средних частей построил правильный треугольник. Получилась еще более колючая линия, изображенная на рис. 41 *б*. После бесконечного числа делений

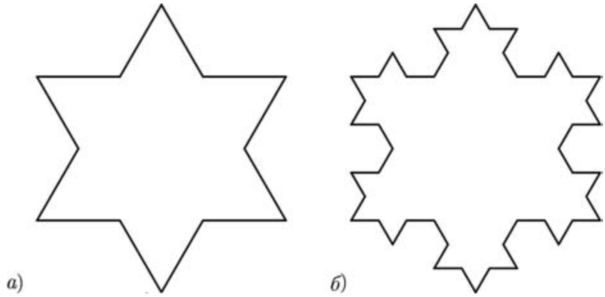


Рис. 41

и построений правильных треугольников получилась линия, в каждой точке которой есть излом, колючка[1].

Математики построили много непрерывных функций, графики которых не имели касательной ни в одной точке, и начали изучать их свойства. Эти свойства совсем не походили на свойства «добропорядочных» гладких функций, с которыми они до тех пор имели дело. Поэтому математики, воспитанные в классических традициях, с изумлением смотрели на новые функции. Более того, виднейший представитель классического математического анализа Шарль Эрмит так писал своему другу, голландскому математику Стильтьесу:

«Я с ужасом отворачиваюсь от этой достойной сожаления язвы непрерывных функций, не имеющих производной ни в одной точке» (то есть, как мы их называли, всюду колючих линий).

Известный французский ученый А. Пуанкаре писал:

[1] Сейчас такую «колючую звезду» называют «снежинкой фон Коха». — *Прим. ред.*

«Некогда при нахождении новых функций имелась в виду какая-нибудь практическая цель. Теперь функции изобретаются специально для того, чтобы обнаружить недостаточность рассуждений наших отцов; никакого иного вывода, кроме этого, из них нельзя извлечь».

Но дальнейшее развитие науки показало, что Пуанкаре был неправ. В физике встречаются линии, очень напоминающие всюду колючие линии Ван-дер-Вардена и других. Это — траектории частиц, совершающих под ударами молекул броуновское движение. Французский ученый Ф. Перрен сделал зарисовки движения таких частиц. Он наблюдал их положения через каждые полминуты и соединял полученные точки прямолинейными отрезками. В результате у него получились запутанные ломаные, вроде изображенных на рис. 42. Но не следует думать, что в действительности между отдельными наблюдениями частица двигалась по прямой. Если бы Перрен наблюдал ее не через полминуты, а через полсекунды, то каждый прямолинейный отрезок пришлось бы заменить ломаной, столь же сложной, как и ломаные на рис. 42. И чем меньше были бы промежутки между наблюдениями, тем сложнее и «колючее» становилась бы ломаная. Американский математик Н. Винер показал, что движение броуновской частицы, настолько малой, что ее инерцией можно пренебречь, совершается по линии, нигде не имеющей касательной.

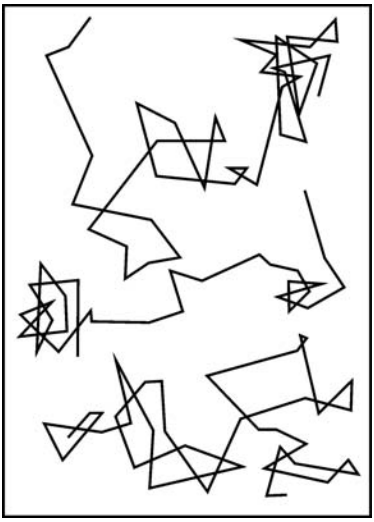


Рис. 42

Замкнутая линия бесконечной длины

С линиями бесконечной длины мы встречаемся часто — бесконечную длину имеет прямая линия, парабола, гипербола и т. д. Все эти линии уходят в бесконечность, а потому и неудивительно, что их длина бесконечна. Впрочем, нетрудно построить и линию, целиком лежащую в конечной части плоскости, но имеющую бесконечную длину. Для этого надо взять окружность и намотать на нее спираль с бесконечным числом оборотов вблизи окружности (рис. 43). Так как число оборотов бесконечно, а длина каждого витка больше длины окружности, то длина всей спирали бесконечна.

Но может ли существовать замкнутая линия бесконечной длины? Обычные замкнутые линии: окружность, эллипс, кардиоида (рис. 44) — имеют конечную длину. Но длина колючей линии Ван-дер-Вардена бесконечна.

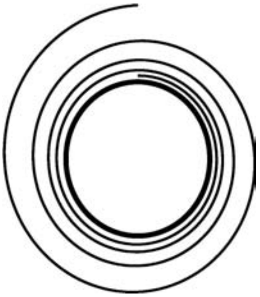


Рис. 43

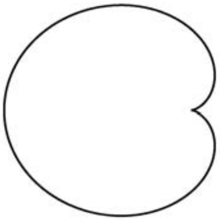


Рис. 44

В самом деле, периметр исходного треугольника был равен 3. После первого шага получилась звезда, периметр которой, как легко подсчитать, равен 4. А на следующем шаге получилась линия, состоящая из 64 отрезков длины $\frac{1}{9}$. Значит, ее периметр равен $\frac{64}{9}$. Потом получается линия длины $\frac{256}{27}$ и т. д. Вообще, после n-го шага получается линия с периметром $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Но при возрастании n это выражение стремится к бесконечности. Таким образом, длина линии Ван-дер-Вардена бесконечна.

Существуют и другие линии бесконечной длины. Например, построим линию так. Разделим отрезок $[0; 1]$ пополам и на левой половине построим равнобедренный треугольник высоты 1. Потом разделим пополам отрезок $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ и на его левой половине $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ построим равнобедренный треугольник высоты $\frac{1}{2}$. Следующий равнобедренный треугольник строится на отрезке $\left[\frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right]$ и тоже имеет высоту $\frac{1}{2}$; следующие четыре треугольника возьмем с высотой $\frac{1}{4}$ и т. д. (рис. 45).

У нас снова получается понижающаяся горная цепь, как и на с. 103. Но теперь она понижается очень медленно. Ясно, что длины боковых сторон первого треугольника больше 1, второго и третьего — больше $\frac{1}{2}$, четвертого, пятого, шестого, седьмого — больше $\frac{1}{4}$ и т. д. (длина боковой стороны всегда больше высоты). Поэтому длина всей ломаной не меньше, чем сумма бесконечного ряда

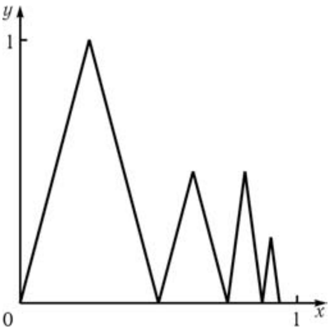


Рис. 45

$$2 + \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}\right) + \ldots$$

Но сумма чисел в каждой скобке равна 2, а число скобок бесконечно. Поэтому сумма ряда равна бесконечности. Значит, и длина нашей линии бесконечна.

Математический ковер

Рассказывают, что однажды Екатерина Вторая спросила какого-то генерала, в чем разница между мортирой и гаубицей. Растерявшийся генерал ответил: «А видишь ли, государыня-матушка, мортира-то она особь статья, а гаубица — особь статья». Примерно столь же содержательный ответ можно получить, если спросить далекого от математики человека, в чем разница между линией, поверхностью и телом. Более того, он удивится, как можно спрашивать о столь очевидных вещах. Ведь всякому ясно, что линия, поверхность и тело — совсем разные вещи, и никто не назовет окружность поверхностью или сферу линией.

Но еще один остроумный шахматный гроссмейстер сказал, что разница между мастером и начинающим шахматистом состоит в том, что начинающему все ясно в позиции, где для мастера все полно тайны. Так же обстоит дело и с нашим вопросом. Конечно, относительно таких геометрических фигур, как квадрат или окружность, ни у кого не возникает сомнений, линии они или поверхности.

Но в ходе развития науки после открытий Кантора появилось много самых причудливых геометрических фигур, относительно которых не только школьник, но и умудренный знаниями профессор математики не сразу ответит, что это такое — линия, поверхность или тело.

Вот некоторые из этих фигур. Возьмем отрезок [0; 1], разделим его пополам и восставим в середине отрезка перпендикуляр длины $\frac{1}{2}$. Теперь каждую из половин разделим снова пополам и в каждой новой точке деления проведем перпендикуляр, но теперь уже длины $\frac{1}{4}$. Дальше снова разделим получившиеся отрезки пополам и проведем в точках деления перпендикуляры длины $\frac{1}{8}$. После пятого шага получим фигуру, изображенную на рис. 46. Но мы не ограничимся пятью шагами, а повторим нашу операцию бесконечно много раз. В результате получится некоторая геометрическая фигура. Так вот, чем же она является, линией или поверхностью? Ведь мы провели бесконечно много перпендикуляров. Не сольются ли они и не заполнят ли маленький кусок поверхности около отрезка [0; 1]? Ответ на этот вопрос не слишком легок.

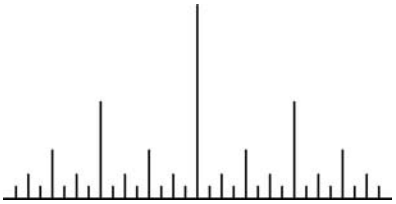


Рис. 46

А вот другой пример. Возьмем квадрат со стороной 1, разделим его на 9 равных частей и выкинем среднюю часть (оставив стороны выбрасываемого квадратика). После этого разделим каждый из оставшихся квадратов снова на девять равных квадратиков еще меньшего размера и снова выкинем центральные квадратики. Еще один шаг приведет к фигуре, изображенной на рис. 47 (здесь заштрихованы выброшенные квадратики). Ясно, что фигура на рис. 47 является еще поверхностью. Но мы не остановимся на третьем шаге и будем бесконечно много раз делить квадратики на девять равных частей, после чего выбрасывать среднюю часть. В конце концов у нас получится некоторая геометрическая фигура, которую называют *ковром Серпинского* по имени придумавшего ее польского ученого.

Эта фигура похожа на ткань, сотканную сумасшедшим ткачом. Вдоль и поперек идут нити основы и утка, сплетаясь в очень симметричные и красивые узоры. Но сама получившаяся ткань весьма

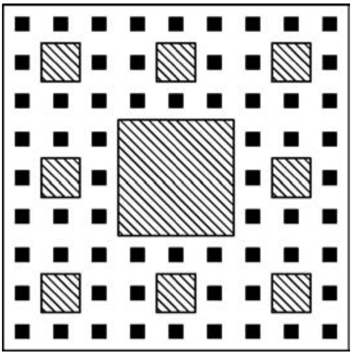


Рис. 47

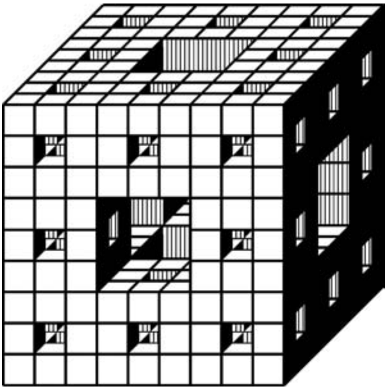


Рис. 48

дырява — ни одного целого куска в ней нет, каждый самый маленький квадратик подвергался вырезанию центральной части. И совсем неясно, чем является этот ковер — линией или поверхностью? Ведь, с одной стороны, он не содержит ни одной целой части, а потому вряд ли является поверхностью, а с другой — образующие его нити сплелись в настолько сложный узор, что вряд ли кто-нибудь без колебаний назовет ковер Серпинского линией. Во всяком случае, нарисовать эту «линию» было бы невозможно.

А ковер Серпинского — не самая сложная из геометрических фигур. Вместо квадрата мы могли бы взять куб, разделить его на 27 равных кубиков и выбросить центральный кубик вместе с шестью прилегающими к нему кубиками. После этого разделим каждый оставшийся кубик еще на 27 частей и продолжим операцию выбрасывания (на рис. 48 изображено тело, остающееся после двух выбрасываний). Проделаем эту операцию бесконечно много раз. Чем является оставшаяся после всех выбрасываний геометрическая фигура — линией, поверхностью или телом?

Евклид отказывает в помощи

Когда перед математиками прежних времен вставал сложный геометрический вопрос, они в первую очередь отправлялись смотреть, что написано об этом у Евклида. Ведь на протяжении почти двух тысячелетий Евклид был эталоном математической строгости и энциклопедией геометрической мудрости. Не зря даже философы, стремясь обезопасить себя от упреков в нестрогости рассуждений, прибегали к языку Евклида и формулировали свои утверждения как аксиомы, леммы и теоремы.

Но как раз по интересующему нас вопросу у Евклида написано нечто совсем невнятное. Первые строки книги Евклида «Начала» гласят следующее.

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия же длина без ширины.
3. Оконечность же линии — точка.
4. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
5. Оконечность же поверхности — линия.
6. Граница есть то, что является оконечностью чего-либо.
7. Фигура есть то, что содержится внутри какой-нибудь или каких-нибудь границ.

Нет, как хотите, а это — что угодно, но не строгие математические определения. Человек, не знающий, что такое точка, линия, поверхность, вряд ли почерпнет полезные для себя сведения из этих «определений», напоминающих ответ растерявшегося генерала («Линия — это особь статья, а поверхность — особь статья»). И уж во всяком случае из этих определений не удастся узнать, что такое ковер Серпинского — линия или поверхность, есть ли у него только длина без ширины или и длина, и ширина.

Но во времена Евклида таких сложных фигур, как ковер Серпинского, не знали, а для простых фигур определения были не слишком нужны: всякий и так мог увидеть, где на чертеже линия, а где — поверхность. Впрочем, и сам Евклид, по-видимому, чувствовал, что с определениями основных понятий у него не все ладно. Во всяком случае, приведя эти определения в начале книги, он потом начисто о них забыл и ни разу на протяжении всего труда ими не воспользовался.

Нужны ли строгие определения?

На протяжении двух тысячелетий авторитет Евклида стоял совершенно незыблемо. Усомниться в каком-нибудь его положении означало окончательно и бесповоротно подорвать свою математическую репутацию. Один из величайших математиков XIX века Карл Фридрих Гаусс, еще до Лобачевского пришедший к идеям неевклидовой геометрии, не решился опубликовать свои исследования, опасаясь, как он писал одному другу, крика беотийцев[1]. И только научный подвиг великого русского геометра Николая Ивановича Лобачевского, который опубликовал свои открытия, невзирая на насмешки не понимавших его ученых, сделал неевклидову геометрию всеобщим достоянием.

После появления трудов Н. И. Лобачевского стало ясно, что существуют две геометрии, одинаково безупречные логически, но иногда приводящие к совершенно различным теоремам. Но если это так, то всякие ссылки на «геометрическую очевидность» полностью потеряли цену. Каждое геометрическое утверждение надо было основывать на строгих определениях, безупречных логических утверждениях. И уж во всяком случае основным геометрическим понятиям —

[1]Беотийцы — греческое племя, которое считалось весьма экономно наделенным умственными способностями.

линии, фигуре, телу — надо было дать точные определения, ничем не напоминающие определения типа «это — особь статья, а то — особь статья».

Стремление к строгим определениям характеризовало не только геометрию, но и математический анализ XIX века. С помощью дифференциального и интегрального исчислений, созданных трудами Ньютона, Лейбница, Эйлера, Лагранжа и других великих математиков XVII и XVIII веков, удалось решить самые разнообразные задачи, от расчета траектории артиллерийского снаряда до предсказания движений планет и комет. Но основные понятия, с помощью которых достигались эти замечательные результаты, были определены крайне нестрого. Основа тогдашнего математического анализа — понятие бесконечно малой величины — казалось чем-то стоящим на грани бытия и небытия, чем-то вроде нуля, но не совсем нуля. И математики XVIII века были вынуждены ободрять своих сомневающихся учеников словами: «Работайте, и вера к вам придет».

Но ведь математика — не религия, строить ее на вере нельзя. А самое главное — методы, дававшие столь замечательные результаты в руках великих мастеров, стали приводить к ошибкам и парадоксам, когда ими стали пользоваться менее талантливые ученики. Мастеров оберегала от ошибок их абсолютная математическая интуиция, то подсознательное чувство, которое часто приводит к правильному ответу скорее, чем длинные логические рассуждения. Ученики же такой интуицией не обладали, и конец XVIII века ознаменовался неслыханным скандалом в математике — наплывом формул, стоивших меньше, чем бумага, на которой они были напечатаны, и сомнительных теорем, область приложимости которых была совершенно неясна.

И, подобно детям, ломающим красивую игрушку, чтобы посмотреть, как она устроена, математики XIX века подвергли жестокой критике все применявшиеся до того понятия, стали перестраивать математику на базе строгих определений. Ссылки на наглядность отвергались, вместо нее требовали строжайшей логики[1]. Но требованиям логики не удовлетворяли самые простые фразы из курса математического анализа, например, такие, как: «Рассмотрим область G, ограниченную замкнутой линией Г».

[1]Правда, при этом они иногда выплескивали из ванны вместе с водой и ребенка, и в XX веке многое из выброшенного было возвращено в науку.

Что такое замкнутая линия? Почему она является границей области? На сколько частей замкнутая линия разбивает плоскость, и какую из этих частей рассматривают?

На все эти вопросы математики XVIII века не давали ответа. Они просто рисовали овал и думали, что этим все сказано. А в XIX веке рисункам уже не верили. Для аналитиков вопрос «что такое линия?» тоже стал одним из самых жгучих.

Однако прошло много времени, прежде чем удалось дать на него исчерпывающий ответ.

Линия — след движущейся точки

Для того чтобы дать строгое определение линии, надо было исходить из тех наглядных образов, которые привели к созданию этого математического понятия: длинных и тонких нитей, лучей света, длинных и узких дорог. Во всех этих случаях длина настолько больше ширины, что шириной можно пренебречь. В результате математической идеализации мы и приходим к понятию линии, не имеющей ширины.

Первым попытался дать строгое определение линии французский математик Камилл Жордан. Он исходил из того, что траектория движения очень малого тела представляет собой узкую и длинную трубочку. По мере уменьшения размеров тела эта трубочка становится все уже и уже и в пределе превращается в траекторию движущейся точки — линию, не имеющую ширины. Этот образ Жордан и принял за определение линии. Именно, линией он называл траекторию движущейся точки. При этом точка должна была двигаться непрерывно, не делая скачков.

Более точно определение Жордана звучало следующим образом. Для того чтобы задать положение движущейся точки, надо задать ее координаты в каждый момент движения. Так как движение продолжается какой-то конечный промежуток времени, то, не теряя общности, можно считать, что этим промежутком является $[0; 1]$. Иными словами, точка начинает двигаться в некоторый момент времени, принимаемый за начало отсчета, и кончает движение по истечении некоторой единицы времени (одной секунды, минуты, года и т. д.). В каждый момент времени t в течение этого промежутка задаются координаты движущейся точки. Таким образом, координаты точки зависят от момента времени t, являются его функциями. Обозначим эти функции (для случая, когда движение точки происходит в одной плоскости) через $f(t)$ и $g(t)$:

$$x = f(t), \quad y = g(t).$$

Условие, что точка движется непрерывно, означает, что функции $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны в каждой точке отрезка $[0; 1]$. Грубо говоря, при малом изменении t функции $f(t)$ и $g(t)$ должны мало изменяться. Точнее, если $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ приближаются к некоторому значению t, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$, то имеют место равенства

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(t) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} g(t_n) = g(t).$$

Определение Жордана оказалось довольно удачным. Все линии, с которыми математики в то время имели дело, оказались кривыми в смысле Жордана, или, как говорят, *жордановыми кривыми*. Возьмем, например, окружность радиуса 1. Длина этой окружности равна 2π. Поэтому, чтобы обежать окружность за единицу времени, точка должна двигаться со скоростью 2π. Поэтому за время t она пробежит дугу $2\pi t$. Из рис. 49 ясно, что ее координаты в момент времени t задаются формулами

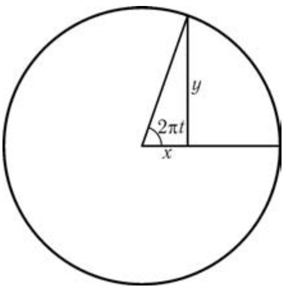


Рис. 49

$$x = \cos 2\pi t, \quad y = \sin 2\pi t.$$

Эти уравнения называют *параметрическими уравнениями окружности*. А для линии, изображенной на рис. 50 (ее называют *астроидой*), параметрические уравнения имеют следующий вид:

$$x = \cos^3 2\pi t, \quad y = \sin^3 2\pi t.$$

Жордановыми линиями могут быть и линии, составленные из различных кривых. Возьмем, например, контур полукруга, состоящий из полуокружности радиуса 1 и диаметра (рис. 51). Движущаяся точка пробегает за половину времени полуокружность, а за вторую половину времени — диаметр. Выражения для координат при движении по окружности мы уже знаем. При движении же по диаметру y

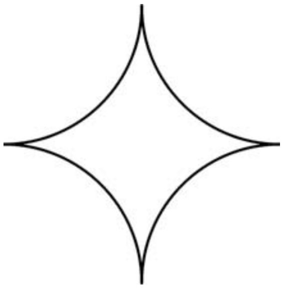


Рис. 50

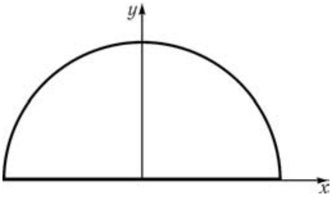


Рис. 51

остается равным нулю, а x меняется от -1 до 1. В результате получаем следующие параметрические уравнения контура:

$$x = \begin{cases} \cos 2\pi t, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ 4t-3, & \text{если } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1; \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \sin 2\pi t, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Теорема очевидна, доказательство — нет

Жордану удалось, используя введенное им понятие кривой, уточнить смысл той самой фразы из учебников математического анализа, о которой мы уже говорили: «Пусть замкнутая линия Г ограничивает область G». Замкнутая жорданова кривая — это кривая, которая при $t=1$ попадает в ту же точку, где она была при $t=0$. Если при этом различным моментам времени t_1 и t_2, лежащим между 0 и 1, соответствуют разные точки кривой, то эта кривая не пересекает саму себя.

Жордан доказал следующую теорему.

Замкнутая жорданова кривая Г, не имеющая точек самопересечения, разбивает всю плоскость на две части. Две точки, принадлежащие одной и той же части, можно соединить ломаной, не пересекающей кривую Г, а точки из разных частей нельзя соединить такой ломаной, любая соединяющая их ломаная пересекает кривую Г (рис. 52).

Эта теорема кажется совершенно очевидной. Однако ее доказательство потребовало очень тонких рассуждений. Даже в случае, когда линия Г является замкнутым многоугольником, доказательство остается очень сложным. Попробуйте сразу сказать, можно ли соединить ломаной, не пересекающей контура Г, точки A и B на рис. 53.

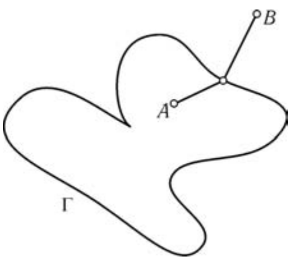


Рис. 52

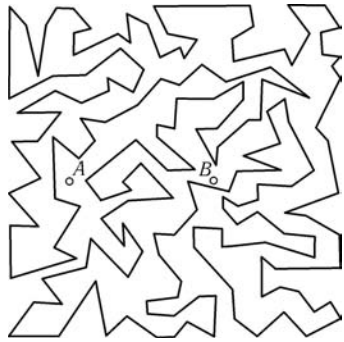


Рис. 53

Две части, на которые замкнутая жорданова линия разбивает плоскость, называют внутренней и внешней областями, ограниченными этой линией. Таким образом, понятие области, ограниченной замкнутой линией, приобрело точный смысл.

Кривая проходит через все точки квадрата

Когда Жордан дал свое определение кривой, то сначала казалось, что цель достигнута, получено строгое определение понятия линии, не опирающееся на наглядность. Но вскоре оказалось, что это не так — определение Жордана охватывало не только привычные для математиков линии, но и фигуры, которые никто бы линиями не назвал. Уж со всюду колючими линиями математики как-нибудь примирились бы. Но назвать линией квадрат, на это ни у кого не хватило бы духу. А оказалось, что и квадрат, и треугольник (не периметр треугольника, а сам треугольник со всеми его внутренними точками), и круг являются линиями в смысле Жордана. Доказал это итальянский математик Пеано.

Мы уже рассказывали, что Кантор установил взаимно однозначное соответствие между точками отрезка и квадрата, то есть показал, что на отрезке ровно столько же точек, сколько и на квадрате. Это соответствие не было непрерывным. Когда точка двигалась по отрезку, соответствующая ей точка на квадрате не ползла подобно жуку, а прыгала как блоха. В самом деле, возьмём на отрезке точки 0,50000000… и 0,499999990000000… Эти точки довольно близки друг к другу. Но соответствующие им точки на квадрате далеки друг от друга. Ведь первой из них соответствует точка (0,50000…; 0,0000…), лежащая на нижней стороне квадрата, а второй точка (0,4999000…; 0,9999000…), лежащая у самой верхней стороны квадрата. И если мы будем увеличивать число девяток у второй точки, приближая ее к первой, то соответствующие точки квадрата и не подумают приближаться друг к другу.

Таким образом, канторово отображение отрезка на квадрат, хотя и было взаимно однозначным, но не было непрерывным. Оно не давало жордановой кривой. Пеано удалось построить другое отображение множества точек отрезка на множество точек квадрата, при котором близким точкам на отрезке соответствовали близкие точки квадрата. Иными словами, Пеано удалось построить кривую линию (в смысле Жордана), которая прошла через все точки квадрата!

Разумеется, мы не можем нарисовать кривую Пеано, разве что, подражая художнику-абстракционисту, нарисуем черный квадрат. Но ведь на этом квадрате все равно нельзя будет понять, где начинается кривая, где она кончается, как она обходит квадрат. Поэтому последуем примеру не художника-абстракциониста, а физика Перрена и будем изображать положение движущейся точки прямолинейными отрезками. Чем меньше будут промежутки времени между отдельными наблюдениями, тем точнее получившаяся ломаная изобразит кривую Пеано.

Сначала будем отмечать положение движущейся точки через каждые $\frac{1}{4}$ с. Иными словами, отметим ее положение в начале движения, через $\frac{1}{4}$ с после начала движения, через $\frac{1}{2}$ с после начала движения, через $\frac{3}{4}$ с и в конце движения. Мы получим 5 точек. Соединив их, получаем линию $ABCDE$, изображенную на рис. 54 *а*.

Разумеется, эта линия не проходит через все точки квадрата. Но мы уменьшим промежутки времени между отдельными наблюдениями и будем отмечать положение точки каждые $\frac{1}{16}$ с. Линия станет более извилистой, увеличится число изломов, и она примет вид, изображенный на рис. 54 *б*. Если еще чаще отмечать положение движущейся точки, то получим линию, изображенную на рис. 54 *в*. Мы видим, что линия все плотнее и плотнее заполняет квадрат, все ближе и ближе подходит к каждой его точке. В пределе, если все время наблюдать за движущейся точкой, мы получим линию, проходящую через все без исключения точки квадрата.

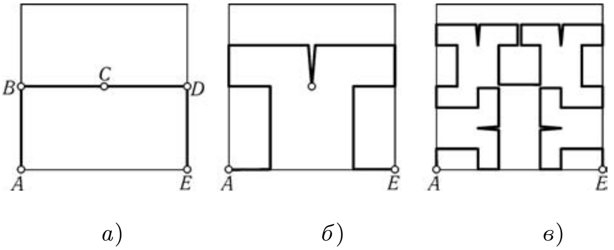


Рис. 54

Надо отметить, что, выиграв по сравнению с Кантором в том, что его линия оказалась непрерывной, Пеано потерял в другом. Его линия уже не задавала *взаимно однозначного* отображения отрезка на квадрат. Через некоторые точки квадрата она проходила по нескольку раз. Позже было доказано, что невозможно сохранить одновременно и непрерывность и взаимную однозначность соответствия: не существует жордановой кривой, проходящей через все точки квадрата в точности по одному разу!

Все лежало в развалинах

Трудно передать словами впечатление, произведенное на математический мир результатом Пеано. Казалось, что все рухнуло, что самые основные математические определения потеряли всякий смысл, не было видно различия между линией и поверхностью, поверхностью и телом (результат о невозможности взаимно однозначного и непрерывного соответствия между отрезком и квадратом еще не был известен). Знаменитый французский математик Анри Пуанкаре с горечью воскликнул: «Как могла интуиция до такой степени обмануть нас!»

Стало ясно, что жорданово определение кривой не безупречно. С одной стороны, оно слишком широко: под это определение подходит и кривая Пеано. А с другой стороны, оно слишком узко: не все образы, которые интуитивно хотелось бы отнести к линиям, подходят под это определение. Например, линия, изображенная на рис. 43, с. 113 (окружность с намотанной на нее спиралью), уже не является жордановой кривой. Обнаружили и другой, глубже скрытый недостаток определения Жордана — ведь в этом определении шла речь не только о кривой, но и о том, в каком темпе и как пробегает ее точка. Представим себе, например, бегуна, который первую половину окружности проходит за $\frac{1}{4}$ мин, а потом, устав, проходит вторую половину окружности за $\frac{3}{4}$ мин. Ясно, что в этом случае мы получим совсем другие параметрические уравнения, чем на с. 121.

А ведь точка может пробегать окружность бесчисленным множеством способов, то ускоряя, то замедляя движение. Поэтому для одной и той же окружности получатся различные параметрические уравнения. И весьма трудно догадаться, что уравнения

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

задают ту же самую окружность, что и уравнения

$$x = \cos 2\pi t, \qquad y = \sin 2\pi t.$$

А с более сложными кривыми совсем легко запутаться. Возьмем, например, лемнискату. Эту кривую можно обойти так, как на рис. 55 *а*, а можно и так, как на рис. 55 *б*. И выяснить, глядя на уравнения, одинаковы кривые или различны, весьма трудно.

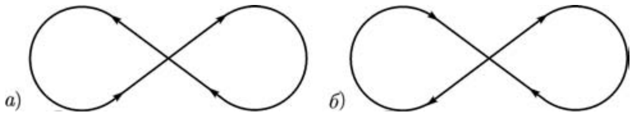


Рис. 55

Итак, снова встал вопрос, что же такое линия и чем она отличается от поверхности? Ответ на него был связан с общими исследованиями Кантора о геометрических фигурах.

Как делают статуи

Создав теорию множеств, Кантор перешел к вопросу о том, *что такое геометрическая фигура*? Самый общий ответ на этот вопрос гласил: геометрическая фигура — это любое множество точек пространства. Если это множество лежит на плоскости, то получается плоская геометрическая фигура. Но такой ответ был бы слишком общим — у фигур в этом смысле нет почти никаких достаточно интересных свойств.

Поэтому надо было в первую очередь ограничить совокупности изучаемых множеств, выделить из них те, которые ближе всего по своим свойствам к обычным геометрическим фигурам.

Чтобы выделить такой класс фигур, выясним, что общего имеют друг с другом обычные фигуры, такие, как квадрат, круг, отрезок прямой, астроида и т. д. Оказывается, все эти фигуры можно получить единообразным процессом.

Рассказывают, что знаменитый скульптор Роден на вопрос, как ему удается делать свои замечательные статуи, ответил: «Я беру глыбу мрамора и отсекаю от нее все лишнее».

Тем же самым способом можно получить любую ограниченную плоскую геометрическую фигуру: надо взять какой-нибудь квадрат, в котором она лежит, а потом отсечь все лишнее. Однако отсекать надо не сразу, а постепенно, на каждом шаге отбрасывая кусочек, имеющий форму круга. При этом сам круг выбрасывается, а его граница — окружность — остается в фигуре.

На первый взгляд кажется, что так можно получить лишь фигуры такого вида, как на рис. 56. Но все дело в том, что отбрасывают не один и не два круга, а счетное множество кругов. А с помощью счетного множества вырезаний можно получить любую фигуру. Для этого следует поступить так: взять все круги, у которых обе координаты центра и радиус рациональны. В силу теоремы на с. 70 множество таких кругов счетно. А теперь выбросим из плоскости все круги нашего множества, внутри которых нет ни одной точки геометрической фигуры.

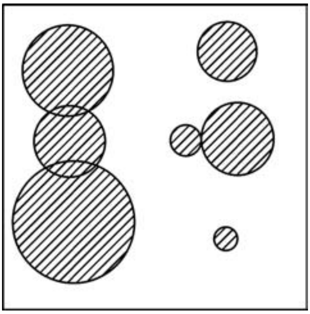


Рис. 56

Ясно, что после этого останется только сама эта геометрическая фигура. А число выброшенных кругов не более чем счетно.

Впрочем, не обязательно выбрасывать круги. Вместо них можно удалять квадраты, прямоугольники, эллипсы, соблюдая лишь одно условие — внутренние точки отбрасываются, а граничные остаются.

Континуумы

Оказывается, что кроме обычных геометрических фигур с помощью выбрасывания счетного множества кругов (квадратов и т. д.) можно получать и другие множества, не слишком похожие на обычные фигуры, но все же обладающие многими интересными свойствами. Например, ковер Серпинского, о котором мы уже неоднократно говорили, получается именно таким путем: из квадрата со стороной 1 выбрасывают один за другим маленькие квадратики, причем их стороны остаются.

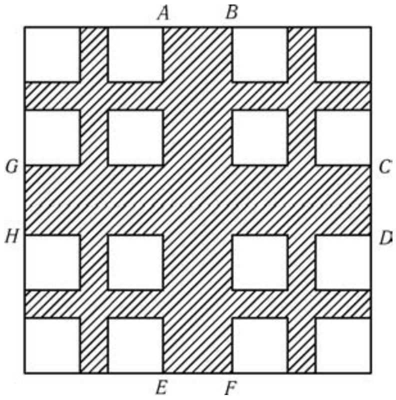


Рис. 57

Однако путем выбрасывания можно получить и фигуры, не состоящие из одного куска. Например, если удалять «кресты»[1], как на рис. 57, то получится в конце концов множество, не содержащее ни одного целого куска (как говорят, *вполне несвязное*). Поэтому мы введем ограничение, что после каждого выбрасывания должно оставаться множество, состоящее из одного куска. Тогда и после всех выбрасываний останется множество из одного куска (то есть, как говорят математики, *связное*). Кроме того, получающееся множество ограничено, то есть целиком лежит в некотором квадрате.

Итак, рассматриваемые множества удовлетворяют следующим условиям:

1) множество F получается из квадрата выбрасыванием счетного множества кругов (квадратов и т. д.) с оставлением их границ;
2) множество F состоит из одного куска (связно).

Эти множества Кантор и назвал *континуумами* (напомним, что латинское слово «continuum» означает «непрерывное»). Континуумы

[1] При этом вместе с каждым крестом удаляются его концевые промежутки, например промежутки AB, CD, EF, GH.

и оказались наиболее общими множествами, свойства которых очень близки к свойствам обычных геометрических фигур.

Канторовы линии

Теперь мы уже готовы ответить на вопрос, что же такое плоская линия. Так как плоские линии должны быть геометрическими фигурами, то ясно, что искать их надо среди континуумов. Но континуумами являются и круг, и квадрат, а эти фигуры никак не назовешь линиями. Поэтому надо добавить еще какое-то условие, которое отмело бы такие фигуры.

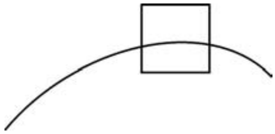


Рис. 58

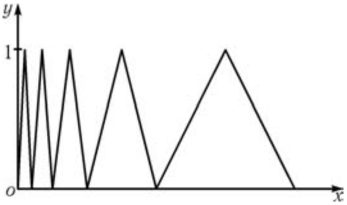


Рис. 59

Заметим, что и круг, и квадрат содержат сплошные куски плоскости. А линии сплошных кусков плоскости не содержат; какой бы маленький квадратик мы ни взяли, всегда на нем найдутся точки, не принадлежащие линии (рис. 58). Вот это и является нужным нам дополнительным условием: *плоской линией в смысле Кантора называют лежащий на плоскости континуум, не заполняющий ни одного сплошного куска плоскости* (то есть такой, что в каждом квадрате есть точки, не принадлежащие этой линии).

Например, отрезок, контур треугольника, окружность, четырехлепестковая роза — все это линии. Линией является и ковер Серпинского. Так как при его построении мы продырявили *все* квадраты, получавшиеся при делении, то ни одного целого куска плоскости он не содержит. Канторовой линией является и окружность вместе с намотанной на нее спиралью, и пилообразная линия на рис. 59 вместе с отрезком [0; 1] оси ординат. Вообще все фигуры, являющиеся линиями в наглядном, наивном понимании, являются линиями и в смысле Кантора. А фигуры, содержащие хоть один целый кусок плоскости, не относятся к числу канторовых линий.

Но и среди канторовых линий есть такие, что их свойства совершенно непохожи на свойства обычных линий. Сейчас мы расскажем о некоторых таких линиях.

Всегда ли площадь линии равна нулю?

Конечно, после того, как читатель познакомился с линиями, проходящими через все точки квадрата, он может ожидать чего угодно. Но все же, может ли линия иметь площадь? Ведь еще Евклид говорил, что линия — это длина без ширины. А там, где нет ширины, откуда же взяться площади? Да и в определении канторовой линии сказано, что она не содержит ни одного целого куска плоскости. Откуда же в этом случае взяться площади? Но не торопитесь давать безапелляционный ответ.

Прежде чем исследовать вопрос, надо договориться о точном смысле употребляемых слов. Что значат слова «линия имеет нулевую площадь» или «линия имеет ненулевую площадь»? Возьмем самую обычную линию — прямолинейный отрезок. Так как его ширина равна нулю, то отрезок можно поместить внутрь прямоугольника сколь угодно малой площади, нужно лишь выбрать ширину этого прямоугольника достаточно малой. Точно так же и окружность можно поместить внутрь многоугольника со сколь угодно малой площадью. Для этого достаточно вписать в нее правильный многоугольник с очень большим числом сторон и описать аналогичный многоугольник. Область, заключенная между этими двумя многоугольниками, будет иметь малую площадь (тем меньшую, чем больше сторон у наших многоугольников), а окружность целиком лежит в этой области (рис. 60).

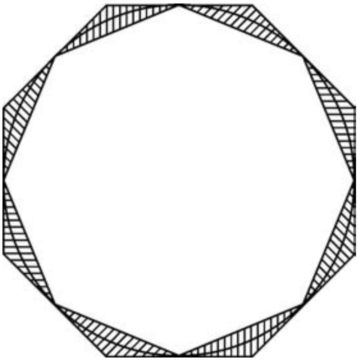


Рис. 60

Теперь уже ясно, что означают слова «линия имеет нулевую площадь». Они значат, что, какое бы маленькое положительное число ε

мы ни взяли, найдется многоугольная область, содержащая линию и такая, что площадь области меньше чем ε. А если хоть для одного положительного ε такой области не удастся найти, тогда площадь линии не равна нулю.

Чтобы это определение стало яснее, применим его не к таким простым линиям, как отрезок или окружность, а к более сложным. Одной из таких линий является, конечно, ковер Серпинского. Найдем, чему равна его площадь. Для этого вспомним, что площадь всего квадрата была равна 1. На первом шаге мы выбросили центральный квадрат, имевший площадь $\frac{1}{9}$. В результате получилась многоугольная область с площадью $\frac{8}{9}$. На втором шаге мы выбросили 8 квадратиков, каждый из которых имел площадь $\frac{1}{81}$. После этого осталась многоугольная область с площадью

$$\frac{8}{9} - \frac{8}{81} = \frac{64}{81} = \left(\frac{8}{9}\right)^2.$$

Теперь уже ясно, что после третьего шага останется многоугольная область с площадью $\left(\frac{8}{9}\right)^3$, потом — с площадью $\left(\frac{8}{9}\right)^4$ и т. д. Но если взять любую правильную дробь и возводить ее во все большую и большую степень, то в пределе получим нуль: если $0 < q < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

В частности, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$. Но, по определению предела, это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n, для которого $\left(\frac{8}{9}\right)^n < \varepsilon$. Следовательно, после n шагов у нас получится многоугольная область, площадь которой меньше чем ε. А эта область целиком накрывает ковер Серпинского. Выходит, площадь ковра Серпинского равна нулю.

Казалось бы, полный триумф определения Евклида. Даже у такой сложной линии, как ковер Серпинского, площадь равна нулю. Но праздновать победу преждевременно. Ведь никто не заставлял нас выбрасывать такие большие куски. Поступим более экономно и разделим квадрат не на 9, а на 25 равных частей (то есть каждую сторону разделим на 5 частей). Выбросим центральный квадратик, площадь которого равна, очевидно, $\frac{1}{25}$. Теперь читателю, вероятно, хочется разделить каждый из оставшихся 24 квадратиков на 25 частей и выбросить центральную часть. Но это было бы опять неэкономно. Вместо этого возьмем отрезки, ограничивающие выброшенный квадратик, и продолжим их до пересечения со сторонами большого квадрата. У нас получатся 4 квадрата (по углам) и 4 прямоугольника. В каждом квадрате и каждом прямоугольнике проведем кресты с шириной перекладин $\frac{1}{25}$ и выбросим центральные части крестов (рис. 61). Так как площадь каждой центральной части равна $\frac{1}{625}$, то площадь всех квадратиков, выброшенных на втором шаге, равна $\frac{8}{625}$. На третьем шаге точно так же выбрасываем 64 квадратика с общей площадью $\frac{64}{25^3} = \frac{64}{15625}$ и т. д. Теперь уже площади выбрасываемых квадратиков образуют геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{25} + \frac{8}{25^2} + \frac{64}{25^3} + \ldots$$

со знаменателем $\frac{8}{25}$. Сумма этой прогрессии равна лишь $\frac{1}{17}$. Но что же это означает? А это означает, что на каждом шаге на долю остатка приходится площадь не меньше чем $\frac{16}{17}$. И никакой многоугольной областью, площадь которой меньше $\frac{16}{17}$, покрыть остаток не удастся. А ведь этот остаток, как и ковер Серпинского, является кривой (в смысле Кантора) — при его построении мы дырявили каждый прямоугольник и ни одного целого прямоугольника не оставили.

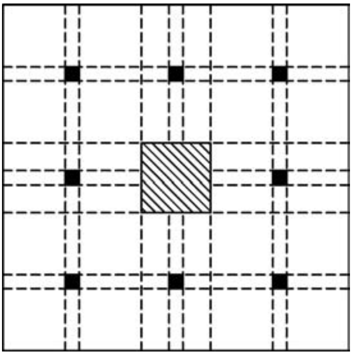


Рис. 61

Выходит, таким образом, что кривая в смысле Кантора может иметь ненулевую площадь!

Области без площади

Все же разобранный пример еще не слишком убедителен: полученная линия сплошь состоит из точек самопересечения и не ограничивает никакой области. Поэтому возникает вопрос, а может ли «хорошая» кривая, не имеющая точек самопересечения, то есть замкнутая жорданова кривая без самопересечений, иметь ненулевую площадь? Оказывается, может!

Чтобы построить такую кривую, изменим немного проводившееся построение. Сначала построим множество, в котором не только что целого куска плоскости, а и целого куска линии не найдешь, но площадь которого не равна нулю. Для этого надо выбрасывать не только центральные квадратики, а целые кресты, так, как изображено на рис. 62. При этом размеры крестов подберем так, чтобы площадь первого выброшенного креста была равна $\frac{8}{25}$, всех крестов, выброшенных на втором шаге, — $\frac{64}{625} = \left(\frac{8}{25}\right)^2$, на третьем — $\left(\frac{8}{25}\right)^3$ и т. д. Тогда общая площадь выброшенных крестов будет равна сумме геометрической прогрессии

$$\frac{8}{25} + \left(\frac{8}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^3 + \ldots,$$

то есть $\frac{8}{17}$. А это меньше половины площади всего квадрата. Значит, на долю остатка приходится еще $\frac{9}{17}$ площади всего квадрата. Но при построении остатка мы выбрасывали целые кресты, безжалостно кромсая квадрат. Никакие две точки этого остатка нельзя соединить линией, даже линией в смысле Кантора; всякая связь между его точками отсутствует. Как говорят математики, остаток является вполне несвязным множеством. А площадь этого множества, не содержащего ни целого куска плоскости, ни дуги кривой, отлична от нуля; никакой многоугольной областью, площадь которой меньше $\frac{9}{17}$, это множество не накроешь.

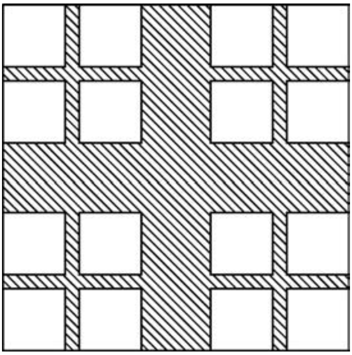


Рис. 62

Теперь уже легко построить пример несамопересекающейся замкнутой кривой, имеющей ненулевую площадь. Для этого нужно соединить полученные точки точно так же, как мы проводили кривую через все точки квадрата. Из-за того, что на каждом шаге мы выбрасывали целые кресты, получающаяся линия не имеет самопересечений (этим она и отличается от кривой Пеано). Но так как она проходит через все точки множества, площадь которого по крайней мере равна $\frac{9}{17}$, то и площадь полученной линии по крайней мере равна $\frac{9}{17}$.

Теперь уже ничего не стоит построить область, не имеющую площади. Для этого надо соединить точки A и B полученной кривой какой угодно линией, например полуокружностью. Тогда полученная линия Г ограничивает какую-то область G. Чему же равна ее площадь? Ответ получится разный в зависимости от того, присоединим мы к этой области ее границу или нет — ведь сама граница имеет площадь, по крайней мере равную $\frac{9}{17}$. Ясно, что обычной площади наша область не имеет. Такие области, не имеющие обычной площади, в математике называют *неквадрируемыми*.

Неожиданные примеры

Вероятно, после появления кривой Пеано математики были уверены, что знают уже все «чудовища» из мира необычайных функций и линий. Однако и потом их еще не раз подводила геометрическая интуиция. Насколько отличаются свойства канторовых линий от свойств обычных линий, лучше всего говорит следующая история.

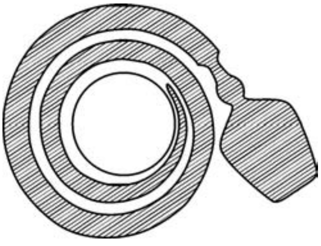


Рис. 63

В начале XX века известный математик Шёнфлис опубликовал серию работ, в которых говорилось о различных свойствах кривых, границ областей и т. д. При этом Шёнфлис часто опирался на «геометрическую очевидность». Но через несколько лет, в 1910 году, появилась короткая (всего 12 страниц) статья молодого голландского математика Брауэра. Она содержала несколько удивительных примеров, из которых следовало, что одни результаты Шёнфлиса просто неверны, а другие, хотя и верны, но нестрого доказаны. Поистине плохую шутку сыграла с Шёнфлисом «геометрическая очевидность»!

Чтобы показать, какие «очевидные» утверждения оказались неверными, приведем некоторые примеры Брауэра (при этом мы используем полученные позднее упрощения).

Брауэр построил ограниченную область, граница которой (в обычном понимании этого слова) не являлась континуумом. Для этого он взял бутылку и начал вытягивать ее горлышко, наматывая его на окружность (рис. 63). В результате получилась область, ограниченная двумя спиралями и бутылкой. Но эта граница не является континуумом; чтобы получить континуум, надо к нашим спиралям прибавить окружность, на которую они наматываются.

Если же добавить к границе окружность, то получится новое осложнение: точки границы нельзя будет соединить с точками области линиями конечной длины.

Области и границы ★

Раз мы уже заговорили об областях и границах, уточним соответствующие понятия. Ведь поскольку жорданово определение линии оказалось не слишком удачным, то и определение области надо дать заново.

Назовем *открытым множеством* на плоскости любое множество, являющееся суммой кругов с отброшенными границами. В частности, дополнение до любого плоского континуума является открытым плоским множеством. Все обычные плоские области (внутренность крута, квадрата, треугольника и т. д.) являются открытыми множествами (на плоскости). Кроме того, они связны: любые две их точки можно соединить ломаной линией, не выходя из этой области. Эти свойства и определяют плоскую область.

Плоской областью называют связное множество точек плоскости, являющееся суммой кругов с отброшенными границами.

При этом число кругов может быть произвольным. Однако можно доказать, что любую область можно составить из счетного множества кругов.

Круг с отброшенной границей называют *окрестностью* его центра a. Разумеется, каждая точка имеет бесконечно много окрестностей.

Точку a на плоскости называют *граничной* для области G, если в любой окрестности точки a есть как точки из области G, так и точки, ей не принадлежащие (рис. 64).

Совершенно так же определяют открытые множества, области и граничные точки областей в пространстве. Разница заключается лишь в том, что вместо кругов с отброшенной границей берут шары с отброшенной граничной сферой.

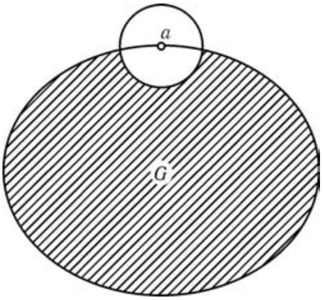


Рис. 64

Наряду с понятием окрестности точки (на плоскости или в пространстве) нам понадобится еще понятие *относительной окрестности точки*, принадлежащей некоторому множеству A. Так называют множество точек окрестности, принадлежащих множеству A, то есть пересечение обычной окрестности этой точки с самим множеством A. Например, если A линия, изображенная на рис. 65, а G — окрестность точки a, то относительной окрестностью этой точки является кусок линии от точки b до точки c. Если множество A

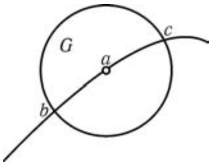


Рис. 65

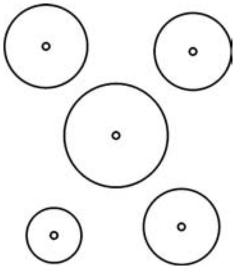


Рис. 66

состоит из нескольких точек, то у каждой его точки есть относительная окрестность, состоящая только из этой точки. Чтобы получить ее, надо взять обычную окрестность точки, не содержащую остальных точек множества (рис. 66).

Большие ирригационные работы

Теперь мы расскажем о втором, еще более удивительном примере Брауэра. Нарисуем карту какой-нибудь страны и сопредельных с ней стран. Почти каждая точка границы этой страны принадлежит двум и только двум странам: данной и одной из сопредельных. Поэтому в каждой точке границы стоят два пограничника — один из этой страны, а другой — из сопредельной. Есть на карте несколько точек, где сходятся три страны (рис. 67). В таких точках стоят уже три пограничника. Но таких мест на карте — лишь конечное число. И кажется совершенно очевидным, что такие точки не могут заполнить всю границу страны, то есть что не может быть трех областей (трех стран), имеющих одну и ту же общую границу. Иными словами, кажется очевидным, что три пограничника из трех разных стран не могут стоять в каждой точке границы.

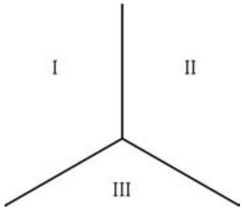


Рис. 67

Рис. 68

А Брауэр построил такие три области. Чтобы понять этот пример, представим себе, что в океане есть остров, на котором находятся два озера с пресной водой. Только в одном озере вода холодная, а в другом теплая. Теперь проведем следующие ирригационные работы. В течение первых суток проведем каналы от океана и от обоих озер так, чтобы каждый из этих каналов был слепым (то есть только заливом соответствующего водоема), чтобы эти каналы нигде не соприкасались друг с другом и чтобы в результате расстояние каждой точки суши до океанских вод, а также до вод обоих озер было меньше 1 километра (рис. 68).

В следующую половину суток продолжим эти каналы так, что они по-прежнему остаются слепыми и не соприкасаются между собой, а расстояние от каждой точки суши до любого из трех каналов становится меньше чем $\frac{1}{2}$ километра. При этом, конечно, каналы должны стать более узкими, чем ранее. В следующую четверть суток каналы продолжаются дальше так, чтобы каждая точка суши отстояла от любого канала меньше чем на $\frac{1}{4}$ километра и т. д. С каждым шагом каналы становятся все извилистее и извилистее, все уже и уже. Через двое суток такой работы весь остров будет пронизан этими тремя каналами и превратится в канторову линию. Стоя в любой точке этой линии, можно зачерпнуть, по желанию, соленой, теплой пресной или холодной пресной воды. При этом воды не смешиваются друг с другом. Если бы вместо океана и озер мы взяли три страны, то получили бы ту удивительную картину, о которой говорили вначале, в каждой точке границы можно поставить трех пограничников по одному от каждой страны.

«Недиссертабельная» тема

Мы уже говорили, что у канторова определения был один недостаток: оно совсем не годилось для пространственных кривых. А уж что такое поверхность в пространстве — никто не знал. Эту задачу — выяснить, что такое пространственная кривая и поверхность в пространстве, — поставил летом 1921 года перед своим двадцатитрехлетним учеником Павлом Самуиловичем Урысоном маститый профессор Московского университета Дмитрий Федорович Егоров (как видно, он больше думал о математической значительности проблемы, чем, как теперь иногда говорят, о диссертабельности темы: задача-то была одной из труднейших!).

Вскоре Урысон понял, что задача Егорова лишь частный случай гораздо более общей проблемы: что такое размерность геометрической фигуры, то есть сколько измерений она имеет, почему надо говорить, что отрезок или окружность имеют размерность 1, квадрат — размерность 2, а куб или шар — размерность 3? Вот как вспоминал об этом периоде жизни П. С. Урысона его ближайший друг, в те годы такой же молодой аспирант, а впоследствии академик, почетный президент Московского математического общества Павел Сергеевич Александров:

«...Все лето 1921 года прошло в напряженных попытках найти настоящее определение (размерности), причем П. С. [Урысон] переходил от одного варианта к другому, постоянно строя примеры, показывавшие, почему тот или иной вариант надо отбросить. Это были два месяца действительно всепоглощающих размышлений. Наконец, в одно утро в конце августа П. С. проснулся с готовым, окончательным и всем теперь хорошо известным индуктивным определением размерности... В то же утро во время купания в Клязьме П. С. рассказал мне свое определение размерности и тут же, во время этого разговора, затянувшегося на несколько часов, набросал план всего построения теории размерности с целым рядом теорем, бывших тогда гипотезами, за которые неизвестно было, как и взяться, и которые затем доказывались одна за другой в течение последующих месяцев. Никогда потом я не был участником или свидетелем математического разговора, который состоял бы из такого сплошного потока новых мыслей, как в то августовское утро. Вся набросанная тогда программа полностью осуществилась в течение зимы 1921/22 года; к весне 1922 года вся теория размерности была готова...».

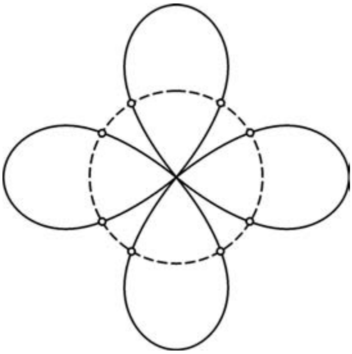


Рис. 69

Основная идея определения размерности по Урысону заключается в следующем. Чтобы отделить часть линии от всей остальной линии, обычно достаточно двух или нескольких точек (на рис. 69 часть четырехлепестковой розы, содержащая центр, отделяется от остальной розы восемью точками). Но часть поверхности уже невозможно отделить от всей поверхности несколькими точками — для этого обязательно потребуется целая линия, — сколько бы точек ни взять на поверхности, их всегда можно обойти. Точно так же часть трехмерного пространства отделяется от всего остального пространства поверхностью.

Все это надо было еще уточнить: на некоторых линиях для отделения части требуется бесконечно много точек, но эти точки не образуют в совокупности никакой линии. Урысону удалось точно сформулировать все нужные определения. В каком-то смысле его определения напоминали определения Евклида (оконечность линии — точки, оконечность поверхности — линии). Но это сходство примерно такое же, как между греческой триерой и современным океанским лайнером.

Индуктивное определение размерности

Расскажем теперь точнее, как же определяется размерность геометрической фигуры по Урысону. Сначала выясним, что такое множество размерности нуль. Типичным нульмерным множеством является множество, состоящее из одной точки или, в крайнем случае, из конечного числа точек. Но у каждой точки такого множества есть относительная окрестность с пустой границей — сама эта точка (см. рис. 66). Именно это свойство и принял Урысон за определение множества размерности нуль.

Точнее говоря, это определение звучит следующим образом.

Множество F имеет размерность нуль, если любая его точка имеет сколь угодно малую относительную окрестность с пустой границей.

В большинстве случаев удается установить, что множество имеет размерность нуль, построив для каждой точки сколь угодно малую обычную окрестность, граница которой не содержит ни одной точки множества F (в этом случае граница относительной окрестности наверняка пуста). Но есть нульмерные множества, лежащие в трехмерном пространстве, для точек которых такие обычные окрестности построить нельзя.

Слова «сколь угодно малую» добавлены в это определение по следующей причине. Если бы их не было, то, например, для любого квадрата мы могли бы взять настолько большой круг, что весь квадрат очутился бы внутри этого круга и ни одна точка квадрата не попала бы на границу круга. И, не будь в определении этих слов, получилось бы, что размерность квадрата равна нулю, а не двум, как должно быть на самом деле.

Не только конечные, но и многие бесконечные множества имеют нулевую размерность. Возьмем, например, множество, состоящее из точек на оси, имеющих координаты $0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$ Ясно, что у любой точки этого множества есть сколь угодно малая окрестность, граница которой не содержит точек этого множества. Единственное сомнение может вызвать точка 0. Но если взять ее окрестность с радиусом α, где α — иррациональное число, то ни одна из точек множества не попадет на границу этой окрестности.

Нульмерно и множество Q точек на прямой с рациональными координатами. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять в качестве окрестности точки α на Q промежуток с центром в этой точке, длина которого иррациональна. Нульмерным является и канторово множество (см. с. 107), и множество, полученное из квадрата выбрасыванием крестов (см. с. 132), и многие другие множества.

Можно строить аналогичным образом и нульмерные множества не только на плоскости, но и в пространстве (при этом, конечно, окрестность точки понимается как окрестность в пространстве).

Определив множества размерности нуль, Урысон перешел к одномерным множествам, то есть линиям. Здесь уже нет маленьких окрестностей с пустой границей (см. рис. 69). Однако для обычных линий граница окрестности пересекается с самой линией лишь в нескольких точках. А множество, состоящее из конечного числа точек, имеет размерность нуль. Обобщая это замечание, Урысон следующим образом определил множества размерности единица.

Множество F имеет размерность единица, если оно не является нульмерным, но у любой его точки есть сколь угодно малая относительная окрестность, граница которой нульмерна.

Оказалось, что не только все обычные линии (окружности, отрезки прямых, эллипсы и т. д.) имеют размерность единица по Урысону, но и все канторовы линии имеют ту же размерность. Поэтому можно было определить понятие не только плоской, но и пространственной линии:

Линией называется континуум размерности единица.

А теперь было уже ясно, как определять поверхности, трехмерные тела и вообще множества любой размерности. Поскольку Урысон дает сначала определение размерности 0, затем с помощью этого определения — определение размерности 1, затем точно так же — определение размерности 2 и т. д., введенное Урысоном общее определение размерности называют *индуктивным.*

Работу надо не рецензировать, а печатать!

Урысон доказал много интереснейших теорем, связанных с введенным им понятием размерности. Но одной самой главной теоремы ему никак не удавалось доказать: не получалось доказательство того, что самый обычный куб имеет размерность 3. После длительных усилий он нашел замечательный выход из положения, придумав новое определение размерности. Мы не будем детально излагать это определение, а поясним его на простейших фигурах.

Если взять отрезок или окружность, то их можно разбить на сколь угодно малые части так, что каждая точка принадлежит не более чем двум кусочкам (рис. 70). При этом надо брать кусочки вместе с их границами (то есть конечными точками). Квадрат уже так разбить нельзя. На первый взгляд кажется, что при разбиении квадрата на куски всегда будут точки, принадлежащие четырем частям (рис. 71 *а*). Но если уложить части так, как кладут кирпичи на стройке, то удается добиться, чтобы каждая точка принадлежала не более чем трем различным частям (рис. 71 *б*). Точно так же у куба есть разбиение на маленькие параллелепипеды, при котором каждая точка принадлежит не более чем четырем параллелепипедам.

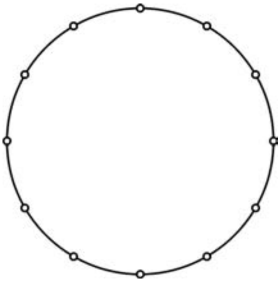
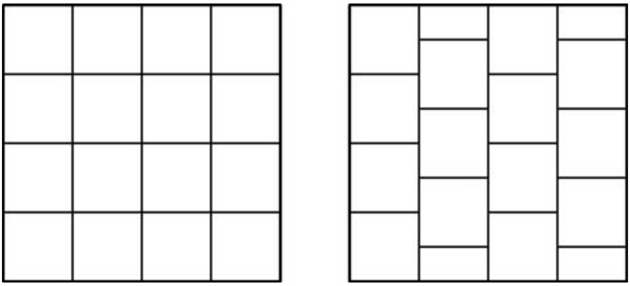


Рис. 70

Именно это свойство и принял Урысон за новое определение размерности. Фигура называется имеющей размерность n, если ее можно разбить на сколь угодно малые замкнутые части так, чтобы ни одна точка не принадлежала $n+2$ различным частям, но при любом достаточно мелком разбиении найдутся точки, принадлежащие $n+1$ различным частям. Используя это определение размерности, Урысон доказал, что размерность квадрата равна 2, куба — 3 и т. д. А потом он показал, что это определение равносильно первоначально данному.



а) *б*)

Рис. 71

Построенная Урысоном теория размерности произвела глубокое впечатление на весь математический мир. Об этом ярко говорит следующий эпизод. Во время заграничной командировки Урысон сделал доклад о своих результатах в Гёттингене. До прихода нацистов к власти Гёттингенский университет был одним из основных математических центров. После доклада руководитель гёттингенской математической школы знаменитый Давид Гильберт сказал, что эти результаты надо опубликовать в журнале «Mathematische Annalen» — одном из главных математических журналов того времени. Через несколько месяцев Урысон снова делал доклад в Гёттингене, и Гильберт спросил у редактора «Mathematische Annalen» Рихарда Куранта, напечатана ли уже работа Урысона. Тот ответил, что работа рецензируется. «Но я же ясно сказал, что ее надо не рецензировать, а печатать!» — воскликнул Гильберт. После столь недвусмысленного заявления статья была немедленно напечатана.

В течение трех лет продолжалась не имеющая равных по глубине и напряженности научная деятельность Урысона (за это время он опубликовал несколько десятков научных работ). Трагический случай оборвал его жизнь — он утонул 17 августа 1924 года, купаясь во время шторма в Бискайском заливе. За день до смерти он закончил очередную научную работу.

После смерти П. С. Урысона остались многочисленные черновики и наброски неопубликованных результатов. Его ближайший друг (и соавтор по многим работам) Павел Сергеевич Александров, отложив на некоторое время свои исследования, подготовил эти работы к печати, сделав тем самым и эти результаты Урысона достоянием всех математиков. В настоящее время теория размерности стала важной главой математики.

Заключение

Бесконечные множества обладают необычными свойствами. По мере изучения этих свойств математикам пришлось все более и более оттачивать свои рассуждения, все более подробно анализировать свои доказательства, и в ходе этого процесса возникла новая важная отрасль математики — математическая логика. Долгое время считали, что теория множеств и математическая логика — это абстрактные науки, не имеющие никаких практических приложений. Но когда были созданы электронные вычислительные машины, то оказалось, что вопросы программирования на этих машинах тесно связаны с методами математической логики, и многие исследования, казавшиеся оторванными от жизни, приобрели важнейшее практическое значение (так часто бывает в истории науки — еще в начале тридцатых годов нашего века в иных книгах можно было прочесть: «Уран практического значения не имеет»).

В настоящее время теория множеств является одной из основ таких областей математики, как функциональный анализ, топология, общая алгебра и т. д. Ведутся глубокие исследования и в самой теории множеств. Эти исследования связаны с самыми основами математики. В их ходе выяснилось, что тот «наивный» подход к понятию множества, о котором говорилось в этой книге, далеко не всегда достаточен, что весьма плодотворным является аксиоматический подход к теории множеств. Но все эти исследования далеко выходят за рамки намеченного нами плана книги.

Примеры и упражнения

1. Множество A состоит из целых чисел, делящихся на 4, множество B — из целых чисел, делящихся на 10, и множество C из целых чисел, делящихся на 75. Из каких чисел состоит множество ABC?

2. В библиотеке есть книги по разным отделам науки и искусства. Обозначим множество всех книг в библиотеке через A, а множество всех математических книг (не только в данной библиотеке) — через B. Охарактеризуйте множество $A — B$.

3. Пользуясь правилами алгебры множеств, упростите выражение $(A+B+C)(A+B)-[A+(B-C)]A$.

4. Множество A состоит из точек $M(x;\,y)$ плоскости, для которых $|x|\leqslant 4$, $|y|\leqslant 4$, множество B — из точек плоскости, для которых $x^2+y^2\leqslant 25$, и множество C — из точек плоскости, для которых $x>0$. Изобразите множество $AB-C$.

5. Докажите равенства

а) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$;

б) $(A-B)+(B-C)+(C-A)+ABC=A+B+C$.

6. Докажите включения

а) $AC+BD\subset(A+B)(C+D)$;

б) $(B-C)-(B-A)\subset A-C$;

в) $A-C\subset(A-B)+(B-C)$.

7. Вытекает ли из $A-B=C$, что $A=B+C$?

8. Вытекает ли из $A=B+C$, что $A-B=C$?

9. Какие включения справедливы для множеств

а) $A-(B+C)$ и $(A-B)-C$;

б) $A+(B-C)$ и $(A+B)-C$;

в) $(A-B)+C$ и $A+(C-B)$?

10. Пользуясь соотношениями 1)–26) на с. 40, упростите выражение $[(X-Y)'(X'+Y')]'$.

11. Установите взаимно однозначное соответствие между промежутком $0<x<1$ и всей числовой прямой.

12. Установите взаимно однозначное соответствие между числовыми множествами $0\leqslant x<1$ и $0\leqslant x<\infty$.

13*. Установите взаимно однозначное соответствие между отрезком $0\leqslant x\leqslant 1$ и промежутком $0<x<1$.

14. Постройте взаимно однозначное отображение отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ на всю числовую прямую.

15*. Постройте взаимно однозначное соответствие между множеством всех чисел отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ и множеством иррациональных чисел того же отрезка.

16*. Отобразите взаимно однозначно луч $0 \leqslant x < \infty$ на всю числовую прямую.

17. Установите взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и точками сферы, из которой выброшена одна точка.

18*. Установите взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и точками сферы.

19. Установите взаимно однозначное соответствие между точками открытого квадрата $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ и точками плоскости.

20. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством всех рациональных чисел отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ и множеством всех точек плоскости, обе координаты которых рациональны.

21. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством всех целых чисел и множеством всех квадратных трехчленов с целочисленными коэффициентами.

22*. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек плоскости.

23. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех квадратных трехчленов с действительными коэффициентами.

24. Какова мощность множества всех четырехугольников на плоскости, координаты всех вершин которых рациональны?

25. Какова мощность множества всех многоугольников на плоскости, координаты всех вершин которых рациональны?

26. Какова мощность множества всех выпуклых многогранников, координаты всех вершин которых рациональны?

27. Какова мощность множества всех рациональных функций с целочисленными коэффициентами в числителе и знаменателе?

28. Какова мощность множества всех многочленов, коэффициентами которых служат рациональные числа?

29. Какова мощность множества всех последовательностей натуральных чисел?

30. Какова мощность множества всех конечных последовательностей натуральных чисел?

31. Какова мощность множества всех возрастающих последовательностей натуральных чисел?

32. Какова мощность множества всех многочленов третьей степени с действительными коэффициентами?

33. Какова мощность множества всех многочленов с действительными коэффициентами?

34. Можно ли построить на плоскости континуум попарно непересекающихся окружностей?

35. Можно ли построить на плоскости континуум попарно непересекающихся букв Г? Букв N?

36. Можно ли построить на плоскости континуум попарно непересекающихся букв А? Букв Б?

37. Какова мощность множества всех действительных чисел, в десятичном разложении которых встречается цифра 7?

38. Какова мощность множества всех действительных чисел, в десятичном разложении которых не встречается цифра 5?

39. Какова мощность множества действительных чисел, заключенных между 0 и 1, в десятичном разложении которых на втором месте стоит цифра 6 и больше эта цифра не встречается?

40. Докажите, что если $A - B \sim B - A$, то $A \sim B$ (напомним, что $A \sim B$ означает, что A и B имеют одинаковую мощность).

41. Докажите, что если $A \subset B$ и $A \sim A + C$, то $B \sim B + C$.

42. Верно ли утверждение: «Если $A \sim C$, $B \sim D$, причем $A \supset B$, $C \supset D$, то $A - B \sim C - D$»?

43. Верно ли утверждение: «Если $A \sim B$, $C \supset A$ и $C \supset B$, то $C - A \sim C - B$»?

44. Перенумеруем все рациональные точки отрезка $[0; 1]$. Мы получим последовательность точек $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$. Построим окрестность точки r_1, имеющую радиус 1/10, окрестность точки r_2, имеющую радиус 1/20, окрестность точки r_3, имеющую радиус 1/40, и т. д. Сложим все построенные окрестности. Содержит ли полученное множество M весь отрезок?

45. Оцените длину множества M из задачи 44.

46*. Назовем *счетномерным кубом* множество всех последовательностей действительных чисел $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что $0 \leqslant x_n \leqslant 1$. Докажите, что множество точек счетномерного куба имеет мощность континуума.

47*. Постройте непрерывную функцию, имеющую на каждом отрезке бесконечно много максимумов и минимумов.

48*. Множество M состоит из точек отрезка $[0; 1]$, которые можно представить в виде десятичных дробей, ни один десятичный знак которых не равен 3 и 8. Опишите, как получить это множество, последовательно выбрасывая из отрезка промежутки.

49*. Сделайте то же самое для точек, в десятичном разложении которых не встречается комбинация 38 (в указанном здесь порядке).

50*. Точка a называется предельной точкой для множества M, если в любой ее окрестности есть бесконечно много точек этого множества. Докажите, что все предельные точки канторова множества (см. с. 107) принадлежат этому множеству. Докажите, что и обратно, каждая точка канторова множества является для него предельной. То же самое сделайте для множеств из задач 48 и 49.

51. Докажите, что каждая точка отрезка $[0; 1]$ является предельной для множества всех рациональных чисел таких, что $0 \leqslant r \leqslant 1$.

52. Существуют ли предельные точки у множества целых чисел?

53. Докажите, что дополнение к любому открытому множеству на плоскости содержит все свои предельные точки.

54. Докажите, что если множество содержит все свои предельные точки, то его дополнение — открытое множество.

55. Приведите примеры таких множеств на плоскости, которые

а) не имеют граничных точек;

б) имеют граничные точки, причем ни одна из них не принадлежит множеству;

в) содержат все свои граничные точки;

г) целиком состоят из граничных точек;

д) содержат только часть своих граничных точек.

56. Приведите примеры множеств в пространстве со свойствами а)–д) из задачи 55.

Оглавление