Стивен Строгац

УДОВОЛЬСТВИЕ {от} x

Увлекательная экскурсия
в мир математики от одного
из лучших преподавателей в мире

Эту книгу хорошо дополняют:

Кванты
Скотт Паттерсон

Brainiac
Кен Дженнингс

Moneyball
Майкл Льюис

Гибкое сознание
Кэрол Дуэк

Физика фондового рынка
Джеймс Уэзеролл

Steven Strogatz

The Joy of *x*

A Guided Tour of Math, from One to Infinity

An Eamon Dolan Book

Стивен Строгац

Удовольствие от *x*

Увлекательное путешествие в мир математики от одного из лучших преподавателей в мире

Перевод с английского

Издательство «Манн, Иванов и Фербер»
Москва, 2014

УДК 512
ББК 22.1я9
С86

На русском языке публикуется впервые
Издано с разрешения Steven Strogatz, c/o Brockman, Inc.

Строгац, П.

С86 Удовольствие от *x*. Увлекательное путешествие в мир математики от одного из лучших преподавателей в мире / Стивен Строгац ; пер. с англ. — М. : Манн, Иванов и Фербер, 2014. — 304 с.

ISBN 978-500057-008-1

Эта книга способна в корне изменить ваше отношение к математике. Она состоит из коротких глав, в каждой из которых вы откроете для себя что-то новое. Вы узнаете насколько полезны числа для изучения окружающего мира, поймете, в чем прелесть геометрии, познакомитесь с изяществом интегральных исчислений, убедитесь в важности статистики и соприкоснетесь с бесконечностью. Автор объясняет фундаментальные математические идеи просто и элегантно, приводя блистательные примеры, понятные каждому.

УДК 512
ББК 22.1я9

ISBN 978-500057-008-1

Оглавление

Часть IV ВРЕМЯ ПЕРЕМЕН

Часть V МНОГОЛИКИЕ ДАННЫЕ

Часть VI ГРАНИЦЫ ВОЗМОЖНОГО

Предисловие

У меня есть друг, который, несмотря на свое ремесло (он — художник), страстно увлечен наукой. Всякий раз, когда мы собираемся вместе, он с энтузиазмом рассуждает о последних достижениях в области психологии или квантовой механики. Но стоит нам заговорить о математике — и он чувствует дрожь в коленках, что его сильно огорчает. Он жалуется, что эти странные математические символы не только не поддаются его пониманию, но порой он даже не знает, как их произносить.

На самом деле причина его неприятия математики гораздо глубже. Он никак не возьмет в толк, чем математики вообще занимаются и что имеют в виду, когда говорят, что данное доказательство *изящно*. Иногда мы шутим, что мне нужно просто сесть и начать его учить с самых азов, буквально с 1 + 1= 2, и углубиться в математику настолько, насколько он сможет.

И хотя эта затея кажется безумной, именно ее я и попытаюсь осуществить в данной книге. Я проведу вас по всем основным разделам науки, от арифметики до высшей математики, чтобы те, кто хотел получить второй шанс, наконец смогли им воспользоваться. И на сей раз вам не придется садиться за парту. Эта книга не сделает вас экспертом в математике. Зато поможет разобраться в том, что изучает данная дисциплина и почему она так увлекательна для тех, кто это понял.

Мы узнаем, как слэм-данки* Майкла Джордана могут помочь объяснить азы исчисления. Я покажу вам простой и потрясающий способ, как

* Слэм-данк — вид броска в баскетболе, при котором игрок выпрыгивает вверх и одной или двумя руками бросает мяч сквозь кольцо сверху вниз. *Прим. перев.*

понять основополагающую теорему евклидовой геометрии — теорему Пифагора. Мы постараемся добраться до самой сути некоторых тайн жизни, больших и малых: убивал ли свою жену Джей Симпсон*; как перекладывать матрас, чтобы он прослужил максимально долго; сколько партнеров нужно сменить перед тем, как сыграть свадьбу, — и увидим, почему одни бесконечности больше, чем другие.

Математика повсюду, надо только научиться ее узнавать. Можно разглядеть синусоиду на спине зебры, услышать отголоски теорем Евклида в Декларации о независимости; да что там говорить, даже в сухих отчетах, предшествовавших Первой мировой войне, присутствуют отрицательные числа. Также можно увидеть, как на нашу сегодняшнюю жизнь влияют новые направления математики, например, когда мы ищем рестораны с помощью компьютера или пытаемся хотя бы понять, а еще лучше — пережить пугающие колебания фондового рынка.

По случайному, хотя и уместному для книги о числах совпадению, идея ее написания родилась в день, когда мне исполнилось пятьдесят. Дэвид Шипли, автор нескольких обзорных статей в New York Times, как раз пригласил меня (не зная о моем полувековом юбилее) на обед. Он спросил, не хочу ли я написать серию статей о математике для его читателей. Мне очень понравилась эта идея, и я был готов поделиться радостью от занятий математикой не только с моим любознательным другом-художником, но и с более широкой аудиторией.

Серия из 15 статей под общим названием «Основы математики» появилась в сети в конце января 2010 года. В ответ на их публикацию посыпались письма и комментарии от читателей всех возрастов, среди которых было много студентов и преподавателей. Встречались и просто любознательные люди, по тем или иным причинам «сбившиеся с пути» постижения математической науки; теперь же они почувствовали, что упустили что-то сто́ящее, и хотели бы попробовать еще раз. Особую

* Джей Симпсон — известный игрок в американский футбол. Сыграл роль детектива Нортберга в знаменитой трилогии «Голый пистолет». Был обвинен в убийстве бывшей жены и ее друга и оправдан, невзирая на улики. *Прим. перев.*

радость мне доставляли благодарности от родителей за то, что они с моей помощью смогли объяснить математику своим детям, да и сами стали лучше ее понимать. Казалось, что даже мои коллеги и товарищи, горячие поклонники этой науки, получали удовольствие от чтения статей, за исключением тех моментов, когда они наперебой предлагали всевозможные рекомендации по улучшению моего детища.

Несмотря на расхожее мнение, в обществе наблюдается явный интерес к математике, хотя этому феномену и уделяют мало внимания. Мы только и слышим, что о страхе перед математикой, и тем не менее, многие с радостью бы попробовали разобраться в ней лучше. И стоит этому случиться — их уже будет трудно оторвать.

Данная книга познакомит вас с самыми сложными и передовыми идеями из мира математики. Главы небольшие, легко читаются и особо не зависят друг от друга. Среди них есть и вошедшие в ту, первую серию статей в New York Times. Так что как только почувствуете легкий математический голод, не раздумывая беритесь за следующую главу. Если захотите подробнее разобраться в заинтересовавшем вас вопросе, то в конце книги есть примечания с дополнительной информацией и рекомендациями, что еще об этом можно почитать.

Для удобства читателей, которые предпочитают пошаговый подход, я разбил материал на шесть частей в соответствии с традиционным порядком изучения тем.

Часть I «Числа» начинает наше путешествие с арифметики в детском саду и начальной школе. В ней показано, насколько полезными бывают числа и как они магически эффективны при описании окружающего мира.

Часть II «Соотношения» переводит внимание с самих чисел на соотношения между ними. Эти идеи лежат в основе алгебры и являются первыми инструментами для описания того, как одно влияет на другое, проявляя причинно-следственную связь самых разных вещей: спроса и предложения, стимула и реакции — словом, всех видов отношений, которые делают мир столь многогранным и богатым.

Часть III «Фигуры» повествует не о числах и символах, а о фигурах и пространстве — вотчине геометрии и тригонометрии. Эти темы, наряду с описанием всех обозримых объектов посредством форм, с помощью логических рассуждений и доказательств поднимают математику на новый уровень точности.

В части IV «Время перемен» мы рассмотрим исчисления — самое впечатляющее и многогранное направление математики. Исчисления позволяют предсказать траекторию движения планет, циклы приливов и отливов и дают возможность понять и описать все периодически меняющиеся процессы и явления во Вселенной и внутри нас. Важное место в этой части отведено изучению бесконечности, усмирение которой стало прорывом, позволившим вычислениям заработать. Вычисления помогли решить многие задачи, возникшие еще в античном мире, и это, в конечном счете, привело к революции в науке и современном мире.

Часть V «Многоликие данные» имеет дело с вероятностью, статистикой, сетями и обработкой данных — это все еще относительно молодые области, порожденные не всегда упорядоченными сторонами нашей жизни, такими как возможность и удача, неуверенность, риск, изменчивость, хаотичность, взаимозависимость. Используя подходящие средства математики и соответствующие типы данных, мы научимся обнаруживать закономерность в потоке случайностей.

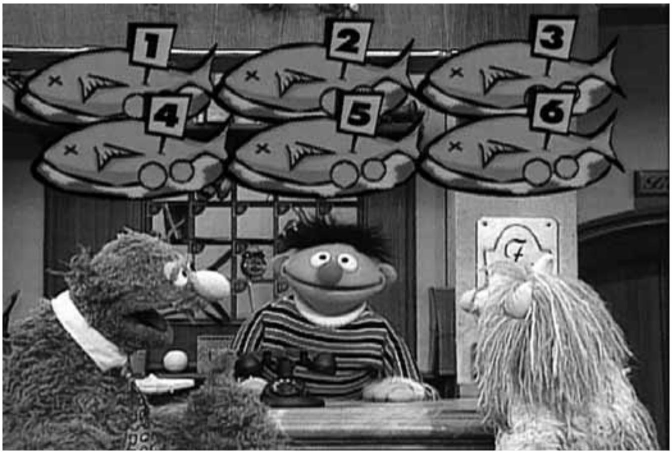
В конце нашего путешествия в части VI «Границы возможного» мы приблизимся к пределам математического знания, к пограничной области между тем, что уже известно, и тем, что пока неуловимо и не познано. Мы вновь пройдемся по темам в уже знакомом нам порядке: числа, соотношения, фигуры, изменения и бесконечность, — но при этом рассмотрим каждую из них более глубоко, в ее современном воплощении.

Я надеюсь, что все идеи, описанные в этой книге, покажутся вам увлекательными и не раз заставят воскликнуть: «Ну и ну!» Но всегда с чего-то нужно начинать, поэтому давайте начнем с простого, но такого завораживающего действия, как счет.

Часть I ЧИСЛА

Основы чисел: сложение рыбок 1

Лучшую демонстрацию концепции чисел, которую я когда-либо видел (самое ясное и забавное объяснение того, что такое числа и зачем они нам нужны), я наблюдал в одном из выпусков популярной детской передачи «Улица Сезам», который называется «123: считаем вместе» (123 Counter with Me). Хамфри, добродушный, но недалекий персонаж с розовой шерсткой и зеленым носом, работающий в отеле «Мохнатые лапы», в обеденное время принимает по телефону заказ от пингвинов-постояльцев. Внимательно их выслушав, Хамфри передает заказ на кухню: «Рыбка, рыбка, рыбка, рыбка, рыбка, рыбка». Увиденное побуждает Эрни рассказать Хамфри о достоинствах числа шесть.



Дети узнаю́т, что числа — великолепный инструмент, который позволяет получить нужное количество порций быстрее. Вместо того чтобы повторять слово «рыбка» столько раз, сколько пингвинов в комнате, Хамфри может использовать более эффективный способ — посчитать и сразу назвать число шесть.

Впрочем, став старше, мы начинаем замечать у чисел и слабые стороны. Да, они прекрасно экономят время, но немалой платой за это становится их абстрактность. Число шесть более эфемерно, чем «шесть рыбок» — именно потому, что оно универсально. Шесть может быть чего угодно: шесть тарелок, шесть пингвинов, шесть раз произнесенное слово «рыбка». Число создает некую неявную общность между приведенными примерами.

Рассматриваемые таким образом числа начинают казаться мистическими. Они, очевидно, существуют в некоем идеальном мире Платона, где-то над действительностью, и в этом смысле больше походят на другие возвышенные понятия (например, истина и справедливость) и меньше — на обычные объекты повседневной жизни. Чем активнее вы о них думаете, тем дальше они удаляются от реальности. Как появились числа? Изобрели ли их люди? Или лишь обнаружили?

Еще один нюанс заключается в том, что числа (как и все математические идеи) живут своей жизнью[1]. Они нам неподвластны, хотя и присутствуют в наших умах. Даже определив, что мы под ними понимаем, мы не можем предсказать, как они себя поведут. Они подчиняются определенным законам и имеют определенные свойства, индивидуальные особенности и способы объединения друг с другом, и мы ничего не в силах с этим поделать, кроме как наблюдать и пытаться понять. В этом смысле они похожи на атомы и звезды: объекты, которые также существуют по своим (неподконтрольным нам) законам и находятся вне зоны нашего сознания.

Эта двойственная природа чисел — принадлежность к небесам и земным делам, — возможно, их самая парадоксальная черта и особенность, которая делает их настолько полезными. Это то, что имел в виду физик Юджин Вигнер, когда писал о *неблагоразумной эффективности математики в естественных науках*[2].

Для того чтобы прояснить, что я имею в виду под жизнью чисел и их поведением, которое мы не можем контролировать, давайте вернемся в отель «Мохнатые лапы». Предположим, что Хамфри как раз собрался передать заказ, но тут ему неожиданно позвонили пингвины из другого номера и тоже попросили такое же количество рыбы. Сколько раз Хамфри должен прокричать слово «рыбка» после получения двух заказов? Если бы он ничего не узнал о числах, то ему пришлось бы кричать столько раз, сколько всего пингвинов в обеих комнатах. Или, используя числа, он мог объяснить повару, что ему нужно шесть рыбок для одного номера и шесть для другого. Но то, что ему действительно необходимо, представляет собой новую концепцию — сложение. Как только он его освоит, он с гордостью скажет, что ему нужно шесть плюс шесть (или, если он позер, двенадцать) рыбок.

Это такой же творческий процесс, как и тот, когда мы только придумывали числа. Так же как числа упрощают подсчет по сравнению с перечислением по одному, сложение упрощает вычисление любой суммы. При этом тот, кто производит подсчет, развивается как математик. По-научному эту мысль можно сформулировать так: использование правильных абстракций приводит к более глубокому проникновению в суть вопроса и большему могуществу при его решении.

Вскоре, возможно, даже Хамфри поймет, что теперь он всегда может производить подсчет.

Однако, несмотря на столь бесконечную перспективу, наше творчество всегда имеет какие-то ограничения. Мы можем решить, что подразумеваем под 6 и +, но как только это сделаем, результаты выражений, подобных 6 + 6, окажутся вне нашего контроля. Здесь логика не оставит нам выбора. В этом смысле математика всегда включает в себя как изобретение, *так и* открытие: мы *изобретаем* концепции, но *открываем* их последствия. Как станет ясно из следующих глав, в математике наша свобода заключается в возможности задавать вопросы и настойчиво искать на них ответы, однако не изобретая их самостоятельно.

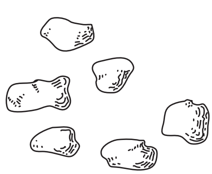
Каменная арифметика 2

Как и любое явление в жизни, арифметика имеет две стороны: формальную и занимательную (или игровую).

Формальную часть мы изучали в школе. Там нам объясняли, как работать со столбцами чисел, складывая и вычитая их, как перелопачивать их при выполнении расчетов в электронных таблицах при заполнении налоговых деклараций и подготовки годовых отчетов. Эта сторона арифметики кажется многим важной с практической точки зрения, но совершенно безрадостной.

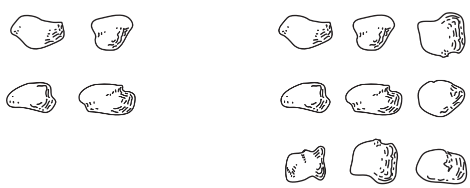
С занимательной стороной арифметики можно познакомиться только в процессе изучения высшей математики[3]. Тем не менее, она так же естественна, как и любопытство ребенка[4].

В эссе «Плач математика» Пол Локхарт предлагает изучать числа на более конкретных, чем обычно, примерах: он просит, чтобы мы представили их в виде некоторого количества камней. Например, число 6 соответствует вот такому набору камешков:

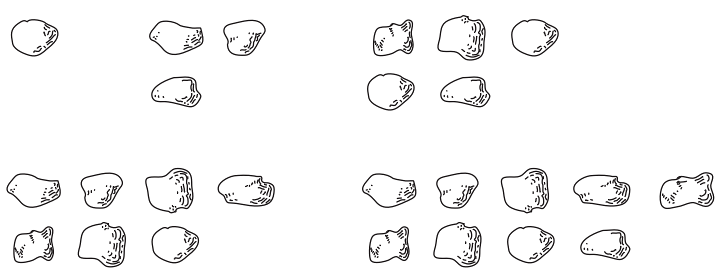


Вы вряд ли увидите тут что-то необычное. Так оно и есть. Пока мы не приступим к манипуляциям с числами, они выглядят примерно одинаково. Игра начинается, когда мы получаем задание.

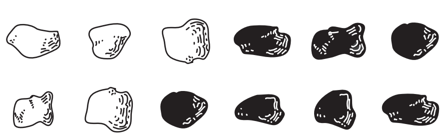
Например, давайте посмотрим на наборы, в которых есть от 1 до 10 камней, и попробуем сложить из них квадраты. Это можно сделать только с двумя наборами — из 4 и 9 камней, поскольку 4 = 2 × 2 и 9 = 3 × 3. Мы получаем эти числа путем возведения в квадрат некоего другого числа (то есть раскладывая камни в виде квадрата).



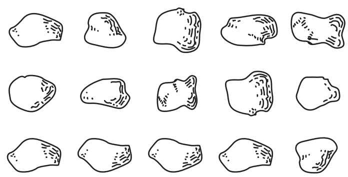
Вот задача, имеющая большее число решений: надо узнать, из каких наборов получится прямоугольник, если разложить камни в два ряда с равным количеством элементов. Здесь подойдут наборы из 2, 4, 6, 8 или 10 камней; число должно быть четным. Если мы попробуем разложить в два ряда оставшиеся наборы с нечетным количеством камней, то у нас неизменно будет оставаться лишний камень.



Но не все потеряно для этих неудобных чисел! Если взять два таких набора, то лишние элементы найдут себе пару, и сумма получится четной: нечетное число + нечетное число = четное число.



Если распространить эти правила на числа, идущие после 10, и считать, что количество рядов в прямоугольнике может быть больше двух, то некоторые нечетные числа позволят сложить такие прямоугольники. Например, число 15 может составить прямоугольник 3 × 5.



Поэтому хотя 15, несомненно, нечетное число, оно является составным и может быть представлено в виде трех рядов по пять камней в каждом. Точно так же любая запись в таблице умножения дает собственную прямоугольную группу камешков.

Но некоторые числа, вроде 2, 3, 5 и 7, совершенно безнадежны. Из них нельзя выложить ничего, кроме как расположить их в виде простой линии (одного ряда). Эти странные упрямцы — знаменитые простые числа.

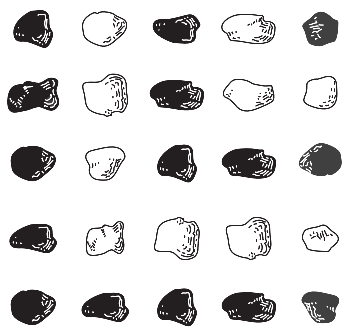
Итак, мы видим, что числа могут иметь причудливые структуры, которые наделяют их определенным характером. Но, чтобы представить весь спектр их поведения, надо отстраниться от отдельных чисел и понаблюдать за тем, что происходит во время их взаимодействия.

Например, вместо того чтобы сложить всего два нечетных числа, сложим все возможные последовательности нечетных чисел, начиная с 1:

$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Удивительно, но эти суммы всегда оказываются идеальными квадратами. (О том, что 4 и 9 можно представить в виде квадратов, мы уже говорили, а для 16 = 4 × 4 и 25 = 5 × 5 это тоже верно.) Быстрый подсчет показывает, что это правило справедливо и для бóльших нечетных чисел и, видимо, стремится к бесконечности. Но какая же связь между нечетными числами с их «лишними» камнями и классически симметричными числами, образующими квадраты? Правильно располагая камешки, мы можем сделать ее очевидной, что является отличительной чертой изящного доказательства.[5]

Ключом к нему будет наблюдение, что нечетные числа можно представить в виде равносторонних уголков, последовательное наложение которых друг на друга образует квадрат!



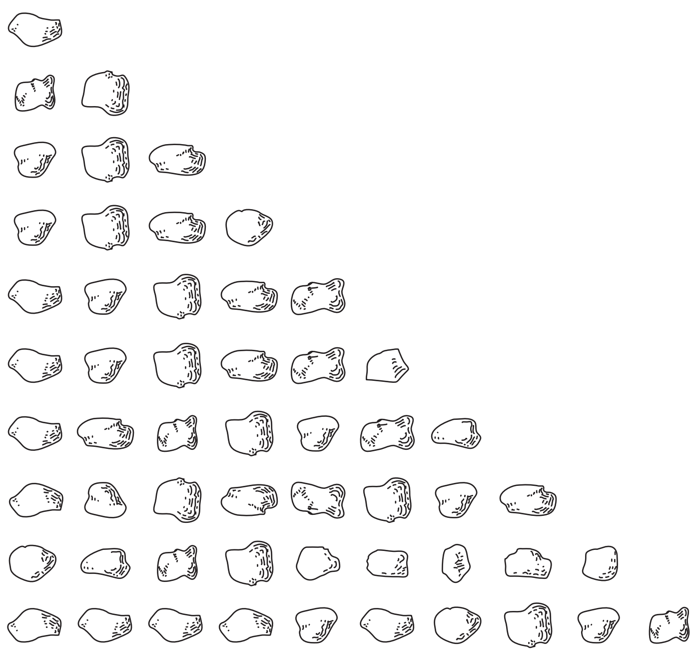
Подобный способ рассуждений представлен еще в одной недавно вышедшей книге. В очаровательном романе Ёко Огавы The Housekeeper and the Professor («Домработница и профессор») рассказывается о проницательной, но необразованной молодой женщине и ее десятилетнем сыне. Женщину наняли ухаживать за пожилым математиком, у которого из-за полученной черепно-мозговой травмы в краткосрочной памяти сохраняется информация только о последних 80 минутах жизни. Потерявшись в настоящем, один в своем убогом коттедже, ничего не имея, кроме чисел, профессор пытается общаться с домработницей единственным известным ему способом: спрашивая о размере ее обуви или дате рождения и ведя с нею светскую беседу о ее расходах. Профессор также питает особую симпатию к сыну экономки, которого называет Рут (Root — корень), потому что у мальчика сверху плоская голова, и это напоминает ему обозначение в математике квадратного корня $\sqrt{}$.

Однажды профессор предлагает мальчику простую задачу — найти сумму всех чисел от 1 до 10. После того как Рут аккуратно складывает все числа между собой и возвращается с ответом (55), профессор просит его поискать более простой способ. Сможет ли он найти ответ *без* обычного сложения чисел? Рут пинает стул и кричит: «Это несправедливо!»

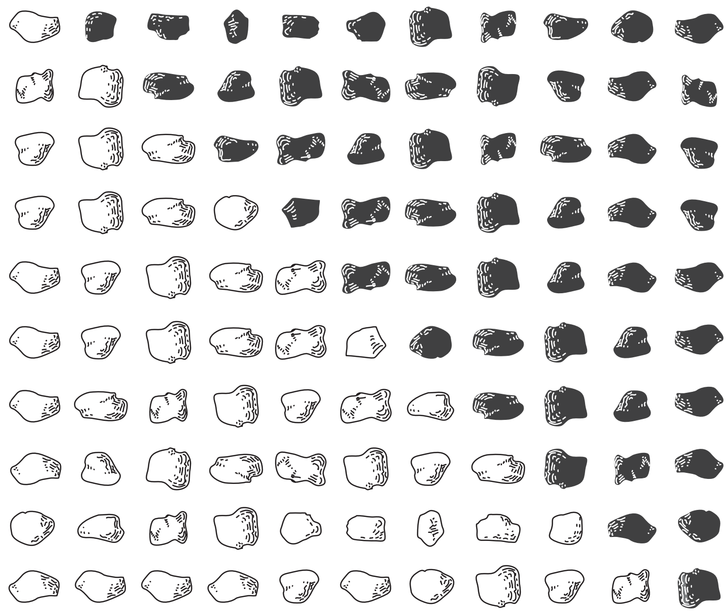
Мало-помалу домработница тоже втягивается в мир чисел и сама тайно пытается решить эту задачу. «Я не понимаю, почему так увлеклась детской задачкой, которая не имеет никакой практической пользы», — говорит она. «Сначала я хотела угодить профессору, но постепенно это занятие превратилось в сражение между мной и числами. Когда я просыпалась утром, уравнение уже ждало меня:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10 = 55,$$

и весь день следовало по пятам, будто было выжжено на сетчатке моих глаз, и его никак не получалось проигнорировать». Существует несколько путей решения задачи профессора (интересно, сколько сможете найти вы). Профессор сам предлагает способ рассуждений, который мы уже применили выше. Он интерпретирует сумму от 1 до 10 в виде треугольника из камешков, с одним камешком в первой строке, двумя во второй и так далее, до десяти камешков в десятом ряду.



Эта картинка дает четкое представление о негативном пространстве. Оказывается, оно заполнено только наполовину, что показывает направление творческого прорыва. Если скопировать треугольник из камешков, перевернуть его и соединить с уже существующим, то получится нечто весьма простое: прямоугольник с десятью рядами по 11 камешков в каждом, причем общее число камней составит 110.



Так как исходный треугольник — половина этого прямоугольника, то вычисляемая сумма чисел от 1 до 10 должна быть половиной 110, то есть 55.

Представление числа в виде группы камешков может показаться необычным, но на самом деле так же старо, как и сама математика. Слово «вычислять» (англ. *calculate*) отражает это наследие и происходит от латинского *calculus*, означающего «галька», которую римляне использовали при выполнении вычислений. Чтобы получать удовольствие от манипуляций с числами, не обязательно быть Эйнштейном (что по-немецки означает «один камень»), но, возможно, умение жонглировать камешками облегчит вам это занятие.

Враг моего врага 3

В НАЧАЛЬНОЙ школе вычитание учат сразу после сложения. И в этом, безусловно, есть смысл: в обоих случаях применяется счет чисел, только при вычитании он выполняется в обратную сторону. Психологически действия тоже похожи: ребенок учится брать и давать примерно в одно и то же время. Сложение и вычитание всегда идут рука об руку. Если человек готов посчитать, сколько будет 23 + 9, то не сомневайтесь, он скоро ответит и на вопрос, сколько будет 23 – 9.

Но если углубиться в эту тему, то в отличие от сложения вычитание создает довольно неприятную проблему, поскольку в результате могут появиться отрицательные числа. Если я захочу взять у вас 6 булочек, а у вас их только 2, то в реальности у меня ничего не получится. Зато в уме я навешу на вас 4 отрицательные булочки, что бы это ни значило.

Вычитание заставляет нас расширить свое представление о числах. Отрицательные числа более абстрактны, чем положительные. Четыре отрицательные булочки не потрогаешь и не съешь, зато их можно представить. Самое интересное, что в реальном мире отрицательные числа тоже встречаются: долги, перерасход по кредитной карте, минусовые температуры зимой и обозначения подвальных уровней на крытых парковках.

Многие из нас пока еще не заключили мир с отрицательными числами. Как заметил мой коллега Энди, люди придумали всевозможные забавные мелкие уловки, чтобы обойти страшный отрицательный знак «минус». В отчетах паевых инвестиционных фондов потери (отрицательные числа) печатаются красным или заключаются в круглые скобки, чтобы минусы ни в коем случае не появились. В исторических книгах сказано, что Юлий Цезарь родился в 100 году до н. э., а не в –100 году. Подземные уровни парковки часто обозначаются как B1 и B2. Температура — одно из немногих исключений, когда люди действительно говорят, что она составляет –5 градусов, хотя и в этом случае многие предпочитают фразу «5 градусов ниже нуля». Видимо, в отрицательном знаке есть нечто отталкивающее и… негативное.

Возможно, самое неприятное заключается в том, что при перемножении двух отрицательных чисел получается положительное число. Поэтому позвольте привести доводы в защиту знака минус.

Как нам определить ценность такого выражения, как -1×3, где мы умножаем отрицательное число на положительное? Ну хорошо, так как 1×3 означает сумму $1 + 1 + 1$, естественно представить -1×3 как $(-1) + (-1) + (-1)$, что равняется -3. Это должно стать очевидным в примере с деньгами: если вы должны мне 1 доллар в неделю, то по истечении трех недель вы мне будете должны 3 доллара.

Отсюда уже недалеко до понимания, почему минус, умноженный на минус, дает плюс. А теперь взгляните на следующий ряд равенств:

$$-1 \times 3 = -3$$
$$-1 \times 2 = -2$$
$$-1 \times 1 = -1$$
$$-1 \times 0 = 0$$
$$-1 \times -1 = ?$$

Посмотрите на числа в правой части равенств и удостоверьтесь в том, что это обычная прогрессия: –3, –2, –1, 0… На каждом шаге мы добавляем 1 к предыдущему числу. Таким образом, разве не логично, что следующим числом будет 1?

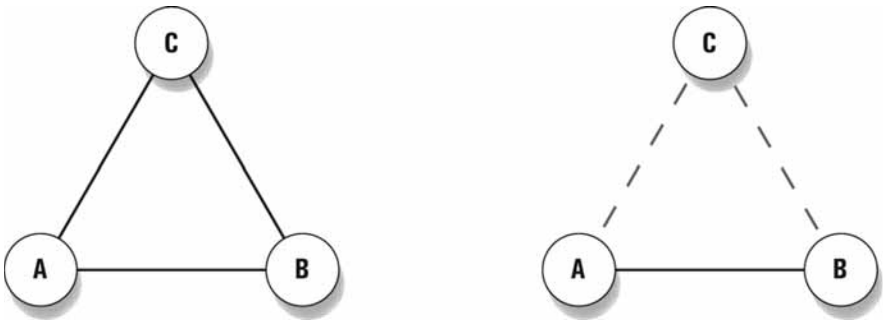
Это один аргумент в пользу того, почему $(-1) \times (-1) = 1$. Привлекательность такого толкования заключается в том, что оно позволяет сохранить правила обычной арифметики — получается, что они верны как для положительных, так и для отрицательных чисел.

Но если вы бесчувственный прагматик, то, вероятно, будете удивлены, что у этих абстракций есть некие параллели в реальном мире. По общему признанию, жизнь иногда играет по различным правилам. В обычных этических построениях два заблуждения не приводят к истине. Более того, двойные отрицания не всегда равнозначны утверждению; они могут усилить отрицание, как в случае с «Я не могу получить никакого удовлетворения». (Действительно, в этом отношении язык может быть очень мудреным. Выдающийся британский философ и лингвист Дж. Остин из Оксфорда как-то в своей лекции заявил, что во многих языках двойное отрицание дает утверждение, но ни в одном дважды повторенное утверждение не дает отрицания. На что сидевший в аудитории философ из Колумбии Сидни Мордженбессер ехидно процедил: «Да-да».)

Тем не менее есть немало случаев, когда реальный мир действительно отражает правила умножения отрицательных чисел. Например, возбуждение одной нервной клетки может быть подавлено возбуждением второй нервной клетки. Если в этот момент возбуждение второй нервной клетки подавляется третьей нервной клеткой, то первая клетка может снова возбудиться. Косвенное воздействие третьей клетки на первую вызывает ее возбуждение. Таким образом, последовательность двух отрицаний приводит к утверждению. Подобные эффекты происходят и при регуляции генов: белок может включить ген, блокируя другую молекулу, которая подавляла этот отрезок молекулы ДНК.

Возможно, самую понятную параллель можно провести в социально-политической сфере. Как утверждает пословица, «враг моего врага — мой друг». Общеизвестно, что понятия вроде «друг моего врага», «враг моего друга» и тому подобные можно подставить в виде треугольника отношений.[6]

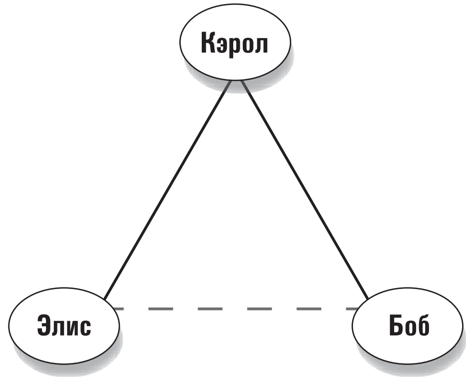
В углы треугольника помещают людей, компании или страны, а соединяющие их стороны показывают отношения между ними, которые могут быть как позитивными, или дружественными (обычно отображаются сплошными линиями), так и негативными, или враждебными (отображаются пунктирными линиями).



Социологи строят треугольники, подобные треугольнику слева, то есть считая отношения между объектами позитивными, так как разумно любить друзей ваших друзей. Точно так же треугольник справа, с двумя негативными и одной позитивной связью, считается сбалансированным, потому что такая комбинация не вызывает разногласий, даже несмотря на две стороны с негативными связями, поскольку ничто так не цементирует дружбу, как ненависть к одному и тому же человеку.

Конечно, треугольники могут быть выведены из состояния баланса. Это происходит в ситуации, когда есть три врага, причем двое из них относятся друг к другу менее враждебно и готовы объединиться, чтобы напасть на третьего.

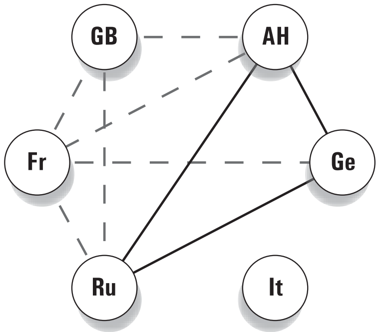
Еще менее сбалансированным будет треугольник с единственной негативной связью. Например, предположим, что Кэрол хорошо относится и к Элис, и к Бобу, но Боб и Элис не любят друг друга. Возможно, они когда-то встречались и пережили тяжелое расставание, и теперь говорят друг о друге гадости лояльной к обоим Кэрол. Это создает психологическое напряжение между всеми тремя. Чтобы восстановить баланс, либо Элис и Боб должны урегулировать свои отношения, либо Кэрол должна принять чью-то сторону.



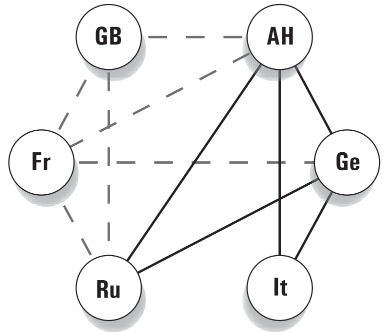
Во всех этих случаях логика баланса соответствует логике умножения. В сбалансированном треугольнике знак произведения двух любых сторон, положительный или отрицательный, всегда совпадает со знаком третьей стороны. В несбалансированном треугольнике это правило нарушается.

Не будем касаться вопросов о правдоподобии приведенных моделей, ибо здесь возникают интересные вопросы с чисто математическим привкусом. Например, в связной сети, где все друг друга знают, какое самое устойчивое состояние? Прежде всего это нирвана доброжелательности, где все отношения позитивные, а все треугольники в пределах сети сбалансированы. Однако существуют и другие устойчивые состояния. Например, устойчивое к конфликтам состояние, когда сеть раскололась на два враждебных лагеря (произвольных по величине и составу). Все члены одного лагеря хорошо относятся друг к другу, но враждебны к представителям другого лагеря. (Ничего не напоминает?) Возможно, еще более удивительно то, что эти полярные состояния являются *единственно* возможными столь же устойчивыми состояниями, как нирвана[7]. В частности, ни у какого трехстороннего раскола не может быть уравновешенных треугольников.

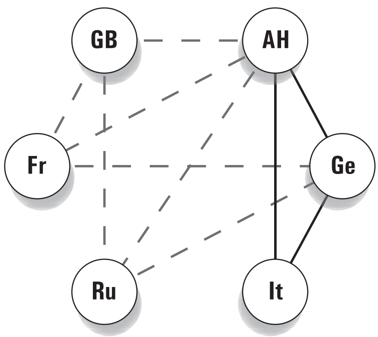
Ученые использовали этот метод для анализа союзов, сложившихся при подготовке к Первой мировой войне[8]. Диаграммы, представленные ниже, показывают союзы между основными державами, участвовавшими в ней: Великобританией, Францией, Россией, Италией, Германией и Австро-Венгрией между 1872 и 1907 гг.



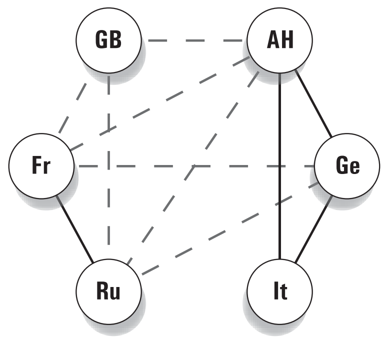
**Союз трех императоров
(1872–1881 гг.)**



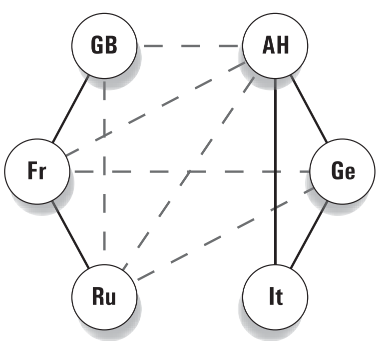
**Тройственный союз
1882 г.**



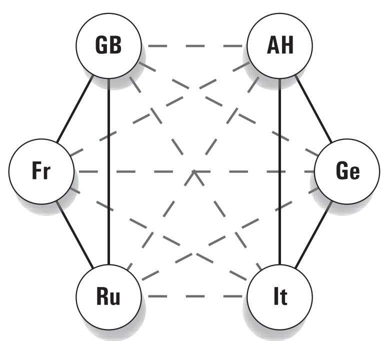
**Германо-российский
договор перестраховки 1890 г.**



**Французско-российский союз
(1891–1894 гг.)**



**Договор Антанта
1904 г.**



**Британско-российское соглашение
1907 г.**

Первые пять конфигураций были несбалансированными, потому что каждая из них содержала по крайней мере один несбалансированный треугольник. Возникающие в результате разногласия подталкивали эти страны к изменению конфигурации, тем самым вызывая реверберацию в других частях сети. На последнем этапе Европа раскололась на два непримиримых антагонистских блока, придя к общему балансу, но оказавшись на грани войны.

Однако это не значит, что на основании данной теории можно делать прогнозы. Это не так. Подобный подход не позволяет объяснить все тонкости изменений в геополитике. Но некоторые из наблюдаемых нами явлений происходят в соответствии именно с примитивной логикой «враг моего врага» и отлично подпадают под умножение отрицательных чисел. Отделяя важное от незначительного, арифметика отрицательных чисел может помочь нам отыскать настоящие загадки.

Коммутативность: перемена мест сомножителей 4

Приблизительно каждые десять лет появляются новые методы преподавания математики, что лишний раз заставляет родителей почувствовать себя отставшими от жизни. Еще в 60-е годы прошлого века мои родители были в шоке оттого, что не могли мне помочь выполнить простое домашнее задание — они никогда не слышали о троичной системе счисления и диаграммах Эйлера-Венна.

Сегодня ситуация не изменилась. «Папа, ты можешь показать мне, как делать эти примеры на умножение?» «Конечно могу», — самонадеянно заявил я, пока не довел дочь до истерики. «Нет, папа, сейчас это делают не так! Это устаревший способ! Разве ты не знаешь умножения методом решетки? Нет? Ну а как насчет частичных произведений?»

Эта унизительная ситуация побудила меня пересмотреть процесс умножения с самого начала[9]. И оно, как только вы вникнете в него глубже, действительно оказывается очень тонкой вещью.

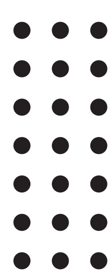
Возьмите, например, терминологию. Равно ли трижды семь сумме трех по семь? Или сумме семи по три?

В некоторых культурах язык менее неоднозначен. Один мой друг из Белиза привык читать таблицу умножения так: «Семь один раз — это семь, семь дважды — четырнадцать, семь трижды — двадцать один» и так далее. Такая формулировка позволяет понять, что первое число это множимое, а второе — множитель. Аналогичная игра слов есть и в бессмертных стихах песни Лайонела Ричи[*] «Она однажды, дважды, трижды леди». (Слова «Она леди три раза» никогда не стали бы хитом.)

Может быть, вся эта суета вокруг семантики кажется вам глупой, так как порядок, в котором числа перемножаются, не имеет никакого значения, то есть в любом случае $7 \times 3 = 3 \times 7$. Хорошо, но тут напрашивается вопрос, на котором я хотел бы остановиться подробнее. Является ли этот переместительный (коммутативный) закон умножения $a \times b = b \times a$ действительно таким очевидным? Помню, меня еще в детстве он удивил, возможно, и вас тоже.

Чтобы привнести немного магии, представьте себе, что вы не знаете, чему равно 7×3, и поэтому складываете семерки: 7, 14, 21. Теперь поменяйте местами сомножители и складывайте тройки, получается 3, 6, 9, ... Чувствуете ли вы все нарастающее недоумение? До сих пор ни одно из чисел в этих перечнях не совпало, но пройдем дальше ... 12, 15, 18, и затем — ах! — 21.

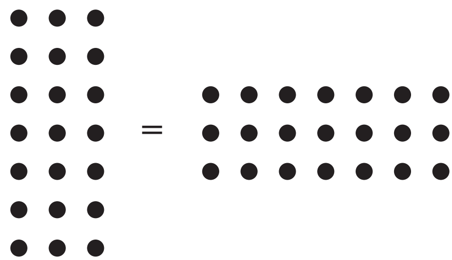
Я хочу сказать, что если вы считаете, что умножение соответствует многократному суммированию определенного числа (другими словами, многократному сложению), то коммутативный закон не совсем понятен. Но все проясняется, если представить умножение визуально. Допустим, 7×3 — это число точек в прямоугольной матрице с семью строками и тремя столбцами.



Если поставить матрицу набок, она превращается в матрицу, состоящую из трех строк и семи столбцов. Поскольку сама картинка при

* Американский исполнитель поп-музыки, снискавший мировую славу в 1980-х годах. *Прим. ред.*

вращении не изменяется (то есть количество точек сохраняется), то похоже на то, что действительно $7 \times 3 = 3 \times 7$.



$7 \times 3 \quad = \quad 3 \times 7$

Тем не менее, как ни странно, во многих реальных ситуациях, особенно когда дело касается денег, люди, кажется, забывают о коммутативном законе умножения. Позвольте привести два примера.

Предположим, вы собрались купить новые джинсы. Их продают со скидкой 20% от цены 50 долларов, указанной на этикетке, что выглядит заманчиво, но имейте в виду, что вам также придется заплатить 8% налога с продаж. После того как продавщица закончит нахваливать, как великолепно джинсы на вас сидят, и начнет оформлять покупку, она сделает паузу и заговорщицки шепнет: «Позвольте мне сэкономить ваши деньги. Я сначала посчитаю налог, а затем 20%-ную скидку от полученной суммы. Хорошо?»

Но что-то вас смущает. «Нет, спасибо, — говорите вы. — Не могли бы вы сначала вычесть 20%-ную скидку, а затем снять налог с цены покупки? Тогда я заплачу меньше».

Какой способ более выгоден для вас? (Предположим, что оба законны.)

Столкнувшись с подобной задачей, многие решают ее *последовательным суммированием*. Они вычисляют налоги и скидки в соответствии с заданным сценарием, а затем, чтобы определить окончательную цену, выполняют необходимое сложение или вычитание.

Если вы согласитесь с продавцом, то налог составит 4 доллара (8% от цены на этикетке). И цена джинсов увеличится до 54 долларов. Тогда при 20%-ной скидке от 54 долларов возвращенная сумма будет равняться 10,80 доллара. Итак, в конечном счете вы заплатите 54 доллара минус 10,80 доллара, что в сумме даст 43,20 доллара.

В соответствии же с вашим сценарием сначала будет вычитаться 20% скидки (на чем вы сэкономите 10 долларов от цены на этикетке). Тогда 8% налога на льготную цену в 40 долларов составят 3,20 доллара, так что вы все равно в конечном итоге заплатите 43,20 доллара. Удивительно?!

Но это же просто коммутативный закон в действии. Чтобы это понять, необходимо думать в стиле *последовательного умножения*, а не последовательного сложения. 8% налога и последующая за ним 20%-ная скидка вычисляются путем умножения цены на этикетке на 1,08 и последовательным умножением полученного результата на 0,80. Изменение порядка вычисления налога или скидки просто меняет местами сомножители, но, поскольку выполняется равенство 1,08 × 0,80 = 0,80 × 1,08, окончательная цена получается одинаковой[10].

Соображения, подобные этим, возникают и при принятии решений о больших финансовых сделках. Лучше или хуже традиционного пенсионного плана новый план недавно, принятый Конгрессом США (закон Roth 401(k))[11]? И вообще, если у вас есть куча денег, которые вы намерены инвестировать, но на них нужно платить налоги, то когда лучше это делать — в начале инвестиционного периода или в конце?

Повторяю еще раз: коммутативный закон показывает, что при всех прочих равных условиях (которые, к сожалению, часто таковыми не являются) вы ничего не выигрываете. Если при обоих сценариях факторы роста денег и размеры налога одинаковы, то не имеет никакого значения, когда вам платить налоги — авансом или в конце периода.

Пожалуйста, не принимайте эти математические рассуждения за финансовый совет. Тем, кто сталкивается с решением подобных проблем, нужно учитывать, что в реальной жизни все не так просто. После выхода на пенсию вы предполагаете оказаться в верхней или нижней точке налоговой шкалы? Намерены ли вы полностью обнулить свой банковский депозит? Как думаете, правительство изменит налоговую политику при снятии денег со счетов к тому времени, когда вы соберетесь их взять, или нет? Но хватит об этом. И не поймите меня неправильно, это все важно и для меня, но здесь я пытаюсь сосредоточиться на более простых математических задачах и просто хочу показать, что коммутативный закон имеет отношение к анализу таких решений.

Об этом ведутся горячие споры на различных финансовых сайтах в интернете. Но даже после того как была показана актуальность коммутативных законов, некоторые блогеры с этим не согласились. Что, по большому счету, противоречит здравому смыслу.

Возможно, мы запрограммированы не доверять коммутативному закону, потому что в повседневной жизни, как правило, имеет значение то, что мы делаем в первую очередь. Нельзя одновременно брать кусок пирога и есть его. И снимать ботинки и носки тоже нужно в правильной последовательности.

Физик Мюррей Гелл-Манн как-то в ходе тревожных размышлений о своем будущем тоже пришел к аналогичному выводу. Закончив Йельский университет, он отчаянно хотел остаться в Лиге плюща*. К сожалению, в Принстон его не приняли. В Гарвард взяли, но без финансовой помощи он протянул бы ноги. Лучшим из возможных вариантов оказался Массачусетский технологический институт (но он не входил в Лигу плюща). В глазах амбициозного Гелл-Манна это учебное заведение было не очень престижным. Тем не менее он принял предложение. Много лет спустя он признался, что в тот момент подумывал о самоубийстве, но решил этого не делать, как только понял, что посещение Массачусетского технологического института и самоубийство нельзя переставить (поменять местами)[12]. Он мог бы пойти учиться в Массачусетский технологический институт, а потом убить себя, но не наоборот.

Гелл-Манна, вероятно, впечатлила важность принципа коммутативности. Но в квантовой физике он бы обнаружил, что на самом глубинном уровне природа не подчиняется коммутативному закону. И это тоже

* Лига плюща — группа самых престижных частных колледжей и университетов на северо-востоке США, которые славятся высоким уровнем обучения и научных исследований. Название связано с тем, что по английской традиции стены университетов – членов Лиги увиты плющом. *Прим. ред.*

хорошо, поскольку благодаря нарушению коммутативного закона мир таков, каков он есть. Именно поэтому материя является твердой и атомы не разрушаются.

Еще на заре появления квантовой механики[13] Вернер Гейзенберг и Поль Дирак обнаружили, что в природе $p \times q \neq q \times p$, где p и q — импульс и координата квантовой частицы. Без этого нарушения коммутативного закона не было бы принципа неопределенности Гейзенберга, атомы бы взорвались и ничего не существовало бы.

Вот почему вам лучше позаботиться о своих p и q. И наказать делать это своим детям.

Деление и его проблемы 5

Через все повествование о числовых основах математики красной нитью проходит одна идея. Речь идет о создании (или поиске) все более универсальных чисел.

Нам достаточно натуральных чисел 1, 2, 3 и т. д., если нужно что-то сосчитать, сложить или перемножить. Но как только мы переходим к вычитанию, мы вынуждены создать новый вид числа — ноль, а также отрицательные числа. Эта расширенная вселенная чисел, называемых целыми, так же замкнута, как и натуральные числа, но она более мощная, поскольку охватывает еще и результаты операции вычитания*.

Новый кризис наступает при попытке выполнить математическую операцию деления. Деление целого числа без остатка не всегда возможно... если мы не расширим вселенную чисел еще раз, своевременно изобретя дроби. Дроби — это отношение целых чисел, следовательно, их математическое название — рациональные числа. К сожалению, это то место, где многие студенты бьются головой о математическую стенку.

* Математики говорят, что множество натуральных чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения, то есть результаты этих операций, совершенные над натуральными числами, тоже будут натуральными числами. Аналогично множество всех целых чисел замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения. *Прим. ред.*

Есть много непонятных вещей, связанных с делением и его последствиями, но, пожалуй, больше всего выводит из себя существование множества различных способов, чтобы описать часть целого.

Разрезав торт, прослоенный шоколадом, ровно посередине на две равные части, вы, скорее всего, скажете, что каждая часть равна половине торта. Или можете выразить ту же идею дробью 1/2, что означает «1 из 2 равных частей». (Косая черта между 1 и 2 визуально напоминает, что что-то разрезали.) Третий способ выражения — сказать, что каждая часть составляет 50% от целого, что буквально означает «50 частей из 100». Всего этого было бы уже достаточно, но есть еще один вариант — представить идею в десятичной системе счисления и описать каждую часть как 0,5 от всего торта.

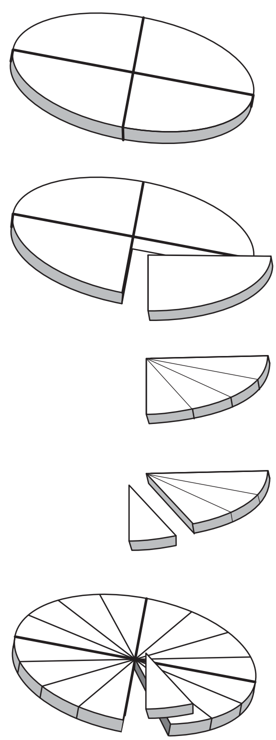
Такое обилие выбора, возможно, отчасти становится причиной недоумения, которое многие из нас испытывают, сталкиваясь с дробями, процентами и десятичными дробями. Ярким примером этому служит фильм «Моя левая нога» (My Left Foot), подлинная история мужественного ирландского писателя, художника и поэта Кристи Брауна. Он родился в большой рабочей семье и страдал от церебрального паралича, не мог говорить и контролировать свои конечности, кроме левой ноги. В детстве его часто называли умственно отсталым, особенно отец, который злился на сына и жестоко с ним обращался.

В ключевой сцене фильма семья сидит за столом. Одна из старших сестер Кристи делает домашнее задание по математике, устроившись рядом с отцом. Кристи, как обычно, сидит в углу комнаты, вертясь на кресле. Его сестра нарушает тишину. «Что такое 25% от четверти?» — спрашивает она. Отец обдумывает вопрос. «Двадцать пять процентов от четверти? Ух-х-х... Дурацкий вопрос, а? В смысле 25% — это и *есть* четверть. Вы не можете иметь четверть четверти». Сестра отвечает: «Можем. Кристи, разве у тебя не так?» Отец хмыкает: «Ха! Да что *он* знает?!»

Действительно, удел Кристи — пытаться захватить кусочек мела пальцами левой ноги. Прижав мел к грифельной доске, которая лежит на полу, мальчик сумел нацарапать каракуль, похожий на цифру 1, затем косую черту и еще что-то непонятное. Это число 16, но задом наперед.

Расстроенный, он стирает пяткой 6 и пробует снова, но на этот раз мел движется слишком далеко, пересекая 6 и превращая ее во что-то невразумительное. «Это просто какие-то нервные загогулины», — ехидничает отец, отворачиваясь. Кристи закрывает глаза и откидывается, совершенно обессиленный[14].

Кроме мощного драматического воздействия, эта сцена поражает принципиальной жесткостью отца. Непонятно, почему он так убежден, что нельзя иметь четверть четверти? Может быть, он думает, что четверть можно взять только от целого или от чего-то, состоящего из четырех равных частей. Но он не в состоянии понять, что *все* делится на четыре равные части. В случае если объект уже является четвертью чего-то, его четыре равные части будут выглядеть следующим образом:



Так как эти 16 тонких ломтиков составят целый объект, каждый ломтик, то есть 1/16 от целого, и является ответом, который Кристи пытался нацарапать.

Другой случай такой же психической жесткости, но в современном мире цифровых технологий, обошел несколько лет назад весь интернет. Обиженный клиент по имени Джордж Ваккаро записал и разместил в сети свой телефонный разговор с двумя сотрудниками компании Verizon Wireless. Ваккаро жаловался на то, что ему обещали взимать плату за использование данных в размере 0,002 цента за килобайт, но в полученном счете он обнаружил, что с него взяли по тарифу 0,002 доллара за килобайт (в 100 раз больше). Последовавшая за этим беседа возглавила рейтинг лучших пятидесяти комедийных роликов в YouTube.[15]

Вот разговор, который происходит примерно в середине записи между Ваккаро и Андреа, дежурным менеджером компании Verizon Wireless:

В. Признаете ли вы, что есть разница между одним долларом и одним центом?

А. Определенно.

В. Вы согласны, что между половиной доллара и половиной цента тоже есть разница?

А. Конечно.

В. Тогда вы наверняка признаете и существование разницы между 0,002 доллара и 0,002 цента?

А. Нет

В. Нет?

А. Я имею в виду, есть разница... но нет 0,002 доллара.

Несколько мгновений спустя Андреа говорит: «Очевидно, что доллар можно представить как “одну десятую и ноль, ноль”, правильно? Но, чтобы “ноль, запятая, ноль, ноль и два”, так?.. Я никогда не слышал о 0,002 доллара. Это просто неполный цент».

Неумение преобразовывать доллары в центы — это только часть проблемы Андреа. Основная его беда в том, что он не способен представить себе их части.

Из личного опыта могу сказать, что так происходит из-за заблуждений в отношении десятичных дробей. В восьмом классе мисс Стэнтон начала учить нас преобразовывать обыкновенные дроби в десятичные. При делении в столбик мы обнаружили, что некоторые дроби могут быть представлены в виде десятичных, оканчивающихся нулями. Например, 1/4 = 0,2500... ее можно переписать как 0,25, поскольку все нули справа не имеют значения. Другие дроби при преобразовании дают десятичные дроби с повторяющимися в конце цифрами, как, например (цифра 3 в периоде),

5/6 = 0,8333...

Моей любимой была дробь 1/7; в ней при преобразовании в десятичную дробь повторялись каждые шесть цифр (шесть цифр в периоде):

1/7 = 0,142857142857...

Недоумение возникло, когда мисс Стэнтон сказала, что если умножить на 3 обе части простого равенства

1/3 = 0,3333...,

то 1 должна равняться 0,9999...

Я возразил, что это неверно. Неважно, сколько девяток написала бы она, я мог бы поставить столько же нулей после 1,0000... а затем, если вычесть ее число из моего, всегда оставалась бы какая-нибудь маленькая разность вроде 0,0000...01[16].

Так же как отец Кристи и представитель Verizon, я не мог принять то, что мне только что доказали. Я видел, что это правильный логичный вывод, но отказывался его принимать. (Это может напомнить вам кое-кого из ваших знакомых.)

Насколько бурно человек реагирует в подобной ситуации, зависит от его нервной системы. Но вернемся снова в класс мисс Стэнтон. И все-таки, почему же мы считали десятичными только периодические десятичные дроби? Легко составить подходящий пример. Вот он:

0,12122122212222...

Последовательность подобрана так, чтобы ряд двоек в каждом периоде по мере продвижения вправо был длиннее. Такую дробь невозможно преобразовать в обыкновенную, то есть в отношение двух целых чисел. Можно доказать, что обыкновенные дроби всегда преобразуются в конечные или периодические десятичные дроби. А так как эта десятичная дробь не является ни периодической, ни конечной, то она не может быть равна отношению некоторых целых чисел. Поэтому данное число иррационально.

Учитывая, что показанное десятичное число подобрано специально, можно было бы предположить, что такие числа встречаются крайне редко. Но на самом деле подобное число типично. В определенном смысле можно сказать, что почти все десятичные числа — это иррациональные числа[17]. А повторяющиеся цифры в их записи можно рассматривать как статистически случайные.

Как только вы принимаете эти удивительные факты, все приходит в хаос и беспорядок. Целые числа и обыкновенные дроби, столь любимые и знакомые, становятся редкими и экзотичными. Вы, конечно, когда-нибудь и где-нибудь видели безобидную числовую ось. Но никто и никогда не говорил вам, что хаос скрывается именно там!

Твердая позиция 6

Я проходил мимо статуи Эзры Корнелла* сотни раз, даже не взглянув на покрытую зеленой патиной фигуру, но однажды остановился, чтобы лучше рассмотреть ее.[18]

* Эзра Корнелл (англ. Ezra Cornell; 1807–1874) — американский бизнесмен, изобретатель, филантроп. Вместе с Эндрю Уайтом основал Корнелльский университет. Знаменит также тем, что был в числе учредителей и фактических руководителей всемирно известной компании Western Union, построившей первый трансконтинентальный телеграф в Соединенных Штатах. *Прим. ред.*

Эзра выходит на улицу, исполненный гордого достоинства, в длинном пальто, жилете и сапогах. В правой руке он держит помятую широкополую шляпу и опирается на трость. Памятник производит впечатление непритязательности и обезоруживающей прямоты, какой, судя по всему, отличался в жизни и сам увековеченный в бронзе человек.

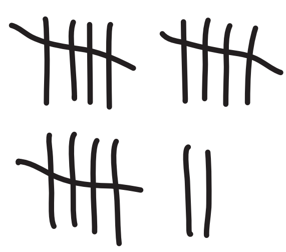
И именно поэтому так диссонируют с общим обликом памятника даты жизни Эзры. Они высечены на постаменте напыщенными римскими цифрами:

EZRA CORNELL
MDCCCVII–MDCCCLXXIV

Почему бы просто не написать 1807–1874? Римские цифры выглядят впечатляюще, но они трудно читаются и громоздки. У Эзры не хватило бы терпения прочесть их.

Найти хороший способ представления чисел всегда было сложно. Уже на заре цивилизации люди пробовали различные системы записи чисел[19] и проводили с их помощью подсчеты, будь то в торговле, измерении земельных наделов или пересчете скота в стаде.

Что объединяет почти все эти системы, так это то, что в них глубоко укоренились особенности анатомического строения человека. Из-за капризов эволюции у нас по пять пальцев на каждой руке. Этот анатомический факт отражается в примитивной системе подсчета, например число 17 записывается в виде:



Здесь каждая вертикальная черточка в каждой группе заменяет палец. Может быть, косая черта изображала большой палец, лежащий на остальных четырех пальцах, сжатых в кулак?

Римские цифры[20] лишь немного сложнее, чем счет на пальцах. Вы можете определить след счета на пальцах в способе написания римлянами чисел 2 и 3 как II и III. Косая черта находит отражение в форме римского числа 5 как V. Но 4 — особый случай. Иногда цифра пишется как IIII, хотя чаще как IV. Расположение в IV меньшего числа (I) слева от большего (V) означает, что вы должны вычесть I, вместо того чтобы прибавить, как если бы она стояла справа. Таким образом, IV обозначает 4, в то время как VI — 6.

Вавилоняне[21] не были настолько привязаны к своим пальцам. Их система счисления основывалась на числе 60, в чем отразился их безупречный вкус, так как 60 — исключительно приятное число. Его красота внутренняя и не имеет ничего общего с человеческой анатомией[22]. Шестьдесят — это наименьшее число, которое можно разделить нацело (без остатка) на 1, 2, 3, 4, 5 и 6. И это только начало (есть еще делители 10, 12, 15, 20 и 30). Из-за своей уникальной делимости число 60 куда более приемлемо, чем 10, для любого вида расчетов или измерений, которые представляют собой деление на равные части. Когда мы делим час на 60 минут, или минуту на 60 секунд, или полный круг на 360 градусов, то питаемся идеями мудрецов Древнего Вавилона.

Но самое большое наследие вавилонян — это идея, которая сегодня нам настолько привычна, что мало кто из нас может оценить всю ее тонкость и гениальность.

Чтобы проиллюстрировать эту идею, давайте рассмотрим привычную для нас индо-арабскую систему счисления, которая основана на той же идее в ее современном воплощении. Вместо 60 она базируется на десяти символах: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и, что самое замечательное, 0. Они называются цифрами, естественно, от латинского слова «пальцы»*.

Основное новшество в том, что, хотя эта система основана на числе 10, для него не зарезервировано никакого отдельного символа. Десять — это *позиция* цифр 1 и 0, их расположение, а не отдельный символ.

---

* Вообще-то от латинского «пальцы» слово «цифра» происходит в английском языке, где слово digit обозначает как цифру, так и палец. В русском языке слово «цифра» происходит от арабского ṣifr — пустой, ничего, нуль. *Прим. ред.*

То же самое справедливо для чисел 100 или 1000 и любых других, производных от 10. Их особый статус определяется не каким-либо символом, а местоположением составляющих их цифр. Такая система представления чисел называется *позиционной системой счисления*.

Здесь четко виден контраст между элегантной позиционной системой и более грубым подходом, используемым в римских цифрах. Вы хотите число десять? У нас есть 10. Это римское X. Аналогично получаем 100 (римское C) и 1000 (римское M). Также нетрудно получить десятичные представления для римских семей пятерок: римское V — число 5, римское L — число 50 и римское D — число 500.

В системе римских цифр возвышаются только несколько избранных чисел. Им дают собственную символику, а все остальные «второразрядные» числа представляются в виде их комбинаций.

К сожалению, римские цифры скрипели и стонали, когда сталкивались с чем-то бóльшим, чем несколько тысяч. Чтобы обойти эту проблему, средневековые ученые (по-прежнему использовавшие римские цифры) для определения чисел, которые в тысячу раз больше имеющихся, прибегали к наложению на уже существующие числа новых символов — верхней черты. Например, $\overline{X}$ означает десять тысяч, а $\overline{M}$— тысячу тысяч, или, другими словами, миллион. Умножение на миллиард (тысячу миллионов) встречалось редко, но если бы оно вам когда-нибудь понадобилось, вы всегда смогли бы наложить на $\overline{M}$ еще одну черту. Похоже, веселье с римскими числами никогда не прекращается.

Индо-арабская (позиционная) система счисления позволяет легко и быстро написать любое число независимо от того, насколько оно велико. Причем представлено оно будет все теми же десятью цифрами, нужно просто поставить их в правильную позицию. Более того, обозначения в арабской десятичной системе счисления очень короткие. Например, любое число до одного миллиона можно отобразить шестью или меньшим количеством символов — цифр. Попробуйте сделать это словесно, с помощью черточек или римскими цифрами.

Проще всего обычным людям научиться вычислениям с помощью позиционной системы счисления. Для этого достаточно выучить две таблицы — умножения и ее копию для сложения. И это все, что вам когда-нибудь понадобится. Любые расчеты с любой парой чисел, независимо от того, насколько они большие, можно выполнять с применением этих таблиц.

Все вышесказанное звучит несколько механистически, но в этом есть определенный смысл, поскольку с помощью позиционной системы счисления можно запрограммировать вычислительную машину на выполнение любых арифметических действий. От первых механических калькуляторов до сегодняшних современных суперкомпьютеров автоматизация арифметических вычислений стала возможной благодаря красивой идее определения значения числового разряда путем его местоположения.

Однако до сих пор невоспетым героем истории остается цифра ноль. Без него все рухнет. Это символ-заполнитель, который позволяет нам отличать числа 1, 10 и 100 друг от друга.

Все позиционные системы счисления построены на некоем числе, называемом *основание системы*. Наша привычная система счисления десятичная (от латинского корня *decem*, означающего «десять»), то есть основана на числе 10. В ней после первого разряда, представляющего единицы, следующие разряды представляют десятки, сотни, тысячи и т. д., каждый из которых является степенью 10:

$$10 = 10^1$$
$$100 = 10 \times 10 = 10^2$$
$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3.$$

Учитывая тот факт, что выбор числа 10 для системы счисления имеет анатомическую, а не логическую основу, естественным было бы спросить, а нет ли более эффективных систем счисления с другими основаниями? Веские аргументы можно представить в пользу системы счисления с основанием 2 — теперь уже повсеместно распространенной двоичной системы, используемой в компьютерах и всех электронных (цифровых) устройствах, начиная от мобильных телефонов и заканчивая видеокамерами. Из всех возможных систем счисления эта требует наименьшего количества символов (только два, 0 и 1). Это ее свойство прекрасно соотносится с логикой электронных переключателей или чего-то еще, что может находиться в двух состояниях: включено или выключено, открыто или закрыто.

Двоичная система нуждается в некотором пояснении. Вместо степеней 10 в ней используются степени 2. Две единицы по-прежнему занимают 1-й разряд, как и в десятичной системе, но следующие разряды теперь занимают двойки, четверки и восьмерки, потому что

$$2 = 2^1$$
$$4 = 2 \times 2 = 2^2$$
$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3.$$

Конечно, при записи числа в двоичной системе счисления мы не используем цифру 2, так же как и «цифру» 10 при записи чисел в десятичной системе счисления. В двоичной системе 2 записывается как 10 (один и ноль), а это означает одну двойку и ноль единиц. Аналогично этому 4 можно записать как 100 (одна четверка, ноль двоек и ноль единиц), а 8 — как 1000.

Последствия использования двоичной системы счисления выходят далеко за пределы математики. Степень двойки изменила наш мир. В последние несколько десятилетий мы пришли к пониманию, что *вся* информация (а это не только числа, но и язык, и все изображения, и звуки) может быть закодирована в виде последовательности нулей и единиц.

Что возвращает нас к памятнику Эзры Корнелла.

С задней стороны сооружения почти полностью скрыт от зрителя телеграфный аппарат, скромно напоминающий о роли Эзры Корнелла в создании Western Union — американской компании, сегодня специализирующейся на срочных денежных переводах, а некогда связавшей воедино весь североамериканский континент.

В качестве плотника, превратившегося в предпринимателя, Корнелл начал работать у Сэмюэля Морзе, чье имя живет в коде точек и тире, благодаря чему английский язык сократился до щелчков телеграфного ключа. Эти два события стали технологическими предшественниками сегодняшних нулей и единиц.

Морзе поручил Корнеллу построить первую правительственную телеграфную линию от Балтимора до Капитолия в Вашингтоне. Он, по-видимому, с самого начала предчувствовал, что принесут ему точки и тире. Когда 24 мая 1844 года линия была официально открыта, Морзе отправил по ней первое сообщение: «Чудны дела Твои, Господи!»

Часть II СООТНОШЕНИЯ

Получая радость от *x* 7

Итак, пора переходить от арифметики начальной школы к математике средних классов. На протяжении следующих десяти глав мы будем повторять алгебру, геометрию и тригонометрию. Не волнуйтесь, если вы их забыли, — на этот раз не будет никаких экзаменов. Вместо того чтобы беспокоиться о формальной стороне изучения алгебры и геометрии, позволим себе сосредоточиться на самых красивых, важных и далеко идущих идеях этих разделов математики. Например, алгебра может поразить вас головокружительным сочетанием символов, определений и методов, но, в конце концов, все это сведется лишь к двум вещам: нахождению решений x и работе с уравнениями.

Первое похоже на работу детектива. Вы ищете неизвестное число x, при этом вам дается несколько подсказок либо в виде уравнения наподобие $2x + 3 = 7$, либо, что менее удобно, в виде запутанного словесного портрета x, то есть словесного описания задачи. В любом случае ваша цель — найти на основании полученных данных значение x.

Напротив, работа с уравнениями представляет собой смесь искусства и науки. Вместо того чтобы остановиться на конкретном значении x, вы подтасовываете и уплотняете соотношения, которые по-прежнему содержат изменяющиеся числа; они называются переменными и как раз и являются тем, что действительно отличает алгебру от арифметики. А уравнения, если можно так выразиться, — просто изящные модели самих чисел. Именно в них алгебра сродни искусству. Можно также сказать, что формулы выражают соотношения между числами в реальном мире, как это происходит в законах движения свободно падающих тел и характеристиках планетарных орбит либо у частот генотипов в популяции. Вот здесь алгебра сродни науке.

Такое определение двух основных функций алгебры не считается общепринятым (оно придумано мной и, как мне кажется, довольно правдиво). В следующей главе я больше расскажу о поиске решений x, а пока, чтобы пояснить мою мысль, сосредоточимся на уравнениях и формулах. Начнем с пары простых примеров.

Несколько лет назад моя дочь Джо поняла зависимость между числами, выражающими ее возраст и возраст ее старшей сестры Лии[23]. Она мне сказала: «Папа, смотри, всегда есть число между моим возрастом и возрастом Лии. Вот сейчас мне шесть лет, а Лии восемь, а семь находится посередине. И даже когда мы станем старше — мне исполнится двадцать, а ей двадцать два года, — посередине по-прежнему будет число!»

Рассуждения Джо — пример алгебраического подхода (хотя никто, кроме гордого отца, возможно, этого и не видит). Она подметила соотношение между двумя постоянно меняющимися переменными: своим возрастом, x, и возрастом Лии — y. Лия всегда будет на два года старше сестры: $y = x + 2$.

На языке алгебры такие задачи формулировать естественнее всего. Но потребуется небольшая практика, чтобы хорошо разобраться в этой науке, потому что существуют, как говорят французы, *faux amis*, то есть ложные друзья: пары слов, звучащие похоже и вроде бы означающие одно и то же, но на самом деле имеющие совершенно различные значения.

Предположим, что длина коридора равна y, если ее измерять в ярдах, и f, если мы ее измерим в футах. Составьте уравнение, описывающее отношение между y и f.

Мой друг Грант Виггинс, эксперт по вопросам образования, уже много лет предлагает такое задание студентам и университетским преподавателям. Основываясь на своем опыте, он утверждает, что студенты более чем в половине случаев выполняют его неправильно, даже если совсем недавно прошли и успешно сдали курс алгебры.

Если вы тоже думаете, что ответ — $y = 3f$, добро пожаловать в клуб неудачников.

Эта формула похожа на «дословный перевод» утверждения «Один ярд равняется трем футам» на язык алгебры. Но как только вы попробуете подставить в уравнение несколько чисел, то сразу увидите, что в нем все перевернуто с ног на голову. Скажем, коридор имеет длину 10 ярдов, то есть 30 футов. Тогда при y = 10 ярдам, понятно, что f = 30 футам, и тождество становится неверным.

Верное уравнение: $f = 3y$. И здесь 3 действительно означает, что в одном ярде 3 фута (то есть имеет размерность фут/ярд). Когда вы умножите 3 на переменную y в ярдах, то ярды в уравнении сократятся, и у вас останутся, как и должно быть, футы.

Проверка правильности формулы с помощью сокращения единиц измерения помогает избежать грубой ошибки такого типа. Например, она могла бы спасти сотрудников отдела обслуживания клиентов компании Verizon (см. пример в главе 5) от путаницы между долларами и центами.

Еще один вид формул называется тождеством. Когда на уроках алгебры вы раскладывали на множители или перемножали многочлены, вы работали с тождествами. Можете использовать их и теперь, чтобы произвести впечатление на друзей дешевыми трюками с числами. Вот один, который поразил физика Ричарда Фейнмана*, хотя он сам неплохо считал устно.

* Ричард Фейнман (1918–1988) — выдающийся американский ученый, основные открытия сделал в области теоретической физики. Один из создателей квантовой электродинамики. В 1943–1945 гг. входил в число разработчиков атомной бомбы в Лос-Аламосе. *Прим. перев.*

Работая в Лос-Аламосе[24], я убедился, что Ганс Бете* превосходно считает. Как-то раз мы подставляли числа в формулу и добрались до квадрата 48, я уже было потянулся за калькулятором, и тут Ганс сказал:

— Это будет равняться 2300.

Я стал нажимать кнопки, а он продолжил:

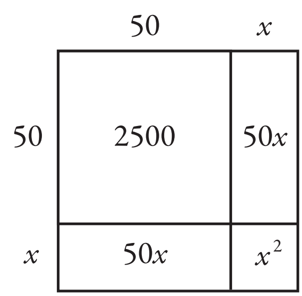
— Если вам нужен точный ответ, то 2304.

Калькулятор тоже выдал 2304.

— Ну и дела! Это впечатляет! — воскликнул я.

— Разве вы не знаете, как возвести в квадрат числа, не превышающие 50? — удивился он. — Возводите в квадрат 50 — равно 2500 — и вычитаете 100 раз разность между 50 и вашим числом (в данном случае это 2), так у вас выйдет 2300. Если хотите иметь точное значение, то к этому числу прибавьте квадрат разности. Выйдет 2304.

Трюк Бете основан на тождестве $(50 + x)^2 = 2500 + 100x + x^2$. Он запомнил его и применил при $x = -2$, так как $48 = 50 - 2$. Для интуитивного доказательства этой формулы представьте себе квадратный кусочек ковра со стороной $50 + x$.



Его площадь, равная $(50 + x)$ в квадрате, и есть наше искомое. Однако на диаграмме видно, что эта область состоит из квадрата 50×50

* Ганс Бете (1906–2005) — американский астрофизик, лауреат Нобелевской премии по физике. В 1943–1945 гг. входил в число разработчиков атомной бомбы в Лос-Аламосе. *Прим. перев.*

(в формуле это равно 2500), двух прямоугольников размером 50, умноженное на x, (площадь каждого по $50x$; всего $100x$), и, наконец, x, умноженное на x, что равно площади x в квадрате.

Такие тождества полезны не только для физиков-теоретиков. Еще одно тождество, подобное тождеству Бете, имеет отношение к любому, кто вкладывает деньги в фондовый рынок[25]. Предположим, ваши акции катастрофически упали на 50% в одном году, а затем, в следующем, поднялись на 50%. Даже при такой высокой прибыли их стоимость уменьшилась на 25%. Чтобы в этом убедиться, обратите внимание на то, что при подсчете 50% потерь вы умножаете свои деньги на 0,50, а при вычислении 50% прибыли — на 1,50. Если производить эти вычисления одно за другим, то ваши деньги нужно умножить на 0,50 и на 1,50, что составляет 0,75. Другими словами, 25% потерь.

На самом деле вам *никогда* не вернуться к первоначальной сумме, даже если вы несколько лет подряд будете иметь то потери, то прибыль на одинаковый процент. Алгебра поможет нам понять, почему так происходит. Это следует из тождества

$$(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2.$$

В одном году стоимость портфеля акций уменьшалась на коэффициент $1 - x$ (в примере $x = 0{,}50$), а в следующем году увеличивалась на коэффициент $1 + x$. Таким образом, абсолютное изменение можно представить в виде выражения $(1 - x)(1 + x)$, в соответствии с формулой, приведенной выше, оно равно $1 - x^2$.

Дело в том, что это выражение для любого x, отличного от 0, *всегда* меньше 1. Следовательно, вы никогда полностью не компенсируете своих потерь.

Само собой разумеется, что не все соотношения между переменными так же просты, как рассмотренные нами. Тем не менее привлекательность алгебры соблазнительна, а в наивных руках она создает такие глупости, как формулу для социально приемлемой разницы в возрасте партнеров, находящихся в романтических отношениях[26].

На некоторых сайтах в интернете сказано: если ваш возраст x, то светское общество не одобрит вашу связь с партнером, если его возраст меньше чем $x/2 + 7$ лет.

Иными словами, если 82-летний мужчина встречается с 48-летней женщиной, даже если она не замужем, это достойно осуждения. А если ему только 81? Тогда ничего страшного!

В поиске своих корней 8

Более 2500 лет математики мучились над решениями уравнений относительно x. Путь поиска решений[27], то есть нахождения корней этих уравнений, для все более и более сложных уравнений стал одним из великих эпосов в истории человеческой мысли.

Одна из первых подобных задач поставила в тупик граждан Делоса* примерно в 430 году до н. э. Отчаявшись предотвратить распространение чумы, они, по совету Дельфийского оракула, вознамерились увеличить объем кубического алтаря бога Аполлона в 2 раза. К сожалению, оказалось, что удвоение объема куба[28] требует знания и умения извлекать кубический корень из 2. Посредством того ограниченного арсенала геометрических инструментов, который имелся в то время у греков (циркуль и линейка), решить эту задачу было невозможно.

Более поздние исследования подобных задач выявили еще одну неизбежно возникающую раздражающую мелочь: в процессе решения уравнений очень часто приходилось извлекать квадратные корни из отрицательных чисел[29]. Над этим еще довольно долго смеялись, как над чем-то ложным и софистическим.

Математики почти до 1700-х годов отрицали возможность извлекать квадратные корни из отрицательных чисел, поскольку те не могли быть положительными числами, так как положительное число, умноженное на

* Делос — остров в Эгейском море. *Прим. ред.*

положительное, всегда дает положительное. А мы ищем числа, квадраты которых отрицательные. Они не могли быть и отрицательными числами, так как отрицательное число, умноженное на отрицательное, опять же дает положительное. Казалось, не было никакой надежды на получение числа, которое при умножении на себя даст отрицательное число.

Здесь мы опять наблюдаем очередной кризис. Они неизменно возникают в математике в случае, когда уже существующие операции пытаются применять в числовых областях, где применить их уже нельзя. Так, вычитание бо́льших чисел из меньших породило отрицательные числа (см. главу 3), а деление породило дроби (см. главу 5), необходимость извлекать квадратные корни в конечном итоге вынудила вновь расширить вселенную чисел.

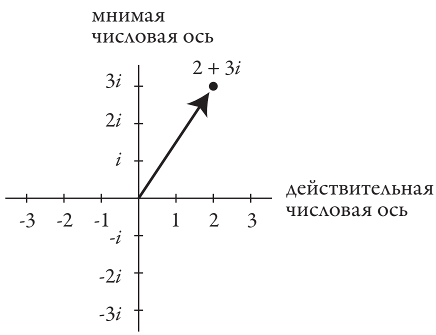
Исторически так сложилось, что этот шаг был самым болезненным. Квадратный корень из −1 до сих пор носит унизительное название «мнимый».

Этот новый вид чисел (или, если вы предпочитаете быть агностиками, называйте их символами, а не числами) определяется таким свойством, что

$$i^2 = -1.$$

То, что i нельзя найти на числовой оси, действительно правда. В этом отношении i гораздо более необычно, чем ноль, отрицательные числа, дроби и даже иррациональные числа, но, как ни странно, у всех мнимых чисел есть место на числовой оси. И при достаточном воображении наш ум может его отыскать и для i тоже. Оно «живет» на собственной мнимой оси, расположенной под прямым углом к основной. И, наложив мнимую ось на ось реальную числовую, вы создадите 2D-пространство, то есть двумерную плоскость, где обитают воображаемые числа.

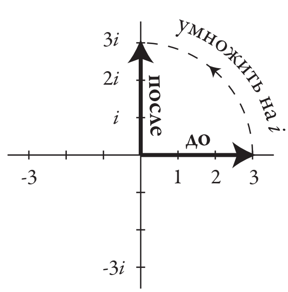
Это комплексные числа. Но их комплексность означает не сложность, а то, что два типа чисел, действительных и мнимых, скреплены вместе и образуют сложное, гибридное число, например $2 + 3i$.



Комплексные числа — это сверкающая вершина всей системы чисел. Они радуют теми же свойствами, что и реальные числа. Их можно складывать и вычитать, умножать и делить, но они *лучше* реальных чисел, потому что из них всегда можно извлечь корни. Вы можете извлечь из комплексного числа квадратный корень, корень третьей степени или вообще корень любой степени, а в результате все равно получится комплексное число.

И напоследок грандиозное утверждение, называемое основной теоремой алгебры. В нем говорится, что корни любого многочлена — всегда комплексные числа. В этом смысле они завершают поиски святого Грааля. Вселенная чисел больше не должна расширяться. Комплексные числа — кульминация путешествия, которое началось с единицы.

Вы можете оценить полезность комплексных чисел (то есть почувствовать их правдоподобие), если знаете, как их визуализировать. Ключом к визуализации станет понимание того, что такое умножение на i. Предположим, мы умножаем произвольное положительное число, скажем 3, на i. Результатом будет мнимое число $3i$.

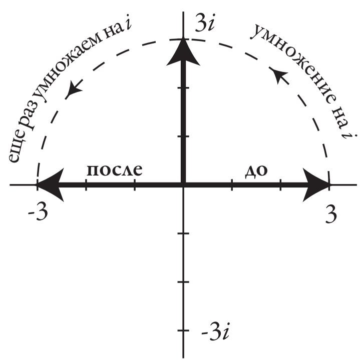


Таким образом, умножение на i представляет собой вращение против часовой стрелки на четверть оборота. До умножения на i число 3 обозначается стрелкой длиною 3, направленной на восток, результатом умножения на i будет стрелка такой же длины, но направленная на север.

Инженеры-электротехники любят комплексные числа именно по этой причине. Иметь такой компактный способ представления вращения на 90° при работе с переменным током, напряжением или электрическими и магнитными полями очень удобно, потому что они часто связаны с колебаниями или волнами, которые составляют четверть цикла (то есть представляют сдвиг фазы на 90°).

Действительно, комплексные числа необходимы всем инженерам. В авиационно-космической промышленности они облегчили расчеты подъема крыла самолета. Инженеры-строители и инженеры-механики регулярно используют их для анализа вибрации элементов пешеходных мостов, небоскребов и автомобилей на ухабистой дороге.

Поворот на 90° также проливает свет на то, что на самом деле означает $i^2 = -1$. Если мы умножим положительное число на i^2, то стрелка, равная длине положительного числа, повернется на 180° в направлении с востока на запад, так как производится два поворота на 90° (по одному для каждой степени i), в итоге — на 180°.



Но умножение на -1 делает такое же сальто на 180°. Вот поэтому $i^2 = -1$.

Компьютеры вдохнули новую жизнь в комплексные числа и вековую проблему извлечения корней. Когда ПК не используются нами для веб-серфинга или отправки и получения электронной почты, они на наших столах способны обнаружить такое, что древние и представить себе не могли.

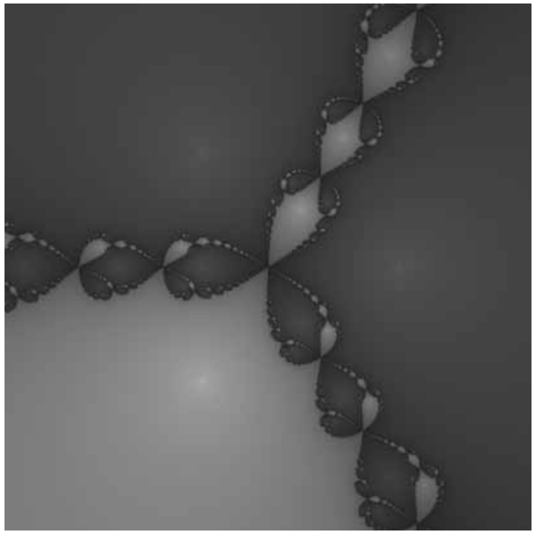
В 1976 году мой коллега по Корнуолльскому университету Джон Хаббард попытался применить в задачах по динамике метод Ньютона[30], мощный алгоритм для поиска корней уравнений в комплексной плоскости. В соответствии с этим методом выбирается начальное значение (близкое к значению корня) и неоднократно производятся определенные вычисления. При этом на каждом последующем шаге используется значение, полученное на предыдущем. Этот метод позволяет быстро приблизиться к корням уравнения.

Хаббард заинтересовался *множественными* корнями. Какой из множественных корней можно найти методом Ньютона? Хаббард доказал, что из двух корней всегда будет найден тот, который наиболее близок к начальному значению. Однако при наличии трех и более корней его предыдущее доказательство не сработало.

Тогда Хаббард провел так называемый *численный эксперимент*. Он запрограммировал компьютер на выполнение метода Ньютона, настроив устройство так, чтобы оно маркировало цветом миллионы различных начальных значений в соответствии с тем, к какому корню они приближались, и меняло интенсивность цвета в зависимости от скорости их приближения к корню.

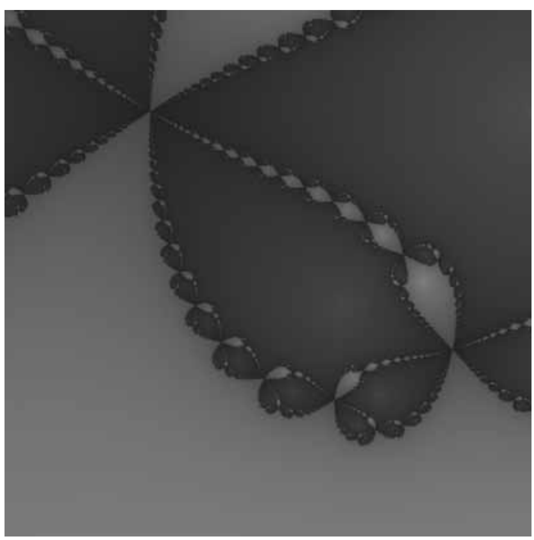
До того как Хаббард увидел результат, он предполагал, что к корням уравнения быстрее всего притянутся наиболее близкие к ним по значению, и это отобразится в виде ярких точек на сплошном цветовом пятне. Но вот границы между пятнами? О них он даже не думал.

Компьютер выдал неожиданный результат.



Пограничная область между пятнами напоминала психоделические галлюцинации[31]. Цвета в ней смешивались беспорядочно, соприкасаясь друг с другом в невероятно большом количестве точек. Они всегда располагались в трех направлениях. Другими словами, где бы ни появлялись два цвета, между ними всегда присутствовал третий.

Расширение границ выявило наличие пятен внутри пятна.



Структура была фрактальной[32] — сложной формы, внутренняя структура которой повторялась во все более мелких масштабах.

Кроме того, вблизи границы царил хаос. Две точки могли вначале находиться очень близко друг к другу, какое-то время попрыгать рядышком, а потом разойтись к разным корням. Выбранный корень был так же непредсказуем, как выигрышные числа при игре в рулетку. Мелочи, крошечные, незаметные изменения в начальных условиях могли полностью изменить всю картину.

Работа Хаббарда была одной из первых вылазок в область науки, ныне называемой *комплексная динамика*, — потрясающее сочетание теории хаоса, комплексного анализа и фрактальной геометрии. В некотором смысле это позволило геометрии вернуться к своим корням. В 600 году до Рождества Христова руководство для строителей храма в Индии[33], написанное на санскрите, давало подробные инструкции, как при проектировании ритуальных алтарей вычислять квадратные корни. Спустя свыше 2500 лет математики все еще ищут корни, но в настоящее время инструкции пишутся в двоичном коде.

Ванна моя преисполнена* 9

Дядюшка Ирв был братом моего отца и его компаньоном. Они владели обувным магазином в нашем городе. Так вот, он хорошо разбирался в практической стороне вещей и по большей части находился наверху в своем кабинете, потому что лучше управлялся с цифрами, чем с клиентами.

Когда мне было лет десять или одиннадцать лет, дядя Ирв задал мне мою первую арифметическую задачу[34]. Этот день навсегда врезался мне в память, вероятно, потому, что я ошибся и чувствовал смущение.

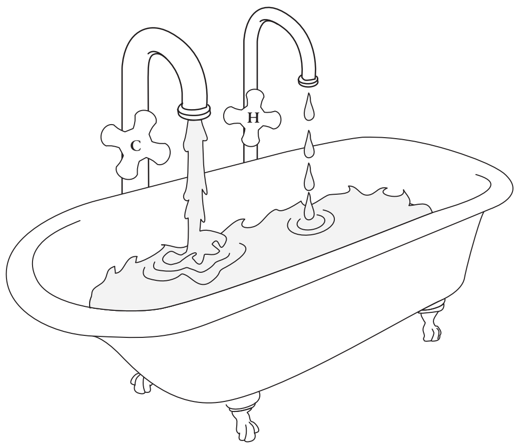
В условии задачи говорилось о заполнении ванны водой[35]. Если включить кран с холодной водой, то ванна наполнится за полчаса, а если с горячей — то за час. Сколько времени потребуется, чтобы заполнить ванну, когда включены оба крана?

Я уверенно, вероятно, как и многие из вас, ответил: «Сорок пять минут». Дядюшка Ирв покачал головой и усмехнулся. И своим высоким гнусавым голосом он преподал мне урок.

«Стивен, — обратился ко мне он, — скажи, сколько воды будет в ванне через минуту». Холодная вода заполняет ванну за 30 минут, так что за одну минуту она заполнит $\frac{1}{30}$ ее часть. Но горячая вода льется медленнее

* В названии автор перефразирует известную фразу из Библии, Псалтырь (22:5) «Ты приготовил предо мною трапезу в виду врагов моих; умастил елеем голову мою; чаша моя преисполнена» (англ. My Cup Runneth Over); оригинальное название главы My Tub Runneth Over. *Прим. перев.*

и наполнит ванну через 60 минут, то есть за минуту она заполнит только $\frac{1}{60}$ часть ванны. Поэтому, когда вода льется из обоих кранов, она заполняет $\frac{1}{30} + \frac{1}{60}$ ванны за минуту.



Чтобы сложить эти дроби, обратите внимание, что наименьший общий знаменатель равен 60. Преобразовав $\frac{1}{30}$ в $\frac{2}{60}$, получаем

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{2}{60} + \frac{1}{60} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}.$$

Это означает, что вода из двух кранов за минуту заполнила $\frac{1}{20}$ ванны. Следовательно, ванна наполнится через двадцать минут.

С тех пор на протяжении многих лет я неоднократно вспоминал о той ванне, причем всегда с любовью к дядюшке Ирву и самой задаче. Мне преподали урок, как просто ради удовольствия решать задачи, основываясь на интуиции, и как найти приближенное решение, если сложно отыскать точное.

Рассмотрим мое первоначальное предположение — 45 минут — и, решив задачу интуитивно (в соответствии со здравым смыслом), поймем, что этот ответ не может быть правильным. Действительно, он абсурден. Чтобы понять почему, предположим, что горячая вода отключена, тогда холодная вода заполнит ванну за 30 минут. Поэтому какой бы дядюшка Ирв ни задал вопрос, ответ должен быть «меньше 30 минут»; если в ванну льется не только холодная, но и горячая вода, то ванна заполнится быстрее.

Правда, этот вывод не столь убедителен, как ответ «20 минут», который мы получили методом, предложенным дядюшкой Ирвом, зато он не требует никаких расчетов.

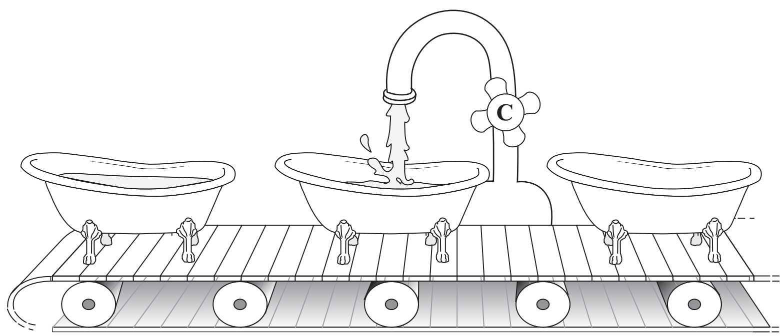
Другой способ упростить задачу — предположить, что вода из обоих кранов течет с одинаковой скоростью. Причем ванна при *одном* открытом кране заполняется за 30 минут. Тогда очевидно, что она наполнится за 15 минут, так как каждый кран выполнит половину работы.

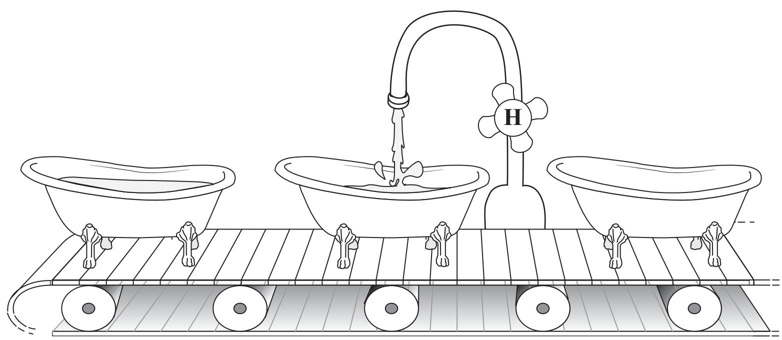
Отсюда сразу становится ясно, что, по расчетам дядюшки Ирва, наполнение ванны должно занимать больше пятнадцати минут. Почему? Потому что «быстрый + быстрый» побьет «медленный + быстрый». Наша условно симметричная задача имеет два быстрых крана, в то время как у дядюшки Ирва один медленный и один быстрый. А поскольку 15 минут — ответ задачи для двух быстрых кранов, то ванна дядюшки Ирва будет наполняться дольше.

Получается, что благодаря рассмотрению двух гипотетических случаев — в первом ванна заполняется только холодной, так как горячая отключена, а во втором — горячей и холодной с одинаковой скоростью, — мы узнали, что ответ лежит в пределах 15–30 минут. В более сложных задачах, где порой невозможно найти точный ответ, и не только в математике, но и в других областях, такой подход может очень пригодиться.

Даже если вы все-таки найдете точное решение, не стоит самоуспокаиваться. Данную задачу можно решать более простыми способами. Это единственное место, где математика дает простор творчеству. Например, помимо метода дядюшки Ирва (с помощью обыкновенных дробей, приведенных к общему знаменателю), есть более забавный маршрут, приводящий к тому же результату. Несколько лет спустя, когда я попытался определить, почему эта задача настолько запутанна, до меня дошло, что в первую очередь из-за разных скоростей кранов. Необходимость следить, каков вклад каждого крана в наполнение ванны, вызывает напряжение. Особенно если вы можете представить такую картину: горячая и холодная вода плещется из кранов, перемешиваясь в ванне.

Так что давайте не смешивать два вида воды, по крайней мере в нашей голове. Вместо одной ванны представим себе две разные конвейерные ленты с движущимися ваннами с отдельными кранами с горячей и холодной водой.





Из каждого крана наполняется одна ванна — перемешивание не допускается. И как только одна ванна наполняется, она движется далее по конвейеру, уступая место следующей.

Теперь все становится понятным. За один час кран с горячей водой наполняет одну ванну, за это же время кран с холодной водой заполняет две ванны (так как на одну требуется полчаса). Это составляет три ванны в час или одну ванну каждые двадцать минут. Эврика!

Так почему же столько людей, в том числе и я, грубо ошибаются, отвечая «45 минут»? Почему так заманчиво разделить пополам сумму тридцати и шестидесяти минут? Я не уверен, но, кажется, из-за ошибочного понимания условия задачи. Может быть, задача с заполнением ванны в сознании наложилась на другие задачи, где нахождение разности имело бы смысл. Моя жена объяснила мне это с помощью аналогии: «Представь себе, что ты помогаешь пожилой даме перейти улицу. Без твоей помощи это займет у нее 60 секунд, ты бы перебежал дорогу за тридцать. Сколько времени вы будете ее переходить, если ты будешь держать даму под руку?» Теперь ясна логика людей, которые говорят о сорока пяти секундах, потому что, когда пожилая дама цепляется за ваш локоть, она замедляет ваше движение, а вы ускоряете ее.

Отличие от задачи с ванной здесь в том, что и вы, и пожилая дама воздействуете на скорость движения друг друга, чего не происходит с кранами. Они независимы. По-видимому, наше подсознание не распознает это различие, по крайней мере, когда мы жадно хватаемся за неправильный вывод.

Нет худа без добра. Даже неправильные ответы могут быть полезны — если вы осознаете, что они неправильные. Они разоблачают ошибочные аналогии и другие погрешности мышления и помогают облечь суть проблемы в более понятную форму.

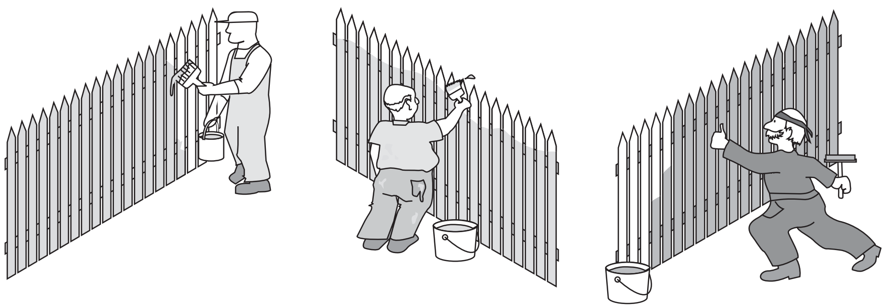
Классические занимательные арифметические задачи специально сформулированы таким образом, чтобы так же ловко, как это делает фокусник, обмануть свою жертву, то есть вас. Само условие задачи содержит подвох. Если вы ответите инстинктивно, то, вероятно, попадетесь на эту удочку.

Вот пример такого типа задачи. Предположим, трое мужчин могут покрасить три забора за три часа. Сколько времени потребуется, чтобы один человек покрасил один забор?

Очень заманчиво ляпнуть: «Один час». Сама формулировка подталкивает вас к этому. Барабанный ритм первого предложения — трое мужчин, три забора, три часа — настраивает ваше внимание на определенную волну, поэтому когда в вопросе в таком же ритме повторяется: один человек, один забор, то ответу «один час» трудно сопротивляться. Эти параллельные конструкции психологически настраивают на ответ, который правилен лингвистически, но математически неверен.

Правильный ответ: три часа.

Если вы визуализируете задачу, мысленно представив троих мужчин, три забора и уже покрашенные через три часа заборы, то ответ становится очевидным. Чтобы через три часа покрасить все три забора, каждый человек должен красить свой забор в течение трех часов.



Отвлекаясь от рассуждений, скажу, что такие задачи считаются наиболее ценными среди текстовых задач. Они тренируют наше внимание, заставляя остановиться и посмотреть на задачу с совершенно неожиданной стороны.

Возможно, еще важнее то, что текстовые задачи учат нас думать не только о количестве, но и о соотношениях между числами, выражающими количества. Например, как скорость вытекания воды из кранов влияет на время, необходимое для заполнения ванны. И это следующий важный шаг в математическом образовании человека. Понятно, что для многих это сложно, так как соотношения — нечто более абстрактное, чем просто числа. Но они также представляют собой более мощный инструмент познания окружающего мира, поскольку отражают его внутреннюю логику. Причина и следствие, спрос и предложение, вход и выход, воздействие и отдача — все они связаны между собой парами чисел и соотношениями между ними. Текстовые задачи вырабатывают у нас образ мышления, который интенсивно использует различные соотношения.

Тем не менее Кит Девлин в своем эссе «Проблемы с текстовыми задачами» (The problem with word problems) высказывает о них интересные критические замечания. С его точки зрения, проблема в том, что при решении таких задач считается, что вы понимаете правила игры и соглашаетесь с ними, хотя часто они искусственные, а иногда и вообще нелепые. Например, в нашей задаче о трех мужчинах и трех заборах, которые они красят в течение трех часов, подразумевается, что, *во-первых*, все трое красят с одинаковой скоростью и, *во-вторых*, красят непрерывно, не снижая и не повышая темпа работы.

Оба допущения нереальны. Предполагается, что вы игнорируете все это, иначе задача оказалась бы слишком сложной и у вас не было бы достаточно данных для ее решения. Вы должны были бы точно знать, сколько раз каждый маляр замедлял работу и насколько он устал на третьем часу, как часто останавливался, чтобы перекусить, и т. п.

Преподаватели математики должны быть готовы к тому, что текстовые задачи заставляют нас делать упрощающие предположения. Этот ценный навык называется математическим моделированием. Ученые используют его всегда, когда применяют математику к явлениям реального мира. Но они, в отличие от авторов большинства текстовых задач, как правило, заранее сообщают о своих допущениях.

Итак, спасибо дядюшке Ирву за первый урок. Незабываемый? Да. Унизительный? Да, но — в хорошем смысле.

Игра с квадратами 10

Формула для вычисления корней квадратного уравнения — это Родни Дэнджерфилд* алгебры. И, будучи одной из формул всех времен и народов, она не заслужила никакого уважения. Даже профессионалы не особо ее жалуют. Когда математиков и физиков просят составить десятку самых красивых или важных уравнений[36] всех времен, квадратное уравнение никогда не проходит отбор. Да, конечно, все восторгаются $1 + 1 = 2$, $E = mc^2$ и элегантной маленькой теоремой Пифагора, которая важничает просто потому, что она вот такая: $a^2 + b^2 = c^2$. Но квадратное уравнение? Конечно же нет.

По общему признанию, формула для вычисления корней квадратного уравнения некрасива. Некоторые студенты начинают робко выяснять у нее результат, произнося как ритуальное заклинание: «x равен минус b плюс-минус квадратный корень из b квадрат минус четыре ac, деленное на два a». Другие сделаны из более прочного материала и смотрят формуле прямо в лицо, бесстрашно сопротивляясь пугающей смеси из букв и символов:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

* Родни Дэнджерфилд (1921–2004) — популярный американский комедийный актер. Сниматься стал поздно. Известен благодаря фильмам «Гольф-клуб» (1980), «Легкие деньги» (1983) и «Снова в школу» (1986). *Прим. перев.*

И только когда вы осознаете, на что способна эта формула, вы начинаете ценить ее внутреннюю красоту. Надеюсь, эта глава поможет вам совладать с кажущимся сумбуром символов, а также позволит понять, что означает уравнение и откуда оно берется.

Во многих ситуациях мы хотели бы выяснить значение некоего неизвестного числа. Какую дозу лучевой терапии следует применить, чтобы уменьшить опухоль щитовидной железы? Сколько денег вам придется платить ежемесячно, чтобы покрыть тридцатилетний ипотечный кредит в размере 200 тысяч долларов при фиксированной годовой процентной ставке, равной 5%? С какой скоростью должны лететь ракеты, чтобы преодолеть притяжение Земли?

В алгебре мы уже получили первый опыт решения простейших задач такого типа. Эти решения были разработаны исламскими математиками около 800 года нашей эры и основывались на более ранних исследованиях египетских, вавилонских, греческих и индийских ученых. Импульсом для их разработки послужили сложности при расчете размера наследства[37] по канонам исламского права.

Например, предположим, что умирает вдовец и оставляет все свое имущество (10 дирхемов) дочери и двум сыновьям. Согласно законам ислама, сыновья должны получить равные доли, причем каждому сыну положена сумма вдвое бóльшая, чем дочери. Сколько дирхемов причитается каждому из наследников?

Давайте используем букву x для обозначения суммы наследства дочери. Пока нам неизвестно значение x, мы можем рассуждать о нем как об обычном числе. В частности, мы знаем, что каждый сын получит в два раза больше, чем дочь, то есть по $2x$. Таким образом, общее наследство равно $x + 2x + 2x$, всего $5x$, и эта сумма должна равняться общей стоимости наследственного имущества в 10 дирхемов. Следовательно, $5x = 10$ дирхемов. Наконец, разделив обе части уравнения на 5, мы видим, что $x = 2$ дирхема (это доля дочери). Поскольку каждый из сыновей наследует $2x$, то им причитается по 4 дирхема.

Обратите внимание, что в этой задаче появилось два типа чисел: известные — 2, 5 и 10 и неизвестные, такие как x. Как только мы смогли вывести соотношение между ними (воплощенное в уравнении $5x = 10$), сразу же получили возможность выделить неизвестное x, упростив уравнение путем деления его обеих частей на 5. Это немного напоминает, как скульптор обрабатывает кусок мрамора, пытаясь освободить статую из камня.

Потребовалась бы несколько иная тактика, если бы мы столкнулись с необходимостью *вычесть* известное число из неизвестного, как в уравнении $x - 2 = 5$. Чтобы выделить x в этом случае, мы избавляемся от 2, добавив ее в обе части уравнения. Следовательно, слева будет x, а справа $5 + 2 = 7$. Таким образом, $x = 7$, что вы, конечно, уже поняли.

Хотя этот метод сейчас знаком всем студентам, изучающим алгебру, они не осознают, что от него произошло само понятие алгебры. В начале IX века работавший в Багдаде математик Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми[38] написал фундаментальный учебник, в котором говорилось, что к обеим частям уравнения следует прибавлять величину, равную вычитаемой величине (число 2 в приведенном выше примере). Он назвал этот процесс *al-jabr* (по-арабски «восстановление»), что позже трансформировалось в «алгебру». Затем, спустя много лет после своей смерти, он опять выиграл этимологический джекпот, поскольку его собственное имя, аль-Хорезми, живет и доныне в слове «алгоритм».

В своем учебнике, прежде чем начать пробираться сквозь хитросплетения вычислительного наследия прошлого, аль-Хорезми описал более сложный класс уравнений, воплощающий соотношение между *тремя* видами чисел, а не только теми двумя, которые мы рассматривали выше. Наряду с известными числами и неизвестными (x) в эти уравнения также включены квадраты неизвестных (x^2). Они теперь называются квадратными уравнениями, от латинского *quadratus*, то есть «квадрат». Древние ученые в Вавилоне, Египте, Греции, Китае и Индии уже бились над головоломками, часто возникающими в архитектурных или геометрических задачах, связанных с определением площадей или пропорций, и показали, как решать некоторые из них.

Например, аль-Хорезми рассмотрел квадратное уравнение

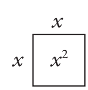
$$x^2 + 10x = 39.$$

Однако в его время такие задачи формулировались устно, а не в виде уравнений. Он задал вопрос: «Какая площадь при увеличении на десять собственных корней дает 39?» (Здесь термин «корень» относится к неизвестным x).

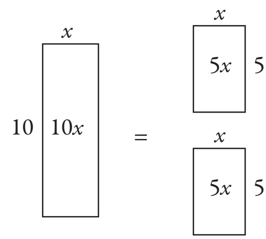
Эта задача гораздо сложнее, чем те две, которые мы рассматривали выше. Как мы можем выделить x сейчас? Приемы, используемые ранее, неэффективны, так как члены уравнения x^2 и $10x$ здесь наступают друг другу на пятки. Даже если удастся освободиться от x в одном из них, другой член остается связанным. Например, если мы разделим обе части уравнения на 10, $10x$ сократится до x (к чему мы и стремились), но x^2 превратится в $x^2/10$, что нисколько не приближает нас к желаемому результату. Основным препятствием является то, что мы хотим одновременно сделать две, по-видимому, несовместимые вещи.

На предложенном аль-Хорезми решении квадратного уравнения стоит остановиться подробнее. Во-первых, потому что оно блестяще, а во-вторых, потому что оно настолько мощное, что позволяет решать *все* квадратные уравнения одним махом. Это означает, что, если известные числа 10 и 39 из нашего уравнения поменять на другие, метод все равно будет работать.

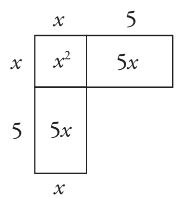
Идея аль-Хорезми состоит в том, чтобы представить каждое из слагаемых в уравнении геометрически. Первый член x^2 — это площадь квадрата со стороной x.



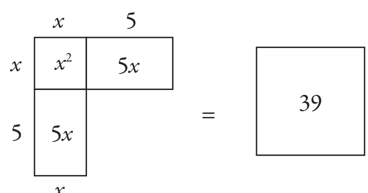
Второй член $10x$ можно рассматривать как площадь прямоугольника 10 на x, или, более изощренно, как площадь двух равных прямоугольников, каждый размером 5 на x. (Разбиение прямоугольника на два меньших готовит почву для основного маневра, который последует далее, — получения полного квадрата.)



Прикрепите два новых прямоугольника к площади x^2 для получения г-образной фигуры $x^2 + 10x$:

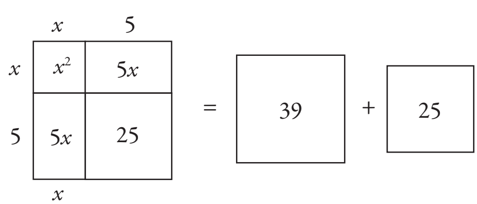


В таком случае головоломка аль-Хорезми сводится к вопросу: если г-образная фигура занимает 39 квадратных единиц площади, то каким должен быть x?



$$x^2 + 10x = 39$$

Изображение само по себе неуклонно подталкивает к следующему шагу. Посмотрите на пустой угол. Если бы он был заполнен, то г-образная фигура превратилась бы в идеальный квадрат. Учтем это наблюдение и заполним квадрат.



$$(x + 5)^2 = 64$$

Помещение в пустой угол квадрата 5 × 5 добавляет 25 квадратных единиц к уже существующей площади $x^2 + 10x$ и в общей сложности дает $x^2 + 10x + 25$. Это равносильно выражению общей площади в виде $(x + 5)^2$, так как каждая сторона заполненной площади равна $x + 5$ единиц.

Между тем, поскольку мы добавили 25 единиц к левой части уравнения $x^2 + 10x = 39$, для сохранения баланса следует добавить 25 и к его правой части. Так как 39 + 25 = 64, то наше уравнение превращается в

$$(x + 5)^2 = 64.$$

Это уравнение наверняка решаемо. Вычисляя квадратные корни из его обеих частей, получаем $x + 5 = 8$ и, следовательно, $x = 3$.

Число 3 действительно является корнем уравнения $x^2 + 10x = 39$. Если возвести 3 в квадрат, получится 9, а затем добавить 10 раз по 3 (выйдет 30), то общая сумма составит 39, что и требовалось доказать.

В этом решении есть одна загвоздка. Если бы аль-Хорезми занимался алгеброй сейчас, то он не получил бы «полного доверия» к такому ответу, так как не упомянул, что отрицательное число $x = -13$ тоже является корнем. Возведение его в квадрат дает 169, умножение на 10 даст −130, а их сумма составит 39. Но это отрицательное решение в древние времена было бы проигнорировано, поскольку квадрат со стороной отрицательной длины геометрически не имеет смысла. Сегодня алгебра меньше обязана геометрии, и мы считаем положительные и отрицательные решения одинаково правильными.

Только спустя несколько столетий после смерти аль-Хорезми ученые пришли к пониманию, что все квадратные уравнения могут решаться аналогичным способом — путем заполнения квадратов до тех пор, пока они склонны это позволять отрицательным числам (и их квадратным корням), которые часто встречаются в ответах. Такая линия аргументации выявляет, что решения любых квадратных уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(где *a, b, c* — известные, но произвольные числа, а *x* — неизвестная) могут быть представлены в виде формулы для вычисления их корней

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Что такого примечательного в этой формуле и насколько она точна и всеобъемлюща? Ответы находятся прямо в ней: она работает при любых коэффициентах *a*, *b* и *c*. Учитывая наличие бесконечного множества возможных вариантов значений каждого из них, для одной формулы это уже немало.

В наше время квадратные уравнения стали незаменимым инструментом для практического применения. Инженеры и ученые используют их для настройки радиоаппаратуры, анализа вибрации пешеходных мостов и небоскребов, расчетов движения пушечного ядра, снижения и роста популяции животных и бесчисленного множества других явлений реального мира.

Для формулы, родившейся тринадцать веков назад, это совсем немало.

Инструменты силы 11

Если вы были страстным любителем телевидения в 1980-х, то, конечно, помните сериал под названием «Детективное агентство “Лунный свет”» с живыми диалогами и романтическими отношениями между партнерами по фильму. В нем пару проницательных частных детективов Дэвида Эддисона и Мэдди Хэйс исполняли Брюс Уиллис и Сибилл Шепард.

В ходе расследования одного особенно жестокого дела Дэвид интересуется у помощника, кто ему кажется наиболее вероятным преступником. «Ума не приложу», — отвечает Мэдди. «А вы знаете, чего я не понимаю?» — спрашивает Дэвид. «Логарифмов?» — догадывается помощник. И Дэвид, реагируя на взгляд Мэдди, произносит: «А что? Вы их понимаете?»

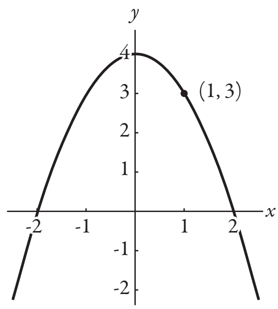
Это довольно точно отражает всеобщее отношение к логарифмам. Большинство людей после окончания средней школы их никогда уже больше не используют, по крайней мере осознанно, и не обращают внимания на логарифмы, скрывающиеся за кулисами повседневной жизни.

То же самое касается и многих других функций[39], рассматриваемых в высшей математике и началах анализа. Степенны́е функции, показательные функции — в чем их суть? В этой главе я хочу помочь вам по достоинству оценить их полезность, даже если вам никогда не приходилось нажимать на кнопки инженерного калькулятора.

Математику необходимы функции по той же причине, что и строителю молотки и сверла. Инструменты преобразовывают вещи. То же самое делают функции. Поэтому математики часто обращаются к ним для выполнения преобразований. Но вместо дерева и стали функции обрабатывают числа и графики, а порой и другие функции.

Чтобы понять, что я имею в виду, давайте построим график уравнения $y = 4 - x^2$. Возможно, вы помните, как это делается: сначала вы рисуете плоскость xy с горизонтальной осью x и вертикальной y. Затем для каждого значения x вычисляете соответствующее значение y; эта пара чисел является координатами одной точки графика на плоскости xy. Например, если $x = 1$, то уравнение говорит, что $y = 4 - 1^2 = 4 - 1 = 3$. Таким образом $(x, y) = (1, 3)$ координаты точки. После того как вы вычислите и построите еще несколько точек на плоскости, возникнет следующая картина.

У нас получилась изогнутая математическими плоскогубцами кривая. В уравнении для y функция, которая преобразует x в x^2, ведет себя подобно обычному инструменту для сгибания материала. Когда ее прикладывают к любой точке на оси x (прямую от точки x до точки x^2 можно представить в виде прямого куска проволоки), плоскогубцы изгибают и вытягивают этот кусок проволоки в направлении вниз так, чтобы получилась изогнутая арка, как показано на рисунке.



А какую роль играет число 4 в уравнении $y = 4 - x^2$? Это гвоздь, на который повесят картину на стену. Он поднимает изогнутые арки из проволоки на 4 единицы вверх. Так как при этом все точки кривой поднимаются на одинаковую высоту, то она считается *постоянной* функцией.

Данный пример иллюстрирует двойственный характер функций. С одной стороны, это инструменты: x^2 изгибает часть оси x, а 4 — ее лифт. С другой — строительные блоки: 4 и x^2 можно рассматривать как составные части более сложной функции $4 - x^2$, точно так же, как провода, аккумуляторы и транзисторы — составные части радиоприемника.

Как только вы начинаете смотреть на мир подобным образом, сразу же везде замечаете функции. Описанная выше в виде арки кривая, в математике называемая параболой, — это автограф, который дала квадратичная функция за кулисами. Ищите ее, когда любуетесь струями фонтана. И если вам доведется побывать в международном аэропорту Детройта, обязательно остановитесь у фонтана терминала Delta, чтобы насладиться потрясающими резвящимися параболами[40].

Параболы и константы ассоциируются с более широким классом функций — степенны́ми функциями вида x^n, в которых значение переменной x возводится в фиксированную степень n. Для параболы $n = 2$, для константы $n = 0$.

Разные значения n дают различные ручные инструменты. Например, возведение x в первую степень ($n = 1$) дает функцию, которая работает как пандус, отражая устойчивое увеличение роста или спада. Такая функция называется *линейной*, потому что ее графиком, построенным по точкам с координатами (x, y), является прямая линия. Если вы оставите на улице пустое ведро во время непрекращающегося ливня, то количество воды в нем будет расти линейно во времени.

Еще один полезный инструмент — обратно пропорциональная квадратичная функция $y = 1/x^2$, здесь $n = -2$. (Степень этой функции равна -2, так как x^2 стоит в знаменателе.) Эта функция хороша для описания затухания волн и ослабления сил в зависимости от расстояния x. Например, так затихает звук по мере удаления от источника.

Такие степенны́е функции служат строительными блоками, используемыми учеными и инженерами для описания роста и спада, которые происходят не слишком быстро. Но если нужен математический динамит, пора распаковать экспоненциальные функции. Они описывают все возможные быстропротекающие процессы — от цепных ядерных реакций до пролиферации бактерий в чашке Петри. Наиболее известный пример — функция $y = 10^x$, то есть 10 возведено в степень x. Не путайте ее с ранее рассмотренными степенны́ми функциями. Здесь показатель (степень x) является переменной, а основание (число 10) постоянной, тогда как в степенно́й функции, подобной x^2, все наоборот. Такая перемена мест (переменной и константы) приводит к огромной разнице между этими функциями: при увеличивающемся значении x экспоненциальная функция с показателем x в конечном итоге растет быстрее *любой* степенно́й функции, независимо от ее степени. Экспоненциальный рост — невообразимо быстрый рост.

Вот почему так трудно сложить лист бумаги пополам больше семи-восьми раз[41]. Каждое сложение листа удваивает его толщину, что приводит к ее (толщины) увеличению в геометрической прогрессии. В то же время длина, каждый раз сжимаясь пополам, *уменьшается* по экспоненциальному закону. После семи сложений толщина стандартного листа из записной книжки становится больше его длины, и поэтому дальше его складывать нельзя. Причем неважно, сколько усилий прикладывает человек при складывании. Предположим, лист можно сложить n раз — в результате стопка должна иметь 2^n слоев. Здесь не может быть линейной зависимости, и еще одно сложение невозможно, если толщина стопки больше ее длины.

Задача считалась нерешаемой, пока в 2002 году Бритни Галливан, ученица старшего класса средней школы, не доказала обратное. Сначала она вывела формулу

$$L = \frac{\pi T}{6}(2^n + 4)(2^n - 1),$$

которая позволяла посчитать максимальное количество сложений n, где T — толщина листа бумаги, L — его длина, и складывается он только в одном направлении. Обратите внимание на запрещающее присутствие экспоненциальной функции 2^n в двух местах: первый раз для учета удвоения толщины пачки при каждом сложении, а во второй — чтобы учесть двукратное сокращение ее длины.

Используя свою формулу, Бритни пришла к выводу, что ей понадобится специальный рулон туалетной бумаги почти в три четверти мили длиной. Она купила бумагу и в январе 2002 года отправилась в торговый центр в своем родном городе Помона, где и размотала ее. Семь часов спустя с помощью родителей девочка побила мировой рекорд, сложив бумагу двенадцать раз!

В теории также предполагается, что экспоненциальный рост увеличит ваш банковский счет. Если ваш вклад растет с годовой процентной ставкой, равной r, то через год сумма увеличится в $(1 + r)$ раз от первоначального размера вклада; после двух лет она вырастет в $(1 + r)^2$ раз, а после x лет — в $(1 + r)^x$ раз. Таким образом, чудо погашения долга*, о котором мы так часто слышим, вызвано действием экспоненциального роста.

С этого места можно вернуться к логарифмам. Мы нуждаемся в них потому, что полезно иметь инструменты, которые могут отменить действие других инструментов. Подобно тому как каждый служащий нуждается как в степлере, так и в антистеплере, каждый математик нуждается как в показательных (экспоненциальных) функциях, так и в логарифмах, поскольку они взаимообратны. Это означает, что если вы введете в калькулятор число x и нажмете кнопку «10^x», а затем кнопку «$\log x$», то в результате опять получите число x. Например, если $x = 2$, то 10^x составит 100. Взяв десятичный логарифм от 100, снова получим 2, так как log** $(100) = 2$. Кроме того, $\log(1000) = 3$, $\log(10\,000) = 4$, потому что $1000 = 10^3$, $10\,000 = 10^4$.

Обратите внимание, в этом есть что-то магическое: как только числа внутри логарифмов увеличиваются *мультипликативно* каждый раз с десятикратным увеличением от 100 до 1000 и до 10 000 (то есть умножаются на 10), их логарифмы растут аддитивно, увеличиваясь от 2 до 3 и до 4. Наш мозг выполняет подобный трюк, когда мы слушаем музыку. Частоты нот в музыкальной гамме — до, ре, ми, фа, соль, ля, си — становятся нам

* Здесь речь идет о том, что если процентная ставка депозита выше ставки по кредиту, то через несколько лет сумма на депозите может погасить сумму кредита. *Прим. ред.*

** Как правило логарифм по основанию 10 записывают как lg, но на калькуляторе кнопка «log *x*» обозначает десятичный логарифм. *Прим. ред.*

слышны благодаря увеличению высоты звука равными *интервалами*. Но объективно их частоты растут, умноженные на равные множители. Мы же воспринимаем расстояние между высотой звука в гаммах «логарифмически»[42].

Везде, где появляются логарифмы, — от шкалы Рихтера для определения магнитуды землетрясений до коэффициента кислотности pH, — они становятся замечательными «уплотнителями». Логарифмы идеально подходят для величин, изменяющихся в широком диапазоне, и сжимают их, чтобы они стали более управляемыми. Например, 100 и 100 000 000 отличаются в миллион раз — эту пропасть большинство из нас даже не может вообразить. Но их логарифмы разнятся всего в четыре раза (равны 2 и 8, так как $100 = 10^2$ и $100\,000\,000 = 10^8$). Когда мы разговариваем о заработной плате, то используем грубую версию логарифмической краткости, определяя заработную плату в интервале между 100 000 и 999 999 долларов шестью цифрами. Эта «шестерка» является приблизительным логарифмом этих сумм заработной платы, которые на самом деле находятся в диапазоне от 5 до 6.

Поскольку только инструменты математика могут сделать так впечатляюще много, как описанные функции, возможно, именно поэтому я до сих пор не собрал купленные книжные шкафы.

Часть III ФИГУРЫ

Танец квадратов 12

Спорим, я смогу угадать ваш любимый раздел математики в средней школе?

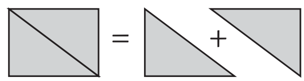
Это геометрия. Правильно?

Столько из встреченных мной за эти годы людей говорили мне о своей любви к этому предмету. Вместе с тем, скольких образно мыслящих людей, у которых лучше развито правое полушарие, используемое при занятиях геометрией, отпугнула ее холодная логика? Наверное, многих. Но некоторые признавались, что любят геометрию именно за ее *логичность*. Математическое доказательство каждой новой теоремы представляет собой цепочку логических следствий из уже ранее доказанных теорем. Таким образом, при доказательстве теоремы оно сводится к ранее доказанному, что для многих становится источником вдохновения.

Но лучшая моя догадка (и откровенное признание, почему лично я люблю геометрию) заключается в том, что люди наслаждаются этой наукой, потому что она *замужем* за логикой и интуицией. Она хорошо себя чувствует, когда мы используем оба полушария мозга.

Чтобы проиллюстрировать, какое удовольствие можно получить от геометрии, снова обратимся к теореме Пифагора, которую вы, наверное, помните в виде равенства $a^2 + b^2 = c^2$. Здесь я преследую две цели: убедиться, что она верна, и оценить ее значение. Помимо этого, рассмотрев два ее различных доказательства, мы сможем воочию убедиться, что они могут быть не только правильными, но и элегантными.

Теорема Пифагора относится к прямоугольному треугольнику, то есть к треугольнику, один из углов которого равен 90°. Такие треугольники интересны тем, что их можно получить, разрезав прямоугольник по диагонали на две равные части:

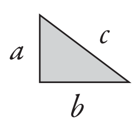


А так как в условиях различных задач прямоугольники не редкость, то, соответственно, и прямоугольные треугольники тоже. Например, они встречаются в геодезии.

Измеряя поле прямоугольной формы, вы, возможно, захотите узнать расстояние по диагонали от одного угла до противоположного. (Кстати, в начале своего существования геометрия применялась именно при измерении площади земельного участка, то есть в измерении земли: *geo* — земля, а *metr* — измерение.)

Теорема Пифагора[43] указывает, какова длина диагонали по сравнению со сторонами прямоугольника. Если одна сторона имеет длину a, а другая — b, то теорема утверждает, что длиной диагонали будет c, где

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



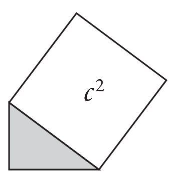
Почему-то самая длинная сторона прямоугольного треугольника называется гипотенузой[44], хотя я никогда не встречал никого, кто знает историю происхождения этого термина. (Может, какой-нибудь древнеримский или греческий ученый?)

Посмотрим, как работает теорема Пифагора. Для этого в выражение $a^2 + b^2 = c^2$ подставим числа. Пусть a = 3 ярдам и b = 4 ярдам. Тогда, чтобы определить неизвестную длину стороны c, мы надеваем черные капюшоны и читаем нараспев: c^2 — это сумма 3^2 и 4^2, что равно 9 и 16. (Имейте в виду, что все величины теперь измеряются в квадратных ярдах, так как мы возводим в квадрат не только сами числа, но и ярды.) Так как $9 + 16 = 25$, то $c^2 = 25$ квадратным ярдам. Далее извлекаем квадратные корни из обеих частей уравнения и получаем длину гипотенузы $c = 5$ ярдов.

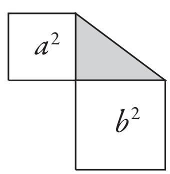
Такой подход к теореме Пифагора создает впечатление, что в ней говорится о длине сторон треугольника. Хотя традиционно считается, что в ней идет речь о *площадях*. Это становится очевидным, если посмотреть, как Пифагор ее сформулировал.

Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.

Обратите внимание на слова «построенный на». Мы не говорим о квадрате гипотенузы — это новомодная алгебраическая концепция об умножении длины гипотенузы саму на себя. Нет, мы здесь имеем в виду некий квадрат, «сидящий» на гипотенузе примерно вот так:

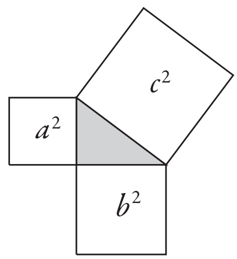


Давайте назовем его большим квадратом, чтобы отличить от малого и среднего, которые можно построить на двух других сторонах:



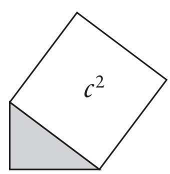
Теперь теорема утверждает, что большой квадрат имеет такую же площадь, как малый и средний, вместе взятые.

На протяжении тысяч лет этот чудесный факт подтверждался следующей диаграммой, представляющей мнемоническую символьную схему танца квадратов:



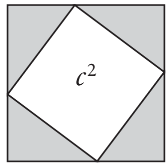
Рассматривать теорему с точки зрения площадей квадратов весьма приятно. Например, построив квадраты из множества маленьких крекеров[45], вы можете сначала эмпирическим путем проверить верность теоремы, а затем съесть их. Или можно представить теорему как детскую головоломку, состоящую из пазлов различной формы и размера. Путем их перестановки теорему очень легко доказать.

Давайте вернемся к наклоненному квадрату, сидящему на гипотенузе.

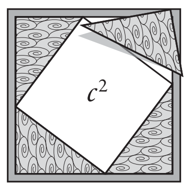


Интуитивно это изображение должно немного смущать. Квадрат выглядит потенциально нестабильным: кажется, что он может свалиться или съехать вниз по наклонной плоскости. А тут еще явное самоуправство: каждая из его четырех сторон хочет соприкасаться с треугольником.

Чтобы усмирить все стороны квадрата, поместим еще три таких же треугольника на три его оставшиеся стороны так, чтобы получилась более устойчивая и симметричная картинка.

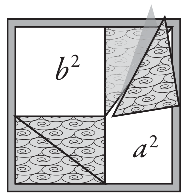


Теперь вспомним, что мы пытаемся доказать, что наклоненный белый квадрат (большой квадрат, все еще сидящий на гипотенузе) имеет такую же площадь, как малые и средние квадраты, вместе взятые. Но где же здесь другие квадраты? Чтобы найти их, надо переместить часть треугольников. Представьте картинку как изображение головоломки. В углах ее жесткой рамки вставлены четыре кусочка треугольной формы.



При такой интерпретации наклоненный квадрат будет свободным пространством в середине головоломки. Оставшуюся часть внутри рамки занимают пазлы. Попробуем их подвигать. Конечно, что бы мы ни делали, мы никогда не сможем изменить общую площадь свободного пространства внутри рамки — оно всегда будет областью, лежащей вне пазлов.

После небольшого мозгового штурма переставим пазлы таким образом:

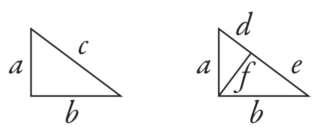


Пустое пространство неожиданно принимает форму среднего и малого квадрата, которые мы ищем. А так как общая площадь свободного пространства неизменна, вот мы и доказали теорему Пифагора!

Это доказательство дает гораздо больше, чем уверенность в правильности теоремы, — оно ее *разъясняет*. И именно это делает его элегантным.

Для сравнения рассмотрим еще одно доказательство. Не менее знаменитое, и, пожалуй, самое простое из тех, где не используются площади.

Как и прежде, возьмем прямоугольный треугольник со сторонами a, b и гипотенузой c, как показано ниже на рисунке слева.



Далее (как что-то подсказывает нам по божественному вдохновению или благодаря собственной гениальности) проведем перпендикуляр вниз от гипотенузы к противоположному углу, как это сделано в правом треугольнике.

Эта маленькая умная «бестия» внутри исходного треугольника создает еще два меньших треугольника. Легко доказать, что все они подобны, то есть у них одинаковая форма, но различные размеры. Что, в свою очередь, означает, что длина их соответствующих сторон имеет подобные пропорции. Это можно записать в виде следующей системы равенств:

$$\frac{a}{f} = \frac{b}{e} = \frac{c}{b} \text{ и } \frac{a}{d} = \frac{b}{f} = \frac{c}{a}.$$

Мы также знаем, что

$$c = d + e,$$

поскольку построенный перпендикуляр делит гипотенузу c на два меньших отрезка d и e.

В этот момент не стыдно немного растеряться или просто не знать, что делать дальше. Мы в трясине из пяти представленных выше равенств и пытаемся привести их к равенству

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Попробуйте сделать это за несколько минут. Вы обнаружите, что два равенства излишни. Следовательно, это неэлегантное доказательство. В изящном доказательстве не должно быть ничего лишнего. Конечно, все крепки задним умом, но ведь сначала мы ничего не знали об этих равенствах. Что, впрочем, не делает нашу мину при плохой игре лучше.

Тем не менее, манипулируя тремя «нелишними» равенствами, можно вывести требуемое соотношение. (См. пропущенные шаги доказательства в комментарии 46 в конце книги.)

Согласны ли вы с тем, что с эстетической точки зрения этот вариант уступает первому? Конечно, он приводит к доказательству. Но кто пригласил на вечеринку всю эту алгебру? Ведь это геометрическая теорема.

Однако более серьезный недостаток последнего доказательства — непрозрачность. К тому времени, когда вы закончите упорно продираться сквозь его дебри, может быть, скрепя сердце вы и поверите в верность теоремы, но все еще в этом *не убедитесь*.

Но оставим в стороне доказательства. Что вообще дает теорема Пифагора? Она выявляет фундаментальную истину о природе пространства, показывая, что оно плоское, а не изогнутое. Например, для поверхности шара или тора (фигура, похожая на бублик) подобную теорему придется изменить. Эйнштейн столкнулся с этим в своей общей теории относительности (где гравитация рассматривается не как сила, а как проявление искривления пространства), как и Георг Риман* и другие ученые в условиях, когда только закладывались основы неевклидовой геометрии.

От Пифагора до Эйнштейна пролегла долгая дорога. Но по крайней мере она прямая — свою бо́льшую часть.

---

* Георг Риман (1826–1866) — немецкий математик. Внес огромный вклад сразу в несколько разделов математической науки. Положил начало геометрическому направлению в теории аналитических функций, вместе с Огюстеном Коши сформулировал теорию интегралов. Развил комплексный анализ и теорию чисел. *Прим. перев.*

Кое-что из ничего 13

Любой курс математики содержит хотя бы одну заведомо трудную тему. В арифметике это деление в столбик. В алгебре — текстовые задачи. А в геометрии — доказательства.

Большинство учеников, изучающих геометрию, до этого никогда не сталкивались с доказательствами. И такая встреча может вызвать шок, поэтому здесь был бы уместен ярлычок со следующей надписью*: «Доказательства способны вызвать головокружение или чрезмерную сонливость. Побочные эффекты от длительного воздействия доказательств могут включать в себя ночную потливость, приступы паники и в редких случаях эйфорию. Прежде чем приступать к их изучению, проконсультируйтесь с врачом»*.

Умение приводить доказательства уже давно считается одним из ключевых для общего образования. И, по мнению некоторых, более существенным, чем сама геометрия. Хотя никто толком не понимает, как научиться их формулировать. Согласно этой точке зрения, геометрия хороша для развития умственных способностей, поскольку обучает нас думать четко и логично. Сюда не относится изучение треугольника, круга и параллельных линий как таковых. Важно само применение аксиоматического метода, представляющего собой процесс пошагового создания строгих аргументов до получения подтверждения искомого вывода.

Евклид[47] установил этот дедуктивный подход в своих «Началах» (в настоящее время наиболее часто перепечатываемый учебник всех времен) около 2300 лет назад. С тех пор евклидова геометрия стала моделью логического мышления во всех сферах жизни — от науки и философии до права и политики. Например, Исаак Ньютон применил метод Евклида в структуре своего шедевра «Математические начала натуральной философии». Используя геометрические доказательства, он вывел законы Галилея и Кеплера о движении летящих предметов и планет на основе их собственных глубинных законов движения и гравитации. «Этика» Спинозы* следует той же схеме. Полное название книги «Этика, доказанная в геометрическом порядке» (Ethica Ordine Geometrico Demonstrata). Вы можете услышать отголоски Евклида даже в Декларации независимости. Когда Томас Джефферсон[48] писал: «Мы считаем эти истины самоочевидными», он имитировал стиль «Начал» Евклида. Древнегреческий математик начал с определений, постулатов и самоочевидных истин геометрии, аксиом, и из них воздвиг здание утверждений и доказательств, где истины связаны между собой посредством неопровержимой логики. Джефферсон построил Декларацию аналогичным образом: его радикальные выводы о том, что колонии имеют право на самоуправление, казались неотвратимыми, как факт геометрии.

Даже если этот документ с некоторой натяжкой можно воспринимать как часть интеллектуального наследия, имейте все же в виду, что Джефферсон читал Евклида. Через несколько лет после окончания второго президентского срока он отошел от общественной жизни и писал об этом своему старому другу Джону Адамсу 12 января 1812 года: «Я отказался от газет в обмен на Тацита и Фукидида, Ньютона и Евклида, и считаю себя гораздо счастливее».

Однако всем поклонникам рациональности Евклида не хватает понимания интуитивных аспектов геометрии. Без вдохновения не было бы

* Бенедикт Спиноза (1632–1677) — нидерландский философ-материалист, натуралист, один из главных представителей философии Нового времени. Считал, что мир — закономерная система, которая до конца может быть познана геометрическим методом. *Прим. перев.*

никаких доказательств или теорем, которые следует доказать в первую очередь. Как и при сочинении музыки или стихов, в геометрии требуется получить что-то из ничего. Как поэту найти нужные слова или композитору — западающую в память мелодию? Это тайна музыки; своя тайна присуща и математике.

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу построения равностороннего треугольника. Правила игры заключаются в том, что вам дают одну сторону треугольника (отрезок), как показано на рисунке:

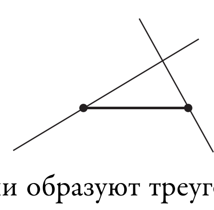
Ваша задача — найти способ использовать этот отрезок для построения двух других сторон и доказать, что у них такая же длина, как и у первой. Причем в вашем распоряжении только поверочная линейка и циркуль. Линейка позволяет начертить прямую линию любой длины или соединить прямой линией две любые точки. Циркуль помогает нарисовать окружность любого радиуса с центром в любой точке.

Однако имейте в виду, что это не обычная линейка: на ней нет делений и ее нельзя использовать для измерения длины. (Другими словами, она не подходит для копирования или измерения исходного отрезка.) Циркулем нельзя измерять углы, а можно только строить окружности.

Готовы? Поехали!

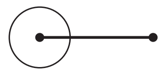
Вы в ступоре. С чего начать?

Логика здесь не поможет. Те, кому приходится часто принимать решения, знают, что в такой ситуации лучше всего расслабиться и попробовать разгадать головоломку в надежде, что что-нибудь придет в голову. Например, с помощью поверочной линейки попробовать через концы отрезка провести наклонные линии.



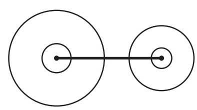
Не повезло. Хотя линии образуют треугольник, нет никакой гарантии, что он *равносторонний*.

Пытаемся провести несколько окружностей с помощью циркуля и опять попадаем пальцем в небо. Где выбрать центр окружности? В конечных точках отрезка?



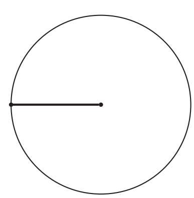
Или в какой-то его внутренней точке?

Второй вариант выглядит совершенно бесперспективным, поэтому нет смысла перебирать все внутренние точки отрезка одну за другой. Так что давайте вернемся к построению окружности вокруг конечных точек.

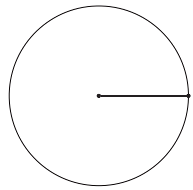


К сожалению, здесь много неопределенности. Какими должны быть радиусы окружностей? Что ж, пока мы ничего не смогли придумать.

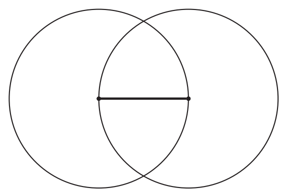
Спустя несколько минут бесполезных размышлений вы, окончательно расстроившись, готовы сдаться. Но если мы все-таки устоим перед соблазном и продолжим, то нам, возможно, повезет, и мы поймем, что нужно построить всего одну окружность. Давайте посмотрим, что произойдет, если поставить иголку циркуля на один конец отрезка, карандаш на другой, а потом сделать циркулем полный оборот. Выйдет следующее:



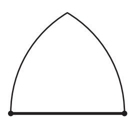
Конечно, если бы мы использовали в качестве центра окружности другую конечную точку, то получили бы другое изображение:



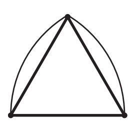
Как насчет того, чтобы одновременно нарисовать обе окружности без причины, просто ради интереса?



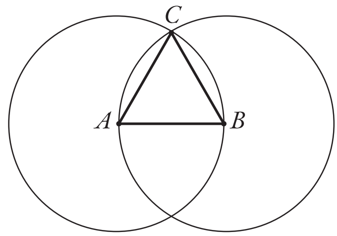
Вас словно током ударило? Вы даже задрожали от предвкушения? Взгляните еще раз на рисунок. Оттуда на нас «уставилось» соблазнительно округлое изображение равностороннего треугольника. Его верхний угол — точка пересечения окружностей.



А теперь давайте превратим его в обычный прямосторонний треугольник, проведя линии через точку пересечения и конечные точки исходного треугольника. В результате треугольник выглядит точно так же, как равносторонний.



Мы позволили интуиции завести нас так далеко, что теперь и только теперь наступило время логике взяться за доказательство и завершить его. Для наглядности сделаем панорамную съемку полного изображения и промаркируем интересующие нас точки как A, B и C.

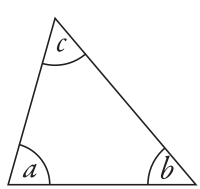


А вот и само доказательство. У сторон *AC* и *BC* такая же длина, как и у исходного отрезка *AB*, поскольку радиусы обеих окружностей равны длине отрезка *AB*. *AC* и *BC* — радиусы окружностей, имеющие такую же длину. Следовательно, все три длины равны и треугольник является равносторонним. Что и требовалось доказать.

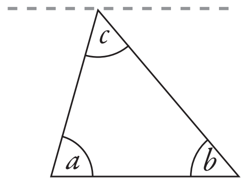
Идея с радиусами окружностей существует уже много столетий. Действительно, она открывает первую книгу евклидовых «Начал». Но укоренившаяся тенденция предлагать ученикам уже готовую окончательную схему с хитрыми окружностями лишает их радости открытия. Это педагогическая ошибка. Такой подход настраивает молодого человека на то, что идея очевидна. А ведь она может стать озарением для каждого нового поколения, если учить его правильно.

Конечно, ключом к данному доказательству было вдохновенное построение двух окружностей. С его помощью можно доказать еще одну, более известную теорему, которая звучит следующим образом: сумма углов треугольника равна 180°.

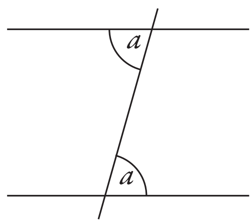
В этом случае лучшим будет не доказательство Евклида, а более раннее, приписываемое пифагорейцам. Делается это так. Рассмотрим любой треугольник и обозначим его углы, как *a*, *b* и *c*.



Через верхний угол треугольника проведем линию, параллельную основанию.

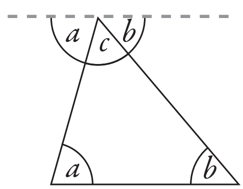


Теперь на секунду отвлечемся и вспомним свойства параллельных прямых: если третья прямая пересекает две параллельные прямые, как здесь,



то углы, помеченные как *a*, равны.

Попробуем применить это свойство углов к сделанным выше построениям, в которых через вершину угла треугольника проведена прямая, параллельная его основанию.



Построив внутренние накрест лежащие углы, мы видим, что угол слева от верхнего угла треугольника должен быть равен *a*. Аналогичным образом угол справа от верхнего угла равен *b*. Таким образом, вместе углы *a*, *b* и *c* образуют развернутый угол в 180°. Что и требовалось доказать.

Это одно из самых убедительных доказательств во всех разделах математики. Оно начинается со вспышки молнии, сопровождаемой раскатами грома, — построения параллельной прямой. Как только прямая линия проведена, доказательство, как создание доктора Франкенштейна, начинает гулять само по себе.

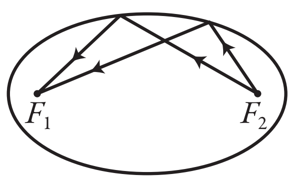
И кто знает? Если мы высветим эту другую сторону геометрии — занимательную и интуитивную, где искра воображения может быстро возгореться в доказательство, — то, может быть, ученики запомнят уроки геометрии как уроки, где они научились мыслить логически и творчески[49].

Конический заговор 14

Галереи шепота — это замечательные акустические пространства, обнаруженные под определенными куполами, сводами или сводчатыми потолками. Один из таких сводчатых потолков находится в вестибюле станции метро Grand Station в Нью-Йорке. Это прекрасное место для свиданий: вы можете обмениваться милыми глупостями, находясь на расстоянии сорока футов, разделенные шумным проходом, и будете четко слышать друг друга, а прохожие не услышат ни слова из того, что вы сказали.

Для получения такого эффекта двое должны стать на одной линии в противоположных углах помещения лицом к стене так, чтобы оказаться в геометрических фокусах звука, то есть в точках, в которых сосредотачивается звук, отражающийся от изогнутой стены прохода или потолка. Обычно звуковые волны распространяются во всех направлениях, хаотично отражаются от стен и так сильно перемешиваются, что становятся нераспознаваемы для уха слушателя, находящегося в сорока футах от вас (именно поэтому прохожие не слышат, что вы говорите). Но когда вы шепчете в *фокусе*, все отраженные волны *одновременно* прибывают в другой фокус, тем самым усиливая друг друга, благодаря чему ваши слова можно расслышать.

Эллипсы демонстрируют аналогичное чутье на фокус, хотя и в более простой форме. Если мы изобразим отражатель в виде эллипса, то две особые точки внутри него (отмеченные как F_1 и F_2 на рисунке ниже) будут фокусами, и все лучи, исходящие из источника света в одной из этих точек, отразятся в другой.

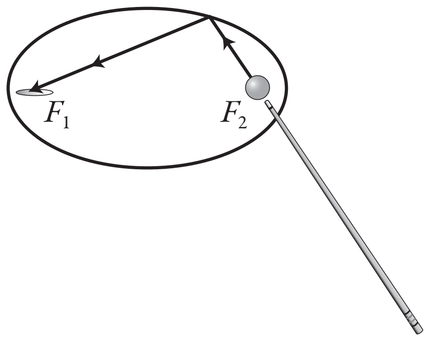


Я продемонстрирую удивительные свойства фокусов в эллипсах на двух примерах.

Предположим, что Дарт и Люк* занимаются стрельбой из лазеров на эллиптической арене с зеркальными стенами. Они договорились не целиться прямо друг в друга, а стрелять в противника дуплетом. Дарт не очень разбирается в геометрии и оптике и не замечает, что оба находятся в точках фокуса. «Хорошо, — говорит Люк, — только я буду стрелять первым». Но это совсем не похоже на дуэль, потому что Люк не может промахнуться! Куда бы он ни целился, он все равно попадет в Дарта. Каждый его выстрел победный.

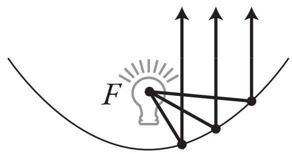
* Дарт Вейдер и Люк Скайуокер — персонажи культовой саги Джорджа Лукаса «Звездные войны». *Прим. перев.*

Если вы любитель поиграть в бильярдный пул, представьте себе, что играете в бильярд на эллиптическом столе с лузой в одном из фокусов. Чтобы направить кий для трюкового удара, который каждый раз гарантирует попадание, установите бильярдный шар в другом фокусе. Тогда, как бы вы ни ударили по шару и где бы он ни отскочил от стенки стола, он всегда угодит в лузу.



Параболические кривые и поверхности имеют другую поразительную способность — фокусировать параллельно входящие лучи в *одной* точке. Эта особенность их геометрии очень полезна в случае, если необходимо усилить световые или звуковые волны или другие сигналы. Например, параболические микрофоны могут использоваться для усиления приглушенных разговоров, в связи с чем представляют интерес для слежки, шпионажа и правоохранительных органов. Они также пригодятся для записи звуков природы: пения птиц, голосов животных, а во время телевизионной трансляции спортивных программ позволят услышать, как тренер ругает судей. Параболические антенны тоже способны усиливать радиоволны, поэтому телевизионные спутниковые тарелки и гигантские астрономические радиотелескопы имеют характерную изогнутую форму.

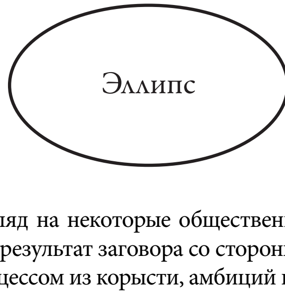
Фокусирующее свойство параболы не пропадает, если развернуть ее в противоположном направлении. Допустим, вы хотите получить в прожекторах и фарах автомобиля точно сфокусированные лучи света. Сами по себе лампочки, даже мощные, недостаточно хороши. Они расходуют слишком много световой энергии, рассеивая ее во всех направлениях. Местом, где лампы находятся в фокусе, является параболический отражатель фары, и — вуаля!— парабола автоматически создает направленный луч. Отражая лучи лампы от посеребренной внутренней поверхности фары, парабола все лучи делает параллельными.



Когда вы оцените фокусирующую способность парабол и эллипсов, то удивитесь, что среди всех геометрических фигур больше практически ни одна не обладает подобными свойствами. Не лежат ли в их основе какие-то фундаментальные закономерности?

У математиков и сторонников теории заговора* много общего: мы не доверяем совпадениям, особенно удачным. Отрицаем случайности. Все имеет свою причину. Применительно к реальной жизни такой способ мышления, возможно, кажется несколько параноидальным, но для математика он совершенно нормален. В идеальном мире чисел и фигур странные совпадения обычно *являются ключами* к тому, чего мы не замечаем, и свидетельствуют о наличии скрытых закономерностей.

Итак, рассмотрим более подробно возможную связь между параболами и эллипсами[50]. На первый взгляд, они не похожи. Параболы имеют форму арки, вытянутой на обоих концах. У эллипсов овальная форма, и они напоминают раздавленные окружности, замкнутые и ограниченные.

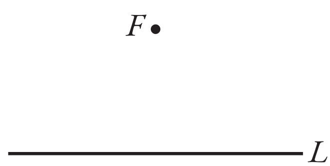


* Теория заговора — взгляд на некоторые общественно-значимые события или ход истории в целом как на результат заговора со стороны определенной группы людей, управляющих этим процессом из корысти, амбиций или иных интересов. *Прим. ред.*

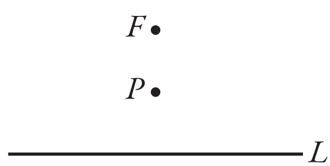
Но как только вы выйдете за рамки стандартных представлений и исследуете анатомию этих фигур, то заметите, насколько они похожи. Обе принадлежат к королевской семье кривых; генетическая связь между ними становится очевидной, когда понимаешь, куда нужно смотреть.

Чтобы объяснить, как они связаны между собой, необходимо вспомнить, что в точности означают эти кривые.

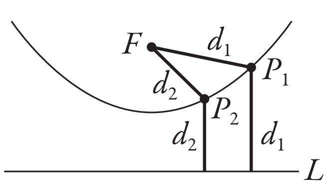
Парабола обычно определяется как множество всех точек, равноудаленных от данной точки и данной прямой, не содержащей эту точку. Это труднопостигаемое толкование, но его довольно легко понять, если представить следующую картинку, при этом обозначив данную точку F как фокус, а прямую как L.



В соответствии с определением парабола состоит из всех точек, которые лежат на одинаковом расстоянии от F и L. Например, точка P, находящаяся прямо под F на полпути к L, точно подходит под это определение.

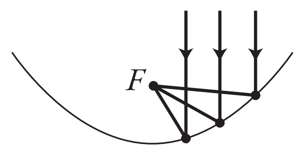


Бесконечное множество других точек P_1, P_2, ... тоже подходят под него, как показано ниже.



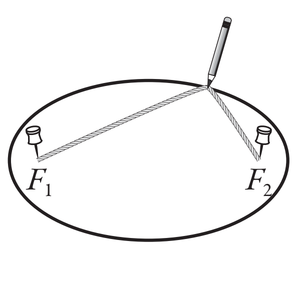
Точка P_1 расположена на одинаковом расстоянии d_1 от прямой и фокуса. То же самое верно и для точки P_2, но в этом случае имеется в виду некое расстояние d_2. Все точки P с таким свойством образуют данную параболу.

Почему мы считаем F фокусом, становится ясно, если представить параболу как кривое зеркало. Оказывается (хотя я не стану это доказывать), если направить луч света прямо на параболическое зеркало[51], все отраженные лучи пересекутся в одной точке F, создавая сильно сфокусированное пятно света.



По такому же принципу работали старые лампы для загара, под которыми предыдущее поколение жарилось в те далекие времена, когда никто не беспокоился о раке кожи.

Теперь давайте обратимся к эллипсу. Он определяется как множество точек, для которых сумма расстояний от двух данных точек является константой. Если перевести это на простой язык, получим инструкцию, как нарисовать эллипс. Возьмите ручку, лист бумаги, чертежную доску, две канцелярские кнопки и кусочек веревки. Положите бумагу на доску. Несильно ее натягивая, прикрепите к ней концы веревки канцелярскими кнопками. Затем зацепите веревку карандашом и натяните ее, образуя угол, как показано ниже. Когда начнете рисовать, следите за тем, чтобы веревка все время была натянута. Начинайте вести карандашом по бумаге вокруг кнопок и, сделав полный круг, получите эллипс.



Линия, полученная в результате, полностью соответствует определению эллипса. Кнопки играют роль двух заданных точек. А сумма расстояний от них до любой точки на кривой всегда постоянна независимо от положения карандаша, потому что неизменно совпадает с длиной веревки.

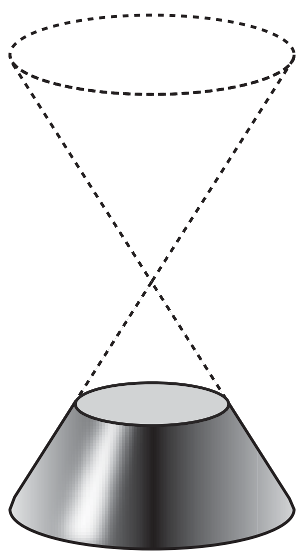
Где же в этой конструкции фокусы эллипса? Там, где находятся кнопки. Я не буду это доказывать, но именно фокусы позволяют Люку и Дарту все время попадать в противника и загоняют шар в лузу при игре в бильярд на эллиптическом столе.

Вопрос: почему именно параболы и эллипсы имеют такую фантастическую способность фокусировать? Каким секретом они обладают?

Ответ: оба представляют собой поперечные сечения конуса.

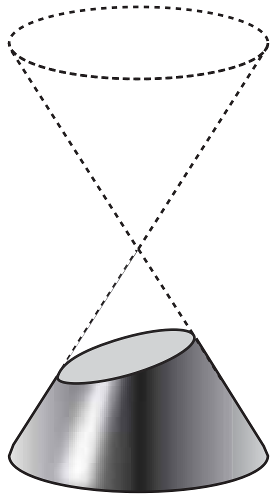
Конус? Вы, возможно, не понимаете, причем тут он, но это именно то, что нам нужно. Просто до сих пор роль конуса была скрыта от нас.

Чтобы понять, причем здесь конус, представьте себе, как вы разрубаете его тесаком для разделки мяса, как если бы наре́зали салями косо со все более увеличивающимся углом наклона ножа. Если конус разрезать горизонтально, то его сечением будет окружность.



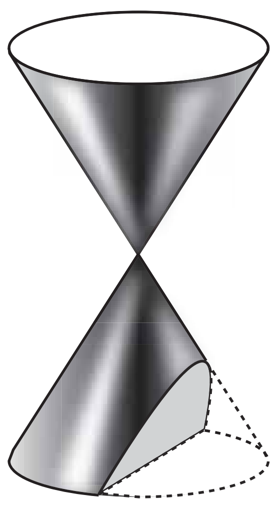
Окружность

Но если разрезать конус под небольшим наклоном, то его сечение из окружности превращается в эллипс.



Эллипс

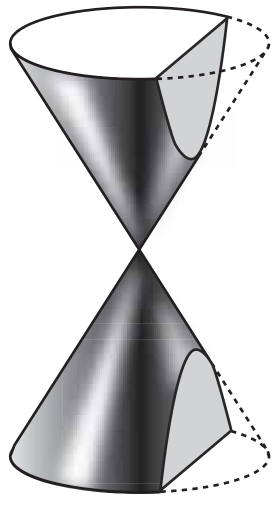
Чем больше угол наклона сечения, тем длиннее и тоньше пропорции эллипса. И при критическом угле, равном углу наклона образующей конуса, эллипс превращается в параболу.



Парабола

Так вот в чем секрет: парабола, в очень узком смысле, замаскировалась под эллипс. Неудивительно, что и она обладает чудесной способностью эллипса фокусировать. Это свойство по наследству передается из поколения в поколение от эллипсов к параболам.

На самом деле окружности, эллипсы и параболы — члены большой дружной семьи, известной под общим названием *конические сечения* — кривые, полученные путем разрезания поверхности конуса плоскостью. В семействе конических сечений есть еще одна сестра: если конус разрезается очень круто, под бóльшим углом, чем угол наклона образующей конуса, то сечением станет кривая, называемая *гиперболой*. В отличие от всех остальных кривых, эта состоит из двух ветвей.



Гипербола

Эти четыре типа кривых покажутся еще более тесно связанными, если посмотреть на них с точки зрения алгебры. В алгебре они представлены в виде графиков уравнений второй степени:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где константы A, B, C, ... определяют, будет ли графиком данной функции окружность, эллипс, парабола или гипербола.

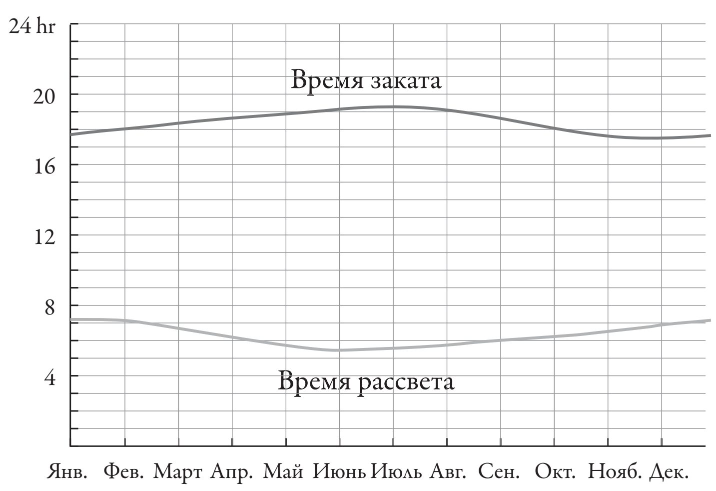
В расчетах эти кривые появляются при исследовании траекторий объектов, перемещающихся под воздействием силы тяжести. Поэтому совсем не случайно планеты солнечной системы движутся по эллиптическим орбитам с одним из фокусов в центре Солнца; кометы проходят через солнечную систему по эллиптической, параболической или гиперболической траектории; а брошенный ребенком мяч летит по параболической дуге. Все это подтверждает существование конического заговора.

Вспомните об этом, когда в следующий раз будете играть в мяч.

Непременное условие 15

Друг моего отца по имени Дэйв, выйдя на пенсию, поселился в городке Юпитер во Флориде. Когда мне было лет двенадцать, мы всей семьей гостили у него, и он показал нам то, что произвело на меня неизгладимое впечатление.

Дэйву нравилось составлять график времени наступления рассветов и закатов[52], которые он наблюдал в течение всего года. Каждый день он отмечал две точки на своем графике и после многих месяцев наблюдений заметил нечто любопытное. Эти две кривые выглядели как встречные волны. Когда одна из них поднималась, другая опускалась, а когда восход солнца наступал раньше, заходило оно позже.



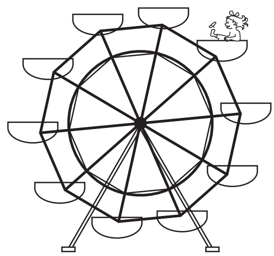
Но были и исключения. В последние три недели июня, большей части декабря и в начале января время наступления восхода и захода каждый день было одинаково более поздним, что придавало волнам слегка однобокий вид.

Тем не менее закономерность в поведении кривых казалась очевидной: изменение промежутка между ними показывало увеличение или уменьшение продолжительности дня в различные времена года. Путем вычитания значений нижней кривой из значений верхней Дэйв также выяснил, как в течение года меняется продолжительность светового дня. К его удивлению, в *этой* кривой вообще не было однобокости. Она выглядела абсолютно симметричной.

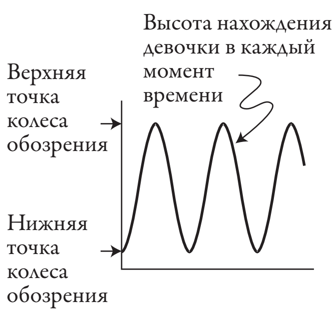
Он увидел почти идеальную синусоиду. Если вы проходили тригонометрию[53] в средней школе, то, возможно, помните, что рассказывали о ней. Хотя не исключено, что ваш учитель больше говорил о синусоиде как об основном инструменте количественного выражения отношения между сторонами и углами треугольника. Это исходные тригонометрические определения древних астрономов и геодезистов.

Тем не менее *три*гонометрия, опровергая свое слишком скромное название, в настоящее время выходит далеко за рамки измерения *тре*угольников. С помощью количественного описания круга она также проложила путь анализу всех повторяющихся с определенной частотой явлений — от океанских волн до волн головного мозга. Это ключ к математике циклов.

Чтобы увидеть, как тригонометрия соединяет круги, треугольники и волны, представьте, что маленькая девочка катается круг за кругом на колесе обозрения.

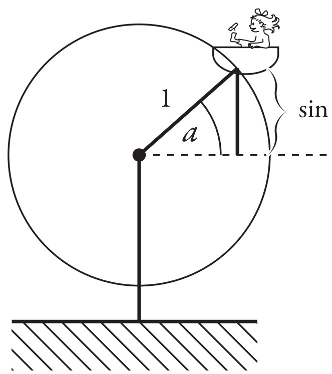


Оказывается, они с мамой интересуются математикой, поэтому решили, что такое катание — прекрасная возможность для эксперимента. Девочка взяла с собой GPS-навигатор, чтобы каждое мгновение регистрировать высоту, на которой находится: и в самой высокой точке, и при движении обратно вниз к земле, и снова, двигаясь вверх и вниз. Результаты выглядят следующим образом:



Это синусоида. Она возникает всякий раз, когда кто-нибудь или что-нибудь движется по горизонтали или вертикали и одновременно по кругу.

На уроках тригонометрии вы обсуждали, как синусоидальная волна связана с синусоидальной функцией? Ну, хорошо, допустим, мы рассматриваем снимок девочки. В запечатленный момент она находится под некоторым углом, назовем его *a,* по отношению к пунктирной линии на рисунке.



Отметим, что гипотенуза прямоугольного треугольника и радиус колеса обозрения имеют равную длину. Тогда sin *a* (читается синус *a*) показывает нам, на какой высоте находится девочка. Точнее, sin *a* определяется высотой, на которой она пребывает, измеренной от центра колеса с учетом того, что девочка находится под углом *a к пунктирной линии*.

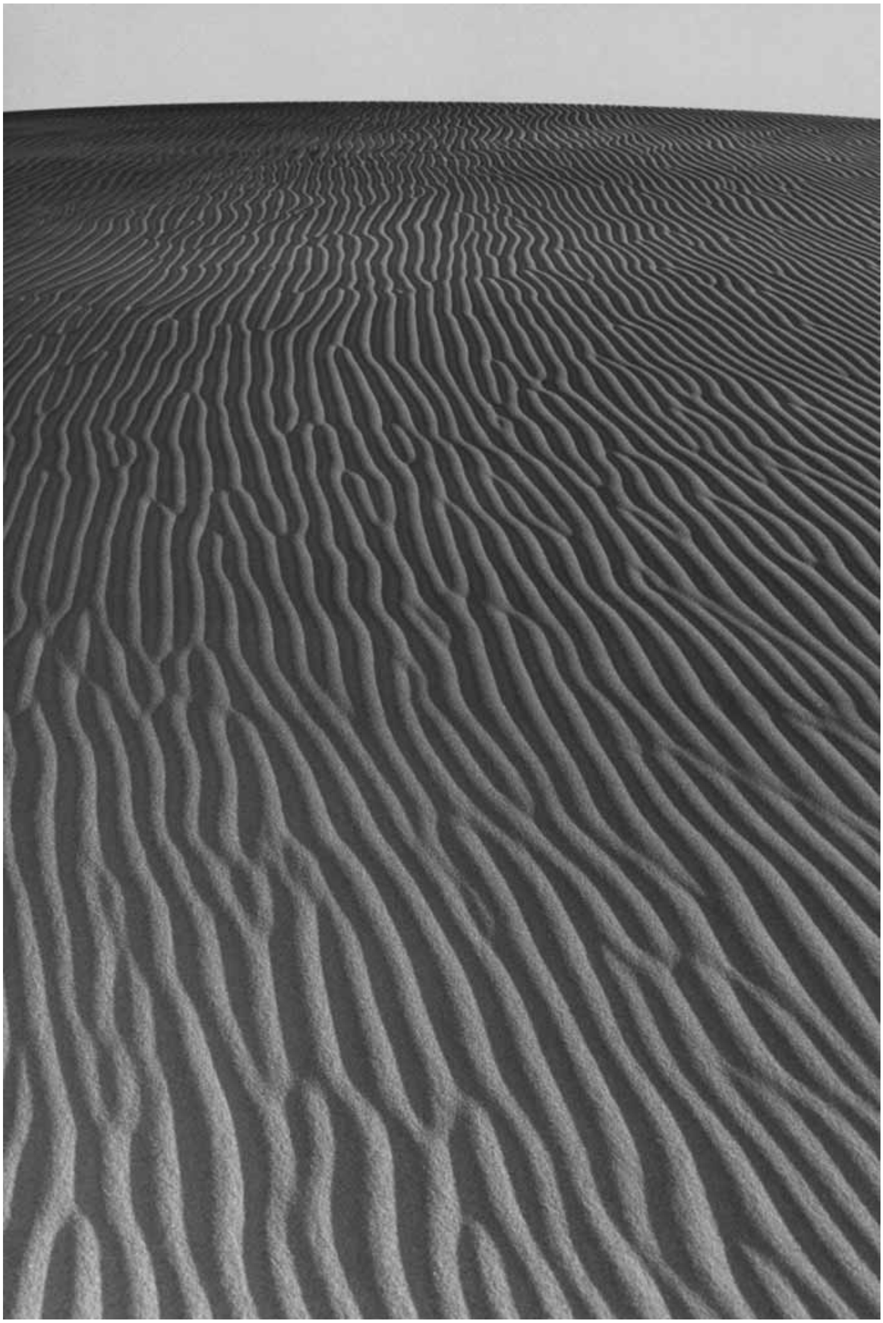
По мере вращения колеса обозрения угол *a* будет постепенно увеличиваться и в конце концов превысит 90°, и с этого момента мы больше не сможем его рассматривать как угол прямоугольного треугольника. Означает ли это, что тригонометрию далее нельзя применять?

Нет. Испугавшись, как обычно, математики просто расширили область определения синусоидальной функции до *любого* угла, а не только для углов менее 90°, а затем представили sin *a* как высоту расположения девочки выше или ниже центра круга.

График sin *a* продолжает расти, а затем убывать (и даже становится отрицательным) — это то, что мы подразумеваем под синусоидой. Такие колебания повторяются на протяжении каждых 360°, что соответствует полному обороту.

Такой способ трансформации кругового движения в синусоиду часто встречается в повседневной жизни, хотя не всегда заметен для нас. Гул люминесцентных ламп над головой в наших офисах напоминает, что где-то в энергосистеме генераторы вращаются со скоростью 60 оборотов в секунду, преобразуя свое вращательное движение в переменный ток, то есть в электрические синусоидальные волны, от которых во многом зависит современная жизнь. Когда вы говорите, а я вас слушаю, органы наших тел используют синусоиды: вашего — при генерации звука путем вибраций голосовых связок, а моего — посредством колебаний волосков в ушах, принимающих звуки голоса. Если мы откроем наши сердца этим синусоидам и настроимся на их молчаливый напев, то у них появится сила сдвинуть нас. В этом есть нечто мистическое.

Когда рвется гитарная струна или дети крутят скакалку — во всех этих случаях проявляются синусоиды. Круги на поверхности пруда, гребни дюн, полосы зебры — все это отражение основного механизма формирования закономерностей природы[54], появления синусоидальной структуры на основе повторяемости.



Эти явления обусловлены существованием глубинных математических механизмов. Всякий раз, когда по какой-то причине теряется устойчивость некоего состояния равновесия в физических, биологических или химических процессах, первыми появляются синусоиды или их сочетания.

Синусоиды — это атомы структуры. Они — блоки мироздания природы. Без них не было бы ничего, что придавало бы новый смысл латинскому выражению *sine qua non* — это «непременное условие».

Действительно, эти слова верны в буквальном смысле. Квантовая механика описывает реальные атомы и, следовательно, всю материю в виде волновых пакетов. Даже в космических масштабах синусоиды представляют собой семена всего сущего. Астрономы исследовали спектр (рисунок синусоидальных волн) космического микроволнового фонового излучения[55] и обнаружили, что эти измерения соответствуют предсказаниям инфляционной космологии[56] — одной из теорий рождения и развития Вселенной. Таким образом, похоже, изначальная синусоида, волнистость в плотности материи и энергии, возникла без Большого взрыва, спонтанно, и породила материю космоса — а также звезды, галактики. И в конечном счете, маленьких детей, катающихся на колесе обозрения.

Идти до предела 16

В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ мы с друзьями обожали разгадывать классические головоломки. Что произойдет, если непреодолимая сила встретит неподвижный объект? Легко! Они взрываются. Обычная философия для тринадцати лет.

Но одна загадка долго волновала нас. Если вы продолжаете двигаться, находясь на полпути к стене, вы когда-нибудь до нее дойдете? Как-то очень грустно было думать, что ты все ближе и ближе к цели и все же никогда до нее не доберешься. (Наверное, это и есть метафора подростковой тоски по необъяснимому.) Еще одной проблемой было завуалированное присутствие бесконечности. Чтобы добраться до этой стены, следовало сделать бесконечное число шагов, и в конце они были бы бесконечно малой длины. Ух ты!*

Вопросы, подобные этому, всегда вызывали головную боль. Около 500 года до н. э. Зенон Элейский[57] сформулировал четыре парадокса бесконечности, которые озадачили его современников, что, возможно, отчасти послужило причиной изгнания данного понятия из математики

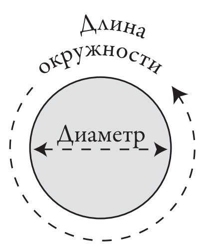
* Здесь описана одна из апорий Зенона, которая называется «Ахиллес и черепаха». Допустим, Ахиллес бежит в десять раз быстрее черепахи и находится позади нее на расстоянии в тысячу шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха в ту же сторону проползет сто шагов. Когда Ахиллес пробежит сто шагов, черепаха проползет еще десять шагов, и т.д. Процесс будет продолжаться до бесконечности, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху. *Прим. ред.*

на столетия. Например, в евклидовой геометрии рассматривалось только конечное число шагов. Считалось, что бесконечность неопределенна и непознаваема, и ее трудно сделать логически упорядоченной.

Но Архимед, величайший математик античности, осознал мощь бесконечности. Он заставил ее решать задачи, которые в противном случае были бы нерешаемы, и в процессе движения к бесконечности приблизился к изобретению интегрального исчисления — почти за 2000 лет до Ньютона и Лейбница.

В следующих главах мы рассмотрим великие идеи, лежащие в основе исчисления бесконечно малых. Но сейчас я хотел бы начать с первой из красивых идей, встречающихся у древних при вычислении площади круга и числа π.[58]

Давайте вспомним, что мы подразумеваем под «пи». Это отношение двух расстояний, где одно — диаметр (отрезок между наиболее удаленными точками окружности, проходящий через ее центр), а другое — длина окружности. «Пи» (π) определяется как отношение длины окружности к ее диаметру.



Если вы вдумчивый исследователь, то вас уже кое-что должно насторожить. Откуда мы знаем, что π имеет одинаковое значение для любых окружностей? Может быть, оно различно для больших и маленьких кругов? Ответ на этот вопрос отрицательный, но его доказательство не тривиально. Вот вам интуитивный аргумент.

Представьте, что с помощью ксерокса вы уменьшаете изображение круга, скажем, на 50%. Тогда *все* расстояния на рисунке, в том числе длина окружности и ее диаметр, тоже уменьшатся на 50%. Итак, когда вы разделите длину новой окружности на ее диаметр, уменьшение на 50%

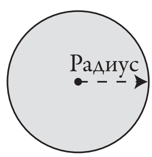
нейтрализуется, и их соотношение останется неизменным. Оно и составляет π.

Конечно, здесь мы не сможем узнать величину π. Простые эксперименты с веревкой и блюдом достаточно хороши, чтобы получить значение около 3 или, если вы хотите более точный результат, $3\frac{1}{7}$. Но, предположим, надо найти значение π точно или приближенно, но с любой желаемой точностью. Что тогда? Эта проблема приводила древних в замешательство.

Прежде чем перейти к блестящему решению Архимеда, я должен упомянуть еще об одном случае, когда π появляется в связи с кругами. Площадь круга (размер пространства внутри него) вычисляется по формуле

$$A = \pi r^2,$$

где A — площадь круга, π – греческая буква пи, а r — радиус окружности, определяемый как половина диаметра.



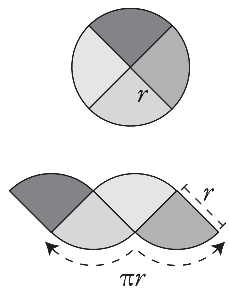
Все мы помним эту формулу из средней школы, но откуда она взялась? На уроках геометрии она обычно не доказывается. Если бы мы делали вычисления по ней, то, наверное, смогли бы найти доказательство. Но так ли уж необходимы вычисления, чтобы доказать ее?

Да, необходимы.

Задачу осложняет то, что эти фигуры имеют округлую форму. Если бы они были прямоугольными, проблемы бы не существовало. Найти площади треугольников и прямоугольников легко. А работать с такими изогнутыми формами, как круги, — трудно.

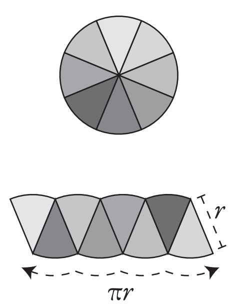
С математической точки зрения можно допустить, что изогнутая форма состоит из большого числа небольших прямоугольных отрезков. Это, конечно, не совсем так, но работает — при условии, что вы доведете их количество до предела, представив бесконечно много бесконечно малых частей. Это важнейшая идея всех вычислений.

Вот один из способов определить площадь круга. Начните с разбиения области на четыре равные части и переставьте их таким образом.



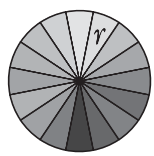
Странная форма с фестонами снизу имеет такую же площадь, как и круг, хотя это построение может показаться бесполезным, так как нам неизвестна площадь ее сегментов. Но по крайней мере мы знаем две важные вещи. Во-первых, две нижние дуги имеют общую длину, равную половине длины окружности исходного круга (потому что другая половина окружности приходится на две дуги сверху). Поскольку длина всей окружности в π раз больше диаметра, то ее половина в π раз больше половины диаметра, то есть радиуса r. Вот почему на рисунке показано, что πr — суммарная длина дуг фестонов в нижней части фигуры. Во-вторых, прямые стороны кусочков имеют длину r, так как каждая из них первоначально была радиусом окружности.

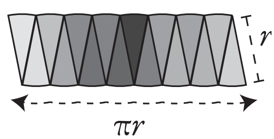
Далее повторим все описанные действия, но на этот раз уже с восемью отрезками круга.



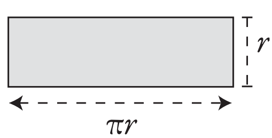
Теперь фигура приобрела менее странную форму. Дуги сверху и снизу по-прежнему существуют, но они не столь ярко выражены. Еще одно усовершенствование: левая и правая стороны изогнутой фигуры стали более вертикальными, чем раньше. Несмотря на все изменения, два факта остаются постоянными: дуги внизу по-прежнему имеют длину πr, а каждая сторона — длину r. И конечно, площадь фигуры та же — это площадь исходного круга, так как это просто фигура, составленная из восьми частей круга.

По мере увеличения числа отрезков происходит нечто чудесное: фестоны все больше и больше разглаживаются, превращая фигуру в прямоугольник. Дуги становятся более плоскими, а стороны — почти вертикальными.





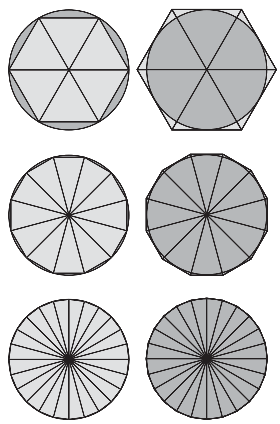
В пределе *бесконечно* большого числа частей фигура превратится в прямоугольник. Но, как и прежде, два факта все еще остаются неизменными: нижняя сторона прямоугольника равна πr, а высота — r.



Но теперь задача упростилась. Площадь прямоугольника равна его ширине, умноженной на высоту, то есть произведение πr и r дает площадь прямоугольника, равную πr^2. А так как у преобразованной фигуры такая же площадь, как и у исходного круга, то полученное значение является также и площадью круга!

В таких расчетах приятно то, что бесконечность приходит на помощь. В каждом отдельном шаге фигуры с фестонами выглядели странными и бесперспективными. Но когда вы доходите до ее предела, она становится простой и красивой, и все проясняется. Вот так работает исчисление бесконечно малых в своем лучшем проявлении.

Архимед использовал подобную стратегию, чтобы приблизиться к π. Он заменил круг на многогранник с прямыми сторонами, а затем удваивал их число, чтобы приблизиться к идеальной округлости. Но вместо того чтобы согласиться на приближение неопределенной точности, он методично ограничивал π, поместив круг между вписанными и описанными многоугольниками, как показано ниже, на 6-, 12- и 24-сторонних фигурах.



Затем с помощью теоремы Пифагора он выразил периметры этих внутренних и внешних многоугольников, начиная с шестигранника и далее для многоугольников с 12, 24, 48 сторонами, и в конечном итоге для 96-стороннего многоугольника. Формула для него позволила доказать, что

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

В десятичной системе счисления (которой у Архимеда не было) это означает, что π находится между 3,1408 и 3,1429.

Этот метод известен как метод исчерпывания[59], быть может, потому что неизвестные значения числа π загоняются между двумя известными числами, сжимающими его с двух сторон. Границы сужаются с каждым удвоением, тем самым исчерпывая возможности для маневра числа π.

В пределе бесконечно большого числа сторон многоугольников верхняя и нижняя границы неравенств будут сходиться к π. К сожалению, этот предел не такой простой, как у фигуры с фестонами, превратившейся в прямоугольник. Число π становится неуловимее, чем когда бы то ни было ранее[60]. В настоящее время посчитано его значение более чем с 2,7 триллиона знаков, но вы никогда не будете знать его точно.

Помимо того что Архимед заложил основу для интегрального исчисления, он показал нам силу пошагового приближения. Прошло более двух тысячелетий, и эта стратегия развилась в современных методах численного анализа[61]. Когда инженеры используют компьютеры для проектирования оптимально обтекаемого автомобиля или биофизики моделируют новый препарат химиотерапии в качестве защелки на раковую клетку, они используют численный анализ.

Математики и программисты, ставшие пионерами в области применения этого метода, создали высокоэффективные алгоритмы, которые можно выполнять миллиарды раз в секунду, что позволяет компьютерам решать задачи из всех областей современной жизни — от биотехнологий до Уолл-стрит и интернета. В каждом случае используется стратегия нахождения ряда приближений, сходящегося в пределе к правильному ответу.

И нет предела тому, где это можно применить.

Часть IV **ВРЕМЯ ПЕРЕМЕН**

Перемены, в которые мы можем поверить* 17

До того как я узнал, что такое исчисление**, я думал, что это что-то необыкновенное. Мой папа говорил о нем с благоговением. Будучи ребенком Великой депрессии, он не смог пойти учиться в колледж, но, возможно, во время пребывания в южной части Тихого океана, ремонтируя двигатели бомбардировщика B-24, он ощутил, на что способно исчисление. Представьте себе несколько зениток с механическим управлением, ведущих автоматический огонь по заходящим на цель истребителям врага. Отец знал, что исчисление здесь использовалось для прицеливания орудий.

Каждый год около миллиона американских студентов проходят курс исчисления[62]. Но мало кто из них действительно понимает, о чем вообще этот курс, или может объяснить, зачем он нужен. Это не их вина. В этом

* «Перемены, в которые мы можем поверить» (англ. Change We Can Believe In) — лозунг предвыборной кампании Барака Обамы. *Прим. перев.*

** В русском языке слово «исчисление» без соответствующих прилагательных почти не применяется, а с прилагательными это интегральное и дифференциальное исчисление или исчисление бесконечно малых. Вместе с тем в большинстве словарей исчисление определяется как формальный аппарат, система правил оперирования со знаками. В английском языке слово calculus (исчисление) понимается именно в таком расширенном толковании как «система правил…». Если у кого-то из читателей слово «исчисление» (без прилагательных) будет вызывать удивление или неприятие, то его можно мысленно заменять на «математический анализ». В данной главе при упоминании исчисления в основном подразумевается дифференциальное исчисление. *Прим. ред.*

курсе изучается так много методов, которые следует освоить, и так много новых идей, которые необходимо впитать, что легко пропустить общие положения.

Исчисление функций и интегралов* — это математика перемен. Она описывает все — от распространения эпидемий до зигзагов крученого мяча в бейсболе. Этот предмет охватывает большой объем материала, и учебники по размеру соответствующие. Многие превышают тысячу страниц, и работать с ними так же приятно, как открывать дверь с дверной пружиной.

Но в этом объемистом фолианте вы обнаружите две идеи, просвечивающие сквозь толщу материала. Все остальное, как любил повторять золотое правило рабби Гиллель, просто комментарии. Эти две идеи — производная и интеграл. Каждая доминирует в своей области исчислений, названных в их честь: дифференциальное и интегральное исчисления.

Грубо говоря, производная расскажет вам, как быстро что-то меняется, а интеграл — сколько это «что-то» накопит. Они родились в разное время и в разных местах: интегралы в Греции около 250 года до н. э., производные — в Англии и Германии в середине XVII века. Тем не менее (поворот в духе романов Диккенса) они оказались кровными родственниками, хотя ученым и потребовалось более двух тысячелетий, чтобы заметить это родство.

В следующей главе мы исследуем столь удивительную связь и понятие интеграла. Но сначала, в рамках подготовительной работы, рассмотрим производные.

Производные существуют вокруг нас, даже если мы не считаем их таковыми. Например, наклон трапа является производной. Как и все производные, он измеряет скорость изменения. В данном случае — на какую высоту за шаг вы поднимаетесь или спускаетесь. Крутой подъем имеет бóльшую производную. У наклона инвалидной коляски с незначительным перепадом она маленькая.

* То есть дифференциальное и интегральное исчисление. *Прим. ред.*

В каждой области практической деятельности есть собственный вариант производной. Будет ли она предельным доходом или темпом роста, скоростью или наклоном — от любого ее названия по-прежнему веет холодком. К сожалению, многие студенты, прослушав курс дифференциального исчисления, приходят к гораздо более узкому толкованию производной как синонима наклона кривой.

Такая путаница понятна и вызвана она тем, что для отображения количественных отношений мы, как правило, применяем графики. Путем графического изображения y как функции от x мы пытаемся представить, как одна переменная влияет на другую. И при этом совершенно не важно, что понимается под скоростью изменения значений на графике. Это могут быть темпы роста вирусов, скорость струи или нечто, что преобразуется в нечто другое, столь же абстрактное, но что можно изобразить как наклон кривой на графике.

Как и наклоны, производные могут быть положительными, отрицательными или равными 0, что указывает на то, что нечто увеличивается, уменьшается или выравнивается. Рассмотрим летящего по воздуху Майкла Джордана, зависшего над корзиной за секунду до одного из своих феноменальных бросков.

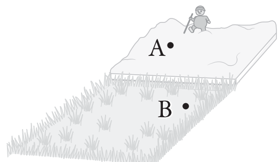
Сразу после прыжка его вертикальная скорость (скорость его подъема, изменяющаяся во времени [кстати, еще одна производная]) будет положительной, потому что он поднимается вверх. Высота подъема спортсмена растет. На пути вниз эта производная отрицательная. В самой верхней точке прыжка, где кажется, что Джордан завис в воздухе, а его подъем прекратился, производная равна 0. В этом смысле он *действительно* висит.

Здесь действует еще один общий принцип: предметы всегда изменяются медленнее в верхней и нижней точках. В Итаке это особенно заметно. В самое темное время зимы дни не только нещадно коротки, но и очень медленно растет продолжительность светового дня. Как только начинается весна, дни быстро удлиняются. Все это вполне объяснимо. Изменения наиболее вялые в крайних точках именно потому, что производная в них равна нулю. В этом случае процессы моментально успокаиваются.

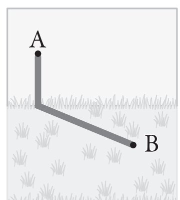
Это свойство нулевой производной проявляется на пиках и во впадинах и лежит в основе ряда практичных способов применения производных, позволяющих выяснить, где функция достигает своего максимума или минимума. Вопрос о максимуме или минимуме возникает, когда мы ищем самый лучший, или самый дешевый, или самый быстрый способ сделать что-либо.

Господин Жоффрей, мой школьный учитель, который вел у нас вводный курс исчислений[63], умел талантливо преподнести нам условие задач на определение максимума и минимума. Однажды он быстро вбежал в класс и начал рассказывать о своем путешествии через заснеженное поле. Видимо, ветер в одном месте поля намел много снега, покрыв его тяжелым покрывалом, из-за чего учителю пришлось идти гораздо медленнее, а остальная часть поля была чистой, и он шагал по нему легко.

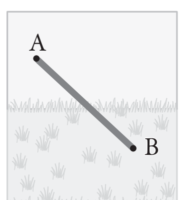
В этой ситуации он спросил себя, по какому пути должен идти пешеход, чтобы добраться из пункта A в пункт B как можно быстрее.



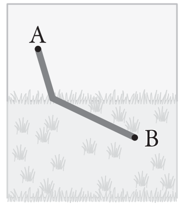
Кто-то думал, что нужно тащиться прямо через глубокий снег, чтобы сократить медленную часть пути. Однако в этом случае оставшаяся часть пути заняла бы больше времени.



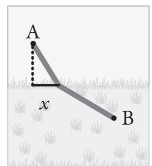
Еще одна стратегия заключалась в том, чтобы идти по прямой от A к B. Это определенно кратчайшее расстояние, но на преодоление его самой трудной части уйдет больше времени.



Оптимальный путь можно найти с помощью дифференциального исчисления. Это некий компромисс между перечисленными вариантами.



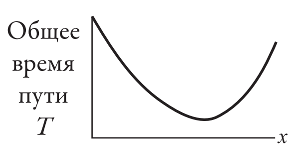
Анализ включает в себя четыре основных этапа. *Во-первых*, обратите внимание, что общее время в пути, которое мы пытаемся свести к минимуму, зависит от того, где пешеход выбирается из снега. Он может выйти в любом месте, поэтому обозначим как переменную x все возможные точки выхода.



(Ясно, что время в пути зависит также от расположения точек A и B и скорости пешехода в обеих частях поля, но эти параметры заданы. Под контролем пешехода остается только x.)

Во-вторых, с учетом выбора x и известных значений — точки отправления A и пункта назначения B — мы можем вычислить, сколько времени тратит пешеход на путь по быстрой и медленной части поля. Для расчета каждого этапа пути потребуются теорема Пифагора и старая алгебраическая мантра «расстояние равно скорости, умноженной на время». Суммируя пути, проделанные по легкому и трудному участкам, получим формулу для всего времени T пути как функцию от x.

В-третьих, изобразим график зависимости T от x. В нижней части кривой находится точка, которую мы ищем, соответствующая наименьшему времени пути и, следовательно, самому короткому.



В-четвертых, чтобы найти эту самую нижнюю точку, мы взываем к нулевой производной в соответствии с упомянутым выше принципом. Вычисляем производную от T по x, приравниваем ее к нулю и находим x.

Эти четыре шага требуют знания геометрии, алгебры, а также формул вычисления производных — эти навыки приравниваются к свободному владению иностранным языком, поэтому являются камнем преткновения для многих студентов.

Но окончательный ответ стоит затраченных трудов. Он показывает, что самый быстрый путь подчиняется отношению, известному как закон Снелла. Что? Страшно, что не только свет повинуется этому закону?

Закон Снелла[64] описывает, как преломляются лучи света при переходе из воздуха в воду. Например, когда лучи солнца попадают в бассейн. Свет в воде движется медленнее, так же как и пешеход по снегу, и отклоняется таким образом, чтобы минимизировать время движения. Подобным способом свет преломляется, когда переходит из воздуха в стекло или пластик, что происходит в линзах ваших очков.

Пугает то, что свет ведет себя так, будто он осмысленно изучает все возможные пути[65], а затем выбирает лучший.

Хоть ломтиками, хоть кубиками* 18

Математические знаки и символы часто кажутся загадочными, но лучшие из них — это визуальные ключи к их значениям. Символы нуля, единицы и бесконечности очень напоминают пустую дыру, единичную отметку и бесконечную петлю: 0, 1, ∞. А знак равенства = образован двумя параллельными линиями, поскольку, как писал его создатель валлийский математик Роберт Рекорд, в 1557 году: «Больше не существует двух вещей, которые были бы настолько равными».

В исчислениях самый узнаваемый значок — интеграл ∫. Его изящные линии вызывают в памяти музыкальный ключ или резонаторное отверстие скрипки — подходящее совпадение, учитывая то, что некоторые из очаровательных гармоник в математике выражаются интегралами. Но настоящая причина того, что математик Готфрид Лейбниц выбрал именно этот символ, менее поэтична. Это просто буква S для обозначения суммирования, но с длинной шеей.

А что суммируется — зависит от контекста. В астрономии сила притяжения Земли к Солнцу описывается интегралом. Она представляет собой общее воздействие (то есть сумму) всех сил гравитации,

* Хоть ломтиками, хоть кубиками (It Slices, It Dices) — это выражение было слоганом рекламной кампании на телевидении одного из первых (если не первого) кухонных комбайнов торговой марки Veg-O-Matic, выпущенного в 1961 году. Комбайн мог измельчать продукты в виде ломтиков и кубиков. Позже это выражение вошло в обиход в значении «быть многофункциональным». *Прим. перев.*

порождаемых каждым атомом Солнца на различных расстояниях от Земли. В онкологии растущая масса опухоли может быть смоделирована с помощью интеграла[66]. Он позволяет определить общее количество вводимого при химиотерапии лекарственного средства.

Понимание того, почему в этих случаях требуется интегральное исчисление, а не обычное суммирование, мы получили в начальной школе. Давайте рассмотрим, с какими трудностями мы столкнулись бы, если бы действительно пытались вычислить силу притяжения Земли к Солнцу. Первая трудность заключается в том, что ни Солнце, ни Земля не являются точками. Это гигантские шары, состоящие из колоссального числа атомов. Каждый атом Солнца — это нечто вроде гравитационного буксира для каждого атома Земли. Поскольку атомы крошечные, то их взаимное притяжение почти бесконечно мало, но их бесконечно много и в совокупности они могут составлять ощутимую силу. И надо каким-то образом просуммировать все их воздействия.

Но есть и вторая, более серьезная трудность: притяжение различных пар атомов различно. Для одних оно сильнее, чем для других. Почему? Потому что сила притяжения *меняется* в зависимости от расстояния: чем ближе объекты, тем сильнее они притягиваются. Атомы самых удаленных друг от друга частей Солнца и Земли испытывают наименьшее притяжение; атомы, находящиеся близко друг к другу, притягиваются сильнее, а те, которые между ними, испытывают среднее по силе притяжение. Интегральное исчисление позволяет просуммировать все эти изменяющиеся силы. Удивительно, но это можно осуществить по крайней мере в идеализированной модели, если считать Землю и Солнце твердыми шарами, состоящими из бесконечного числа точек непрерывной материи, причем каждая из этих точек оказывает бесконечно малое воздействие на другие. Как и во всех исчислениях, бесконечность и пределы, на помощь!

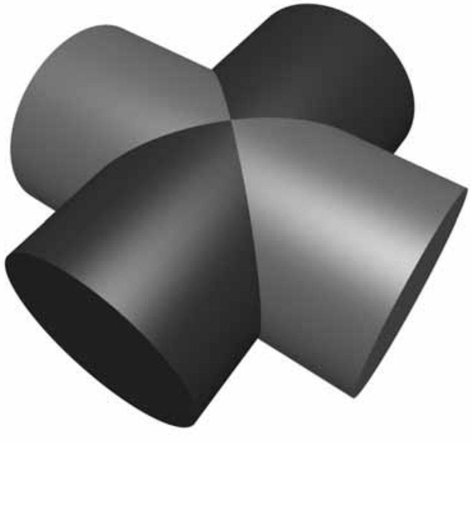
Исторически интеграл сначала появился в геометрии для нахождения площадей криволинейных фигур. Площадь круга можно представить как сумму множества тонких ломтиков пирога. В пределе имеем бесконечное множество кусочков, каждый из которых бесконечно тонкий.

Эти кусочки затем можно ловко перестроить в прямоугольник, площадь которого нетрудно найти. Это типичный пример использования интеграла. Идея интегрирования заключается в том, чтобы взять что-то сложное, нарезать его на кусочки и перетасовать так, чтобы было легко складывать.

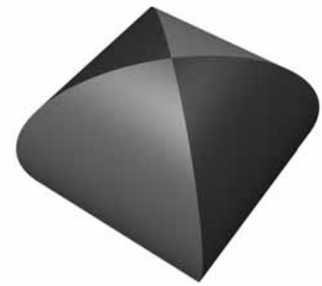
В трехмерном обобщении этого метода Архимед (а около 400 года до н. э. и Евдокс) рассчитывал объемы различных фигур путем их представления в виде стопки множества пластин или дисков, подобной порезанной на тонкие кусочки колбасе. Посчитав объемы различных ломтиков и гениально проинтегрировав их, Архимед и Евдокс получали полный объем исходной фигуры.

Сегодня будущим математикам и ученым по-прежнему даются в качестве упражнений классические геометрические задачи, требующие решения с помощью интегралов. Это одни из самых сложных в процессе обучения упражнений, и многие студенты ненавидят их. Но нет более верного способа отточить навыки работы с интегралами, которые понадобятся в любой области, где используются количественные вычисления, — от физики до финансирования.

Одна из таких мозгодробительных задач — вычисление объема твердого тела, которое является общей частью двух одинаковых цилиндров[67], пересекающихся под прямым углом.

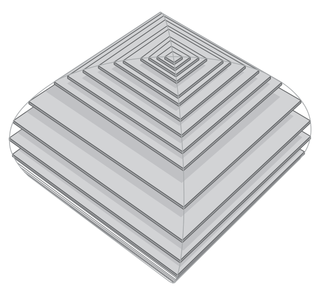


Требуется очень богатое воображение, чтобы представить себе эту трехмерную фигуру. Поэтому нет ничего постыдного в том, чтобы признать свое поражение и отыскать другой способ ее визуализации. В настоящее время компьютерная графика[68] позволяет легко воспроизвести подобные фигуры*.



Примечательно, что фигура имеет квадратное поперечное сечение, несмотря на то что является пересечением круглых цилиндров.

Сделаем стопку из бесконечного множества тонюсеньких квадратов, которая сужается от большого квадрата в середине фигуры до все более маленьких квадратиков и превращается в точку вверху и внизу.



Изобразить фигуру — всего лишь первый шаг. Для определения ее объема надо вычислить объемы всех отдельных составляющих ее кусочков. Архимеду удалось это сделать только в силу своей поразительной изобретательности[69]. Он использовал механический метод, основанный

* Обращаем ваше внимание на то, что на этом рисунке изображена только половина тела пересечения. *Прим. ред.*

на рычаге и центрах тяжести, по сути, взвешивая фигуру в своем сознании, уравновешивая ее другими, уже ему известными. Недостатком его подхода, помимо того что он требовал гениальных способностей, было то, что его можно было применить только к очень ограниченному числу фигур.

Концептуальные проблемы, подобные этой, ставили в тупик лучших математиков в течение следующих девятнадцати веков — до середины XVII столетия, когда Джеймс Грегори, Исаак Барроу, Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц обосновали то, что сейчас называется фундаментальной теоремой интегрального исчисления[70]. Она мощно сковала два типа изменений, которые изучаются в исчислениях: накапливаемые изменения, представленные интегралами, и локальные изменения, представленные производными (см. главу 17). Выявив эти связи, основная теорема значительно расширила вселенную интегралов и уменьшила утомительную работу по их вычислению. В настоящее время ее можно запрограммировать на компьютере. С ее помощью даже задача о пересечении двух цилиндров, которая относилась когда-то к уровню мирового класса, становится общедоступной.

Только простейшие виды изменений могли быть проанализированы до появления основной теоремы интегрального исчисления. Когда что-то меняется *постепенно*, с постоянной скоростью, алгебра прекрасно работает. Это из области «расстояние равно скорости, умноженной на время». Например, автомобиль движется с неизменной скоростью 60 миль в час, при этом он проедет 60 миль за первый час и 120 миль к концу второго часа.

А как насчет изменений, которые происходят *при изменении* скорости?

Все вокруг нас постоянно меняется: увеличение скорости упавшего с высотного здания пенни, быстрая смена потоков, эллиптические орбиты планет, наши суточные биоритмы. Только исчисление может справиться с накапливаемым эффектом от неоднородных изменений, подобных этим.

На протяжении почти двух тысячелетий после Архимеда для прогнозирования эффекта от постоянных изменений существовал только один метод — последовательное складывание различных ломтиков. Предполагалось, что вы считаете скорость изменения в пределах каждого ломтика постоянной, затем вызываете аналог «расстояние равно скорости, умноженной на время», чтобы медленно двигаться до конца ломтика, и повторяете это до тех пор, пока все кусочки не будут рассмотрены. В большинстве случаев выполнить это невозможно. Бесконечные суммы слишком сложно вычислять.

Фундаментальная теорема интегрального исчисления позволила решить многие из ранее нерешаемых задач, упростила вычисление интегралов, по крайней мере для элементарных функций (суммы и произведения степеней, экспоненты, логарифмы и тригонометрические функции), которыми описываются многие явления в природе.

С помощью нижеприведенной аналогии я надеюсь пролить свет на основную идею фундаментальной теоремы и то, зачем она нужна. (Ее предложил мой коллега Чарли Пескин из Нью-Йоркского университета.) Представьте себе лестницу, общее изменение высоты которой от нижней до верхней ступенек равно сумме высот всех ступенек. Это верно даже при условии, что высота одних ступенек больше, чем других. Количество ступенек не имеет значения.

Фундаментальная теорема интегрального исчисления работает и для функций. Если проинтегрировать производную функции от одной точки до другой, то получим ее изменение между двумя точками. В данной аналогии функции — это увеличение подъема каждой ступеньки по отношению к уровню земли. Высоты отдельных ступенек — производные. Интегрирование производных — это суммирование подъемов. А две точки — верхняя и нижняя часть лестницы.

Что это нам дает? Предположим, вас попросили просуммировать огромный список чисел. Оказывается, что бы вы ни суммировали, всякий раз вы берете интеграл по частям. Если вам удастся найти соответствующие лестницы — другими словами, если вы сможете отыскать функцию подъема, для которой подходят эти числа, — то вычислить интеграл совсем несложно. Просто нужно из верха вычесть низ*.

Это огромное достижение в ускорении вычисления стало возможным благодаря фундаментальной теореме интегрального исчисления. Именно поэтому с первых месяцев преподавания курса интегрального исчисления мы требуем от студентов нахождения функции возвышения, что в математике называется первообразной или неопределенным интегралом.

С точки зрения перспективы надежным наследием интегрального исчисления будет своего рода взгляд Veg-O-Matic** на Вселенную. Ньютон и его преемники обнаружили, что сама природа открывается по кусочкам. Оказалось, что таким свойством обладают практически все открытые за последние 300 лет законы физики, что бы они ни описывали: движение частиц, тепловые потоки, электричество, воздух или воду. Вместе с основополагающими законами условия в каждом кусочке времени или пространства определят, что произойдет в соседних кусочках. Впервые в истории рациональное прогнозирование стало возможным — не в час по чайной ложке, а семимильными шагами благодаря фундаментальной теореме.

Так что давно пора поменять наш лозунг для интегралов «Хоть ломтиками, хоть кубиками» на «Пересчитайте заново. Есть метод получше».

---

* По сути, в этой аналогии говорится о том, что если вы можете найти первообразную для подынтегральной функции, то определенный интеграл от нее равен разности первообразной в точках — пределах интегрирования. *Прим. ред.*

** См. примечание переводчика о заголовке главы. *Прим. ред.*

Все о числе *e* 19

Некоторые числа — такие знаменитости, что их эстрадные имена состоят всего лишь из одной буквы. Даже самые важные персоны, такие как Мадонна и Принц, не могут с ними сравниться. Самое знаменитое — число π, ранее известное как 3,14159...

Следом идет число *i* из алгебры — это мнимое число настолько радикально, что изменило само понятие числа. Кто там далее в «звездном» рейтинге?

Поприветствуйте *e*! Прозванное так за свою роль в прорыве экспоненциального роста, число *e* теперь Зелиг* высшей математики. Оно всплывает везде, где можно и нельзя, выглядывает из углов сцены, дразня своим присутствием в нелепых местах. Например, наряду с глубоким математическим анализом, оно вызывает цепную реакцию и бум рождаемости населения; *e* есть что сказать о том, со сколькими партнерами вы должны иметь романтические отношения прежде, чем остепенитесь.

* «Зелиг» — кинофильм режиссера Вуди Аллена (1983), действие которого происходит в Америке 1920–1930-х годов. В фильме рассказывается о необычном еврее по фамилии Зелиг, умеющем перевоплощаться в людей, с которыми он общается. *Прим. перев.*

Но перед тем как перейти к этим вопросам, давайте точно определим, что означает число e[71]. Его численное значение равно 2,71828 — но это не многое разъясняет. Я могу вам сказать, что e равно пределу суммы

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \ldots$$

по мере увеличения числа членов, участвующих в этой сумме. Но это тоже не особенно полезно. Давайте лучше посмотрим на e в действии.

Представьте себе, что у вас есть депозит в виде сберегательного счета в размере 1000 долларов в банке, который ежегодно выплачивает невероятно щедрую процентную ставку в 100% годовых. Через год на вашем счете будет 2000 долларов, то есть начальный депозит в размере 1000 долларов плюс 100-процентная ставка по ним, равная еще 1000 долларам.

Прикидываясь дурачком, вы просите у банка еще более выгодные условия: предлагаете выплачивать вам проценты раз в полгода, то есть чтобы банк выплачивал только 50% ставки в течение первых шести месяцев и 50% ставки следующие шесть месяцев. Естественно, вы окажетесь в выигрыше, так как будете получать проценты на проценты. Но насколько?

Ответ на этот вопрос следующий: ваша первоначальная сумма в 1000 долларов возрастет на коэффициент 1,50 за первое полугодие и снова на коэффициент 1,50 во втором полугодии. А поскольку 1,50, умноженное на 1,50, равно 2,25, то через год на вашем счете будет 2250 долларов. Это значительно больше, чем 2000 долларов, которые вы можете получить на изначальных условиях.

А что произойдет, если вы еще надавите на банк и убедите его разбить год на более короткие периоды выплаты процентов: по дням, секундам или даже по наносекундам? В этом случае вы смогли бы сколотить небольшое состояние?

Допустим, год поделен на 100 равных периодов, после каждого из которых выплачивается 1% ставки (при процентной ставке 100% в год, поделенной на 100 частей). Тогда в конце года сумма в 1000 долларов увеличится на коэффициент 1,01, возведенный в 100-ю степень, что приблизительно равно 2,70481. Другими словами, вместо 2000 или 2250 долларов на вашем счете будет бо́льшая сумма, но не превышающая 2704,81 доллара.

И наконец, если сложный процент начисляется *бесконечно* часто (это называется непрерывным начислением), то общая сумма на счете по истечении одного года будет еще больше, но не превысит 2718,28 доллара. Точный ответ: это произведение 1000 долларов на число *e*, где *e* определяется как предельное число

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = 2{,}71828...$$

Это наиболее существенный вычислительный аргумент в пользу числа *e*. Как говорилось в предыдущих главах, где мы вычисляли площадь круга и размышляли о притяжении Земли к Солнцу, дифференциальное и интегральное исчисления, основанные на исчислении бесконечно малых, от других разделов математики отличаются тем, что стремятся обуздать ужасающую власть бесконечности. Имея дело с пределами производных или интегральных сумм, необходимо всегда очень осторожно подходить к бесконечности.

В процессе приближения к пределу, который вел к *e*, мы разделили год на все возрастающее число периодов начисления сложных процентов. Можно сказать, разбили его на временны́е окошки, которые становились все у́же и у́же, и в конечном счете подошли к тому, что можно описать как бесконечное множество бесконечно узких окошек. Забавно, что чем чаще в течение определенного периода начисляется процент по вкладу, тем медленнее растут деньги. Тем не менее через год по-прежнему набегает приличная сумма процента, потому что он многократно умножался на протяжении бесконечно многих периодов!

Таков ключ к вездесущности *e*. Оно часто возникает, когда что-то меняется в результате суммарного действия множества крошечных воздействий.

Рассмотрим кусочек урана в процессе радиоактивного распада. Момент за моментом каждый атом имеет определенный маленький шанс подвергнуться распаду. Произойдет ли это с каждым из них и когда — совершенно непредсказуемо, и каждое такое событие оказывает в целом бесконечно малое влияние. И все же в совокупности эти триллионы событий создают сглаженный, предсказуемый, экспоненциально затухающий процесс радиоактивного распада.

Или подумайте о населении Земли, которое растет в геометрической прогрессии. Во всем мире дети рождаются в случайных местах в непредсказуемые моменты, пока другие люди умирают тоже в случайных местах в непредсказуемые моменты. Каждое событие имеет мизерное в процентном отношении воздействие на демографическую ситуацию в мире, но в совокупности население растет в геометрической прогрессии с очень предсказуемой скоростью.

Есть еще одна причина для появления *e*, сочетающая в себе огромное число вариантов выбора. Для ее иллюстрации приведу два примера из повседневной жизни, хотя и в очень стилизованной форме.

Представьте себе, что популярный новый фильм показывают в местном кинотеатре. Это романтическая комедия, и сотни пар (намного больше, чем может вместить кинотеатр) выстроились в кассу в очередь за билетами, хотя и отчаялись попасть внутрь. Как только счастливая пара получает билеты, она пробирается в зал и ищет два места рядом. Для простоты предположим, что влюбленные выбирают эти места наугад, там, где есть свободные. Другими словами, они не заботятся о том, будут ли сидеть близко к экрану или далеко от него, на проходе или в середине ряда. Пока они рядом друг с другом, они счастливы.

Допустим, ни одна пара не будет пересаживаться, чтобы освободить место для другой. После того как молодые люди уселись, они никуда не передвигаются. Полное отсутствие вежливости. Зная это, кассир прекращает продавать билеты после того, как остается только одно свободное место. В противном случае начались бы драки.

Сначала, пока в кинотеатре довольно пусто, не возникает никаких проблем. Каждая пара легко находит два места рядом. Но через какое-то время остаются только одиночные места и одиночные промежутки между парами, которые двое не хотят занимать. В реальной жизни люди часто намеренно создают такие промежутки: чтобы положить пальто или не опираться на один подлокотник с неприятным незнакомцем. Но в нашей модели эти промежутки случайны.

Вопрос: если больше не осталось мест для пар, сколько свободных мест еще есть в кинотеатре?

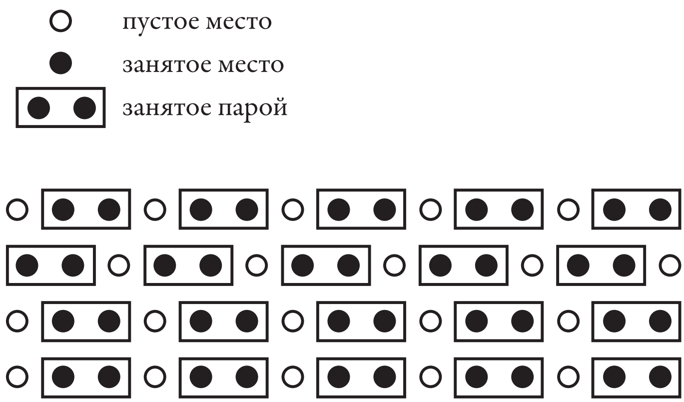
Ответ следующий: оказывается, в кинотеатре с большим залом (когда в ряду много мест) доля пустующих мест примерно равна

$$\frac{1}{e^2} = 0{,}135...,$$

что приближается к 13,5%[72].

Хотя сам расчет слишком сложный для того, чтобы его здесь привести, легко заметить, что 13,5% находится в правой части диапазона между двумя крайними значениями. Если бы все пары сидели вплотную друг к другу, пустующих мест не было бы.

Тем не менее, если бы они расположились максимально *нерационально*, то есть всегда оставляя возле себя свободное место (и оставив свободное место в каждом ряду у прохода: на одном или на другом конце ряда, как показано на рисунке ниже), то пустовала бы одна треть мест, потому что каждая пара заняла бы три места: два для себя и одно промежуточное.



Догадываясь, что произвольный выбор должен лежать где-то между идеально рациональным и совершенно неэффективным, иначе говоря, быть средним между 0 и $\frac{1}{3}$, мы ожидаем что-то около $\frac{1}{6}$, то есть что 16,7% мест будут пустовать. И это недалеко от точного результата 13,5%.

Здесь большое число вариантов возникло из-за того, что у пар был богатый выбор в огромном кинотеатре. Наш следующий пример тоже об организации пар, только теперь не в пространстве, а во времени. То, о чем я говорю, касается довольно болезненной проблемы: со сколькими партнерами я должен встретиться прежде, чем выберу себе супругу[73]. Реальный вариант этой задачи слишком сложен для математического расчета. Рассмотрим упрощенную модель. Несмотря на допущения, невозможные в жизни, в ней все еще сохраняется некоторая душераздирающая романтическая неопределенность.

Предположим, вам известно, сколько потенциальных супругов вы встретите в течение жизни. (Фактическое количество не важно, лишь бы знать наперед, сколько их будет, и чтобы не слишком мало).

Предположим также, что вы могли бы оценить этих людей однозначно (то есть выбрать наилучшего), если бы увидели их всех вместе. К несчастью, это невозможно. Вы встречаете их только по одному и в случайном порядке. Таким образом, вы не можете знать, находится ли предмет ваших мечтаний с первым номером из вашего списка прямо за углом или вы уже встречались и расстались.

И правила этой игры таковы: как только вы позволите кому-то уйти, он (или она) тут же уходит. Второго шанса нет.

Наконец представим, что вы хотите остепениться. В этом случае, если вы порываете с тем «наилучшим на сегодняшний день», кого в прошлом не поместили в верхнюю часть списка, вы будете считать свою личную жизнь неудачной.

Есть ли надежда найти истинную любовь? Если да, то что нужно сделать, чтобы обеспечить себе наибольшие шансы?

Хорошая стратегия, хотя и не самая оптимальная, — разделить свою жизнь с момента, когда у вас начались романтические отношения, и до настоящего времени на две равные части. В первой половине вы мужчина нарасхват*, а во второй — готовы к серьезным отношениям и собираетесь схватить первого же партнера, который будет лучше тех, с кем вы встречались до этого.

Следуя такой стратегии, есть по крайней мере 25-процентный шанс найти предмет мечтаний. И вот почему: шансов встретить его во второй половине жизни, когда вы созрели для серьезных отношений, у вас 50 на 50, и столько же встретить наилучшего на сегодня в первой половине жизни, когда вы еще легкомысленны. Вероятность, что произойдут оба события, составляет 25%. В этом случае вы найдете свою истинную любовь.

А все потому, что «наилучший на сегодняшний день» очень высоко поднял планку. Никто из тех, кого вы повстречаете после того, как будете

---

* «Мужчина нарасхват» — кинофильм режиссера Габриэле Муччино (2012). Звезда футбола и просто шикарный мужчина (Джерард Батлер) по воле случая становится тренером детской футбольной команды. С этого момента для своих подопечных и их обольстительных мамочек он мужчина нарасхват. *Прим. перев.*

готовы к серьезным отношениям, не будет привлекать вас так, как предмет мечтаний. Но даже в этот момент вы, возможно, станете сомневаться, что предмет мечтаний и есть тот единственный, кто сможет преодолеть планку, поставленную «наилучшим на сегодняшний день».

Однако оптимальная стратегия — начать серьезный поиск партнера немного раньше, после $1/e$, или около 37% от вашей потенциальной взрослой жизни. Это даст вам $1/e$ шансов найти свою вторую половину.

Разумеется, при условии, что она в это время не будет играть в *e*-игры.

Любит не любит 20

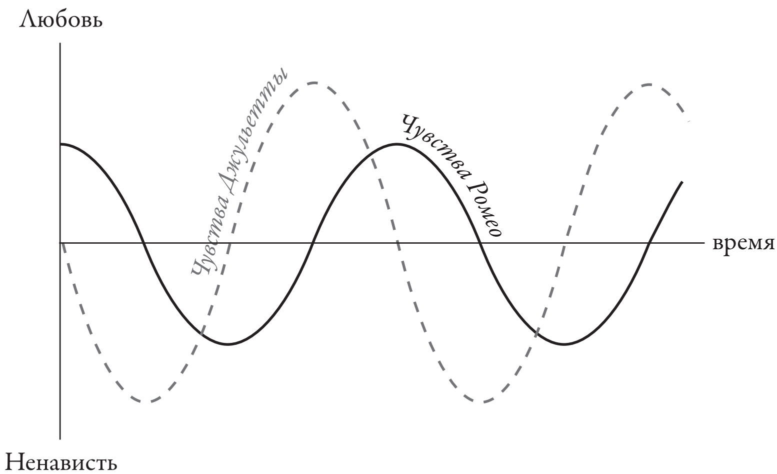
«Весной, — писал Теннисон, — воображение молодого человека с легкостью поворачивается к мыслям о любви». Увы, потенциальный партнер молодого человека может иметь собственные представления о любви, и тогда их отношения будут полны бурных взлетов и падений, которые делают любовь столь волнующей и столь болезненной. Одни страдальцы от безответной ищут объяснение этих любовных качелей в вине, другие — в поэзии. А мы проконсультируемся у исчислений.

Представленный ниже анализ будет насмешливо-ироничным, но он затрагивает серьезные темы. К тому же если понимание законов любви может от нас ускользнуть, то законы неодушевленного мира в настоящее время хорошо изучены. Они принимают форму дифференциальных уравнений, описывающих изменение взаимосвязанных переменных от момента к моменту в зависимости от их текущих значений. Возможно, у таких уравнений мало общего с романтикой, но они хотя бы могут пролить свет на то, почему, по словам другого поэта, «путь истинной любви никогда не был гладким».

Чтобы проиллюстрировать метод дифференциальных уравнений, предположим, что Ромео любит Джульетту[74], но в нашей версии этой истории Джульетта — ветреная возлюбленная. Чем больше Ромео любит ее, тем сильнее она хочет от него спрятаться. Но когда Ромео охладевает к ней, он начинает казаться ей необыкновенно привлекательным.

Однако юный влюбленный склонен отражать ее чувства: он пылает, когда она его любит, и остывает, когда она его ненавидит.

Что происходит с нашими несчастными влюбленными? Как любовь их поглощает и уходит с течением времени? Вот где дифференциальное исчисление приходит на помощь. Составив уравнения, обобщающие усиление и ослабление чувств Ромео и Джульетты, а затем решив их, мы сможем предсказать ход отношений этой пары. Окончательным прогнозом для нее будет трагически бесконечный цикл любви и ненависти. По крайней мере четверть этого времени у них будет взаимная любовь.



Чтобы прийти к такому выводу, я предположил, что поведение Ромео может быть смоделировано с помощью дифференциального уравнения

$$\frac{dR}{dt} = aJ,$$

которое описывает, как его любовь (R) изменяется в следующее мгновение (dt). Согласно этому уравнению, количество изменений (dR) прямо пропорционально (с коэффициентом пропорциональности a) любви Джульетты (J). Данная зависимость отражает то, что мы уже знаем: любовь Ромео усиливается, когда Джульетта любит его, но это также говорит о том, что любовь Ромео растет прямо пропорционально тому, насколько Джульетта его любит. Это предположение линейной зависимости эмоционально неправдоподобно, но оно позволяет значительно упростить решение уравнения.

Напротив, поведение Джульетты можно смоделировать с помощью уравнения

$$\frac{dJ}{dt} = -bR$$

Отрицательный знак перед постоянной b отражает то, что ее любовь остывает, когда любовь Ромео усиливается.

Единственное, что еще осталось определить, — их изначальные чувства (то есть значения R и J в момент времени $t = 0$). После этого все необходимые параметры будут заданы. Мы можем использовать компьютер, чтобы медленно, шаг за шагом двигаться вперед, изменяя значения R и J в соответствии с описанными выше дифференциальными уравнениями. На самом деле с помощью основной теоремы интегрального исчисления мы можем найти решение аналитически. Поскольку модель простая, интегральное исчисление выдает пару исчерпывающих формул, которые говорят нам, сколько Ромео и Джульетта будут любить (или ненавидеть) друг друга в любой момент времени в будущем.

Представленные выше дифференциальные уравнения должны быть знакомы студентам-физикам: Ромео и Джульетта ведут себя как простые гармонические осцилляторы. Таким образом, модель предсказывает, что функции $R(t)$ и $J(t)$, описывающие изменение их отношений во времени, будут синусоидами, каждая из них возрастающая и убывающая, но максимальные значения у них не совпадают.

Модель можно сделать более реалистичной разными путями. Например, Ромео может реагировать не только на чувства Джульетты, но и на свои собственные. А вдруг он из тех парней, которые настолько боятся, что их бросят, что станет остужать свои чувства. Или относится к другому типу парней, которые обожают страдать — именно за это он ее и любит.

Добавьте к этим сценариям еще два варианта поведения Ромео: он отвечает на привязанность Джульетты либо усилением, либо ослаблением собственной привязанности — и увидите, что в любовных отношениях существуют четыре различных стиля поведения. Мои студенты и студенты группы Питера Кристофера из Вустерского политехнического института предложили назвать представителей этих типов так: Отшельник или Злобный Мизантроп для того Ромео, который охлаждает свои чувства и отстраняется от Джульетты, и Нарциссический Болван и Флиртующий Финк для того, который разогревает свой пыл, но отвергается Джульеттой. (Вы можете придумать собственные имена для всех этих типов).

Хотя приведенные примеры фантастические, описывающие их типы уравнений весьма содержательны. Они представляют собой наиболее мощные инструменты из когда-либо созданных человечеством для осмысления материального мира. Сэр Исаак Ньютон использовал дифференциальные уравнения для открытия тайны движения планет. С помощью этих уравнений он объединил земные и небесные сферы, показав, что и к тем и к другим применимы одинаковые законы движения.

Спустя почти 350 лет после Ньютона человечество пришло к пониманию того, что законы физики всегда выражаются на языке дифференциальных уравнений. Это верно для уравнений, описывающих потоки тепла, воздуха и воды, для законов электричества и магнетизма, даже для атома, где царит квантовая механика.

Во всех случаях теоретическая физика должна найти правильные дифференциальные уравнения и решить их. Когда Ньютон обнаружил этот ключ к тайнам Вселенной и понял его великую значимость, он опубликовал его в виде латинской анаграммы. В вольном переводе она звучит так: «Полезно решать дифференциальные уравнения»[75].

Глупая идея описать любовные отношения с помощью дифференциальных уравнений пришла мне в голову, когда я был влюблен в первый раз и пытался понять непонятное поведение моей девушки. Это был летний роман в конце второго курса колледжа. Я очень напоминал тогда первого Ромео, а она — первую Джульетту. Цикличность наших отношений сводила меня с ума, пока я не понял, что мы оба действовали по инерции, в соответствии с простым правилом «тяни-толкай». Но к концу лета мое уравнение начало разваливаться, и я был еще более озадачен. Оказалось, произошло важное событие, которое я не учел: ее бывший возлюбленный захотел ее вернуть.

В математике мы называем такую задачу задачей о трех телах. Она заведомо неразрешима, особенно в контексте астрономии, где впервые и возникла. После того как Ньютон решил дифференциальные уравнения для задачи о двух телах (что объясняет, почему планеты движутся по эллиптическим орбитам вокруг Солнца), он обратил внимание на задачу о трех телах для Солнца, Земли и Луны. Ни он, ни другие ученые так и не смогли ее решить. Позже выяснилось, что задача о трех телах содержит семена хаоса[76], то есть в долгосрочной перспективе их поведение непредсказуемо.

Ньютон ничего не знал о динамике хаоса, но, по словам его друга Эдмунда Галлея*, пожаловался, что задача о трех телах «вызывает головную боль[77] и так часто не дает ему спать, что он больше не будет об этом думать».

Здесь я с вами, сэр Исаак.

---

* Эдмунд Галлей (1656–1742) — английский астроном и геофизик. Главные достижения — создание метода расчета кометных орбит и открытие периодичности некоторых комет. Знаменитая комета Галлея названа в его честь. *Прим. перев.*

Выйди на свет* 21

Господин Дикурцио был моим наставником в средней школе — хмурый и требовательный, склонный к сарказму человек, носивший скучного вида очки в черной оправе. Словом, симпатяга. Но я заметил его безумную страсть к физике.

Однажды я рассказал ему, что прочитал биографию Эйнштейна. В ней говорилось, что во время учебы в колледже Эйнштейн был сильно поражен чем-то под названием «уравнения Максвелла для электричества и магнетизма»; и я заявил, что не могу ждать, пока начну достаточно разбираться в математике, чтобы узнать, что они собой представляют.

Это произошло во время ужина в школе-интернате. За большим столом сидели еще несколько студентов, жена учителя и две его дочери; господин Дикурцио раскладывал картофельное пюре по тарелкам. При упоминании об уравнениях Максвелла он бросил ложку, схватил бумажную салфетку и начал писать на ней загадочные символы, точки и кресты, перевернутые треугольники, E и B со стрелками над ними, и вдруг, как мне показалось, он заговорил на нечеловеческом языке: «Ротор ротора — это градиент дивергенции минус квадрат дельты...»

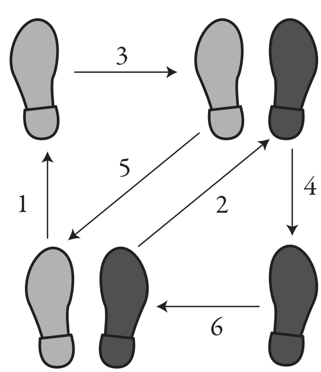
* «Выйди на свет» (Step into the Light) — название популярной песни австралийского певца Даррена Хейса. *Прим. перев.*

Что за абракадабру он бормотал? Теперь-то я понимаю, что он давал объяснения в терминах векторного исчисления[78] — раздела математики, описывающего все находящиеся вокруг нас невидимые поля. Вспомните магнитное поле, поворачивающее стрелку компаса на север, гравитационное поле, притягивающее ваш стул к полу, или микроволновое поле, которое готовит ваш ужин.

Наибольшие достижения векторного исчисления лежат в том сумеречном мире, где математика сталкивается с реальностью. В самом деле, история Джеймса Максвелла и его уравнений показывает один из сверхъестественных случаев несомненной эффективности математики. Так или иначе, перетасовав несколько символов, Максвелл обнаружил, что такое свет[79].

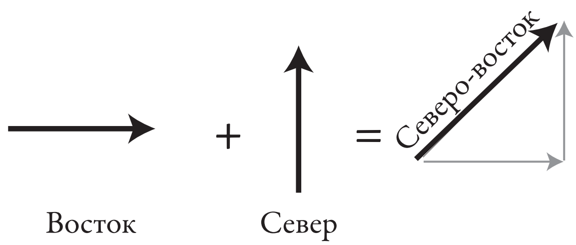
Чтобы осознать значимость его открытия и получить общее представление о векторном исчислении, давайте начнем со слова «вектор». Оно происходит от латинского корня *vehere*, «осуществлять», который также дает нам такие слова, как «транспортное средство» (vehicle) и «лента конвейера» (conveyor belt). Для эпидемиологов вектор является носителем возбудителя, подобно комару, передающему малярию через кровь. Для математика вектор (по крайней мере в своей простейшей форме) — это шаг, который переносит вас из одного места в другое.

Вспомните одну из схем для начинающих танцоров бальных танцев, покрытую стрелками, указывающими, как, танцуя румбу, ставить правую ногу, а затем левую:



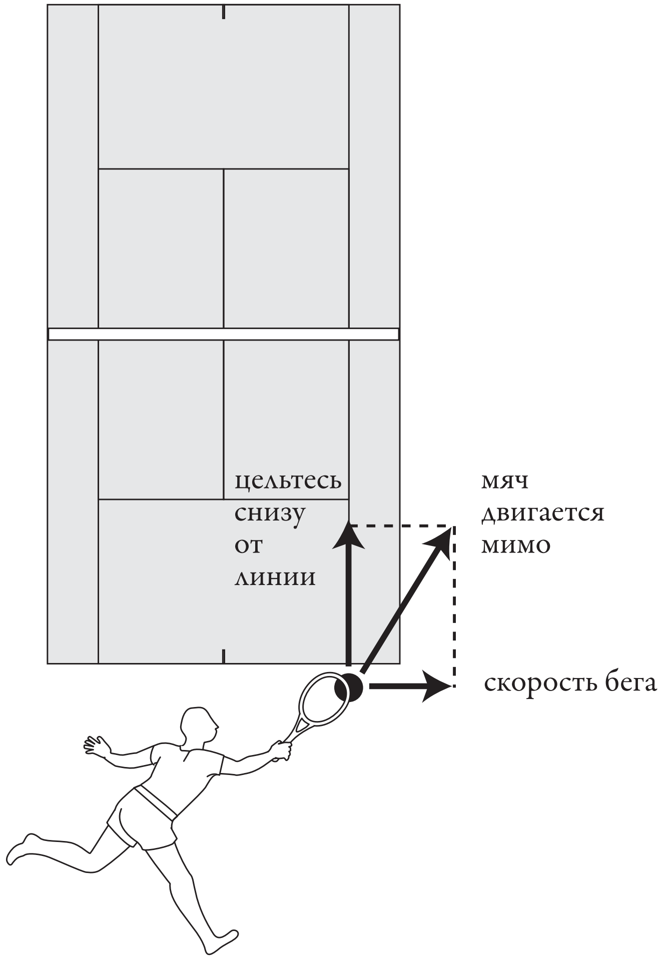
Эти стрелки и есть векторы. Они содержат два вида данных: направление (в каком направлении переставлять ногу) и величину (на какое расстояние ее нужно переместить). Все векторы имеют такую двойственность.

Векторы, как и числа, можно складывать и вычитать, но наличие направленности делает их более сложными. Тем не менее сложение векторов становится более понятным, если вы представите его в виде инструкции по танцам. Например, что получится, если сначала вы делаете один шаг на восток, а следующий на север? Естественно, вектор, который указывает на северо-восток.

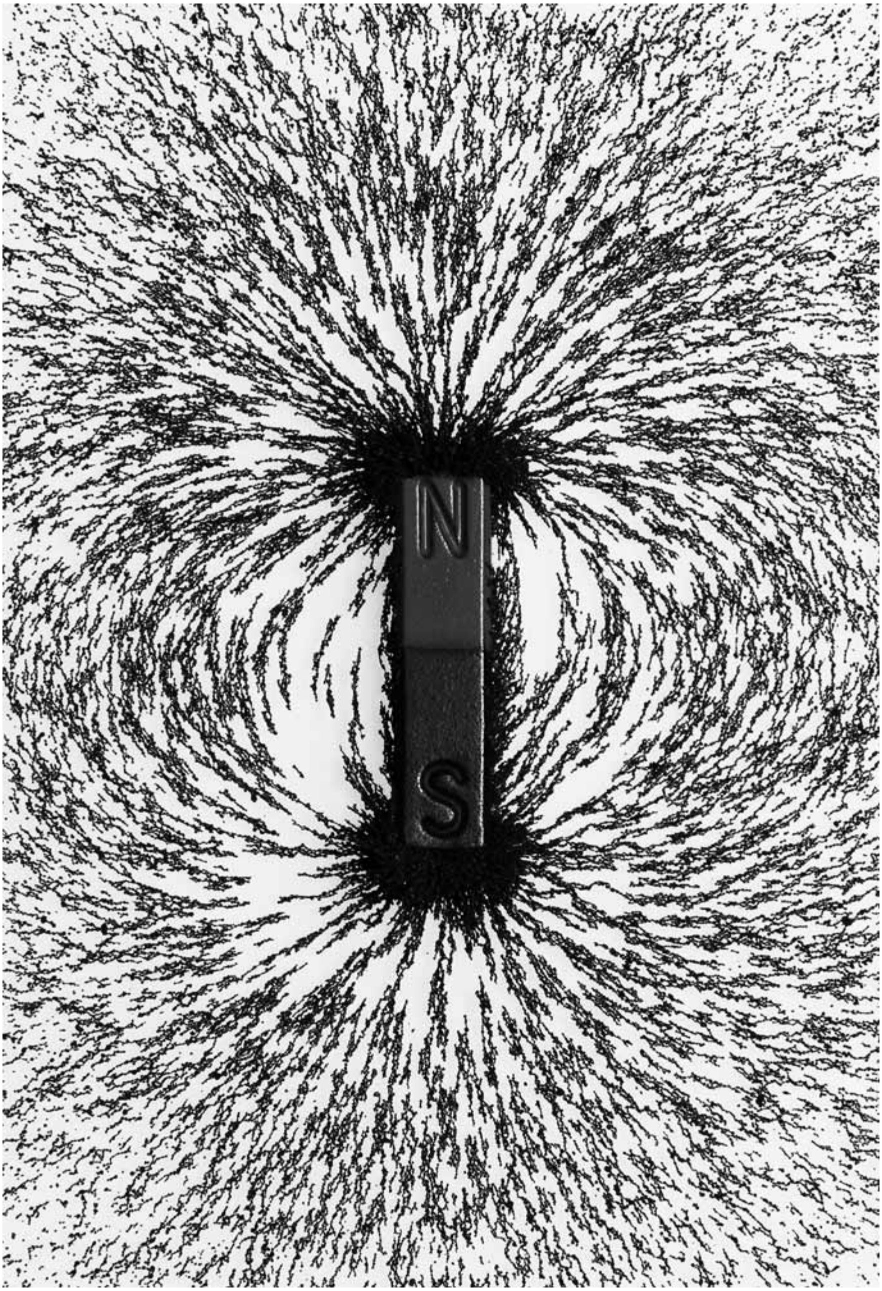


Примечательно, что скорость и сила ведут себя так же: они складываются, как и танцевальные шаги. Это должно быть знакомо любому теннисисту, который когда-либо пытался подражать Питу Сампрасу и бил по мячу справа снизу от линии, когда бежал на полной скорости к боковой линии. Если направить мяч без учета своего движения, то удар будет неточным. Скорость мяча по отношению к корту — это сумма *двух* векторов: скорости мяча относительно вас (вектор, направленный снизу от линии, как и предполагалось) и вашей скорости относительно корта (вектор, направленный в ту сторону, куда вы бежите). Чтобы отбить мяч в нужном направлении, необходимо целиться в противоположную половину поля противника, чтобы компенсировать боковое движение.

За пределами векторной алгебры лежит векторное исчисление: раздел математики, который использовал господин Дикурцио. Вы помните, что любое исчисление — это математика перемен. Поэтому векторное исчисление должно включать в себя изменение векторов во времени и пространстве. В последнем случае говорят о «векторном поле».

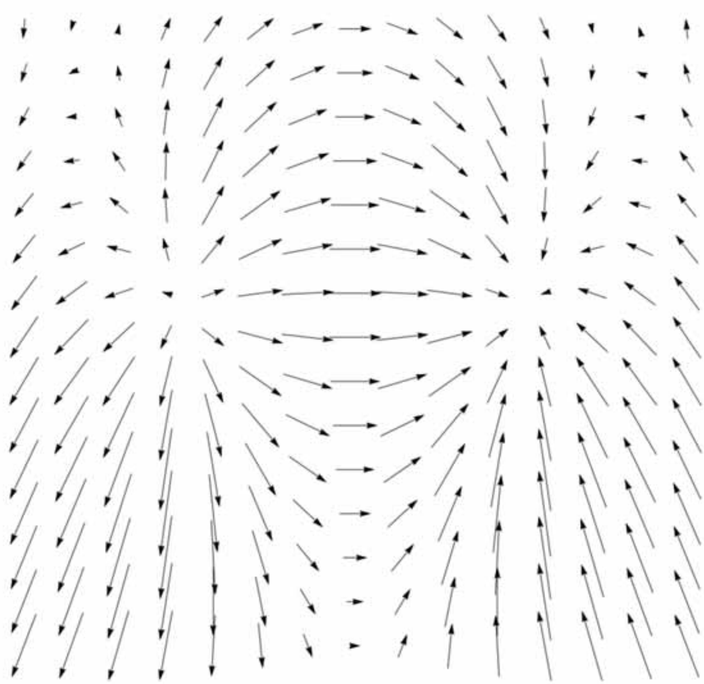


Классический пример векторного поля — силовое поле вокруг магнита. Для его демонстрации положите магнит на лист бумаги и начните сыпать на него железные стружки. Каждая стружка ведет себя как маленькая стрелка компаса, и ее направление совпадет с направлением локального «севера», определяемого магнитным полем в этой точке. Совокупность стружек создает захватывающую картину силовых линий магнитного поля, которые пролегают от одного полюса магнита к другому.


N
S

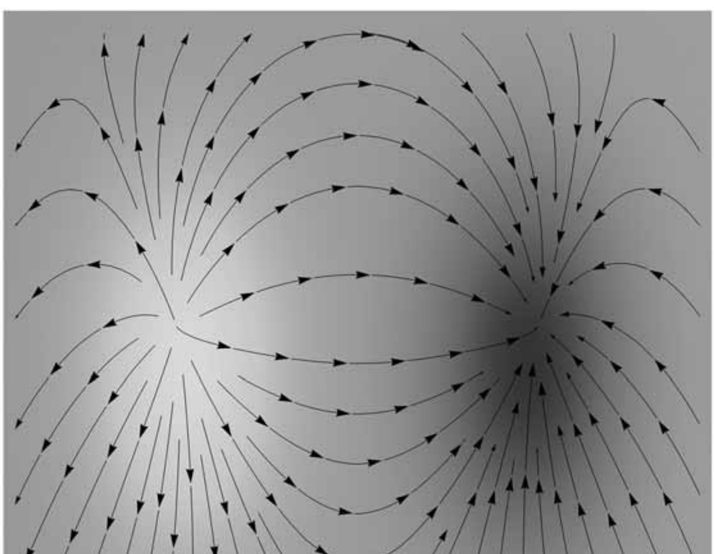
Направления и величины векторов в магнитном поле меняются от точки к точке. Как и во всех исчислениях, ключевым инструментом для количественного расчета таких изменений является производная. В векторном исчислении оператор производной называется «дельта» — от греческой буквы Δ (дельта), обычно используемой для обозначения изменений в отдельных переменных. Как напоминание о родственных связях, в векторном исчислении также применяется перевернутый треугольник ∇. (Это тот самый таинственный перевернутый треугольник учителя Дикурцио, который он несколько раз нарисовал на салфетке и который называется «набла».)

Оказывается, существует два различных, но одинаково естественных способа взять производную у векторного поля, применяя к нему «наблу». Первый называется дивергенцией поля. Чтобы интуитивно почувствовать, как она измеряется, взгляните на векторное поле, показывающее, как вода потечет из источника слева в раковину справа.

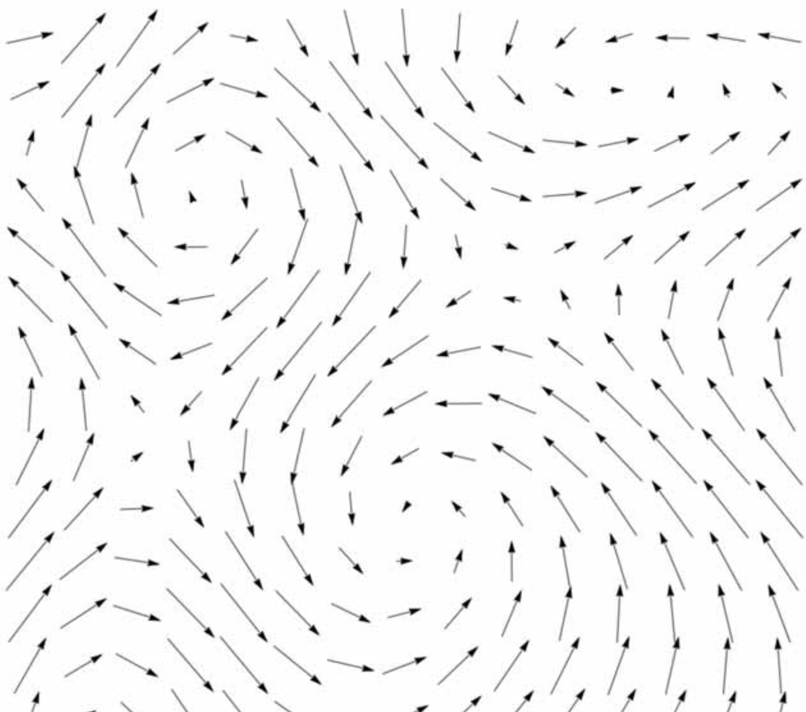


Для этого примера, чтобы отслеживать векторное поле, вместо железных стружек возьмем множество мелких корок или фрагменты плывущих по поверхности воды листьев. Мы собираемся использовать их в качестве зондов. Их движение будет показывать, как вода течет в каждой точке. Представьте, что произойдет, если выложить небольшой кружок из корок вокруг источника. Очевидно, что корки начнут раздвигаться и круг станет расширяться, так как вода вытекает из источника. Источник здесь *расходится*. И чем сильнее расхождение, тем быстрее увеличивается область нашего коркового круга. Вот почему дивергенция векторного поля определяет, насколько быстро растет площадь небольшого круга из корок.

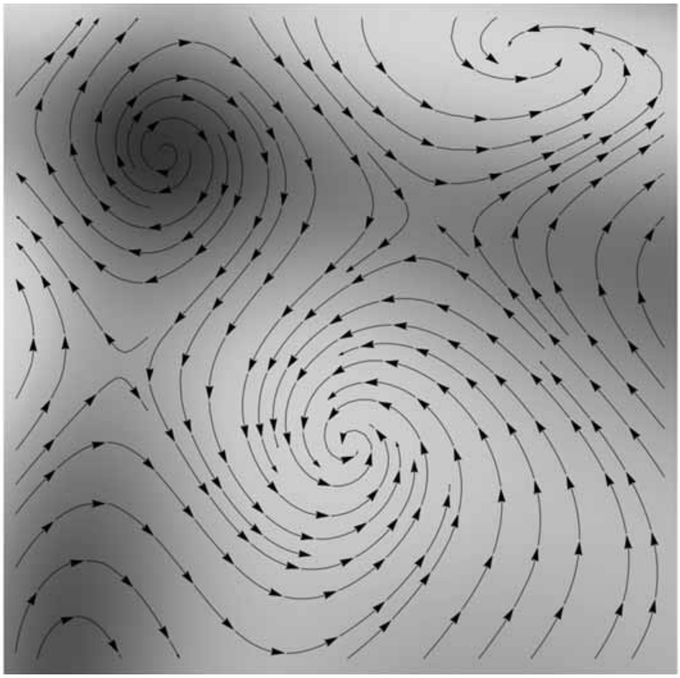
На рисунке ниже оттенками серого изображены численные значения дивергенции в каждой точке поля. Светлые оттенки показывают точки, где поток имеет положительную дивергенцию, а темные — места отрицательной дивергенция там, где поток *сжимает* кольцо корок в окружности с центром слива воды.



Другой способ измерения производной — ротор векторного поля. Грубо говоря, ротор показывает, насколько сильно поле крутится вокруг данной точки. (Вспомните карты погоды, демонстрирующие вращающуюся розу ветров вокруг ураганов и тропических штормов, которые вы видели в новостях.) В векторном поле на рисунке области, выглядящие как ураганы, имеют большой ротор.



Украсив векторное поле оттенками серого, можно показать, где ротор имеет наибольшие положительные (светлая область) и наибольшие отрицательные (темная область) значения. Обратите внимание, что положительность или отрицательность ротора говорит также о том, в каком направлении вращается поток (против или по часовой стрелке).



Ротор чрезвычайно информативен для ученых, имеющих дело с механикой жидкостей и аэродинамикой. Несколько лет назад моя коллега Джейн Ван с помощью компьютера смоделировала структуру воздушного потока вокруг стрекозы в момент, когда та зависает на одном месте[80]. Вычисляя ротор, Джейн обнаружила, что, когда стрекоза машет крыльями, это формирует пару противоположно вращающихся вихрей (роторов), действующих как маленькие торнадо под ее крылышками и создающих достаточную подъемную силу, чтобы удерживать насекомое в воздухе. Таким образом, векторное исчисление помогает объяснить, как летают стрекозы, шмели и колибри, что долгое время было загадкой для традиционной аэродинамики неподвижного крыла самолета.

Теперь, когда вы получили представление о дивергенции и роторе, давайте вернемся к уравнениям Максвелла. Они выражают четыре фундаментальных закона: первый — для дивергенции электрического поля, второй — для его ротора, а третий и четвертый такого же типа — для магнитного поля. Уравнения дивергенции связывают электрические и магнитные поля с источниками их возникновения, заряженными частицами и токами, которые создают их изначально. Уравнения ротора описывают, как электрические и магнитные поля взаимодействуют и изменяются с течением времени. При этом уравнения обладают красивой симметрией: они связывают скорость изменения во *времени* одного поля со скоростью изменения в *пространстве другого* поля, что количественно выражается его ротором.

Максвелл использовал математические приемы, эквивалентные векторному исчислению, которое в его время еще не было известно, и вывел логические следствия из этих четырех уравнений. Перетасовка символов привела его к выводу, что электрические и магнитные поля могут распространяться в виде волн, похожих на рябь в пруду. За исключением электрических и магнитных полей, больше походивших на симбиотические организмы. Они поддерживали друг друга. Волновое движение электрического поля воссоздавало магнитное поле, которое, в свою очередь, воссоздавало электрическое поле, и так далее; каждое тянуло другое вперед, причем ни одно из них не могло сделать это самостоятельно.

Это был первый прорыв — теоретическое предсказание электромагнитных волн. Но действительно потрясающее открытие ждало Максвелла впереди. Когда он вычислил скорости этих гипотетических волн с использованием известных свойств электричества и магнетизма, из его уравнений стало ясно, что поля передвигаются со скоростью около 193 тысячи миль в секунду — такое же значение для скорости света вывел французский физик Ипполит Физо за десять лет до этого!

Как я хотел бы стать свидетелем момента[81], когда человек впервые понял истинную природу света. Считая свет электромагнитной волной, Максвелл объединил три древних и, казалось бы, не связанных между собой явления: электричество, магнетизм и свет. Хотя такие экспериментаторы, как Фарадей и Ампер, ранее нашли основные части этой головоломки, именно Максвелл, вооруженный своей математикой[82], сложил их.

Сегодня мы купаемся в некогда гипотетических волнах Максвелла, имея радио, телевидение, сотовые телефоны и Wi-Fi. Таково наследие его колдовства с символами.

Часть V МНОГОЛИКИЕ ДАННЫЕ

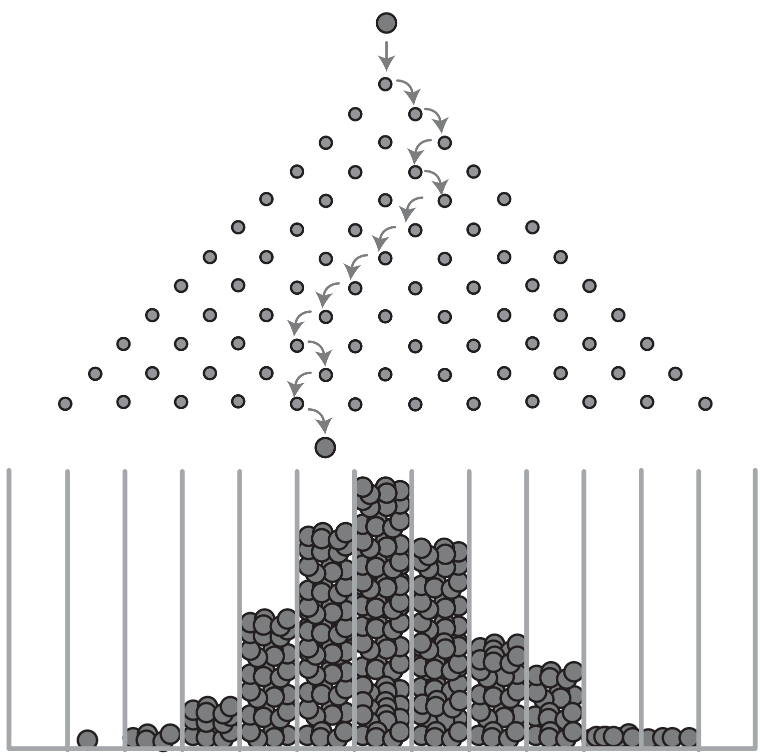
Новая нормальность 22

Статистика внезапно стала сверхмодным направлением. С появлением интернета, электронной торговли, социальных сетей, проекта по расшифровке генома человека, а также в связи с развитием цифровой культуры в целом мир стал захлебываться в данных.[83] Маркетологи изучают наши вкусы и привычки. Разведывательные службы собирают информацию о нашем местонахождении, электронной переписке и телефонных звонках. Специалисты по спортивной статистике жонглируют цифрами[84], решая, каких игроков покупать, кого набирать в команду, а кого посадить на скамью запасных. Каждый стремится объединить точки в график и обнаружить закономерность в беспорядочном скоплении данных.

Неудивительно, что эти тенденции отражаются и в обучении. «Давайте обратимся к статистике»[85], — увещевает в своей колонке газеты New York Times Грег Мэнкью, экономист из Гарвардского университета. «В учебной программе по математике в средней школе слишком много времени уделяется традиционным темам, таким как евклидова геометрия и тригонометрия. Эти полезные для обычного человека умственные упражнения, однако, малоприменимы в повседневной жизни. Учащимся было бы гораздо полезнее больше узнать о теории вероятности и статистике». Дэвид Брукс идет еще дальше[86]. В своей статье, посвященной дисциплинам, заслуживающим внимания для получения достойного образования, он пишет: «Возьмите статистику. Вот увидите, окажется, что знание того, что такое стандартное отклонение, вам очень пригодится в жизни».

Вполне вероятно, а еще неплохо разбираться в том, что такое распределение. Это первое, о чем я намерен поговорить. И хотел бы заострить на нем внимание, поскольку в этом заключается один из главных уроков статистики[87]: вещи кажутся безнадежно случайными и непредсказуемыми при рассмотрении их по отдельности, однако в совокупности в них обнаруживается закономерность и предсказуемость.

Возможно, вы видели демонстрацию этого принципа в каком-нибудь научном музее (если нет, видеоролики можно найти в интернете). Типичный экспонат представляет собой приспособление под названием доска Гальтона[88], которая чем-то напоминает автомат для игры в пинбол, только без флипперов. Внутри его с равными интервалами располагаются ровные ряды штырьков.



Опыт начинается с того, что в верхнюю часть доски Гальтона запускаются сотни шариков. При падении они сталкиваются со штырьками и с равной вероятностью отскакивают то вправо, то влево, а затем распределяются внизу доски, попадая в отсеки одинаковой ширины. Высота столбика из шариков показывает, с какой вероятностью шарик может оказаться в данном месте. Большинство шариков размещаются примерно в середине, по бокам их уже меньше, и еще меньше — по краям. В общем, картина чрезвычайно предсказуема: шарики всегда образуют распределение в форме колокола, хотя предугадать, где окажется каждый отдельно взятый шарик, невозможно.

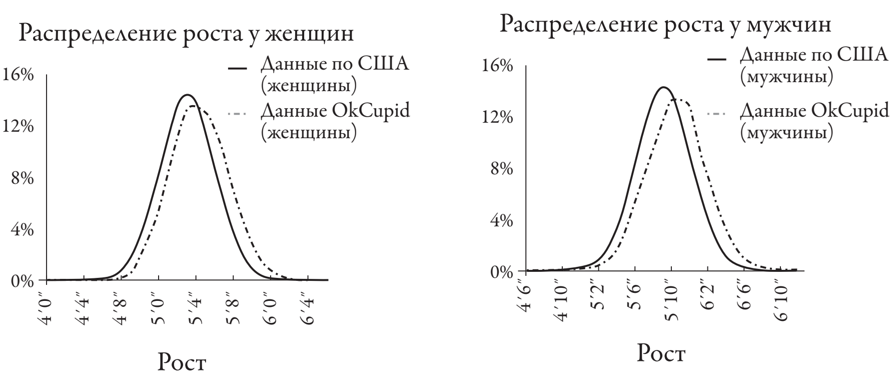
Каким образом отдельные случайности превращаются в общие закономерности? Но именно так действует случайность. В среднем столбике скопилось больше всего шариков потому, что, прежде чем скатиться вниз, многие из них совершат примерно одинаковое количество прыжков вправо и влево и в результате окажутся где-то посередине. Несколько одиноких шариков, расположившихся по краям, образуют хвосты распределения — это те шарики, которые при столкновении со штырьками отскакивали всегда в одном направлении. Такие отскоки маловероятны, поэтому по краям так мало шариков.

Подобно тому как местоположение каждого шарика определяется суммой множества случайных событий, многие явления в этом мире являются следствием множества мелких обстоятельств и тоже подчиняются колоколообразной кривой. По этому принципу работают страховые компании. Они с высокой точностью могут назвать количество своих клиентов, которые умирают каждый год. Однако не знают, кому именно не повезет на этот раз.

Или возьмем, к примеру, рост человека. Он зависит от бесчисленного количества случайностей, связанных с генетикой, биохимией, питанием и окружающей средой. Следовательно, велика вероятность, что при рассмотрении в совокупности рост взрослых мужчин и женщин будет представлять собой колоколообразную кривую[89].

В одном блоге под названием «Ложные данные, которые люди сообщают о себе в интернете» статистическая служба сайта знакомств

OkCupid[90] недавно опубликовала график роста своих клиентов или, скорее, указанных ими значений. Обнаружилось, что показатели роста представителей обоих полов, как и ожидалось, образуют колоколообразную кривую. Однако удивительно то, что оба распределения были примерно на два дюйма смещены вправо относительно ожидаемых значений.

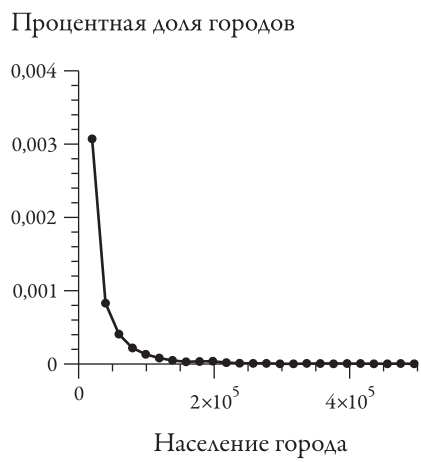


Таким образом, либо рост клиентов, опрошенных компанией OkCupid, превышает средний, либо при описании себя в интернете они прибавляют к своему росту еще пару дюймов.

Идеализированной версией подобных колоколообразных кривых является то, что математики называют нормальным распределением. Это одно из важнейших понятий в статистике, имеющее теоретическое обоснование. Можно доказать, что нормальное распределение возникает при сложении большого количества мелких случайных факторов, причем каждый из них действует независимо от других. И многие события происходят именно таким образом.

Но не все. И это второй пункт, на который я хотел бы обратить внимание. Нормальное распределение не такое уж вездесущее, как кажется. На протяжении сотни лет, и особенно в последние несколько десятилетий, ученые и специалисты в области статистики отмечают существование множества явлений, отклоняющихся от этой кривой и следующих собственному графику. Любопытно, что подобные типы распределений практически не упоминаются в учебниках по элементарной статистике, а если и встречаются, то обычно рассматриваются как некие патологии. Это странно. Я попытаюсь объяснить, что многие явления современной жизни приобретают больший смысл при условии понимания этих «патологических» распределений. Это новая нормальность.

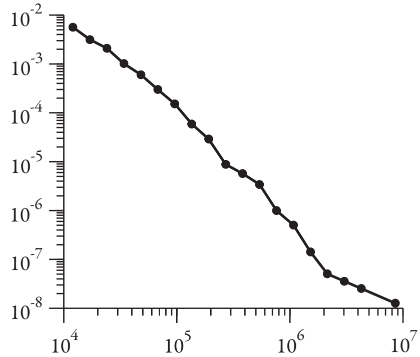
Возьмем, к примеру, распределение размеров городов в США. Вместо того чтобы скапливаться вокруг некоей средней величины колоколообразной кривой, подавляющее большинство городов имеют небольшой размер и, следовательно, скапливаются в левой части графика.



И чем больше население города, тем реже такие города встречаются. Иначе говоря, в совокупности распределение будет представлять собой скорее кривую в форме буквы L, чем колоколообразную кривую.

И в этом нет ничего удивительного. Все знают, что мегаполисов гораздо меньше, чем маленьких городов. Хотя это не так очевидно, размеры городов подчиняются простому красивому распределению — если посмотреть на них в логарифмическом масштабе.

Будем считать, что различие между двумя городами одно и то же, если их население отличается в одно и то же число раз (подобно тому как две любые клавиши рояля, отстоящие на октаву, всегда разнятся вдвое по частоте). И сделаем то же самое на вертикальной оси.



Теперь данные располагаются на кривой, представляющей собой почти идеальную прямую линию. Исходя из свойств логарифмов, нетрудно вывести, что исходная L-образная кривая представляет собой степенну́ю зависимость, которая описывается функцией вида

$$y = \frac{c}{x^a},$$

где x — население города, y — количество городов, имеющих такой размер, c — константа, а показатель степени a (показатель степенно́й зависимости) определяет отрицательный наклон прямой линии.

Степенны́е распределения[91] имеют некоторые нелогичные, с точки зрения традиционной статистики, свойства. Например, в отличие от нормального распределения, их моды, медианы и средние значения не совпадают из-за скошенной асимметричной формы L-образных кривых. Президент Буш извлек из этого немалую пользу, заявив в 2003 году, что сокращение налогов позволило каждой семье сэкономить в среднем 1586 долларов[92]. Хотя математически это верно, здесь он к своей выгоде взял за основу среднее значение вычета, под которым скрывались огромные вычеты в сотни тысяч долларов, полученные 0,1% богатейшего населения страны. Известно, что «хвост» в правой части распределения дохода следует степенно́й зависимости, и в подобной ситуации использование средней величины вводит в заблуждение, поскольку она далека от своего реального значения. В действительности большинству семей вернули менее 650 долларов. В данном распределении медиана значительно меньше, чем среднее значение.

Этот пример демонстрирует важнейшее свойство распределений степенно́й зависимости: они имеют «тяжелые хвосты» по сравнению по крайней мере с маленькими «жидкими хвостиками» нормального распределения. Подобные большие хвосты хотя и редкость, но встречаются чаще в распределениях данных, чем обычные колоколообразные кривые.

В «черный понедельник», 19 октября 1987 года, промышленный индекс Доу-Джонса упал на 22%. По сравнению с обычным уровнем нестабильности на фондовом рынке это падение составило более двадцати стандартных отклонений. Согласно традиционной статистике (в которой используется нормальное распределение), подобное событие практически невозможно: его вероятность составляет менее чем один случай на 100 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 (10 в 50 степени). Однако это произошло — поскольку колебания цен на фондовом рынке[93] не соответствовали нормальному распределению. Для их описания лучше подходят распределения с «тяжелым хвостом».

Подобное происходит с землетрясениями, пожарами и наводнениями, что усложняет страховым компаниям задачу управления рисками. Такая же математическая модель описывает число погибших в результате войн и террористических атак, а также другие, гораздо более мирные вещи, такие как количество слов в романе или число сексуальных партнеров у человека.

Хотя прилагательные, используемые для описания длинных хвостов, выставляют их в не слишком выгодном свете, «хвостатые» распределения гордо несут свои хвосты. Жирный, тяжелый и длинный? Да, это так. Но в таком случае покажите, какой нормальный?

Шансы — это... 23

Вам когда-нибудь снился страшный сон, будто вам нужно сдать экзамен по предмету, который вы не изучали? Преподавателям обычно снятся «противоположные» сны: что они читают лекцию по дисциплине, о которой ничего не знают.

Такое случается со мной, когда я веду курс теории вероятностей[94]. Меня никогда ей не учили, и то, что мне приходится читать лекции по этому предмету, — страшно, смешно и очень похоже на дом с привидениями в парке развлечений.

Однако чаще всего мое сердце колотится, когда я сталкиваюсь с темой условной вероятности, то есть вероятности того, что некое событие А произойдет при условии, что произойдет некое событие В. Это скользкое понятие легко спутать с вероятностью наступления В при условии А. Однако это разные вещи, и нужно быть очень внимательным при вычислении их вероятностей. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Прежде чем отправиться на недельный отдых, вы просите приятеля поливать ваши комнатные цветы, которые и так еле живы. Если их не поливать, то вероятность того, что они погибнут, составит 90%. Если поливать регулярно, то вероятность их гибели будет равна 20%. Вероятность того, что ваш друг забудет их полить, составляет 30%. Вопрос А: какова вероятность того, что ваши растения не погибнут за эту неделю?

Вопрос B: если по возвращении вы обнаружите, что они засохли, какова вероятность того, что ваш друг забыл их полить? Вопрос C: если ваш друг забыл их полить, какова вероятность того, что они погибнут к вашему возвращению? Хотя вопросы B и C звучат похоже, они разные. В действительности в условии задачи уже содержится ответ на вопрос C — 90%. Однако как учесть все вероятности, чтобы получить ответы на вопросы B и A?[95]

Естественно, на протяжении нескольких первых семестров преподавания этой темы я засел за книги и стал делать медленные, но верные успехи. И постепенно начал кое-что замечать. Многие мои студенты не использовали теорему Байеса, которой я их обучал, а решали задачу равноценным способом, казавшимся им более простым.

Открытия, год за годом совершаемые изобретательными студентами, стали для меня лучшим способом размышления над условными вероятностями. В предложенных способах решения студенты прибегали к помощи интуиции, вместо того чтобы отвергать ее. Трюк состоял в том, чтобы мыслить натуральными числами, а не абстрактными категориями, такими как процентное соотношение, шансы или вероятности. Как только вы перестроите свое сознание, туман рассеется.

Это главная идея захватывающей книги Calculated Risks («Просчитанные риски») Герда Гигеренцера, когнитивного психолога из Института человеческого развития Макса Планка в Берлине. В ряде исследований, посвященных медицинским и правовым проблемам, от консультаций больных СПИДом до анализа ДНК по отпечаткам пальцев, Гигеренцер изучает заблуждения при подсчетах рисков и неопределенности. Однако вместо того чтобы брюзжать и оплакивать человеческую слабость, он демонстрирует, как избежать заблуждений, переводя задачи условной вероятности на язык натуральных чисел, подобно тому как это делали мои студенты.

В одном из исследований Гигеренцер и его коллеги проводили опрос врачей в Германии и США, в ходе которого просили оценить вероятность того, что женщина с положительной маммографией больна раком груди, даже если она входит в группу с низким уровнем риска, то есть ее возраст от 40 до 50 лет, отсутствуют симптомы и наследственная предрасположенность[96]. Чтобы конкретизировать вопрос, врачей также просили привести следующую статистику в процентах и степени вероятности: данные о распространенности рака груди среди женщин этой категории, а также о чувствительности маммографии и вероятности ложноположительных результатов.

> Вероятность того, что у одной из этих женщин рак груди, составляет 0,8%. Если же женщина действительно больна, то вероятность того, что ее маммография будет положительной, равна 90%. Тем не менее, если женщина здорова, вероятность того, что ее маммография окажется положительной, составляет 7%. Допустим, у женщины положительная маммография. Какова вероятность того, что она действительно больна раком груди?

Гигеренцер описывает реакцию первого опрошенного им врача, заведующего отделением университетского госпиталя, имеющего более тридцати лет профессионального опыта.

> Было очевидно, что он очень нервничал, пытаясь проанализировать все цифры. И в конечном итоге пришел к выводу, что вероятность того, что у женщины рак груди, при условии положительной маммографии, составляет 90%. Он нервно добавил: «Боже, полный абсурд. Я не могу с этим согласиться. Попробуйте задать вопрос моей дочери, она учится на врача». Он знал, что его оценка ошибочна, однако не знал, как это аргументировать. Потратив 10 минут на обдумывание ответа, он не смог просчитать, какое заключение сделать из имеющихся вероятностей.

Гигеренцер задал тот же вопрос двадцати четырем немецким врачам; их оценки варьировались от 1 до 90%. Восемь посчитали, что вероятность составляет 10 и менее процентов, еще восемь назвали результат 90%, а предположения еще восьмерых колебались в пределах 50–80%. Представьте, каково было бы пациентке слышать столь противоречивые мнения.

Что касается американских врачей, девяносто пять из ста решили, что вероятность того, что женщина больна, равна примерно 75%.

Правильный ответ: 9%.

Как получилось, что процент столь низкий? Гигеренцер утверждает, что анализ становится практически прозрачным, если перевести исходную информацию из процентного соотношения и вероятностей в натуральные числа возможных исходов.

> У восьми женщин из тысячи рак груди, причем у семи из них положительная маммография. Среди оставшихся 992 женщин положительную маммографию будут иметь примерно 70. Возьмем женщин, обследование которых дало положительный результат. Сколько из них действительно больны раком груди?

Так как всего в группу риска попало 77 (7 + 70 = 77) женщин — но только семь из них на самом деле больны раком груди, — вероятность того, что у женщины рак груди, при условии положительной маммографии, составляет 7 из 77, или 1 из 11, то есть примерно 9%.

Отметим два упрощения в приведенных выше подсчетах. Во-первых, мы округлили десятые доли до целых чисел. Так бывает в случаях, подобных тому, где мы сказали «Из восьми женщин, больных раком груди, семь имеют положительную маммографию». В действительности надо было сказать: 90% из 8 женщин, или 7,2. Таким образом, мы немного пожертвовали точностью для большей ясности изложения.

Во-вторых, мы исходили из того, что все происходит именно с той частотностью, которая предполагается данной вероятностью. Например, поскольку вероятность рака груди составляет 0,8%, мы предположили, что им больны именно 8 женщин из 1000 нашей гипотетической выборки. Но эти цифры могут не совпадать с реальностью. События не обязаны соответствовать вероятности своего наступления, ведь, если подбросить монетку 1000 раз, необязательно 500 раз выпадет орел. Но, решив, что так и будет, мы получим правильный ответ для подобных задач.

Обычно такая логика считается несколько сомнительной, поэтому ученые мужи смотрят свысока на данный подход в сравнении с более строгой, но сложной в использовании теоремой Байеса. Однако ясность ответа является достаточным аргументом для его применения. Когда Гигеренцер провел повторный опрос еще среди двадцати четырех врачей, на этот раз используя целочисленные вероятности, практически все ответили правильно.

Хотя перевод данных в натуральные числа возможных исходов оказывает нам огромную услугу, задачи по условной вероятности могут ставить в тупик по другим причинам[97]. Здесь существует опасность неверной постановки вопроса или подсчета правильной, но вводящей в заблуждение вероятности.

Этим грешили как обвинение, так и защита во время судебного процесса над О. Дж. Симпсоном в 1994–1995 годах[98]. Обе стороны попросили суд рассмотреть ложную условную вероятность.

Обвинение в течение первых десяти дней процесса доказывало, что Симпсон неоднократно проявлял насилие в отношении своей бывшей жены Николь Браун: регулярно избивал, унижал и прилюдно раздевал, говоря окружающим: «Это принадлежит мне». Однако каким образом эти действия относились к процессу об убийстве? Аргументом обвинения было то, что насилие в семье выступало как мотив убийства. По словам одного из обвинителей, «удар — это прелюдия убийства».

Защитник обвиняемого Алан Дершовиц[99] приводил доводы, что даже если бы голословные утверждения о домашнем насилии оказались правдой, они не относятся к делу и, следовательно, недопустимы. Позднее он написал: «Нам необходимо было доказать, что среди тех, кто избивает своих партнеров, лишь ничтожно малое число, менее 1 из 2500, совершают убийство».

В действительности же обе стороны просили суд рассмотреть вероятность того, что Симпсон убил бывшую жену, принимая во внимание тот факт, что при жизни он ее избивал. Однако специалист в области статистики И. Гуд отметил, что для этого не существует верного доказательства, на которое можно было бы сослаться.

Вопрос на самом деле в следующем: какова вероятность того, что муж убил свою бывшую жену, если до убийства он ее бил и она была кем-то убита? Условная вероятность в таком случае очень далека от схемы 1 на 2500.

Чтобы разобраться почему, представим себе выборку из 100 тысяч избитых женщин. Ссылаясь на предоставленные Дершовицем цифры — 1 из 2500, допустим, что примерно сорок из этих женщин были убиты мужьями в этом году (поскольку 100 000 разделить на 2500 равно 40). Можно также предположить, что еще трое из них убиты кем-либо другим[100] (эта оценка основана на статистике ФБР, касающейся количества женщин, убитых в 1992 году). Итак, из этих 43 жертв 40 были убиты теми, кто их избивал. Другими словами, в 93% случаев убийцей являлось лицо, избивавшее женщину.

Не путайте это число с вероятностью того, что это сделал Симпсон. Она зависит от множества других обстоятельств, от разных «за» и «против». Например, от заявления защиты о том, что полиция выдвинула Симпсону ложные обвинения, а также от заявления обвинения, что убийца и Симпсон носили одинаковую обувь, перчатки и имели почти одинаковый код ДНК.

Какова вероятность того, что что-нибудь из перечисленного изменит ваше мнение о вынесенном приговоре? Ноль.

Распутывание всемирной паутины 24

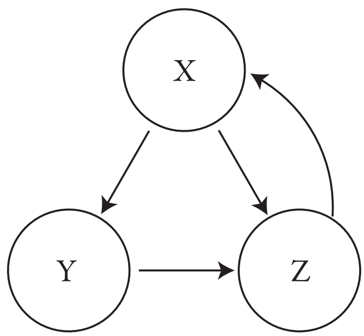
В ТЕ ДАЛЕКИЕ времена, когда Google еще не существовало, поиск в сети был безнадежным занятием[101]. Сайты, предлагаемые старыми поисковыми машинами, часто не соответствовали запросу, а те, которые содержали нужную информацию, были либо глубоко запрятаны в списке результатов, либо вообще отсутствовали.

Алгоритмы на основе анализа ссылок решили проблему, проникнув в суть парадокса, подобного коанам дзен: в результате поиска в интернете должны были отображаться лучшие страницы. А что же, кузнечик[102], делает страницу лучшей? Когда на нее ссылаются другие не менее хорошие страницы.

Звучит подобно рассуждениям про замкнутый круг.[103] Так и есть. Именно поэтому все настолько сложно. Ухватившись за эту идею и превратив ее в преимущество, алгоритм анализа ссылок дает решение поиска в сети в стиле джиу-джитсу.

Этот подход построен на идеях, взятых из линейной алгебры[104], изучения векторов и матриц. Если вы хотите выявить закономерности в огромном скоплении данных или выполнить гигантские вычисления с миллионами переменных, линейная алгебра предоставит для этого все необходимые инструменты[105]. С ее помощью был построен фундамент для алгоритма PageRank[106], положенного в основу Google. Она также помогает ученым классифицировать человеческие лица[107], провести анализ голосования в Верховном суде[108], а также выиграть приз Netflix[109] (вручаемый команде, сумевшей улучшить более чем на 10% систему Netflix, на основе которой составляются рекомендации для просмотра лучших фильмов).

Чтобы изучить линейную алгебру в действии, рассмотрим, как работает алгоритм PageRank. А чтобы выявить его сущность без лишней суеты, представим игрушечную паутину, состоящую всего из трех страниц, связанных между собой следующим образом:



Стрелки указывают, что страница X содержит ссылку на страницу Y, однако Y не отвечает ей взаимностью. Наоборот, Y ссылается на Z. Тем временем X и Z ссылаются друг на друга, сцепившись между собой цифровыми лапками.

Какие страницы самые важные в этой маленькой паутине? Вы можете подумать, что это невозможно определить из-за недостатка информации об их содержимом. Но такой способ мышления устарел. Беспокойство по поводу контента вылилось в неудобный способ ранжирования страниц. Компьютеры мало понимают в смысловом наполнении, а люди не справляются с тысячами новых страниц, которые каждый день появляются в сети.

Подход, придуманный Ларри Пейджем и Сергеем Брином, аспирантами университета и основателями Google, состоял в том, чтобы позволить страницам самим ранжироваться в определенном порядке, голосуя ссылками. В приведенном выше примере страницы X и Y ссылаются на Z, благодаря чему Z становится единственной страницей с двумя входящими ссылками. Следовательно, она и будет самой популярной страницей в данной среде. Однако если ссылки поступают со страниц сомнительного качества, они станут работать против себя. Популярность сама по себе ничего не значит. Главное — иметь ссылки с хороших страниц.

И здесь мы снова оказывается в замкнутом круге. Страница считается хорошей, если на нее ссылаются хорошие страницы, но кто изначально решает, какие из них хорошие?

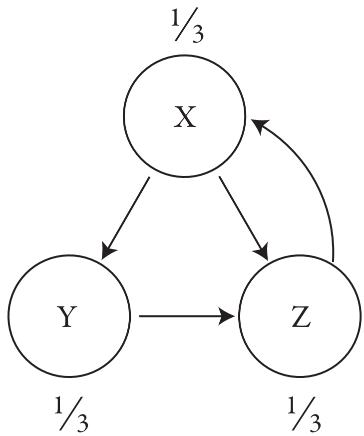
Это решает сеть. Вот как все происходит. (Далее я буду пропускать некоторые подробности, изложенные в примечании 110.)

Алгоритм Google назначает для каждой страницы дробное число от 0 до 1. Это численное значение называется PageRank и измеряет «важность» страницы по отношению к другим, высчитывая относительное количество времени, которое гипотетический пользователь потратит на ее посещение. Хотя пользователь может выбирать более чем из одной исходящей ссылки, он выбирает ее случайно с равной вероятностью. При таком подходе страницы считаются более авторитетными, если они чаще посещаются.

А поскольку индексы PageRank определяются как пропорции, их сумма по всей сети должна составлять 1. Этот закон сохранения предполагает другой, возможно, более осязаемый способ визуализации PageRank. Представьте его как жидкое вещество, текущее по сети, количество которого уменьшается на плохих страницах и увеличивается на хороших. С помощью алгоритма мы пытаемся определить, как эта жидкость распределяется по интернету на протяжении длительного времени.

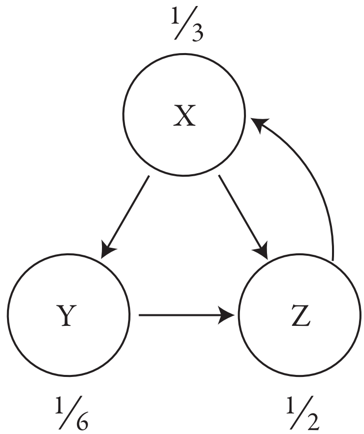
Ответ получим в результате многократно повторяющегося следующего процесса. Алгоритм начинается с некоего предположения, затем обновляет все значения PageRank, распределяя жидкость в равных частях по исходящим ссылкам, после этого она проходит несколько кругов, пока не установится определенное состояние, при котором страницы получат причитающуюся им долю.

Изначально алгоритм задает равные доли, что позволяет каждой странице получить одинаковое количество PageRank. В нашем примере три страницы, и каждая из них начинает движение по алгоритму со счетом 1/3.



Начальные значения PageRank

Затем счет обновляется, отображая реальное значение каждой страницы. Правило состоит в том, что каждая страница берет свой PageRank с последнего круга и равномерно распределяет его по всем страницам, на которые ссылается. Следовательно, обновленное значение страницы X после прохождения первого круга по-прежнему равно 1/3, поскольку именно столько PageRank она получает от Z, единственной страницы, которая на нее ссылается. При этом счет страницы Y уменьшается до 1/6, так как она получает только половину PageRank от X после предыдущего круга. Вторая половина переходит к странице Z, что делает ее победителем на данном этапе, поскольку она добавляет себе еще 1/6 от страницы X, а также 1/3 от Y, и всего получается 1/2. Таким образом, после первого круга мы имеем следующие значения PageRank:



Значения PageRank
после одного обновления

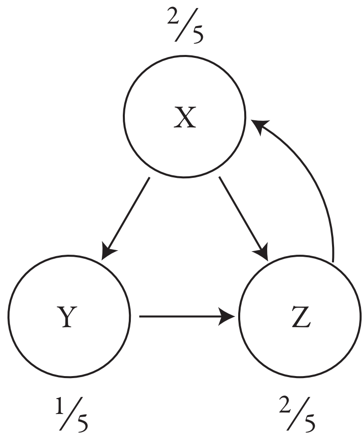
В последующих кругах правило обновления остается прежним. Если обозначить через x, y, z текущий счет страниц X, Y и Z, то в результате обновления получим такой счет:

$$x' = z$$
$$y' = \tfrac{1}{2}x$$
$$z' = \tfrac{1}{2}x + y,$$

где штрихи говорят о том, что произошло обновление. Подобные многократно повторяющиеся вычисления удобно выполнять в электронной таблице (или вручную, если сеть маленькая, как в нашем случае).

После десяти повторений обнаружим, что от обновления к обновлению цифры практически не меняются. К этому моменту доля X составит 40,6% от всего PageRank, доля Y — 19,8%, а Z — 39,6%. Эти значения подозрительно близки к числам 40, 20 и 40%, что говорит о том, что алгоритм должен к ним сходиться.

Так и есть. Эти предельные значения алгоритм Google и определяет для сети как PageRank.



Предельные значения PageRank

Вывод для данной маленькой сети такой: страницы X и Z одинаково важны, несмотря на то что у Z в два раза больше входящих ссылок. Это и понятно: страница X равна Z по значимости, поскольку она получает от нее полное одобрение, однако взамен дает ей лишь половину своего одобрения. Вторая половина отправляется Y. Это также объясняет, почему Y достается только половина от долей X и Z.

Интересно, что эти значения можно получить, не прибегая к многократным итерациям. Надо просто подумать над условиями, определяющими стационарное состояние. Если после очередного обновления ничего не меняется, то $x' = x$, $y' = y$ и $z' = z$. Поэтому, заменив переменные со штрихом в уравнениях обновлений на их эквиваленты без штрихов, получим систему уравнений

$$x = z$$
$$y = \tfrac{1}{2}x$$
$$z = \tfrac{1}{2}x + y,$$

при решении которой $x = 2y = z$. Поскольку сумма значений x, y и z должна равняться 1, отсюда следует, что $x = 2/5$, $y = 1/5$ и $z = 2/5$, что соответствует ранее найденным значениям.

Давайте на мгновение вернемся назад и посмотрим, как все это вписывается в широкий контекст линейной алгебры. Приведенное выше уравнение стационарного состояния, так же как и уравнения обновления, содержащие штрихи, — типичные примеры линейных уравнений. Они называются линейными, поскольку описывают прямые линии: переменные x, y, z в этих уравнениях в первой степени, так же как и в знакомом нам из курса алгебры средней школы уравнении прямой $y = mx + b$.

Линейные уравнения, в противоположность уравнениям, содержащим нелинейные члены, например x^2 или yz, либо $\sin x$, решаются относительно просто. Сложности начинаются там, где в уравнениях присутствует огромное количество переменных, как это происходит в реальной сети. Поэтому одной из центральных задач линейной алгебры является разработка более быстрых алгоритмов для решения больших систем уравнений. Даже незначительные усовершенствования этих алгоритмов ощущаются практически во всех сферах жизни — от расписания авиарейсов до сжатия изображения.

Однако самой существенной победой линейной алгебры, с точки зрения ее роли в повседневной жизни, безусловно, стало решение парадокса дзен-буддизма для ранжирования страниц. «Страница хороша в той мере, в какой хорошие страницы ссылаются на нее». Переведенный в математические символы, этот критерий становится алгоритмом PageRank.

Поисковик Google стал тем, чем он есть сегодня, после решения уравнения, которое и мы с вами только что решили, но с миллиардами переменных — и, соответственно, с миллиардными прибылями.

Часть VI ГРАНИЦЫ ВОЗМОЖНОГО

Самые одинокие числа 25

Как поется в знаменитой песне 1960-х годов, один — самое одинокое число[111], хотя, вдвоем порой бывает еще хуже, чем одному. Возможно, так и есть, но и с простыми числами тоже все непросто.

Паоло Джордано объясняет почему в своем бестселлере The Solitude of Prime Numbers («Одиночество простых чисел»)[112]. Это меланхолическая история любви двух затерянных в жизни людей, двух простых чисел, Маттиа и Аличе. В детстве им пришлось пережить трагедию, вследствие которой они практически перестали общаться с окружающими, но нашли друг в друге родственные души. Джордано пишет.

> Простые числа делятся только на единицу и самих себя. Они занимают свое место в бесконечном ряду простых чисел, которые, как и остальные числа, зажаты между двумя другими, но на один шаг дальше, чем предыдущие. Эти числа подозрительны и одиноки, и Маттиа казалось, что они волшебные. Иногда он думал, что они очутились в этом ряду по ошибке, как жемчужины, нанизанные на нитку ожерелья. А порой ловил себя на мысли, что они тоже предпочли бы быть обычными числами, однако по какой-то причине не сложилось. [...]
>
> Учась на первом курсе университета, Маттиа узнал, что среди простых чисел есть еще более причудливые экземпляры.

Математики называют их простыми числами-близнецами: это пара близлежащих друг к другу чисел, находящихся почти рядом, но между ними всегда стоит четное число, которое не дает им по-настоящему воссоединиться. Это, например, числа 11 и 13, 17 и 19, 41 и 43. Если набраться терпения и продолжить считать дальше, то вы увидите, что постепенно такие пары встречаются все реже. Вы сталкиваетесь с простыми числами, которые становятся все более одинокими, потерянными в этом молчаливом, измеренном пространстве, состоящем только из цифр, и у вас возникает тяжелое предчувствие того, что предыдущие пары чисел были случайными, и их истинное предназначение — одиночество. Потом, когда вы уже готовы сдаться и вам больше не хочется считать, вы встречаете еще одну пару близнецов, крепко держащихся друг за друга. Среди математиков существует убеждение, что, как бы далеко ты ни зашел, всегда можно найти еще пару чисел, даже если никто точно не знает, где они будут обнаружены.

Маттиа думал, что они с Аличе похожи на эти простые числа-близнецы, одинокие и потерянные, близкие, но не до такой степени, чтобы прикоснуться друг к другу.

Здесь я хотел бы остановиться на нескольких красивых идеях из приведенного отрывка, в частности на моменте, касающемся одиночества простых чисел и простых чисел-близнецов. Эти проблемы — центральные в теории чисел[113], самой чистой области математики, изучающей целые числа и их свойства.

Однако прежде чем подняться в облака, давайте разберемся с вопросом, который часто возникает у прагматиков. Есть ли какая-либо польза от теории чисел? Есть. Теория чисел представляет собой основу алгоритмов[114], ежедневно используемых, чтобы обеспечить безопасность проведения транзакций в интернете, а также для шифрования секретных переговоров, имеющих стратегическое значение. Эти алгоритмы построены на сложности разложения очень больших чисел на простые множители.

Но это не единственная причина, по которой математики так одержимы простыми числами. Истинная причина кроется в их фундаментальности. Простые числа — атомы арифметики. Согласно греческому происхождению слова «атом», простые числа являются «атомными», то есть «неделимыми». И подобно тому как все сложено из атомов, каждое число слагается из простых чисел. Например, 60 равно $2 \times 2 \times 3 \times 5$. Мы говорим, что 60 — это составное число, и его можно представить в виде произведения простых множителей 2 (дважды), 3 и 5.

А как быть с 1? Это простое число? Нет. И когда мы поймем это, то узнаем, почему 1 — самое одинокое число, даже более одинокое, чем любое простое число.

Оно не заслуживает того, чтобы принимать его во внимание. Учитывая то, что число 1 делится только на 1 и на само себя, его действительно можно считать простым числом, как это и было на протяжении многих лет. Однако современные математики решили удалить его из простых чисел исключительно ради удобства. Если бы число 1 принималось во внимание, оно нарушило бы ход доказательства теоремы, а ее хотелось бы считать верной. Другими словами, мы изменили определение простых чисел, чтобы получить желаемую теорему, согласно которой любое число можно разложить на множители из простых чисел единственным способом. Однако если рассматривать число 1 как простое, разложение на множители не будет единственным. Например, 6 равно 2×3, но оно также равно $1 \times 2 \times 3$, $1 \times 1 \times 2 \times 3$ и так далее, и нам пришлось бы согласиться, что все эти варианты правомочны. Конечно, это глупо, но мы были бы обречены на такие муки, если бы включили число 1 в состав простых чисел.

Эта маленькая грязная история весьма поучительна и приоткрывает завесу тайны над тем, как иногда делается математика. Наивно полагать, что мы создаем нерушимые определения, а затем выводим из них любые теоремы. Все не так просто. В данном случае при желании мы можем изменить формулировку, тем более что незначительная коррекция позволяет получить более чистую теорему.

Теперь, когда мы отбросили число 1, давайте посмотрим на другие, полноценные простые числа. Главное, что мы о них знаем, — они непостижимы и непроницаемы. Еще никто никогда не находил для них точной формулы. В отличие от настоящих атомов, они не следуют никакой простой модели и совсем не похожи на периодическую таблицу элементов.

Предупреждающие знаки сразу же можно увидеть уже в первых десяти простых числах: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Первое, что бросается в глаза, — их ряд начинается с нехорошего числа 2. Это число-чудак — самый большой неудачник. Оно единственное из простых чисел имеет несчастье быть четным. Неудивительно, что «это самое одинокое число после числа один» (как поется в песне).

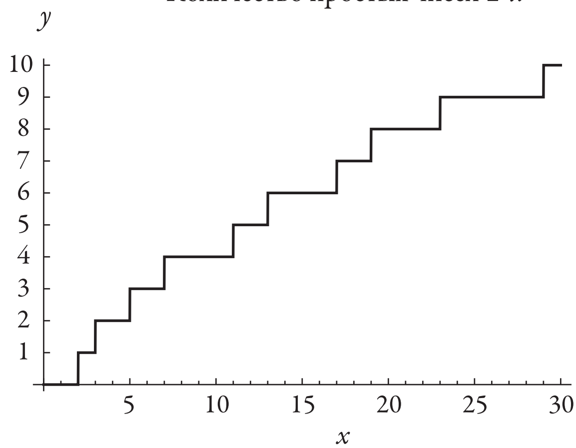
Кроме 2, все остальные простые числа нечетные — но все же странные. Посмотрите, какие между ними расстояния: иногда два интервала (как между числами 5 и 7), иногда четыре (13 и 17), а порой шесть (23 и 29).

Чтобы еще сильнее убедиться, насколько беспорядочно расположены простые числа, сравните их с их добропорядочными братьями — нечетными числами 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13... Интервалы между нечетными числами всегда одинаковы: два интервала, равномерные, как барабанная дробь. Таким образом, они подчиняются простой формуле: n-е нечетное число равно $2n - 1$. Простые числа, наоборот, маршируют под собственный барабан в ритме, который, кроме них, больше никто не слышит.

Учитывая нерегулярность интервалов между простыми числами, некоторые теоретики решили рассматривать их статистически, как членов некоей совокупности, вместо того чтобы искать их отличительные особенности. В частности, давайте посмотрим, как они распределяются среди обычных целых чисел. Сколько существует простых чисел, которые меньше либо равны 10? Или 100? Или произвольному числу N? Эта конструкция — прямой аналог статистического понятия функции распределения.

Представьте, что вы считаете простые числа, прогуливаясь между ними, подобно переписчику во время переписи населения. Изобразите их на оси x. Вы начинаете с числа 1 и идете вправо, подсчитывая простые числа, попадающиеся на пути. Ваш текущий результат будет выглядеть примерно так:

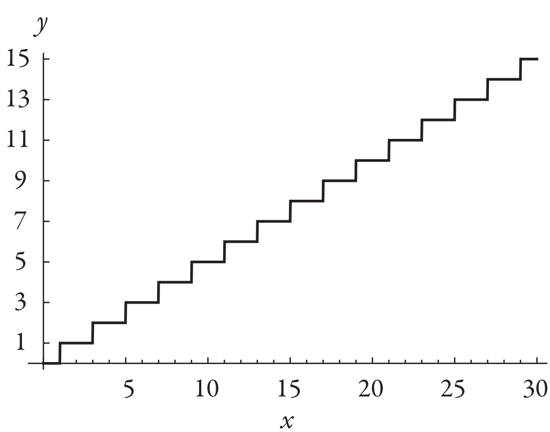
Количество простых чисел ≤ x



Значения на оси y показывают, сколько простых чисел вы насчитали, пока дошли до данного местоположения x. Для всех x меньше 2 значением на оси y будет 0, поскольку еще не попадались простые числа. Первое простое число появляется на отметке $x = 2$. И в этом месте график подскакивает вверх. (Попалось!) Затем он остается плоским до отметки $x = 3$, после чего делает скачок еще на один шаг. Такие чередования прыжков и горизонтальных отрезков образуют странную лестницу неправильной формы. Математики называют ее считающей функцией простых чисел.

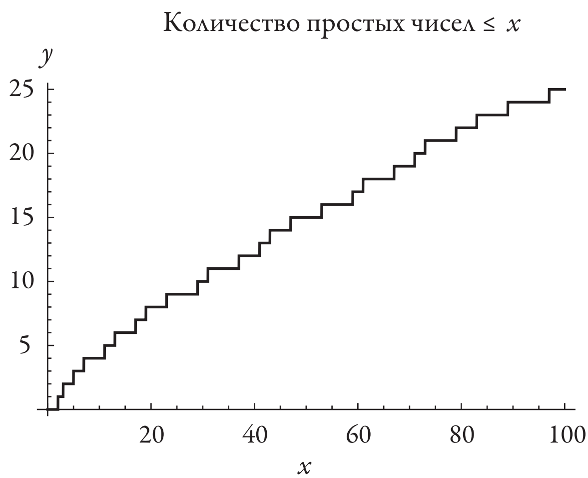
Сравните эту картину с аналогичной картиной для нечетных чисел.

Количество нечетных чисел ≤ x

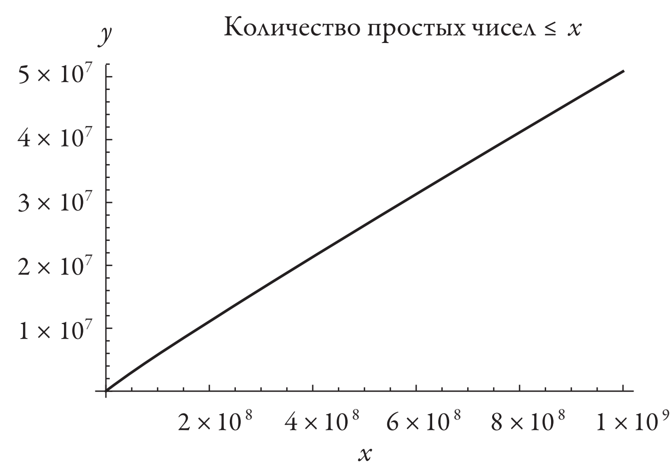


Здесь лестница идеально правильная, следуя линии с наклоном ½ — потому что интервал между соседними нечетными числами всегда равен 2.

Есть ли хоть какая-нибудь надежда найти что-нибудь подобное для простых чисел, несмотря на их блуждающий характер? Как это ни удивительно, есть. Ключ к разгадке в том, чтобы сосредоточиться на общей форме линии, а не на отдельных ступенях лестницы. Если мы уменьшим масштаб, из всей этой кажущейся неразберихи начнет вырисовываться кривая. Посмотрите на график функции нахождения всех простых чисел до 100.



Теперь мы меньше отвлекаемся на отдельные ступеньки. Кривая выглядит еще ровнее, если сосчитать все простые числа до миллиарда.



В противоположность первому впечатлению эта кривая *не является прямой* линией. По мере роста она слегка изгибается книзу. Такой изгиб означает, что простые числа становятся более редкими, изолированными и одинокими. Это то, что Джордано имел в виду, говоря про «одиночество простых чисел».

Такая разреженность кажется еще очевиднее, если посмотреть на данные «переписи» под другим углом. Помните, мы насчитали десять простых чисел среди первых тридцати целых чисел? Таким образом, там, где числовая прямая берет свое начало, примерно одно из трех чисел является целым, что составляет стабильные 33%. Однако среди первой сотни чисел простых только двадцать пять. Их ряды сократились до одного из четырех, составляя уже 25%, что вызывает беспокойство. А среди первого миллиарда чисел простых всего лишь 5%.

И это суровый вестник наклоняющейся кривой. Простые числа похожи на вымирающее поколение. Они никогда не исчезают полностью — со времен Евклида известно, что они никогда не заканчиваются, но почти целиком растворяются в обычных целых числах.

Найдя функции, которые приблизительно соответствуют этой наклоняющейся кривой, теоретики чисел измерили, насколько одиноки простые числа, и выразили в виде формулы типичное расстояние между ними. Если N — большое число, то средний интервал между простыми числами, ближайшими к N, приблизительно равен $\ln N$, то есть натуральному логарифму от N. (Натуральный логарифм ведет себя так же, как и обычный десятичный логарифм, изучаемый в средней школе, но в его основе лежит число e, а не 10. Он является натуральным в том смысле, что повсюду встречается в высшей математике, входя в окружение числа e. Подробнее о повсеместном использовании числа e читайте в главе 19.)

Хотя формула $\ln N$ для вычисления среднего промежутка между простыми числами не слишком хорошо работает для малых N, ее эффективность улучшается при приближении N к бесконечности, где ошибка формулы в процентном соотношении приближается к нулю. Чтобы получить представление об этих числах, допустим, что $N = 1000$. Выясняется, что существует 168 простых чисел меньше 1000 и что средний промежуток между ними в этой части числовой прямой составляет 1000/68, или примерно 5,9. Для сравнения, согласно формуле средний интервал должен равняться $\ln(1000) \approx 6{,}9$, что превышает реальное значение примерно на 17%. Но если мы пойдем дальше, скажем, для $N = 1\,000\,000\,000$, то реальный и вычисленный по формуле интервалы составят 19,7 и 20,7 соответственно, и разность между ними будет примерно 5%.

Формула $\ln N$, где N стремится к бесконечности, сегодня известна как теорема простых чисел[115]. Она впервые была записана (но не опубликована) Карлом Гауссом[116] в 1792 году, когда ему было всего пятнадцать лет. (Видите, на что способен ребенок, лишенный развлечений в виде игровой приставки?)

Что же касается других молодых людей, о которых шла речь в этой главе, Маттиа и Аличе, то, я надеюсь, вы оценили, насколько это захватывающе, что два простых числа-близнеца[117] продолжают существовать в самых далеких пространствах числовой прямой, «в этом молчаливом измеренном пространстве, состоящем только их цифр». Против них ополчилась целая армия нечетных чисел. Согласно теореме простых чисел, любое отдельно взятое простое число, находящееся вблизи N, не имеет права ожидать, что его потенциальный друг приблизится к нему ближе чем на $\ln N$ и пропасть между ними намного превышает 2, если N — большое число.

Но все-таки некоторые пары побеждают нечетные числа. Компьютеры нашли простые числа-близнецы в невероятно отдаленных областях числовой прямой. Где-то вдали уютно устроилась самая большая известная пара двух чисел, каждое из которых состоит из 100 355 десятичных цифр.

Согласно гипотезе о простых числах, подобные пары будут появляться всегда.

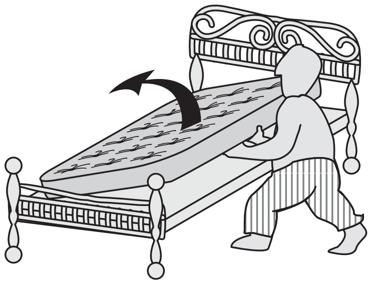
Так не попробовать ли нам поискать поблизости от этих чисел еще какую-нибудь парочку простых чисел[118], чтобы сообразить с ними на четверых? Удачных поисков!

Групповое мышление 26

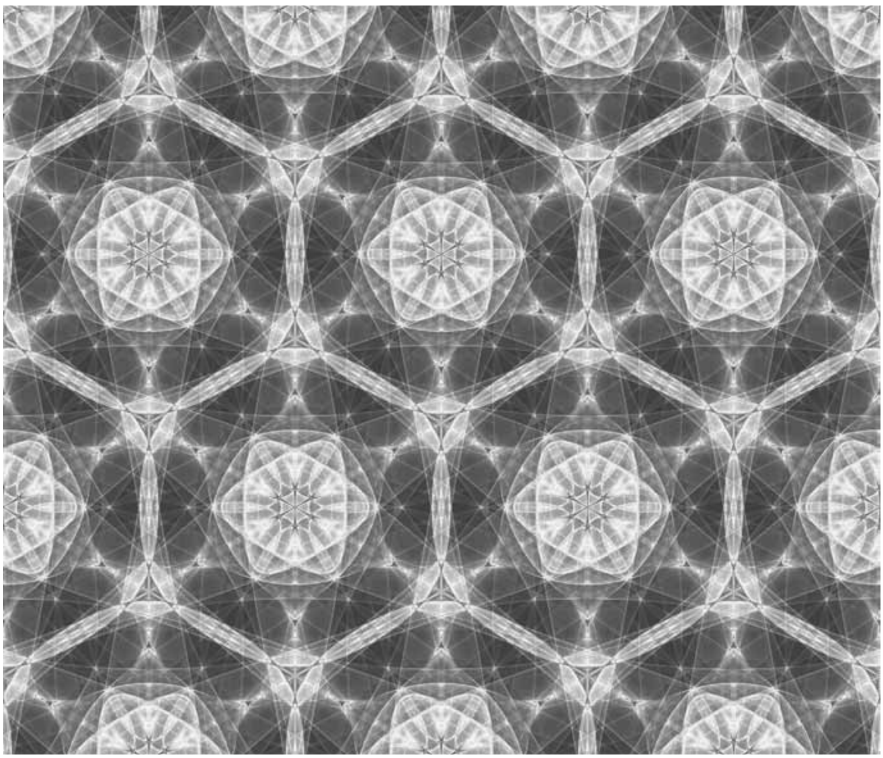
Мы с женой спим совершенно по-разному, и это видно по нашему матрасу. Она подминает под себя подушки, всю ночь ворочается, и матрас под ней практически не вдавлен. А я сплю на спине, в позе мумии, отчего на моей стороне кровати образуется впадина.

Производители кроватей рекомендуют периодически переворачивать матрас, вероятно, имея в виду таких людей, как я. Но как это лучше сделать? Как именно его надо переворачивать, чтобы он изнашивался максимально равномерно?

Брайан Хэйес изучает эту проблему на небольшом опыте, который описывает в книге Group Theory in the Bedroom («Теория групп в спальне»). Отбросим двусмысленности, поскольку «группа», о которой пойдет речь, представляет собой совокупность математических действий, то есть всех возможных способов переворачивания или разворачивания матраса, чтобы он при этом точно совпадал с каркасом кровати.



Надеюсь, подробное рассмотрение математики матраса[119] позволит вам получить более общее представление о теории групп[120], одном из самых многогранных разделов математики. Эта теория лежит в основе всего — от хореографии народного танца и фундаментальных законов физики элементарных частиц до мозаики Альгамбры с ее хаотичными элементами[121], показанными на этой картинке.



Как видно из этих примеров, теория групп — это связующее звено между искусством и наукой. Она обращается к тому, что является общим для этих двух областей — неизменному очарованию симметрии. Охватывая столь широкий круг явлений, теория групп неизбежно будет абстрактной. Она вскрывает саму сущность симметрии.

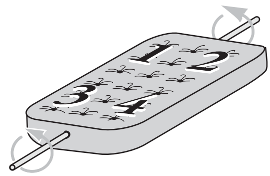
Обычно считается, что симметрия — свойство формы. Однако специалистов в области теории групп больше интересует, что можно *сделать* с формой, в частности все способы ее изменения, оставив при этом без изменений что-то другое. Точнее, они занимаются поиском всех преобразований, в результате которых форма остается неизменной при соблюдении ряда ограничений. Эти преобразования называются симметриями формы. Вместе взятые, они составляют группу, то есть совокупность изменений, чьи отношения определяют основную архитектуру формы.

В случае с матрасом преобразования приводят к изменению его положения в пространстве (в этом состоит изменение), однако при этом сохраняется его упругость (в этом состоит ограничение). В результате матрас должен идеально ложиться на каркас кровати (то, что остается неизменным). Взяв за основу перечисленные правила, рассмотрим, какие преобразования свойственны элементам этой замечательной маленькой группы. Оказывается, их всего четыре.

Первое состоит в том, чтобы ничего не делать, — отличный выбор для лентяев, предпочитающих не трогать матрас. Несомненно, такое преобразование удовлетворяет всем правилам, однако вряд ли продлит жизнь матраса. Тем не менее чрезвычайно важно включить его в группу. Оно играет в теории групп такую же роль, как 0 в сложении чисел и 1 в умножении. Математики называют его нейтральным (или единичным) элементом, я обозначу его символом I.

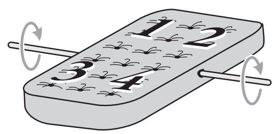
При следующих трех способах действительно придется переворачивать матрас. Чтобы различать их, приклеим на углы матраса этикетки с номерами.

Картинка, на которой изображен первый способ переворачивания, находится в начале главы. На ней симпатичный мужчина в полосатой пижаме пытается перевернуть матрас на 180 градусов. Этот горизонтальный переворот обозначим как H.



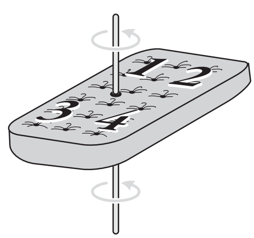
Горизонтальное переворачивание

Вертикальный переворот обозначим как V. При этом маневре матрас сначала находится в вертикальном положении, так что почти достает до потолка, а затем опрокидывается на другую сторону. Помимо грохота, который вы наделаете, чистым результатом вашего действия станет поворот матраса на 180 градусов вокруг поперечной оси, как показано ниже.



Вертикальное переворачивание

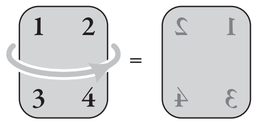
Наконец, можно повернуть матрас на пол-оборота, не поднимая его с кровати.



Поворот

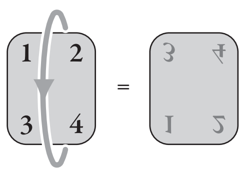
В отличие от переворачиваний H и V, при повороте R верхняя поверхность матраса остается вверху.

Теперь посмотрим на матрас, чтобы понять, в чем разница между его переворотами. Представим себе, что он полупрозрачный, взглянем на него сверху и проверим числа в углах матраса после каждой из возможных трансформаций. При горизонтальном переворачивании получаем зеркальное отражение чисел. Они тоже изменили порядок, поскольку числа 1 и 2 и 3 и 4 поменялись местами.



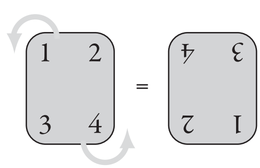
Горизонтальное переворачивание

При вертикальном переворачивании порядок чисел тоже изменился, но по-другому: они, помимо своего зеркального отражения, еще и перевернулись вверх тормашками.



Вертикальное переворачивание

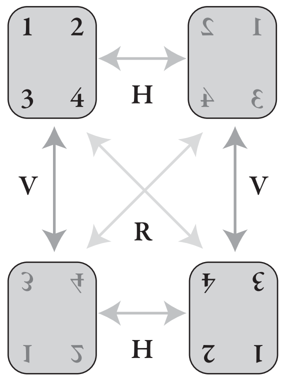
При вращении зеркального отражения не получается, а числа повернулись кверху вниз, и там, где была 1, теперь 4, а вместо 2 появилось 3.



Поворот

Однако это лишь детали. Самое главное — как эти преобразования соотносятся друг с другом. В схемах их взаимодействия зашифрована симметрия матраса.

Чтобы выявить их с минимальными усилиями, нарисуем следующую диаграмму.



В углах схемы изображены четыре возможных положения матраса. Картинка в левом верхнем углу является точкой отсчета. Стрелка указывает на движения, совершаемые матрасом при переходе из одного положения в другое.

Например, стрелка, ведущая из верхнего левого угла к нижнему правому, описывает вращение R. Она двусторонняя, поскольку, если выполнить действие R дважды, это будет равносильно возврату в исходное положение.

Данное свойство поворота можно описать уравнением $RR = I$, где RR означает «дважды выполнить действие R», а I является нейтральным элементом, означающим отсутствие действия. При горизонтальном и вертикальном переворачивании тоже происходит отмена этих преобразований: $HH = I$ и $VV = I$.

На схеме также представлено много другой информации. Например, здесь показано, что рискованное вертикальное переворачивание V эквивалентно действию HR, горизонтальному переворачиванию, сопровождаемому поворотом. Этот путь к аналогичному результату гораздо безопаснее. Данную последовательность действий можно записать в виде уравнения $HR = V$[122].

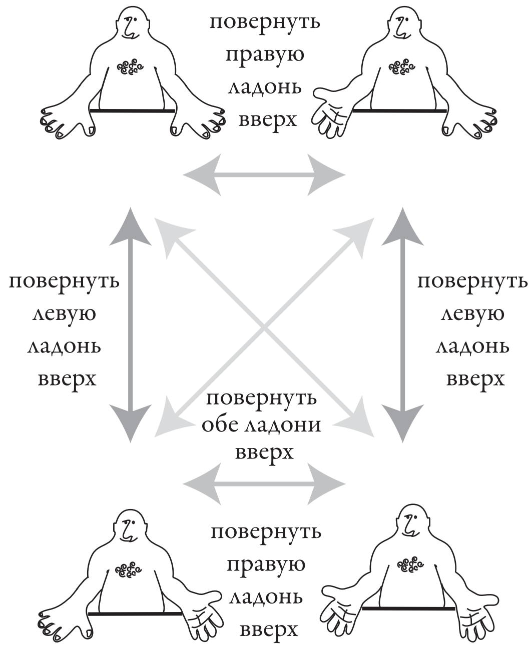
Следует также отметить, что порядок выполнения действий не имеет значения, поскольку $HR = RH$, и оба пути ведут к V. Это верно для любой другой пары действий. Вы можете подумать, что это подобно коммутативному (переместительному) закону для сложения обычных чисел x и y, согласно которому $x + y = y + x$. Однако будьте внимательны: группа в примере с матрасом — особый случай. Во многих других группах коммутативный закон нарушается. Подчиняющиеся ему группы-счастливчики будут особенно понятными и простыми.

А теперь итоги. Эта схема показывает, как добиться наиболее равномерного изнашивания матраса. Любая стратегия, примененная для всех четырех состояний, будет периодически работать. Например, чередование действий R и H удобно, а поскольку у нас есть возможность миновать шаг V, то нам не требуется много физических усилий. Чтобы напомнить о необходимости выполнять эти действия, некоторые производители дают такой совет: «весной — поворот, осенью — переворот».

Группа чисел, свойственная матрасу, иногда всплывает в самых неожиданных местах, начиная от симметрии молекул воды и заканчивая принципами действия пары электрических переключателей. В этом и состоит прелесть теории групп. Благодаря ей становится очевидным единство вещей, которые в других случаях кажутся не связанными между собой — как в анекдоте о том, как физик Ричард Фейнман получил отсрочку от призыва в армию[123].

Армейский психиатр попросил Фейнмана вытянуть вперед руки. Тот выполнил просьбу, выставив одну руку ладонью вверх, а вторую ладонью вниз. «Нет, по-другому», — сказал психиатр. Тогда Фейнман перевернул обе руки так, что одна ладонь опять оказалась вверху, а вторая внизу.

Фейнман не играл в игры разума, а просто решил немного пошутить в духе теории групп. Если рассмотреть все возможные способы вытягивания рук, а также различные переходы между ними, то стрелка образует такую же модель, как и в группе чисел матраса!



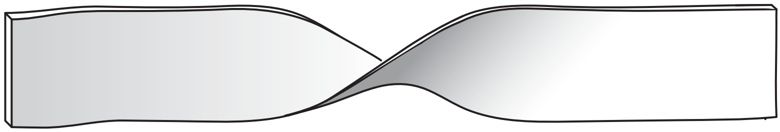
Однако все это слишком усложняет наши отношения с матрасами. Возможно, настоящий урок здесь тот, который вам и так известен: если вас что-нибудь беспокоит, ложитесь спать, и все пройдет.

Кручение и склеивание

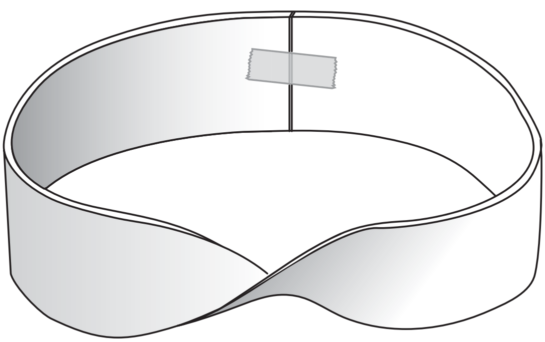
27

В нашей местной начальной школе существует традиция приглашать в класс родителей для разговоров с детьми. Благодаря этому ребята узнают о различных профессиях и многих вещах, которым их не учат в школе.

Когда пришла моя очередь, я явился в первый класс, где училась моя дочь, с сумкой, наполненной лентами Мебиуса[124]. Накануне вечером мы с женой нарезали длинные полоски из бумаги и скрутили каждый из них на пол-оборота, вот так:



а затем склеили концы полосок так, чтобы получились ленты Мебиуса.



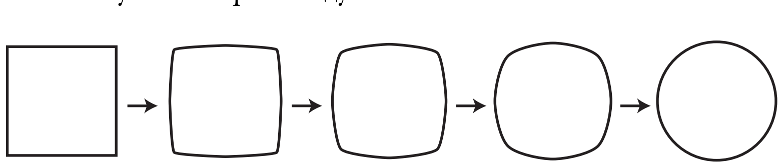
Для этого увлекательного занятия с формами для шестилетних детей требуются лишь ножницы, карандаши, скотч и немного любознательности.[125]

Когда мы с женой раздали ученикам ленты Мебиуса и указанные выше принадлежности, учитель спросил у детей, каким, по их мнению, предметом они сейчас занимаются. Один мальчик поднял руку и сказал: «Не уверен, каким именно, но точно знаю, что не языкознанием».

Конечно, учитель ожидал от него ответа «искусство» или, скорее, «математика». Однако лучшим ответом стала бы «топология»[126]. (В Итаке кто-нибудь из первоклассников обязательно бы такое выдал. Однако в том году ученик, чьи родители занимались топологией, учился в другом классе.)

Итак, что же такое топология? Это энергично развивающаяся отрасль современной математики, ответвление геометрии, но только более свободное. В топологии две формы рассматриваются как одна, если одна из них непрерывно переходит в другую в результате изгибов, кручения, растягивания или любой другой непрерывной деформации, но при этом ее нельзя разрывать или прокалывать. В отличие от жестких объектов в геометрии, объекты в топологии ведут себя так, как если бы были бесконечно гибкими или сделанными из идеальной резины.

Топология фокусирует внимание на самых глубинных свойствах формы, тех, которые не изменяются после непрерывной деформации. Например, две полоски резины, одна в форме квадрата, а вторая — круга, топологически неразличимы. Здесь не имеет значения, что у квадрата четыре угла и четыре прямые стороны. Эти свойства несущественны. При непрерывной деформации от них можно избавиться, округлив углы квадрата и изогнув его стороны в дуги.

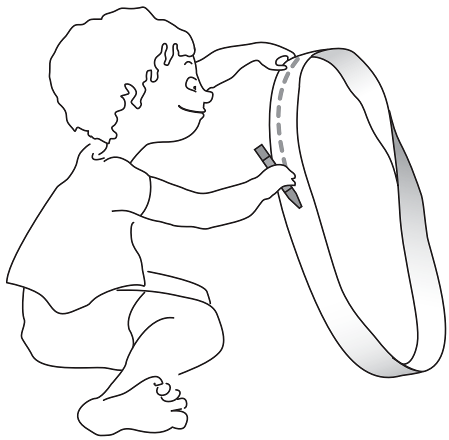


Но есть одна вещь, от которой подобная деформация избавиться не может — это свойственная кругу и квадрату замкнутость линии границы[127]. Обе фигуры ограничены замкнутыми кривыми. Это их общая топологическая сущность.

Подобно этому сущность ленты Мебиуса заключается в ее скрученности на пол-оборота, обеспечивающей форме ее особые свойства. Самое замечательное, что лента Мебиуса имеет только одну сторону и только один край. Другими словами, ее лицевая и обратная поверхности в действительности являются одним и тем же, так же как и ее верхний и нижний край. (Чтобы проверить это, просто ведите пальцем по середине ленты, пока не вернетесь в исходное положение.) Здесь благодаря полуобороту верхний и нижний край бумаги объединились в одну большую непрерывную кривую. Подобным образом объединились и обе стороны. Когда лента склеена, эти ее свойства фиксируются. Готовую ленту Мебиуса можно растягивать и скручивать, уже ничто не изменит того, что у нее одна сторона и один край.

Предложив первоклассникам исследовать вытекающие из этого удивительные свойства ленты Мебиуса, я хотел им продемонстрировать, насколько это интересно и увлекательно.

Сначала я попросил их взять карандаш и аккуратно провести линию посередине ленты. И они сосредоточенно стали рисовать нечто наподобие показанного здесь пунктира.



Сделав один оборот, они остановились, озадаченно переглядываясь. Потом стали шумно обсуждать, почему их линии не замкнулись, как ожидалось. Карандашная линия не вернулась в исходную точку, а оказалась на «другой» стороне поверхности. Это и был первый сюрприз: необходимо дважды пройти по ленте Мебиуса, чтобы добраться до исходной точки.

Внезапно один мальчик расплакался. Когда он обнаружил, что его карандаш не вернулся в исходное положение, он подумал, что сделал что-то не так. Сколько мы его ни убеждали, что он ничего не напутал и именно так и должно получиться, надо было просто пройти еще один круг, оказалось, уже поздно. Валяясь на полу, ребенок безутешно рыдал.

С некоторой опаской я предложил классу сделать еще одно дело — взять ножницы и разрезать ленту по всей длине по средней линии. «Как думаете, что выйдет в результате?» — спросил я у них.

«Они распадутся! Получится две части!» — предположили малыши. Но когда они попробовали, вышло нечто абсолютно невероятное (одна лента двойной длины), и возгласы радости и удивления стали еще громче. Это напоминало какой-то фокус.

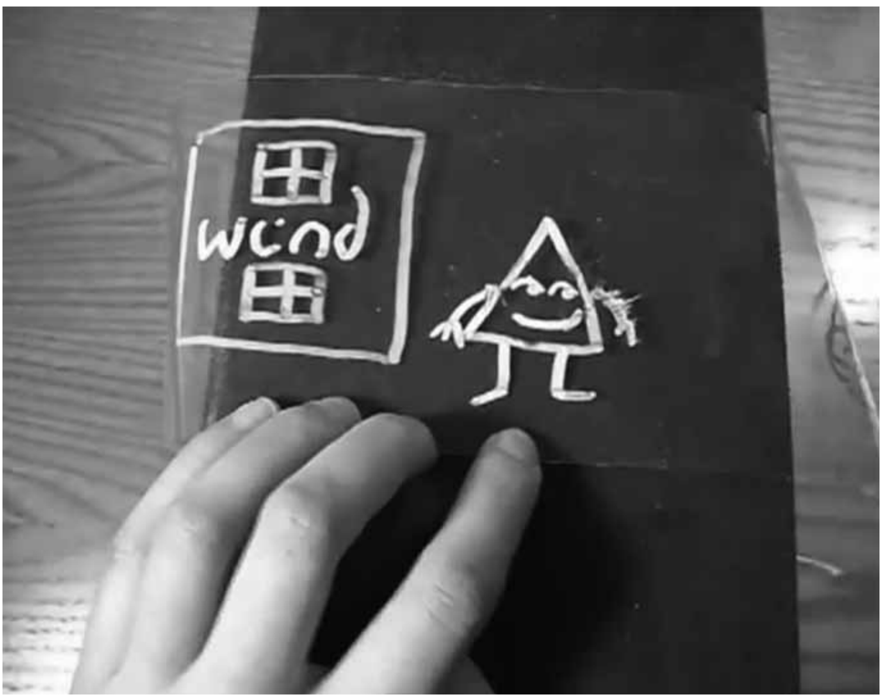
После этого внимание ребят уже было сложно удержать. Они полностью увлеклись собственными экспериментами, изготавливая всевозможные варианты лент Мебиуса, закрученные на два или три полуоборота, разрезая их на две, три или четыре части, создавая всевозможные скрученные петли, цепочки и узлы, причем все это сопровождалось возгласами: «Смотрите, что у меня получилось!» А я все не мог успокоить плачущего мальчугана. Полагаю, мой урок не первый довел кого-то из учеников до слез.

Виктория Харт была настолько разочарована унылыми вузовскими курсами математики, что стала прямо в классе заниматься всякими глупостями, рисуя змей, деревья и растянутых слонов и не слушая монотонно бубнившего учителя. Ви Харт, называющая себя «развлекательным матемузыкантом на полной занятости», разместила свои каракули на YouTube и вмиг стала знаменитой. Они были просмотрены сотни тысяч раз, а в случае со слонами — более миллиона. Сама Вики и ее видеоклипы совершенно захватывающие[128].

Два из моих любимых свойств ленты Мебиуса связаны с музыкой и историями Виктории. Самое непостижимое из них — «Музыкальная шкатулка Мебиуса», проигрывающая отрывок из мелодии Ви, навеянной книжками про Гарри Поттера.

Эта мелодия закодирована в серию отверстий, пробитых в перфоленте, которые затем подаются в обычную музыкальную шкатулку. Изобретение Ви состоит в том, что она скрутила концы ленты и склеила их в виде ленты Мебиуса. Вращая ручку музыкальной шкатулки, Ви прогоняла через нее ленту, и мелодия звучала как обычно. Но примерно через пятьдесят секунд (в ее видеоклипе) петля делала один оборот, и, поскольку это была лента Мебиуса, закрученная на пол-оборота, музыкальная шкатулка начинала воспроизводить мелодию, как если бы она была записана на обороте ленты, то есть в перевернутом виде. Та же мелодия повторялась, только теперь перевернутая. Высокие ноты становились низкими, а низкие — высокими. Они играются в том же порядке, но в перевернутом виде, из-за перекрученности ленты Мебиуса.

Еще более потрясающий пример «перевернутого» применения ленты Мебиуса — это «История ленты Мебиуса: Винди и мистер Уг», горько-сладкая притча о недоступной любви. Маленькая приветливая треуголочка по имени Винди, нарисованная стирающимся маркером, живет в плоском мире из прозрачного целлулоида в форме ленты Мебиуса. Она страдает от одиночества и не теряет надежды встретить единственного обитателя своей вселенной — загадочного джентльмена Уга, живущего внизу. Она никогда его не видела: он почему-то всегда отсутствует, когда она останавливается у его дома. Но ей все равно очень нравятся письма, которые он ей пишет, и она все же надеется на встречу.



Предупреждение: пропустите следующий абзац, если не хотите узнать секрет этой истории.

Мистера Уга не существует. Винди — это и есть мистер Уг, только перевернутый вверх тормашками и расположенный на обратной стороне прозрачной ленты Мебиуса. Так получается потому, что Ви хитрым способом печатает буквы и заставляет мир при перекручивании пленки переворачиваться. При этом, когда имя Винди, ее дом или сообщения проходят один раз вокруг ленты Мебиуса и переворачиваются, оказывается, что все они относятся к мистеру Угу.

Мое описание не заменит видео. Вам следует посмотреть его, и вы будете поражены изобретательностью Ви в отношении сочетания уникальной любовной истории с яркими иллюстрациями свойств ленты Мебиуса.

Многие художники также черпали вдохновение в потрясающих свойствах ленты Мебиуса[129]. Эшер использовал их, рисуя муравьев на бесконечной петле. В работах скульпторов и каменотесов, например Макса Билла и Кейзо Ушио, тоже прослеживается мотив ленты Мебиуса.

Вероятно, самая монументальная из всех мебиусоподобных структур — это архитектура Национальной библиотеки Казахстана[130]. Ее проект, созданный датским архитектурным бюро BIG, напоминает спиральные завитки, которые изгибаются вверх-вниз, как в юрте, где «стены становятся крышей, крыша полом, а пол снова стенами».

Свойства ленты Мебиуса дают простор для творчества не только дизайнерам, но и инженерам. Например, лента для записи в виде ленты Мебиуса обладает двойным временем воспроизведения.

Компания BFGoodrich запатентовала конвейерную ленту Мебиуса, которая служит вдвое дольше обычной, поскольку одинаково изнашивается с «обеих» сторон. Другие патенты на тему ленты Мебиуса связаны с новыми конструкциями конденсаторов, хирургических ретракторов и самоочищающихся фильтров для химчистки[131].

Вероятно, самая хитрая область применения топологии та, где лента Мебиуса вообще не используется. Такие вариации на тему кручений и связей могут оказаться полезны в случае, если к вам на завтрак нагрянут гости. Это изобретение Джорджа Харта, папы Ви. Он геометр и скульптор, а в прошлом — преподаватель информатики в университете Стони Брука и куратор музея математики в Нью-Йорке. Джордж придумал, как разрезать бублик пополам так, чтобы две половинки остались сцепленными, как звенья цепи[132].

Преимущество этого изобретения в том, что можно не только развлечь гостей, но и получить дополнительную площадь для намазывания сливочным сыром.

Мысли глобально 28

Появление наиболее известных идей геометрии обусловлено тем, что древние видели мир плоским[133]. В геометрических утверждениях, от леммы о параллельных прямых до теоремы Пифагора, прослеживаются вечные истины о некоем воображаемом двумерном ландшафте плоской геометрии.

Задуманная в Индии, Китае, Египте и Вавилоне более 2500 лет назад, систематизированная и уточненная Евклидом и древними греками, эта геометрия, построенная на представлении о плоской Земле, — основная (и зачастую единственная), которой сегодня учат в старших классах средней школы. Но ведь за последние несколько тысячелетий многое изменилось.

В эпоху глобализации, интернета и межконтинентальных воздушных путешествий всем необходимо иметь представление о сферической геометрии и ее современном обобщении, дифференциальной геометрии[134]. Основным идеям последней около 200 лет. Своим возникновением она обязана Карлу Гауссу и Бернхарду Риману. Дифференциальная геометрия подводит фундамент под такое величественное интеллектуальное здание, как общая теория относительности Эйнштейна. В ее основе лежат красивые концепции, и они могут быть постигнуты каждым, кто когда-либо ездил на велосипеде, смотрел на глобус или растягивал резиновый шнур. Их понимание поможет вам разобраться в нескольких курьезах, которые вы могли заметить во время своих путешествий.

Например, когда я был маленьким, папа любил задавать мне загадки по географии. «Что севернее, — спрашивал он, — Рим или Нью-Йорк?» Большинство людей думают, что Нью-Йорк, но удивительно, оба города находятся почти на одной широте, причем Рим даже немного севернее. На обычной карте мира (где из-за ошибочности меркаторовой проекции* Гренландия выглядит гигантской) кажется, что, двигаясь на восток, можно попасть прямо из Нью-Йорка в Рим. Тем не менее пилоты никогда не летят по этому маршруту. Из Нью-Йорка они всегда летят на северо-восток, придерживаясь побережья Канады. Раньше я думал, они это делают из соображений безопасности, но оказалось, был не прав. Просто с учетом кривизны Земли это самый прямой маршрут.[135] Кратчайший способ добраться из Нью-Йорка в Рим — пролететь вдоль канадской провинции Новая Шотландия и Ньюфаундленда, далее проследовать над Атлантикой и наконец, пройдя к югу от Ирландии и пролетев всю Францию, достичь солнечной Италии.

Такой путь называется дугой большой окружности. Как и прямые в обычном пространстве, большие окружности на сфере содержат кратчайшие пути между любыми двумя точками. Яркие примеры больших окружностей — экватор и меридиональные окружности, проходящие через Северный и Южный полюс.

* Равноугольная цилиндрическая проекция, предложенная в последней трети XVI века картографом Г. Меркатором. Используется в навигации, поскольку для нее углы между меридианом и курсом (пересекающей его линией) одинаковы на сфере и изображающей ее поверхности плоской карты. *Прим. перев.*

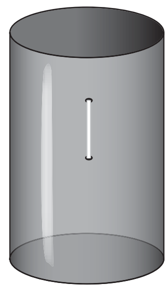
Еще одно свойство, общее для больших окружностей и прямых, заключается в том, что это самые прямые и короткие пути между двумя точками. Возможно, это звучит странно, поскольку *все* пути на глобусе кривые, так что же тогда подразумевается под «прямой»? Нетрудно заметить, что на шаре одни кривые более изогнуты, чем другие. Кривизна больших окружностей обусловлена лишь тем, что она вынуждена повторять изогнутость поверхности сферы.

Чтобы понять это, представьте, что вы едете на крошечном велосипеде по поверхности шара и пытаетесь не сбиться с определенного пути. Если это часть большой окружности, то переднее колесо велосипеда все время будет направлено строго прямо вперед. Вот в таком смысле большие окружности прямые. В противоположность этому, если вы попытаетесь ехать вдоль линии широты вблизи одного из полюсов, вам придется постоянно держать руль повернутым в сторону полюса.

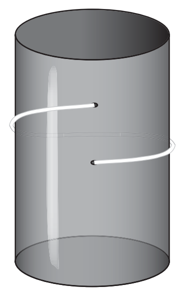
Конечно, ни одна реальная поверхность не может состоять только из простых плоскостей и сфер. Например, человеческое тело, консервная банка или бублик имеют различного рода отверстия и проходы, которые делают запутанными передвижения по таким поверхностям. В этой ситуации задача поиска кратчайшего пути между любыми двумя точками становится чрезвычайно сложной. Поэтому, вместо того чтобы искать технические решения, применим интуитивный подход. Вот где пригодятся резиновые шнуры.

Представьте скользкий упругий резиновый шнур, который максимально сжимается, оставаясь на поверхности объекта. С его помощью легко определить кратчайший путь между Нью-Йорком и Римом или, в случае необходимости, между любыми двумя точками на любой поверхности. Прикрепите концы шнура к точкам отправления и прибытия и позвольте ему растянуться, но так, чтобы он повторял контур поверхности. Когда шнур растянется настолько, насколько позволяет резина, — вуаля! — получится след кратчайшего пути.

На более сложных поверхностях, чем плоскости или сферы, может произойти нечто необычное: между двумя точками в локальной области может существовать *множество* кратчайших путей. Например, рассмотрим поверхность жестяной банки из-под консервированного супа с двумя точками, лежащими прямо друг под другом.



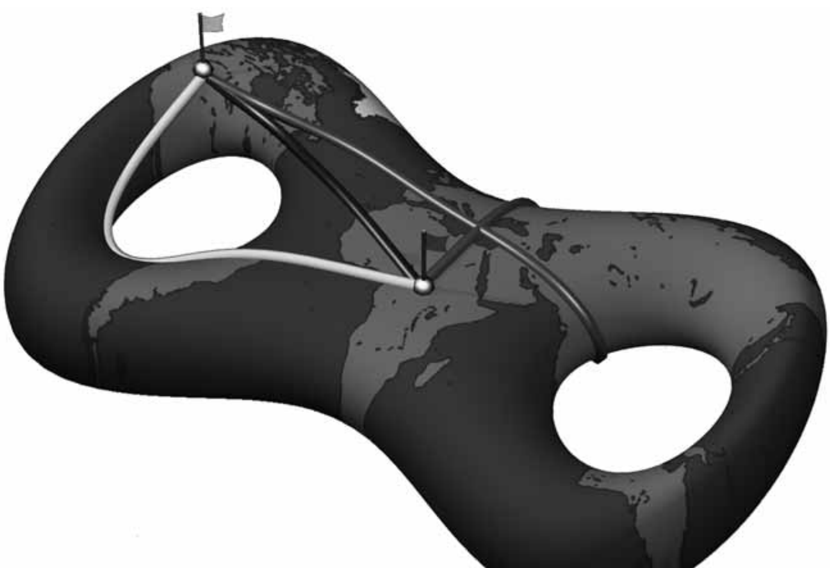
Кратчайшим путем между этими точками, как показано выше, явно будет отрезок, и наш упругий резиновый шнур нашел бы это же решение. Тогда что же здесь необычного? Цилиндрическая форма консервной банки открывает новые возможности для разного рода деформаций. Предположим, нам нужно, чтобы, прежде чем оказаться в конечной точке, шнур один раз опоясал консервную банку. (Подобное ограничение накладывается на спираль ДНК, когда она оборачивается вокруг определенных белков в хромосомах.) В этом случае шнур, натягиваясь, образует спираль, подобную спирали на торговых знаках парикмахеров[136].



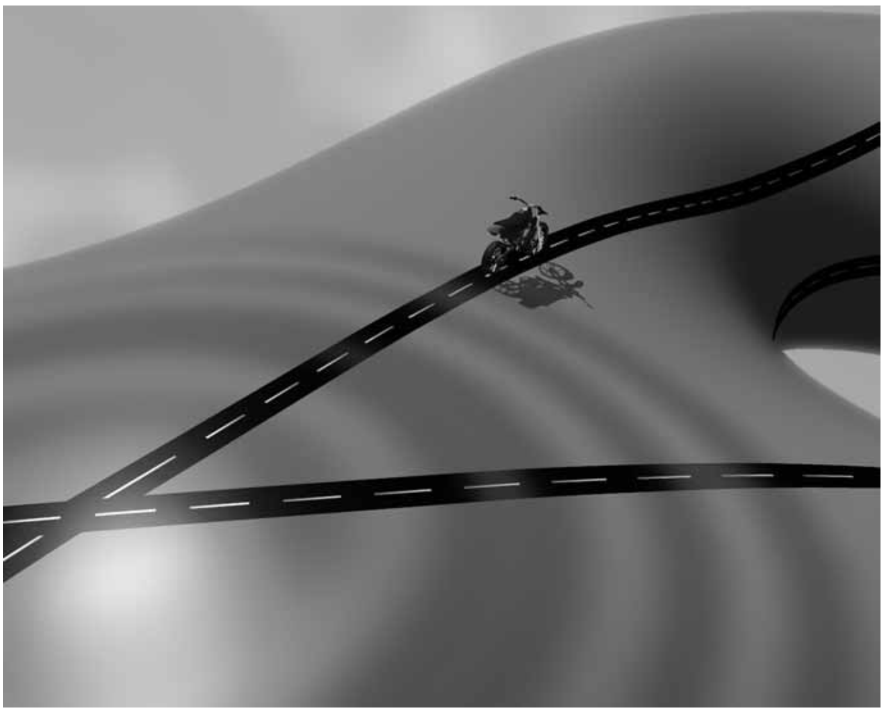
Такая спиралевидная траектория рассматривается как еще одно решение в задаче о кратчайшем пути в том смысле, что это кратчайший из *близлежащих* путей. Если немного сдвинуть шнур, то он обязательно станет длиннее, а затем снова натянется и вернется в исходное положение. Можно сказать, что этот кратчайший путь — местный чемпион среди всех путей при однократном обертывании шнура вокруг цилиндра. (Кстати, именно поэтому данная область математики называется «дифференциальной геометрией». Она изучает влияние малых локальных *различий* (англ. *differences*) на такие характеристики геометрических объектов, как разность в длине между близлежащими спиралевидными путями.)

Но это еще не все. Есть еще один чемпион, который появится, если обвить шнуром банку дважды, и еще один, если обвить банку трижды, и так далее. На цилиндре существует бесконечное множество локальных кратчайших путей! Но ни один из них не является самым кратчайшим. Прямолинейный путь короче всех других.

Поверхности с отверстиями и ручками имеют много локально кратчайших путей, отличающихся рисунком их переплетения вокруг различных частей поверхности. Следующий стоп-кадр из видео математика Конрада Полтье[137] из Свободного университета Берлина иллюстрирует неоднозначность этих локальных кратчайших путей, то есть геодезических линий, на поверхности придуманной планеты в форме восьмерки, которую специалисты называют тором с двумя отверстиями.



Три показанные здесь геодезические линии различной формы проходят по разным частям планеты, но их объединяет то, что они самые короткие по сравнению с близлежащими путями. И так же, как прямые линии на плоскости или большие окружности на сфере, эти геодезические линии — самые прямые из возможных кривых на поверхности. Они огибают ее, но не перегибаются сами. Чтобы пояснить это, Полтье сделал еще одно учебное видео.



Мотоцикл без водителя едет по геодезическому шоссе, повторяющему рельеф тора с двумя отверстиями. Примечательно, что руль заблокирован так, чтобы мотоцикл двигался только прямо и не мог съехать с дороги. Поэтому нет необходимости им управлять. Это усиливает уже сложившееся мнение о том, что геодезические линии, как и большие окружности на сфере, представляют собой естественное обобщение прямых линий.

После такого буйства фантазии вам, возможно, будет интересно узнать, есть ли у геодезических линий что-либо общее с реальностью. Конечно есть. Эйнштейн доказал, что, когда лучи света движутся по Вселенной, они перемещаются по геодезическим линиям. Знаменитый изгиб света звезд вокруг Солнца, обнаруженный при наблюдении солнечного затмения 1919 года, подтвердил, что свет движется по геодезическим линиям искривленного пространства-времени в соответствии с деформацией, вызванной притяжением Солнца.

На более приземленном уровне математика поиска кратчайших путей имеет решающее значение для маршрутизации трафика в интернете. Однако пространство всемирной сети, в отличие от гладких поверхностей, рассмотренных выше, — это гигантский лабиринт адресов и ссылок, а математические задачи о кратчайших путях трансформированы в задачи нахождения самых быстрых путей[138]. Учитывая множество потенциальных маршрутов, их решение было бы невозможным, если бы изобретательность математиков и компьютерщиков не упростила его.

Иногда люди используют утверждение «кратчайший путь между двумя точками — это прямая линия» в переносном смысле, подтверждая тем самым присутствие здравого смысла. Другими словами, «не усложняй без необходимости». Но преодоление пути с препятствиями способно поднять до больших высот, поэтому и в искусстве, и в математике часто стоит наложить на себя определенные ограничения. Сочиняйте хайку и сонеты или расскажите историю своей жизни всего в шести словах[139]. То же самое верно для всех направлений математики, призванных помочь вам найти кратчайший путь решения той или иной задачи, которую задает вам жизнь.

Две точки. Много путей. Математический экстаз.

Анализируй это!*

29

Математика чванлива и самодовольна. Она, подобно главе мафиозного клана, производит впечатление особы решительной, неуступчивой и сильной. Она сделает вам такое предложение, от которого вы не сможете отказаться.

Но наедине с собой математика не всегда так уверена в себе. Она колеблется. Задает себе вопросы и порой сомневается в том, что они правильные. Особенно там, где дело касается бесконечности. Бесконечность может заставить математика бодрствовать ночами, вызывая тревогу, суетливость и чувство экзистенциального ужаса. В истории математики были времена, когда спущенная с привязи бесконечность была настолько взвинчена, что появлялись опасения, что она может все перевернуть с ног на голову.

В сериале «Клан Сопрано» босс мафии Тони Сопрано, страдающий приступами панических атак и пытающийся понять, почему его мать хочет, чтобы его убили, консультируется у врача-психиатра. Под напускной жесткостью скрывается очень смущенный и напуганный человек.

* «Анализируй это» (англ. Analyze This!) — фильм режиссера Гарольда Рамиса (1999). Влиятельный нью-йоркский мафиози Пол Витти — на грани нервного срыва. Все гангстеры в шоке: как помочь своему чокнутому боссу? Бен Соболь — обычный психоаналитик. У него есть всего несколько дней на то, чтобы помочь «крестному отцу» справиться с депрессией. *Прим. перев.*

Таким же образом исчисление уложило себя на кушетку психиатра именно тогда, когда казалось, что оно при смерти. После многолетнего триумфа, уничтожив все проблемы, стоявшие на пути, оно начало осознавать что-то нездоровое, настораживающее в самой своей основе. Именно то, что сделало его успешным, — его жестокие навыки и бесстрашие в манипулировании бесконечными процессами — в настоящее время угрожало его уничтожить. И терапией, которая в конечном итоге помогла преодолеть этот кризис, стал, по случайному совпадению, *анализ*[140].

Вот пример одной из задач, которые волновали математиков XVIII века. Рассмотрим бесконечную сумму

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Это числовой эквивалент незатухающих колебаний[141]: шаг вперед, шаг назад, шаг вперед, шаг назад и так далее до бесконечности.

Значит ли это, что данная последовательность чисел имеет какой-нибудь смысл? И если да, то чему она равна в результате?

Оптимист, дезориентированный бесконечно длинным выражением, подобным этому, может надеяться, что некоторые из старых правил, выкованных опытом взаимодействия с *конечными* суммами, останутся в силе. Например, мы знаем, что $1 + 2 = 2 + 1$. Когда мы складываем два числа и более в виде конечной суммы, мы всегда можем поменять их порядок без изменения результата: $a + b$ равно $b + a$ (коммутативный закон сложения). И когда в выражении больше чем два члена, мы можем, поставив скобки, самозабвенно группировать его члены, не влияя на окончательный результат. Например: $(1 + 2) + 4 = 1 + (2 + 4)$: сложение 1 и 2, а затем 4, дает тот же ответ, что и сложение 2 и 4, а затем 1. Это называется ассоциативным (сочетательным) законом сложения. Он работает, даже если суммируются несколько чисел. Мы знаем, что вычитание числа — то же самое, что прибавление отрицательного числа. Например, рассмотрим сумму, состоящую из первых трех членов записанного выше числового ряда, и зададим вопрос: что такое $1 - 1 + 1$? Мы могли бы представить это как: $(1 - 1) + 1$ или $1 + (-1 + 1)$, где во втором выражении в скобках вместо вычитания 1 прибавляем -1. В любом случае ответ будет: 1.

Но когда мы попытаемся обобщить эти правила для *бесконечных* сумм, то столкнемся с несколькими неприятными сюрпризами. Посмотрите на возникающее противоречие: если мы возьмем ассоциативный закон и доверчиво применим его к $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ С одной стороны, мы можем сократить положительные и отрицательные единицы, группируя их следующим образом:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0.$$

С другой — можно точно так же, как здесь показано, поставить скобки и сделать вывод, что результат равен 1.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1.$$

Ни один из этих способов не кажется более убедительным, поэтому какова вероятность, что сумма равна *и* 0, *и* 1? Сегодня для нас это предположение звучит абсурдно, но в то время некоторые математики утешились его религиозным подтекстом. Он напоминал им о богословском утверждении, что Бог создал мир из ничего. Как написал в 1703 году математик и священник Гвидо Гранди: «Поставив по-разному скобки в выражении 1 – 1 + 1 – 1 + ... я могу, если хочу, получить 0 или 1. Но тогда идея творения из ничего (лат. *ex nihilo*) совершенно правдоподобна».

Тем не менее очевидно, что Гранди предпочитал третье значение суммы, отличное от 0 или 1. Догадаетесь ли вы, какое именно? Подумайте, что можно сказать, если вы с ученым видом валяете дурака.

Правильно. Гранди считал, что истинная сумма равна $\frac{1}{2}$. И великие математики, в том числе Лейбниц и Эйлер, были с ним согласны. Несколько линий рассуждения подтверждали этот компромисс. Например, 1 – 1 + 1 – 1 + ... можно выразить с помощью собственных членов следующим образом. Давайте использовать букву S для обозначения суммы. Тогда по определению

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Теперь оставим первую 1 в правой части уравнения в покое и займемся остальными его членами. Они создают собственную копию S, и члены, стоящие справа от первой 1, вычитаются из нее:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1 - (1 - 1 + 1 - \ldots) = 1 - S.$$

Так что $S = 1 - S$ и, следовательно, $S = \frac{1}{2}$.

Дебаты по поводу суммы 1 – 1 + 1 – 1 + ... бушевали почти 150 лет, пока новое поколение аналитиков не водрузило все виды исчисления и его бесконечные процессы (пределы, производные, интегралы, бесконечные ряды) на прочный фундамент раз и навсегда. Они воссоздали предмет с нуля, выстроив строгую логическую структуру, как в Евклидовой геометрии.

Два основных понятия числового ряда — частичные суммы и сходимость. Частичная сумма представляет собой нарастающую сумму. Вы просто суммируете конечное число членов, а затем останавливаетесь. Например, если сложить первые три члена ряда $1- 1 + 1 - 1 + \ldots$ получим $1 - 1 + 1 = 1$. Давайте назовем это S_3. Буква S обозначает «сумму», а индекс 3 показывает, что мы сложили только первые три члена. Вот несколько первых частичных сумм для этого ряда

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 - 1 = 0$$
$$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$$
$$S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0.$$

Таким образом, мы видим, что частичные суммы скачут между 0 и 1, и при этом не наблюдается никакой тенденции остановиться на 0, 1, $\frac{1}{2}$ или где-нибудь еще. По этой причине современные математики сказали бы, что сумма $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ не сходится.

Другими словами, частичные суммы не стремятся *ни к какому* предельному значению по мере увеличения числа членов, включенных в них. Поэтому сумма этого бесконечного ряда не имеет смысла.

Итак, мы придерживаемся прямой и узконаправленной линии поведения: не тратим впустую время и ограничиваемся анализом только тех рядов, которые сходятся. Значит ли это, что мы избежим встреченных ранее противоречий?

Пока нет. Кошмар продолжается. И это хорошо, что он существует, потому что напуганные им аналитики XIX века открыли более глубокие тайны в самом сердце исчисления, а затем вытащили их на свет. Извлеченные из этого уроки оказались бесценными не только для математики, но и для ее приложений во всех областях — от музыки до медицинской визуализации.

Рассмотрим ряд, известный в гармоническом анализе как знакочередующийся гармонический ряд:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

Вместо одного шага вперед и одного назад здесь шаги становятся все короче и короче. Один шаг вперед, но только полшага назад, затем треть шага вперед и четверть шага назад и так далее. Обратите внимание на следующую закономерность: дроби с нечетным знаменателем имеют положительные знаки, а с четным — отрицательные. Частичные суммы в данном случае равны:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = 0{,}500$$
$$S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0{,}833\ldots$$
$$S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 0{,}583\ldots$$

И если вы рассмотрите достаточно много таких сумм, то обнаружите, что они нацеливаются на число, близкое к 0,69. Действительно, можно доказать, что этот ряд сходится. Его предельное значение равно натуральному логарифму от 2 (обозначается ln2), приблизительно составляющему 0,693147.

Так что же здесь кошмарного? На первый взгляд, ничего. Знакочередующийся гармонический ряд походит на паиньку: сходящийся, с хорошим поведением. Ваши родители похвалили бы его.

Именно это и делает его опасным. Это хамелеон, мошенник, скользкий тип, который может быть кем угодно. Если переставлять его члены в произвольном порядке, вы можете подвести его сумму к любому значению. Буквально. Например, 297, 126 или -42π, или 0, или любому другому.

Это выглядит так, будто ряд полон презрения к коммутативному закону сложения. Просто просуммировав его члены в иной последовательности, вы можете изменить ответ, чего *никогда* не произошло бы с конечной суммой. Поэтому, даже если исходный ряд сходится, в нем по-прежнему будут странности, которые невозможно представить в обычной арифметике.

Вместо того чтобы доказать этот удивительный факт (результат, известный как теорема Римана о перестановке слагаемых в условно-сходящихся рядах)[142], рассмотрим очень простую перестановку, сумму которой легко посчитать. Сгруппируем члены этого ряда таким образом, чтобы к *каждому* положительному слагаемому прибавлялось *два* отрицательных.

$$[1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}] + [\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}] + [\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}] + \ldots$$

Далее упростим каждое выражение в скобках, вычитая второй член из первого и оставляя без изменения третий член. Тогда ряд сводится к сумме:

$$[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}] + [\frac{1}{6} - \frac{1}{8}] + [\frac{1}{10} - \frac{1}{12}] + \ldots$$

После вынесения за скобки из всех дробей выражения $\frac{1}{2}$ как общего множителя ряд примет вид:

$$\frac{1}{2}\,[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots]$$

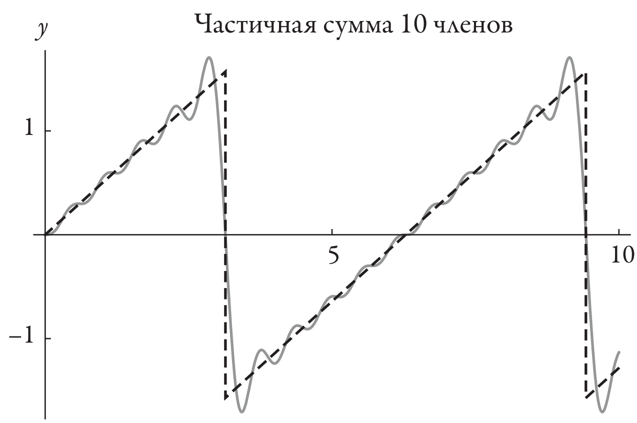
Смотрите, кто вернулся! Бестия в скобках — это снова знакочередующийся гармонический ряд. Но в результате перестановки, даже при сохранении всех его членов, как-то получилось, что он вдвое уменьшился по сравнению с первоначальным! Представленный в таком виде ряд теперь сходится к $\frac{1}{2}\ln 2 = 0{,}346\ldots$.

Странно? Да. Ненормально? Да[143]. Но неудивительно ли, что то же самое происходит и в реальной жизни. Как мы уже убедились в ходе прочтения книги, даже самые заумные и надуманные понятия математики часто находят практическое применение. Связь с практикой в данном случае заключается в том, что во многих областях науки и техники (от обработки сигналов и акустики до финансов и медицины) лучше всего представлять различные виды кривых, звуков, сигналов или изображений как группы (или совокупности) более простых кривых, звуков, сигналов или изображений. При этом основными строительными блоками будут синусоиды. Этот метод называется анализом Фурье[144], а соответствующая сумма — рядом Фурье. Но когда рассматриваемый ряд имеет некоторые патологические свойства, как у знакочередующегося гармонического ряда и его невменяемых родственников, сходимость у ряда Фурье может быть действительно очень необычной.

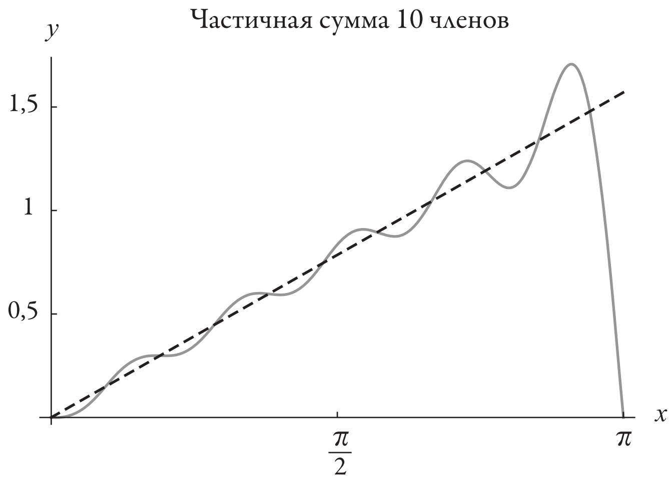
Вот, например, один из рядов Фурье, непосредственно вдохновленный знакочередующимся гармоническим рядом:

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots$$

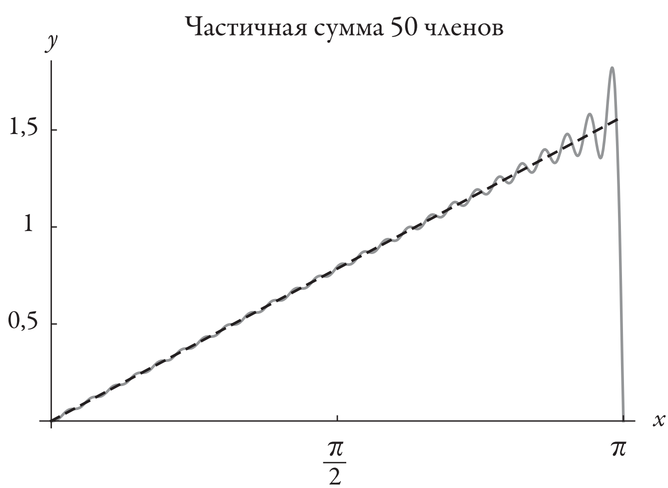
Чтобы получить представление о том, как он выглядит на графике, давайте рассмотрим сумму его первых десяти членов.



Эта частичная сумма (показана сплошной линией) явно пытается приблизиться к более простой волновой кривой в форме зубцов пилы (показано пунктирной линией). Заметим, однако, что вблизи краев зубцов что-то не так. Синусоида «промахнулась» и приняла вид странного пальца, который выходит за пилообразную волну. Чтобы увидеть это отчетливее, посмотрим на увеличение одного из зубцов при $x = \pi$:



Попытаемся избавиться от пальца, включив в частичную сумму больше слагаемых. Не повезло. Палец просто становится тоньше и перемещается ближе к краю, но его высота остается примерно такой же.



Вину за происходящее можно возложить на знакочередующийся гармонический ряд. Его описанная выше патология сейчас загрязняет ряды, связанные с рядами Фурье. Они отвечают за этот раздражающий палец, который никуда не денется.

Данный эффект, обычно называемый феноменом Гиббса[145], больше, чем просто математический курьез. Он известен с середины XIX века и в настоящее время проявляется в цифровой фотографии и на МРТ-сканировании[146]. Нежелательные колебания, вызванные феноменом Гиббса, могут привести к размытости, мерцанию и прочим непреднамеренным нежелательным визуальным искажениям на острых краях видеоизображения. В медицинской практике их можно ошибочно принять за поврежденную ткань или скрыть повреждения, которые есть на самом деле.

К счастью, сто лет назад аналитики точно определили, что вызывает артефакты Гиббса (см. примечание 147), и научили нас, как преодолеть эти явления, или, по крайней мере, распознать их в случае появления.

Отель Гильберта 30

В феврале 2010 года я получил электронное письмо от женщины по имени Ким Форбс. Ее шестилетний сын Бен задал ей математический вопрос, на который она не смогла ответить, и она надеялась, что я смогу помочь.

> Сегодня 100-й день его пребывания в школе. Сын был очень взволнован и рассказал мне все, что знает о числе 100, включая то, что оно четное. Затем он сказал, что 101 нечетное число, а 1 000 000 — четное и т. д. А потом остановился и спросил: «Бесконечность — четная или нечетная?»

Я объяснил Ким, что бесконечность не может быть ни четной, ни нечетной. Это не число в обычном смысле, и оно не подчиняется правилам арифметики. Например, я писал: «Если бы бесконечность была нечетным числом, при умножении на себя она стала бы четным числом. И *обе* были бы бесконечностями! Так что в целом понятие четности и нечетности не имеет смысла для бесконечности».

Ким ответила:

> Спасибо. Бен удовлетворен таким объяснением. Ему понравилась идея, что бесконечность достаточно велика, чтобы быть одновременно как четной, так и нечетной.

Несмотря на возникшее искажение (бесконечность *не* нечетная и *не* четная, а *ни то* и *ни другое*), толкование Бена близко к истине. Бесконечность бывает ошеломляющей.

Некоторые из ее странных сторон впервые были освещены в конце XIX века в новаторской работе Георга Кантора[148] по теории множеств[149]. Кантор особенно интересовался бесконечными множествами чисел и точек, подобных множеству {1, 2, 3, 4,...} натуральных чисел и множеству точек на прямой. Он определил строгий способ сравнить разные бесконечные множества и обнаружил шокирующее свойство бесконечностей. Оказывается, одни бесконечности больше, чем другие.

В то время теория Кантора вызвала не только неприятие, но и возмущение. Анри Пуанкаре, один из ведущих математиков того времени, назвал ее «болезнью». Однако другой гигант той эпохи, Давид Гильберт[150], увидел в ней долгосрочный вклад в науку и провозгласил: «Никто не может изгнать нас из рая, созданного Кантором».

Моя задача — дать вам некоторое представление об этом рае. Но прежде чем начать, позвольте, следуя подходу, введенному самим Гильбертом, непосредственно рассмотреть множества чисел или точек. Он живо передал странности и уникальность теории Кантора на примере притчи о «Гранд-отеле», который в настоящее время называется отелем Гильберта[151].

Этот отель всегда заполнен, но в нем неизменно остается один свободный номер.

В отеле Гильберта не просто сотни номеров, в нем их бесчисленное множество. Всякий раз, когда прибывает новый постоялец, менеджер переселяет обитателя номера 1 в номер 2; обитателя номера 2 в номер 3 и т. д. Это освобождает номер 1 для нового постояльца и обеспечивает номерами всех остальных (правда, создавая им определенные неудобства при переезде).

Теперь предположим, что приехало *бесконечно* много новых, причем чем-то раздраженных постояльцев. Это не проблема. Невозмутимый менеджер перемещает обитателя номера 1 в номер 2, из номера 2 в номер 4, из номера 3 в номер 6 и т. д. Этот фокус с удвоением освобождает все нечетные номера (их бесконечное множество) для новых постояльцев.

Вечером того же дня бесконечная вереница автобусов с грохотом подъезжает к стойке регистрации. Их бесконечно много, и, что еще хуже, каждый заполнен бесконечным множеством ворчащих людей, требующих, чтобы отель соответствовал своему девизу: «В отеле Гильберта всегда есть свободные номера».

Менеджер раньше уже сталкивался с такой проблемой и запросто решает ее.

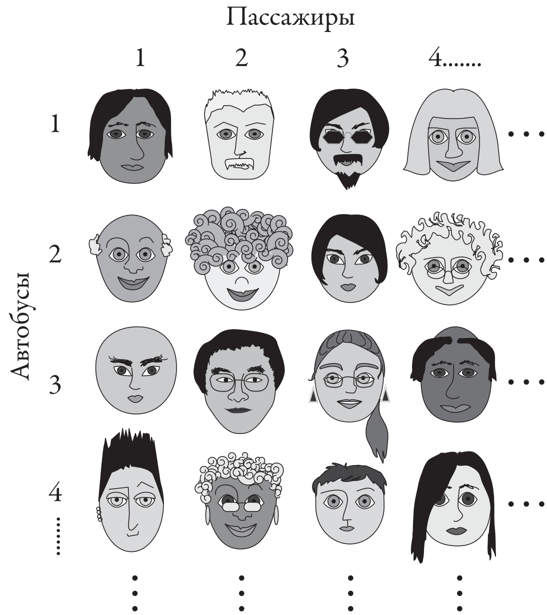
Сначала он проводит трюк удвоения. Это позволяет заселить новых постояльцев в четные номера и освободить все нечетные — хорошее начало, потому что теперь он имеет бесконечное число свободных номеров.

Но достаточно ли этого? Хватит ли нечетных номеров для размещения орд новых постояльцев? Кажется маловероятным, поскольку есть нечто вроде квадратной бесконечности людей, скандалящих из-за этих номеров. (Почему квадратной? Потому что каждый из бесконечного числа автобусов привез бесконечное число пассажиров. Общее количество людей составляет бесконечность, умноженную на бесконечность, чтобы это ни значило).

Вот где логика при работе с бесконечностью становится очень странной.

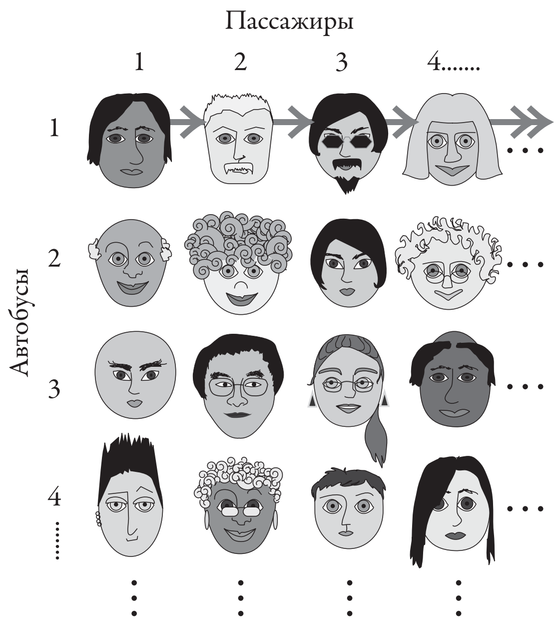
Чтобы понять, как менеджер собирается решать последнюю задачу, следует визуализировать всех людей, которых он должен поселить.

Конечно, мы не можем показать здесь буквально всех, так как в этом случае диаграмма должна быть бесконечной в обоих направлениях. Но окончательный вариант картинки будет соответствующим. Дело в том, что любой *конкретный* пассажир автобуса (скажем, ваша тетя Инесс из Луисвилля) обязательно появится где-то на диаграмме, когда мы включим в нее достаточное количество строк и столбцов. В этом смысле каждый пассажир каждого автобуса учтен. Вы называете его имя, и он (или она) обязательно отобразится на некотором конечном количестве шагов к востоку и югу от северо-западного угла картинки.

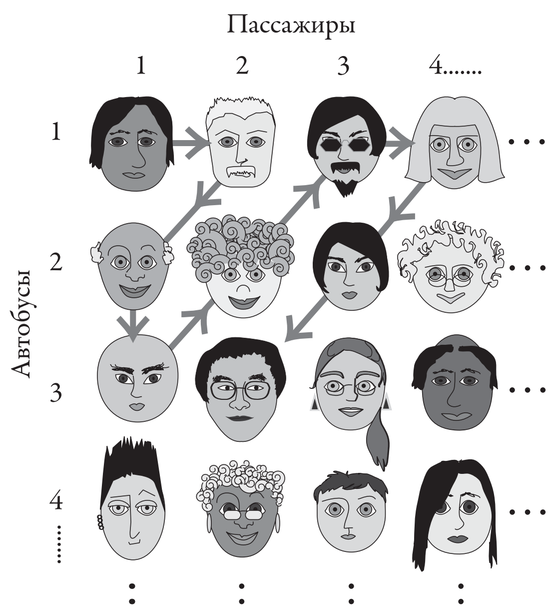


Задача менеджера — на основании этой диаграммы выработать систему. Он должен построить схему распределения номеров между постояльцами таким образом, чтобы каждый получил свой номер после того, как будет заселено *конечное* число других людей.

К сожалению, предыдущий менеджер не понял этого, и начался хаос. Когда приезжала очередная колонна автобусов, он так волновался, пытаясь быстро расселить пассажиров первого автобуса, что у него не оставалось времени на яростно кричащих пассажиров других автобусов. На диаграмме ниже проиллюстрирована эта недальновидная стратегия, путь которой всегда соответствовал бы пути на восток вдоль строки 1.



Однако новый менеджер все взял под контроль. Вместо движения вдоль первой строки (обслуживая только первый автобус) он двигался из угла по зигзагообразной схеме, как показано ниже.



Он начинает с первой пассажирки автобуса с номером 1 и дает ей первую пустую комнату. Второй и третий свободные номера займут второй пассажир из первого автобуса и первый пассажир из второго автобуса. Оба находятся на второй диагонали от угла диаграммы. Заселив их, менеджер переходит к третьей диагонали и раздает набор ключей от номеров первому пассажиру из третьего автобуса, второму пассажиру из второго автобуса и третьему пассажиру из первого автобуса.

Надеюсь, тактика менеджера — двигаться от одной диагонали у другой — достаточно очевидна. Нетрудно догадаться, что очередь до любого конкретного человека дойдет за конечное число шагов.

Итак, в отеле Гильберта действительно всегда есть свободные места.

Доказательство, которое я только что представил, — известный аргумент из теории бесконечных множеств. Кантор использовал его, чтобы доказать, что положительных дробей ровно столько (соотношений p/q, где p и q — положительные целые числа), сколько и натуральных чисел (1, 2, 3, 4, ...). Это гораздо более сильное утверждение, чем то, что оба множества бесконечны. Оно говорит о том, что они бесконечны точно в той степени, в какой между ними может быть установлено взаимно-однозначное соответствие.

Вы можете рассматривать это соответствие как систему напарников, в которой каждое натуральное число состоит в паре с некоей положительной дробью, и наоборот. Кажется, что наличие такой системы противоречит здравому смыслу. Это своего рода софистика, приведшая Пуанкаре в ужас. Ибо она предполагает, что мы могли бы сделать исчерпывающий перечень всех положительных дробей, хотя самой маленькой дроби не существует!

И все же есть такой список. Мы его уже нашли. Дробь p/q, в которой пассажиру p соответствует автобус q, а представленное выше доказательство показывает, что каждая из этих дробей может составить пару с определенным натуральным числом 1, 2, 3, ..., представляющим собой номер комнаты пассажира в отеле Гильберта.

Позже Кантор также доказал, что взаимно однозначного соответствия между этими парами быть не может. Поскольку множество действительных чисел, лежащих между 0 и 1, неисчислимо и не может быть поставлено в однозначное соответствие с натуральными числами. Для гостиничного бизнеса это означает, что, если все вещественные числа появятся у стойки администратора и начнут звонить в колокольчик, для них не хватит свободных номеров даже в отеле Гильберта.

Докажем это утверждение от противного. Допустим, каждому действительному числу можно дать собственную комнату. Тогда реестр жильцов, которые определены десятичными дробями, и список номеров комнат будут выглядеть примерно так:

Номер 1: 0,6708112345...
Номер 2: 0,1918676053...
Номер 3: 0,4372854675...
Номер 4: 0,2845635480...

Помните, список должен быть полным. Каждое действительное число между 0 и 1 должно появиться в каком-то конечном месте реестра.

Кантор показал, что в подобном перечне отсутствует много чисел. Вот это и есть противоречие. Например, чтобы построить число, которое нигде не появляется в представленном выше списке, спуститесь по диагонали и составьте новое число из подчеркнутых цифр:

Номер 1: 0,$\underline{6}$708112345...
Номер 2: 0,1$\underline{9}$18676053...
Номер 3: 0,43$\underline{7}$2854675...
Номер 4: 0,284$\underline{5}$635480...

Получилась десятичная дробь 0,6975...

Но мы еще не закончили. Следующий шаг — возьмите эту десятичную дробь и измените все ее цифры, заменяя каждую любой другой от 1 до 8[152]. Например, мы могли бы изменить 6 на 3, 9 на 2, 7 на 5 и т. д.

Эта новая десятичная дробь 0,325... является убийцей. Конечно, это не первый номер, так как она имеет другую первую цифру, чем число, находящееся в этом номере. И не второй номер, поскольку у него другая вторая цифра. В общем, она отличается от *n*-ого числа с *n*–м десятичным разрядом. Поэтому нигде не фигурирует в списке!

Вывод таков: отель Гильберта не может разместить все действительные числа. Их просто слишком много для этого — бесконечность, выходящая за пределы бесконечности[153].

И с этой унизительной мыслью мы подходим к концу книги, которая началась со сцены в другом воображаемом отеле. Помните? Персонаж «Улицы Сезам» по имени Хамфри, работающий в обеденное время в отеле «Мохнатые лапы», принял заказ у голодных пингвинов: «Рыбка, рыбка, рыбка, рыбка, рыбка, рыбка», и вскоре узнал о силе чисел.

Это было долгое путешествие от рыбок к бесконечности. Спасибо, что оставались со мной.

От автора

Многие друзья и коллеги помогали мне улучшить эту книгу, щедро предлагая мудрые советы по математике, стилистике, истории и другим вопросам. Благодарю Дага Арнольда, Шелдона Акслера, Лэрри Брадена, Дэна Каллахана, Боба Коннелли, Тома Гиловича, Джорджа Харта, Ви Харт, Диану Хопкинс, Герберта Хуи, Синди Клаусс, Майкла Льюиса, Михаэля Мобуссина, Барри Мазура, Эри Ногучи, Чарли Пескина, Стива Пинкера, Рави Рамакришну, Дэвида Ранда, Ричарда Ранда, Питера Ренца, Дугласа Роджерса, Джона Смайли, Гранта Виджинса, Стивена Янга и Карла Циммера.

Хочу выразить признательность коллегам, создавшим иллюстрации для книги и позволившим мне включить их визуальные работы: Рику Алльмендингеру, Полу Бурку, Майку Филду, Брайану Мэдсену, Нику Дейману (Team-fresh), Марку Ньюману, Конраду Полтье, Кристиану Раддеру из OkCupid, Саймону Татэм и Джейн Вонг.

Я безмерно благодарен Дэвиду Шипли за предложение разместить в New York Times серию статей о математике, что стало толчком к написанию этой книги, и особенно за его видение того, как они должны быть структурированы. «Простота, простота, простота», — призывал Торо, и они с Шипли оба были правы. Джордж Калоджеракис, мой редактор в Times, брал свое «перо» в руки, чтобы передвинуть запятые, но только тогда, когда в этом была необходимость, в то же время он защищал меня от более серьезных оплошностей. Его уверенность чрезвычайно обнадеживала. Кэти О`Брайан из производственного отдела, убедившись, что математика всегда права, мирилась с неизбежной типографской суетой с присущими ей изяществом и прекрасным чувством юмора.

Я знаю, мне очень повезло, что Катинка Мэтсон стала моим литературным агентом. Она с самого начала защищала эту книгу с вдохновляющим энтузиазмом.

Пол Джинспарг, Джон Клайнберг, Тим Новикофф и Энди Руина прочитали черновики почти каждой главы, причем их единственной компенсацией за это было удовольствие вылавливать ошибки и использовать свой блестящий ум во благо, а не во зло. Как правило, сложно находиться среди таких знатоков, но не факт, что они *действительно* знают все. Я искренне благодарен им за усилия и поддержку.

Спасибо иллюстратору Марджи Нельсон за веселость и научное чутье. В этом проекте я часто воспринимал ее как соавтора благодаря умению находить оригинальные способы передачи сущности математических понятий.

Любой писатель благословлен свыше, если у него такой редактор, как Аманда Кук. Как одновременно можно быть такой нежной, мудрой и решительной? Спасибо, Аманда, за веру в эту книгу и помощь в оформлении каждой ее части. Имон Долан, еще один замечательный редактор, вел твердой рукой этот проект (и меня) к финишной прямой с заразительным воодушевлением. Помощники редактора Эшли Джиллиам и Бен Хьюман были скрупулезными и веселыми в работе и хорошо заботились о книге на каждом этапе ее продвижения. Литературный редактор Трейси Рой учила меня, как использовать метафоры, кавычки, да что там говорить, и обычные слова! Но самое важное — оттачивала стиль и четкость мыслей на этих страницах. Выражаю благодарность также журналистке Мишель Бонанно, менеджеру по маркетингу Аише Мирза, техническому редактору Ребекке Спрингер, начальнику производственного отдела Дэвиду Футато и всем сотрудникам издательства Houghton Mifflin Harcourt.

Наконец позвольте выразить сердечную признательность моей семье. Лия и Джо, вы слышали о книге в течение долгого времени, и, верите или нет, она действительно дописана. Естественно, ваша задача — изучить всю математическую теорию, о которой в ней рассказывается. Что касается моей фантастически терпеливой жены Кэрол, которая продиралась сквозь первые *n* вариантов каждой главы и таким образом узнала истинное значение выражения «как *n* стремится к бесконечности», позволь мне просто сказать: я люблю тебя. И то, что я тебя нашел, было самым лучшим моим решением.

Примечания

1. Основы чисел: сложение рыбок

1. Чтобы ознакомиться с увлекательной идеей о том, что числа живут собственной жизнью, а математика может рассматриваться как одна из форм искусства, см. P. Lockhart, A Mathematician's Lament (Bellevue Literary Press, 2009)*.
2. Эта известная фраза взята из эссе E. Wigner The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, Communicationsin Pure and Applied Mathematics, Vol. 13, No. 1, (February 1960), pp. 1–14. Онлайн-версия доступна на http://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html.

   Для дальнейших размышлений на эту тему, а также о том, была математика изобретена или открыта, см. M. Livio, Is God a Mathematician? (Simon and Schuster, 2009) и R. W.Hamming, The unreasonable effectiveness of mathematics, American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 2 (February 1980).

2. Каменная арифметика

3. Написанием данной главы я во многом обязан двум замечательным книгам: полемическому эссе P. Lockhart, A Mathematician's Lament (Bellevue Literary Press, 2009) и роману Y. Ogawa, The Housekeeper and the Professor (Picador, 2009)**.

* В русском интернете много переводов эссе Локхарда «Плач математика». Вот один из них: http://mrega.ru/biblioteka/obrazovanie/130-plachmatematika.html. Здесь и далее в этом разделе примечания редактора.

** Об эссе Локхарда «Плач математика» сказано в примечании 1. Перевода романа Ёко Огавы на русский язык пока нет.

4. Молодым читателям, которые хотят изучать числа и их структуры, см. H. M. Enzensberger, The Number Devil (Holt Paperbacks, 2000)*.
5. Превосходные, но более сложные примеры визуализации математических образов представлены в R. B. Nelsen, Proofs without Words (Mathematical Association of America, 1997).

3. Враг моего врага

6. Теория баланса впервые была предложена социальным психологом Фрицем Хайдером в 1946 году и с тех пор разрабатывалась и применялась теоретиками социальных сетей, политологами, антропологами, математиками и физиками. Ее исходные положения даны в F. Heider, Attitudes and cognitive organization, Journal of Psychology, Vol. 21 (1946), pp. 107–112, и F. Heider, The Psychology of Interpersonal Relations (John Wiley and Sons, 1958). Обзор по теории баланса с точки зрения социальных сетей см. S. Wasserman and K. Faust, Social Network Analysis (Cambridge University Press, 1994), chapter 6.
7. Теорема, из которой следует, что сбалансированное состояние в полностью связной сети должно быть либо в виде одной нирваны для всех друзей, либо в виде двух взаимно антагонистических группировок, впервые была доказана в D. Cartwright and F. Harary, Structural balance: A generalization of Heider's theory, Psychological Review, Vol. 63 (1956), pp. 277–293. Очень легко читаемая версия доказательства и простое введение в математику теории баланса дано двумя моими коллегами из Корнельского университета в работе D. Easley and J. Kleinberg, Networks, Crowds, and Markets (Cambridge University Press, 2010).
8. Примеры и графические изображения альянсов до Первой мировой войны взяты из T. Antal, P. L. Krapivsky and S. Redner, Social balance on networks: The dynamics of friendship and enmity, Physica D, Vol. 224 (2006), pp. 130–136, доступной по адресу http://arxiv.org/abs/physics/0605183. Эта статья, написанная тремя физиками, распространяет теорию баланса на динамические структуры, тем самым расширяя ее за пределы ранних статических подходов. Исторические подробности европейских союзов и альянсов приведе-

* Среди многочисленных русских книг о началах математики, нестандартных-подходах к ее изучению, развитии математического творчества у детей и тому подобных тем, созвучных следующим главам книги, укажем пока следующие: Пухначев Ю., Попов Ю. Математика без формул. М. : АО «Столетие», 1995; Остер Г. Задачник. Ненаглядное пособие по математике. М. : АСТ, 2005; Рыжик В. И. 30 000 уроков математики: Книга для учителя. М. : Просвещение, 2003: Тучнин Н. П. Как задать вопрос? О математическом творчестве школьников. Ярославль : Верх.-Волж. кн. изд-во, 1989.

ны в W. L. Langer, European Alliances and Alignments, 1871–1890, 2nd edition (Knopf, 1956) и B. E. Schmitt, Triple Alliance and Triple Entente (Henry Holt and Company, 1934).

4. Коммутативность: перемена мест сомножителей

9. Кит Девлин написал провокационную серию очерков о природе умножения: что это такое, что в нем не так и почему определенные виды мышления более ценны и надежны в процессе умножения, чем другие. Он рассматривает умножение как масштабирование, не сводя его к процессу суммирования, и показывает, что эти два понятия (умножение как масштабирование и умножение как суммирование) существенно разнятся в реальных условиях. См. его январскую (2011 года) статью What exactly is multiplication? на http://archive.is/qCkK, а также три более ранних 2008 года: It ain't no repeated addition (http://www.maa.org/devlin/devlin_06_08.html), It's still not repeated addition (http://www.maa.org/devlin/devlin_0708_08.html) и Multiplication and those pesky British spellings (http://www.maa.org/devlin/devlin_09_08.html). Эти статьи активно обсуждались в среде блогеров, особенно среди учителей.
10. В примере с джинсами порядок применения налогового сбора и скидки для вас не имеет значения — в обоих сценариях вы в конечном итоге платите 43,20 доллара. Но для правительства и магазина он весьма существенен! В сценарии продавщицы (при котором вы платите налог в зависимости от первоначальной цены) вы заплатите 4 доллара налога, в вашем сценарии — всего 3,20 доллара. Я не знаю, одинаков ли закон о налоге на продажи во всех штатах, но рациональнее всего взимать его на основе фактической цены в магазине. Дальнейшее обсуждение этих вопросов см. http://www.facebook.com/TeachersofMathematics/posts/166897663338316.
11. Обсуждение достоинств и недостатков закона Roth 401(k) см. публикации Commutative law of multiplication (http://thefinancebuff.com/commutative-law-of-multiplication.html) и The new Roth 401(k) versus the traditional 401(k): Which is the better route? (http://www.thesimpledollar.com/2007/06/20/the-new-roth-401k-versus-the-traditional-401k-which-is-the-better-route/).
12. Эта история о Мюррее Гелл-Манне рассказывается в G. Johnson, Strange Beauty (Knopf, 1999), p. 55. По словам самого Гелл-Манна, хотя его приняли в «страшный» Массачусетский технологический институт, он «рассматривал самоубийство как единственный выход из положения, если пролетаешь мимо Лиги плюща». «Мне пришло в голову (и это интересный пример некоммутирующих операторов), что можно попробовать учебу в Массачусетском технологическом институте и убить себя позже, в то время как обратный порядок событий невозможен». Этот отрывок приведен в H. Fritzsch, Murray Gell-Mann: Selected Papers (World Scientific, 2009), p. 298.

13. Рассказ о том, как Гейзенберг и Дирак открыли роль некоммутирующих переменных в квантовой механике*, см. G. Farmelo, The Strangest Man (Basic Books, 2009), pp. 85–87.

5. Деление и его проблемы

14. Сцену, где молодой Кристи пытается мужественно ответить на вопрос «Сколько будет 25 процентов от четверти?» можно найти на сайте http://www.tcm.com/mediaroom/video/223343/My-Left-Foot-Movie-Clip-25-Percent-of-a-Quarter.html.
15. В блоге Джорджа Ваккаро (http://verizonmath.blogspot.com/) можно узнать подробности его встречи с представителями Verizon Wireless. Стенограмма разговора доступна на http://verizonmath.blogspot.com/2006/12/transcription-jt.html. Аудиозапись — на http://imgs.xkcd.com/verizon_billing.mp3.
16. Для читателей, которым все еще трудно принять, что 1 = 0,9999..., аргументом (убедившим в конце концов и меня) может быть такое рассуждение: они должны быть равны, потому что между ними нельзя вставить никакого другого десятичного числа. (В то же время, если два десятичных числа не равны, то между ними можно вставить их среднее, а также бесконечно много других десятичных чисел.)
17. Удивительные свойства иррациональных чисел обсуждаются на более высоком математическом уровне на странице Irrational Number по адресу http://mathworld.wolfram.com/IrrationalNumber.html. Взгляд, согласно которому цифры в иррациональном числе рассматриваются как случайные, представлен на http://mathworld.wolfram.com/NormalNumber.html.

6. Твердая позиция

18. Более подробную информацию о Корнелле, в том числе о его роли в Western Union, см. P. Dorf, The Builder: A Biography of Ezra Cornell (Macmillan, 1952); W. P. Marshall, Ezra Cornell (Kessinger Publishing, 2006); и http://rmc.library.cornell.edu/ezra/index.html, онлайн-выставку в честь 200-летнего юбилея Корнелла.
19. Древние системы счисления** и происхождение десятичной системы обсуждаются в V. J. Katz, A History of Mathematics, 2nd edition (Addison Wesley

* По истории квантовой механики см., например: Пономарев Л. И. Под знаком кванта. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005; Милантьев В. П. История возникновения квантовой механики и развитие представлений об атоме. М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.

** Из огромной литературы по истории математики на русском языке выделим только следующие издания, которые признаны как наиболее фундаментальные в этом разделе математики: Варден, дер. В. Пробуждающаяся наука. Математика

Longman, 1998) и в C. B. Boyer and U. C. Merzbach, A History of Mathematics, 3rd edition (Wiley, 2011). О развитии систем счета см. C. Seife, Zero (Viking, 2000), chapter 1.

20. Марк Чу-Кэрролл рассматривает некоторые специфические особенности римских чисел и римской арифметики в блоге http://scienceblogs.com/goodmath/2006/08/roman_numerals_and_arithmetic.php.
21. Увлекательная выставка вавилонской математики описывается в N. Wade, An exhibition that gets to the (square) root of Sumerian math, New York Times (November 22, 2010) на сайте http://www.nytimes.com/2010/11/23/science/23babylon.html, сопровождающее слайд-шоу см. на http://www.nytimes.com/slideshow/2010/11/18/science/20101123-babylon.html.
22. Это может быть преувеличением. Одну из гипотез о том, как число 60 можно связать с анатомией рук человека, см. в G. Ifrah, The Universal History of Numbers (Wiley, 2000), chapter 9.

7. Получая радость от x

23. Для зануд: Лия действительно на 21 месяц старше Джо.
24. Фейнман рассказывает об остроумном методе Бете возведения в квадрат чисел до 50 в книге R. P. Feynman, Surely, You're Joking, Mr. Feynman!, стр. 193 (W. Norton and Company, 1985)*.
25. Получение одинаковых результатов при повышении и понижении стоимости акций на одинаковый процент при колебании цен на фондовом рынке можно доказать математически с помощью умножения $1 + x$ на $1 - x$ или геометрически, нарисовав схему, аналогичную используемой Бете для объяснения своего метода. Если у вас есть настроение, в качестве упражнения попробуйте оба подхода.
26. «Ваш возраст, деленный на два, и плюс семь», — эта формула называется стандартом приемлемой разницы в возрасте партнеров, находящихся в романтических отношениях. Ее можно найти по ссылке http://xkcd.com/314/.

древнего Египта, Вавилона и Греции. М. : Наука, 1959; Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. М. : Наука, 1967; Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: КомКнига, 2007; История математики. В 3-х томах / Под ред. А. П. Юшкевича. М. : Наука, 1970–1972. Том I. С древнейших времен до начала Нового времени (1970).

* Фейнман Р. Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман! М. : Колибри, 2008.

8. В поиске своих корней

27. О поиске решений более сложных уравнений, от квадратных до уравнений пятого порядка*, ярко и подробно рассказывается в книге M. Livio, The Equation That Couldn't Be Solved (Simon and Schuster, 2005).
28. Дополнительные сведения о классической проблеме удвоения куба можно найти по адресу http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Doubling_the_cube.html.
29. Чтобы больше узнать о мнимых и комплексных числах** и их применении, а также об их переменчивой истории см. J. Nahin, An Imaginary Tale (Princeton University Press, 1998) и B. Mazur, Imagining Numbers (Farrar, Straus and Giroux, 2003).
30. Прекрасную журналистскую работу о Джоне Хаббарде можно найти в книге J. Gleick, Chaos, p. 217 (Viking, 1987). Собственный взгляд Хаббарда на метод Ньютона отображен в разделе 2.8 книги J. Hubbard and B. B. Hubbard, Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms, 4^{th} edition (Matrix Editions, 2009).

    Для читателей, которые хотят углубиться в математический аппарат метода Ньютона, более сложное, но все же довольно понятное объяснение дано в книге H.-O. Peitgen and P. H. Richter, The Beauty of Fractals (Springer, 1986), chapter 6; также см. статью Эдриана Двади (сотрудник Хаббарда), озаглавленную Julia sets and the Mandelbrot set, в этой же книге.
31. Хаббард не был первым математиком, поставившим вопрос о применении метода Ньютона, в комплексной плоскости. Артур Кэли, британский математик, задал его еще в 1879 году. Он также рассмотрел квадратичный и кубический полиномы и понял, что первый случай гораздо проще, чем второй. Хотя тогда он еще не мог знать о фракталах, которые были обнаружены век спустя, он прекрасно понимал, что есть риск возникновения определенных проблем, если корней окажется больше двух. В его небольшой (на одну страницу) статье Desiderata and suggestions: No.3—the Newton-Fourier imaginary problem, American Journal of Mathematics, 2(1), March 1879, p. 97, с которой можно ознакомиться на сайте http://www.jstor.org/pss/2369201, заключение звучит как сдержанное предупреждение: «Для квадратного уравнения решение легко и элегантно, но представляется, что решение кубического уравнения окажется значительно сложнее».

---

* Книга для школьников по решению алгебраических уравнений: Самарова С.С. Решение алгебраических уравнений. М. : Резольвента, 2010.

** Среди обширной литературы по комплексным числам укажем только одну из последних книг: Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. М. : МЦНМО, 2002.

32. Снимки, представленные в этой главе, были рассчитаны методом Ньютона, примененного для нахождения корней многочлена $z^3 - 1$. Его корни — три кубических корня из 1. Для этого случая в соответствии с алгоритмом Ньютона на комплексной плоскости выбирается точка z, она и переносит значение корня в новую точку, рассчитанную по формуле

$$z - (z^3 - 1)/(3z^2).$$

Именно это значение и становится следующим значением z. Данный процесс повторяется, пока z не подходит достаточно близко к корню или, что эквивалентно, пока $z^3 - 1$, не подойдет достаточно близко к нулю, где под «достаточно близко» понимается очень маленькое расстояние, выбранное программистом. Затем все исходные точки, которые приводят к определенному корню, окрашиваются в одинаковый цвет. Таким образом, точки красного цвета сходятся к одному корню, точки зеленого — к другому, а синего — к третьему. Снимки окончательного фрактала Ньютона были любезно предоставлены Саймоном Татемом. Дополнительные сведения о его работе вы найдете на странице Fractals derived from Newton-Raphson iteration на сайте: http://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/newton/.

Видеоанимация фрактала Ньютона сделана Teamfresh. Потрясающе глубокое масштабирование других фракталов, в том числе знаменитого множества Мандельброта, можно увидеть на сайте Teamfresh по адресу http://www.hd-fractals.com.

33. Для знакомства с древнеиндийскими методами нахождения квадратного корня* см. работу D. W. Henderson and D.Taimina, Experiencing Geometry, 3rd edition (Pearson Prentice Hall, 2005).

9. Ванна моя преисполнена

34. Большое количество классических арифметических задач** находятся на http://MathNEXUS.wwu.edu/Archive/oldie/list.asp.

35. Более сложная задача с ванной появилась в драме 1941 года How Green Was My Valley («Как зелена моя долина»). Клип к этому фильму можно найти

* См. также Чистяков В. Д. Материалы по истории математики в Китае и Индии. М. : Учпедгиз, 1960.

** В русскоязычном интернете очень много сайтов, которые предлагают арифметические задачи для «решателей» разного возраста — от дошкольников до седых ветеранов. Вот несколько из них: Эрудит.net (http://eruditov.net/publ/math/1); Математические задачи — Логика и рассуждения (http://www.smekalka.pp.ru/math_logic.html); Математические задачи (http://www.prostomac.com/tag/matematicheskie-zadachi/); Математика (http://nazva.net/rubric/11/).

по адресу http://www.math.harvard.edu/~knill/mathmovies/swf/valley.html. И пока вы еще там, посмотрите ролик из комедии о бейсболе Little Big League («Маленькая большая лига»), который можно найти по адресу http://www.math.harvard.edu/~knill/mathmovies/m4v/league.m4v.

В этом фильме есть задача о покраске домов: «Если я могу покрасить дом за три часа, а ты — за пять, сколько нам потребуется времени на покраску дома, если мы будем работать вместе?».

На экране мы видим, как бейсболисты дают различные глупые ответы. «Все очень просто, пять умножить на три, так что это пятнадцать». «Нет, нет, нет, посмотрите. Это займет восемь часов: пять плюс три, вот и восемь». После еще нескольких промахов один игрок наконец отвечает правильно: $1\frac{7}{8}$ часов.

10. Игра с квадратами

36. Книги о великих уравнениях: M. Guillen, Five Equations That Changed the World (Hyperion, 1995); G. Farmelo, It Must Be Beautiful (Granta, 2002) и R. P. Crease, The Great Equations (W.W. Norton and Company, 2009).
37. Множество подобных примеров обсуждается в статье S. Gandz, The algebra of inheritance: A rehabilitation of al-Khuwarizmi, Osiris, Vol. 5 (1938), pp. 319–391.
38. Подход Аль-Хорезми к решению квадратных уравнений описан в книге V. J. Katz, A History of Mathematics, 2nd edition (Addison Wesley Longman, 1998), pp. 244–249.

11. Инструменты силы

39. Для простоты выражение x^2 я назвал функцией, но было бы точнее говорить об отображении x в x^2. Я надеюсь, что это сокращение не запутает читателя, поскольку подобные надписи мы видим на кнопках калькулятора.
40. Рекламный ролик о функциях водяных струй в аэропорту Детройта, созданный WET Design, можно посмотреть на сайте http://www.youtube.com/watch?v=VSUKNxVXE4E.

    Уилл Хоффман и Дерек Бойл сняли интригующее видео о параболах и их экспоненциальных кузинах, кривых, называемых цепной линией (линия, форму которой принимает гибкая однородная нерастяжимая тяжелая нить или цепь, — отсюда и название). См. WNYC/NPR Radio Lab presents Parabolas (etc.) на сайте http://www.youtube.com/watch?v=rdSgqHuI-mw.
41. Историю о приключениях Бритни Галливан со складыванием бумаги см. в B. allivan, How to fold a paper in half twelve times: An ‘impossible challenge’ solved and explained, Pomona, CA: Historical Society of Pomona Valley, 2002 на сайте http://pomonahistorical.org/12times.htm.

42. Для справок и дальнейшего обсуждения нотных гамм* и нашего (почти) логарифмического восприятия высоты звука см. J. H. McDermott and A. J. Oxenham, Music perception, pitch, and the auditory system, Current Opinion in Neurobiology, Vol. 18 (2008), pp. 1–12 на http://en.wikipedia.org/wiki/Pitch_(music); http://en.wikipedia.org/wiki/Musical_scale; и http://en.wikipedia.org/wiki/Piano_key_frequencies.

    Для подтверждения того, что наше врожденное арифметическое мышление также и логарифмическое см. S. Dehaene, V. Izard, E. Spelke, and P. Pica, Log or linear? Distinct intuitions of the number scale in Western and Amazonian indigene cultures, Science, Vol. 320 (2008), pp. 1217–1220 на сайте http://www.sciencedaily.com/releases/2008/05/080529141344.htm.

12. Танец квадратов

43. Оказывается, древние вавилоняне, индийцы и китайцы уже за несколько веков до Пифагора и греков обладали знаниями, содержащимися в теореме Пифагора. Для получения дополнительных сведений об истории и значении теоремы, а также обзор множества ее изобретательных доказательств см. книгу E. Maor, The Pythagorean Theorem (Princeton University Press, 2007)**.
44. На странице 13 своей книги Маор объясняет, что слово «гипотенуза» означает «натянутая под», и указывает, что это имеет смысл, если считать, что гипотенуза прямоугольного треугольника находится внизу (см. евклидово доказательство теоремы Пифагора). Он также отмечает, что эта интерпретация хорошо вписывается в китайское слово, обозначающее гипотенузу, «сянь» (*hsien)* — струна, натянутая между двумя точками (как в лютне).
45. Дети и их родители насладятся съедобными иллюстрациями теоремы Пифагора, предложенными Джорджем Хартом на его постере Pythagorean crackers («Пифагорейские крекеры») для музея математики по адресу http://momath.org/home/pythagorean-crackers/.
46. Вот рассуждения, пропущенные во втором доказательстве. Возьмем равенство $a/d = c/a$ и преобразуем его в $d = a^2/c$. Аналогично преобразуя другое равенство, получим $e = b^2/c$. Наконец, подставив выражения для d и e в равенство $c = d + e$, получим $c = a^2/c + b^2/c$. Теперь умножим обе части последнего равенства на c и выведем искомую формулу $c^2 = a^2 + b^2$.

---

* О связи математики и музыки см. Волошинов А.В. Математика и искусство. М. : Просвещение, 2000. Эта книга не только для тех, кто любит математику или искусство, но и для тех, кто желает задуматься о природе прекрасного и красоте науки. Настоятельно рекомендую эту книгу.

** Аналогом данной книги на русском языке может служить книга Литцман В. Теорема Пифагора. М. : ГИФМЛ, 1960.

13. Кое-что из ничего

47. Все 13 книг Elements* в одном удобном томе с большим количеством иллюстраций: Euclid's Elements, edited by D. Densmore, (Green Lion Press, 2002). Еще один отличный перевод в формате PDF: http://farside.ph.utexas.edu/euclid.html.
48. Дополнительные сведения о Томасе Джефферсоне, о его преклонении перед Евклидом и Ньютоном и использовании им аксиоматического подхода при написании Декларации независимости, можно найти в книге I. B. Cohen, Science and the Founding Fathers, (W. W. Norton and Company), 1995 и J. Fauvel, Jefferson and mathematics на http://www.math.virginia.edu/Jefferson/jefferson.htm.
49. В этой главе я умолчал о ряде тонкостей в двух представленных доказательствах. Например, в доказательстве о равностороннем треугольнике неявно предполагается (как сделал Евклид), что две окружности пересекаются в какой-то определенной точке, которую мы обозначили *C*. Но нет никаких аксиом Евклида, подтверждающих это свойство, — нужна дополнительная аксиома о непрерывности окружностей. Бертран Рассел, в частности, отметил этот пробел в статье B. Russell, The Teaching of Euclid, Mathematical Gazette, Vol. 2, No. 33 (1902), pp. 165–167, доступна по адресу http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Extras/Russell_Euclid.html.

    Другая тонкость в доказательстве того, что сумма углов треугольника равна 180 градусам, заключается в безоговорочном использовании постулата о пересечении параллельных прямых третьей. Этот постулат позволил нам построить линию, параллельную основанию треугольника. Но в другой геометрии (неевклидовой) может не быть ни одной линии, параллельной заданной, или существовать бесконечно много таких линий. В геометриях, столь же логически последовательных, как и Евклидова, углы треугольника не всегда равны 180 градусам. Таким образом, приведенное здесь доказательство Пифагора больше чем просто элегантное, оно говорит о глубинной природе самого пространства. Для получения дополнительных комментариев по этим вопросам см. блог A. Bogomolny, Anglesin triangle add to 180°: http://www.cut-the-knot.org/triangle/pythpar/AnglesInTriangle.shtml и статью T. Beardon, When the angles of a triangle don't add up to 180 degrees по адресу http://nrich.maths.org/1434.

---

* В английской традиции книги Евклида называются Elements («Элементы»), в отличие от русской традиции, где книги Евклида имеют название «Начала». Русское полное издание «Начал» Евклида: Начала Евклида. Пер. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии И. Н. Веселовского и М. Я. Выгодского. В 3 т. (Серия «Классики естествознания»). М. : ГТТИ, 1948–50.

14. Конический заговор

50. Информацию о конических сечениях* и ссылки на обширную литературу о них см. http://mathworld.wolfram.com/ConicSection.html и http://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section.
51. Вы сможете дать разгуляться своей интуиции, наблюдая за онлайн-анимацией, созданной Лу Талманом, и обсудить свои идеи на его странице The geometry of the conic sections («Геометрия конических сечений»).

15. Непременное условие

52. График, представленный в главе, сделан для города Юпитер (США, Флорида) в 2011 году. Для удобства время восходов и заходов Солнца фиксировалось по Североамериканскому восточному времени (часовой пояс UTC -05:00) в течение всего года, чтобы избежать искусственного перерыва, вызванного переходом на летнее время.

    Студентов удивляют подобные графики (например, некоторые из них ожидают увидеть кривые, похожие на треугольники, а не на округлые и гладкие кривые), что можно использовать для полезных классных занятий в старшей или средней школе. С педагогической целью см. статью A. Friedlander and T. Resnick, Sunrise, sunset, Montana Mathematics Enthusiast, Vol. 3, No. 2 (2006), pp. 249–255, которая доступна по адресу http://www.math.umt.edu/tmme/vol3no2/TMMEvol3no2_Israel_pp249_255.pdf.

    Вывести формулы для времени восхода и захода солнца сложно, для этого понадобятся и математика, и физика. См., например, страницу T. L. Watts's webpage Variation in the time of sunrise на http://www.physics.rutgers.edu/~twatts/sunrise/sunrise.html.
53. Предмет**, любовно исследованный в книге E. Maor, Trigonometric Delights, Princeton University Press, 1998.
54. Широкий обзор закономерностей в природе дан в P. Ball, The Self-Made Tapestry, Oxford University Press, 1999. Математические методы для этой области представлены в работе R. Hoyle, Pattern Formation, Cambridge University Press, 2006. Математический анализ полосок зебры, рисунков на крылышках бабочек и другие биологические примеры формообразования

---

* О конических сечениях популярно: И. Н. Бронштейн. Общие свойства конических сечений // Квант. 1975. № 5.
О конических сечениях для читателей с математической подготовкой: Акопян А. В. , Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М. : МЦНМО, 2007.

** Русский источник по тригонометрии: Гельфанд И. М., Львовский С. М., Тоом А. Л. Тригонометрия. М. : МЦНМО, 2002.

найдете в J. D. Murray, Mathematical Biology: II. Spatial Models and Biomedical Applications, 3rd edition, Springer, 2003.

55. Связи между биологическим и космологическим структурообразованием — одна из многих радостей, которые можно найти в книге Janna Levin, How the Universe Got Spots, Princeton University Press, 2002, составленной из как будто неотправленных писем к матери. В книге математические и физические идеи изящно переплетаются с личным дневником молодого ученого, только начинающего научную деятельность.
56. Для ознакомления с понятиями инфляционной космологии следует обратиться к двум статьям Stephen Battersby: Introduction: Cosmology, New Scientist (September 4, 2006) по адресу http://www.newscientist.com/article/dn9988-introduction-cosmology.html и Best ever map of the early universe revealed, New Scientist, (March 17, 2006) по адресу http://www.newscientist.com/article/dn8862-best-ever-map-of-the-early-universe-revealed.html.

    Аргументы в пользу инфляционной космологии остаются спорными. Ее сильные и слабые стороны рассматриваются в статье P. J. Steinhardt, The inflation debate: Is the theory at the heart of modern cosmology deeply flawed? Scientific American, (April 2011), pp.18–25.

16. Идти до предела

57. История философии и ее интеллектуальное наследие — парадоксы Зенона, обсуждаются в книге J. Mazur, Zeno's Paradox, Plume, 2008*.
58. О восхитительно своевольной и остроумной истории числа π можно узнать из книги P. Beckmann, A History of Pi (St. Martin's Press, 1976).
59. Кто хочет посмотреть математическое обоснование Архимедова метода исчерпывания, обратитесь к http://personal.bgsu.edu/~carother/pi/Pi3a.html.
60. Все, кто интересуется героическими вычислениями π до очень высокой степени точности, должны воспользоваться страничкой Ричарда Престона о братьях Чудновских. Эта нежная и удивительно смешная история под названием The mountains of pi («Горы “пи”») появилась в номере еженедельного журнала New Yorker от 2 марта 1992 года; ее можно прочитать в вышедшей позднее книге R. Preston, Panic in Level Four (Random House, 2008).
61. Учебник, дающий представление об основных методах численного** анализа: W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, Numerical Recipes, 3rd edition, Cambridge University Press, 2007.

---

* Русскоязычный аналог: Асмус В. Ф. История античной философии. М. : Высшая школа, 1965.

** Среди огромной литературы по методам численного анализа выделим только одну книгу, которая подойдет и для начинающих математиков: Бабенко К. И. Основы численного анализа. М. : Наука, 1986.

17. Перемены, в которые мы можем поверить

62. См. M. Bressoud, The crisis of calculus, Mathematical Association of America (April 2007), доступно на http://www.maa.org/columns/launchings/launchings_04_07.html.
63. Для коллекции господина Жоффрея различные задачи вычислительного характера, как классические, так и авторские, см. S. Strogatz, The Calculus of Friendship (Princeton University Press, 2009).
64. Несколько статей, видео и сайтов приводят подробные сведения о законе Снелла и его вывод из принципа Ферма (который утверждает, что свет идет по пути с минимальным временем движения). См. M. Golomb, Elementary proofs for the equivalence of Fermat's principle and Snell's law, American Mathematical Monthly, Vol. 71, № 5 (May 1964), pp. 541–543 и сайт http://en.wikibooks.org/wiki/Optics/Fermat%27s_Principle.

    Принцип Ферма был предтечей более общего принципа наименьшего действия. Для его развлекательного и глубоко поучительного обсуждения, в том числе в квантовой механике, см. книгу R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, The principle of least action, The Feynman Lectures on Physics, Vol. 2, chapter 19 (Addison-Wesley, 1964), и R. Feynman, *QED* (Princeton University Press, 1988)*.
65. Здесь речь идет об удивительном предположении Фейнмана о том, что природа на самом деле пробует все возможные пути. Однако почти все они компенсируют друг друга через квантовый аналог разрушительных помех, за исключением тех, которые очень близки к классическому пути, где действия сведены к минимуму (или, точнее, к стационарным значениям). Тогда квантовая интерференция становится конструктивной, и, скорее всего, будет выбран именно этот путь. Поэтому, по оценке Фейнмана, природа подчиняется принципу минимума. Важно то, что мы живем в макроскопическом мире повседневного опыта, где массы и взаимодействия колоссальны по сравнению с постоянной Планка. При таком классическом ограничении квантовая деструктивная интерференция становится чрезвычайно сильной и уничтожает почти все, что могло бы случиться.

18. Хоть ломтиками, хоть кубиками

66. Более подробную информацию о том, как интегральное исчисление помогает ученым, борющимся с раком, см. D. Mackenzie, Mathematical modeling of cancer, SIAM News, Vol. 37 (January/February 2004), и H. P. Greenspan, Models for the growth of a solid tumor by diffusion, Studies in Applied Mathematics (December 1972), pp. 317–340.

---

* Русский перевод последней книги: Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Том 2. М. : Мир, 1965.

67. В математической литературе два одинаковых круглых цилиндра, оси которых пересекаются под прямым углом, называются по-разному: тело Штейнмеца, или бицилиндр. Для подготовленного читателя см. http://mathworld.wolfram.com/SteinmetzSolid.html и http://en.wikipedia.org/wiki/Steinmetz_solid. На страничке «Википедии» тоже есть очень полезная компьютерная анимация, которая показывает, как из пересекающихся цилиндров появляется призрачное тело Штейнмеца. Его объем современными методами можно рассчитать прямолинейно, но не прозрачно.

    Архимед и Цзу Чунчжи знали более простое решение с использованием метода нарезки на кусочки и сравнения площадей квадрата и круга. Удивительно ясное изложение представлено в Martin Gardner's column Mathematical games: Some puzzles based on checkerboards, Scientific American, Vol. 207 (November 1962), p. 164. Об Архимеде и Цу Чунчжи см. Archimedes, The Method, English translation by T. L. Heath (1912), reprinted by Dover (1953); и T. Kiang, An old Chinese way of finding the volume of a sphere, Mathematical Gazette, Vol. 56 (May 1972), pp. 88–91.

    Мортон Мур отмечает, что бицилиндр также нашел применение в архитектуре: «Римляне и норманны при возведении цилиндрических сводов зданий были знакомы с геометрией пересекающихся цилиндров, где при пересечении двух таких сводов формировался крестообразный свод». Об этом и применении бицилиндров в кристаллографии см. M. Moore, Symmetrical intersections of right circular cylinders, Mathematical Gazette, Vol. 58 (October 1974), pp. 181–185.

68. Интерактивная демонстрация бицилиндров и других задач интегрального счисления доступна онлайн на The Wolfram Demonstrations Project (http://demonstrations.wolfram.com/). Чтобы с ними поиграть, нужно загрузить бесплатный интерактивный Mathematica Player (http://www.wolfram.com/products/player/), который в дальнейшем позволит вам исследовать сотни других интерактивных примеров из всех разделов математики. Наглядную демонстрацию бицилиндра см. на The bicylinder demo по адресу http://demonstrations.wolfram.com/IntersectingCylinders/.

    Мамикон Мнацаканян на сайте Калифорнийского технологического института (Caltech) представил серию анимаций, иллюстрирующих Архимедов метод разбиения на кусочки и его мощь. Моя любимая страничка: http://www.its.caltech.edu/~mamikon/.

    На Sphere.html изображены красивые отношения между объемами сферы и двойного конуса и цилиндра, чьи высота и радиус совпадают с радиусом сферы. Это же более наглядно можно увидеть, виртуально сливая воду из цилиндра в две другие формы, см. http://www.its.caltech.edu/~mamikon/SphereWater.html.

Такие же элегантные механические аргументы на службе у математики приведены в работе M. Levi, The Mathematical Mechanic (Princeton University Press, 2009).

69. Применение механического метода Архимеда к задаче нахождения объема бицилиндра см. T. L. Heath, ed., Proposition 15, The Method of Archimedes, Recently Discovered by Heiberg (Cosimo Classics, 2007), p. 48.

    На странице 13 этого же тома Архимед признается, что рассматривает свой механический метод как средство для поиска теорем, а не их доказательства: «Некоторые вещи сначала мне стали ясны благодаря механическому методу, хотя в дальнейшем они должны были бы быть представлены средствами геометрии, потому что их исследование механическим методом фактически было просто демонстрацией. Но, конечно, найти доказательство проще, заранее получив некоторые знания по этому вопросу, чем если их не иметь».

    Популярное изложение работы Архимеда см. R. Netz and W.Noel, The Archimedes Codex (Da Capo Press, 2009).

70. Фундаментальная теорема интегрального исчисления — теорема Ньютона–Лейбница. Далее цитата из «Википедии»: «Теорема Ньютона–Лейбница утверждает, что дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными операциями. Точнее, это касается значения первообразных для определенных интегралов. Поскольку, как правило, легче вычислить первообразную, чем применять формулу определенного интеграла, теорема дает практический способ вычисления определенных интегралов. Она также может быть интерпретирована как точное утверждение о том, что дифференцирование является обратной операцией интегрирования.

    Теорема гласит: если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и F есть функция, производная которой равна f на интервале (a, b), то:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

    Кроме того, для любого x из интервала (a, b)

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)».$$

19. Все о числе *e*

71. Все ипостаси числа e и экспоненциальной функции представлены в книге E. Maor, e: The Story of a Number (Princeton University Press, 1994). Читатели, которые знакомы с интегральным исчислением, насладятся статьей B. J. McCartin, e: The master of all, Mathematical Intelligencer, Vol. 28, № 2 (2006), pp. 10–21. PDF-версия доступна по адресу http://mathdl.maa.org/images/upload_library/22/Chauvenet/mccartin.pdf.

72. «Упаковочный» коэффициент для пар, случайно рассаживающихся в кинотеатре, в научной литературе был изучен на других примерах. Он впервые возник в органической химии, см. P. J. Flory, Intramolecular reaction between neighboring substituents of vinyl polymers, Journal of the American Chemical Society, Vol. 61 (1939), pp. 1518–1521. Более современное изучение этого вопроса относится к проблеме случайной парковки, классическим головоломкам в теории вероятностей и статистической физике, см. W. H. Olson, A Markov chain model for the kinetics of reactant isolation, Journal of Applied Probability, Vol. 15, № 4 (1978), pp. 835–841.
73. Вопрос о том, когда прекращать перебирать партнеров и останавливать выбор на будущем супруге, изучался в различных формах и имеет различные названия: задача о невесте, задача о вступлении в брак, задача о капризном поклоннике, задача о выкупе султана за невесту. Но наиболее распространенное в настоящее время название — это задача секретаря. (Воображаемый сценарий найма лучшего секретаря из данного списка кандидатов. Вы беседуете с каждым претендентом по отдельности и должны решить, берете ли вы его на работу или прощаетесь навсегда). Для ознакомления с этой замечательной математической головоломкой и ее историей см. http://mathworld.wolfram.com/SultansDowryProblem.html и http://en.wikipedia.org/wiki/Secretary_problem. Для дополнительных сведений обратитесь к статье T. S. Ferguson, Who solved the secretary problem? Statistical Science, Vol. 4, № 3 (1989), pp. 282–289. Понятное изложение решения этой задачи можно найти по адресу http://www.math.uah.edu/stat/urn/Secretary.html. Для лучшего ознакомления с теорией оптимальных правил остановки см. T. P. Hill, Knowing when to stop: How to gamble if you must — the mathematics of optimal stopping, American Scientist, Vol. 97 (2009), pp. 126–133.

20. Любит не любит

74. Модели любовных отношений, основанные на дифференциальных уравнениях, см. S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos (Perseus, 1994).
75. Анаграмму Ньютона см. V. I. Arnold, Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations (Springer, 1994).
76. Хаос в задаче о трех телах обсуждается в I. Peterson, Newton’s Clock (W.H. Freeman, 1993).
77. Цитату о том, как задача о трех телах вызывала головную боль у Ньютона, см. D. Brewster, Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton (Thomas Constable and Company, 1855), Vol. 2, p. 158.

21. Выйди на свет

78. Прекрасная возможность познакомиться с векторным исчислением и уравнениями Максвелла и, вероятно, самый лучший учебник, который я когда-либо изучал: E. M. Purcell, Electricity and Magnetism, 2nd edition (Cambridge University Press, 2011). Еще классика: H. M. Schey, Div, Grad, Curl, and All That, 4th edition (W. W. Norton and Company, 2005).
79. Эти слова были написаны во время празднования 150-летней годовщины книги Максвелла «О физических силовых линиях», увидевшей свет в 1861 году, см. Part III. The theory of molecular vortices applied to statical electricity, Philosophical Magazine (April and May, 1861), pp. 12–24, доступно по адресу http://en.wikisource.org/wiki/On_Physical_Lines_of_Force. Отсканированная копия оригинала представлена на http://www.vacuum-physics.com/Maxwell/maxwell_oplf.pdf.

    На оригинал стоит взглянуть. Кульминационная точка находится чуть ниже уравнения 137, где Максвелл, трезвый человек, не склонный к театральности, не удержался и выделил курсивом самый революционный вывод в своей работе: «Скорость поперечного волнового движения нашей гипотетической среды, вычисленная на основании электромагнитных экспериментов М. Кольрауша и Вебера, согласуется с такой точностью со скоростью света, вычисленной на основании оптических экспериментов М. Физо, что мы едва ли можем избежать вывода, *что свет состоит из поперечного волнового движения той же среды, которая является причиной электрических и магнитных явлений*».
80. Работу Джейн Ван о полете стрекозы см. Z. J. Wang, Two dimensional mechanism for insect hovering, Physical Review Letters, Vol. 85, № 10 (September 2000), pp. 2216–2219; Z. J. Wang, Dragonfly flight, Physics Today, Vol. 61, № 10 (October 2008), p. 74.

    Видео полета стрекозы см. по адресу http://ptonline.aip.org/journals/doc/PHTOAD-ft/vol_61/iss_10/74_1.shtml.
81. Оказывается, Эйнштейн тоже хотел быть мухой в кабинете Максвелла, как он писал в 1940 году: «Представьте себе чувства [Максвелла], когда дифференциальные уравнения, которые он сформулировал, доказали ему, что электромагнитные поля распространяются в виде поляризованных волн со скоростью света! Только несколько человек в мире удостоились чести испытать такое». См. в A. Einstein, Considerations concerning the fundaments of theoretical physics, Science, Vol. 91 (May 24, 1940), pp. 487–492 (доступно на http://www.scribd.com/doc/30217690/Albert-Einstein-Considerations-Concerning-the-Fundaments-of-Theoretical-Physics).
82. Уравнения Максвелла часто позиционируются как торжество чистого разума, но Саймон Шаффер, историк науки из Кембриджа, утверждает, что их

появление в равной степени было обусловлено насущной технологической проблемой того времени — проблемой передачи сигналов по подводным телеграфным кабелям. См. S. Schaffer, The laird of physics, Nature, Vol. 471 (2011), pp. 289–291.

22. Новая нормальность

83. Новейшие исследования в области данных см. в работах S. Baker, The Numerati (Houghton Mifflin Harcourt, 2008); I. Ayres, Super Crunchers (Bantam, 2007).
84. Как специалисты по спортивной статистике жонглируют цифрами, см. M. Lewis, Moneyball (W. W. Norton and Company, 2003).
85. См. N. G. Mankiw, A course load for the game of life, New York Times (September 4, 2010).
86. См. D. Brooks, Harvard-bound? Chin up, New York Times (March 2, 2006).
87. Введение в статистику* вместе с захватывающими историями найдете в книгах D. Salsburg, The Lady Tasting Tea (W. H. Freeman, 2001); L. Mlodinow, The Drunkard's Walk (Pantheon, 2008).
88. Если вы не знакомы с доской Гальтона, можете посмотреть опыты с ней на YouTube: http://www.youtube.com/watch?v=xDIyAOBa_yU.
89. Данные о распределении роста населения США см. в статье M. A. McDowell et al., Anthropometric reference data for children and adults: United States, 2003–2006, National Health Statistics Reports, № 10 (October 22, 2008), доступна на http://www.cdc.gov/nchs/data/nhsr/nhsr010.pdf.
90. OkCupid — самый большой бесплатный сайт знакомств в США, который летом 2011 года насчитывал семь миллионов активных пользователей. Специалисты сайта в области статистики проводят собственный анализ на основе анонимных и обобщенных данных его клиентов, а затем публикуют результаты исследований в своем блоге OkTrends (http://blog.okcupid.com/index.php/about/). Распределения роста см. C. Rudder, The big lies people tell in online dating, на http://blog.okcupid.com/index.php/the-biggest-lies-in-online-dating/. Я благодарю Кристиана Раддера за любезно предоставленную возможность использовать графики, приведенные в его блоге.
91. Введение в эту тему великолепно изложено в статье Марка Ньюмана M. Newman, Power laws, Pareto distributions and Zipf's law, Contemporary Physics, Vol. 46, № 5 (2005), pp. 323–351. В ней приводятся графики частотности слов в романе Германа Мелвилла «Моби Дик», магнитуды землетрясений

* Введение в статистику на русском языке: Положинцев Б.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Введение в математическую статистику: Учебное пособие. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2010; Орлов А.И. Прикладная статистика. М. : Экзамен, 2004.

в Калифорнии в период с 1910 по 1992 год, размеры собственного имущества 400 богатейших людей США в 2003 году, а также множество других распределений «с тяжелым хвостом», упомянутых в этой главе. Более раннее, но заслуживающее внимания исследование степенно́й зависимости см. M. Schroder, Fractals, Chaos, Power Laws (W. H. Freeman, 1991).

92. Пример взят из работы C. Seife, Proofiness (Viking, 2010). Приведенные в тексте цифры основаны на анализе, проведенном группой FactCheck.org (независимый проект Центра государственной политики Анненберг Университета Пенсильвании), доступен на http://www.factcheck.org/here_we_go_again_bush_exaggerates_tax.html. Этот анализ опубликован независимым Центром налоговой политики W. G. Gale, P. Orszag and I. Shapiro, Distributional effects of the 2001 and 2003 tax cuts and their financing, http://www.taxpolicycenter.org/publications/url.cfm?ID=411018.
93. См. B. Mandelbrot and R. L. Hudson, The (Mis)Behavior of Markets (Basic Books, 2004) и N. N. Taleb, The Black Swan (Random House, 2007).

23. Шансы — это...

94. Условные вероятности и теорема Байеса подробно рассмотрены в учебнике S. M. Ross, Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists, 4th edition (Academic Press, 2009). О Байесе и полемике вокруг его подхода к вероятностным выводам* см. S. B. McGrayne, The Theory That Would Not Die (Yale University Press, 2011).
95. Ответ на вопрос A: 59%. Ответ на вопрос B: 27/41, или приблизительно 65,85%. Чтобы прийти к таким результатам, возьмите 100 растений и подсчитайте на основе данных задачи, сколько из них (в среднем) были или не были политы и сколько погибнут или уцелеют.
96. Анализ результатов маммографии описан в главе 4 книги G. Gigerenzer, Calculated Risks (Simon and Schuster, 2002).
97. Вы найдете множество забавных историй об условной вероятности и ее применении в реальном мире, а также о ее неверном восприятии в книгах J. Paulos, Innumeracy (Vintage, 1990); L. Mlodinow, The Drunkard's Walk (Vintage, 2009).
98. Подробнее об истории О. Дж. Симпсона и спорах об избиении им жены см. главу 8 книги Gigerenzer, Calculated Risks. Оценки относительно судебного процесса над О. Дж. Симпсоном и выводы Алана Дершовица о количестве женщин, избитых и впоследствии убитых партнерами, см. A. Dershowitz, Reasonable Doubts (Touchstone, 1997), pp. 101–104.

* На русском языке: Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М. : Высшее образование, 2005. Ширяев А.Н. Вероятность. М. : Наука, 1989.

Теория вероятности впервые была применена правильно в ходе процесса Симпсона в 1995 году. Анализ, приведенный в этой главе, опирается на работы I. Good, When batterer turns murderer, Nature, Vol. 375 (1995), p. 541; When batterer becomes murderer, Nature, Vol. 381 (1996), p. 481. Анализ, проведенный Гудом, построен на относительных рисках и теореме Байеса, а не на интуитивном подходе, базирующемся на натуральных числах и используемом в работе Гигеренцера. (Кстати, карьера Гуда весьма интересна. Помимо значительного вклада в теорию вероятностей и статистику, основанную на методах Байеса, он помог в расшифровке кодов нацистской шифровальной машины «Энигма» во время Второй мировой войны и ввел футуристическое понятие, которое сегодня известно как «технологическая сингулярность».)

Анализ независимых экспертов, пришедших практически к такому же заключению, опубликован в 1995 году в работе J. F. Merz and J. P. Caulkins, Propensity to abuse — propensity to murder? Chance, Vol. 8, № 2 (1995), p. 14.

99. Каким образом Дершовиц пришел к выводу, что среди лиц, избивающих своих партнеров, менее 1 из 2500 убивают их? На странице 104 его книги Reasonable Doubts приведены следующие цифры: в 1992 году в США от 2,5 до 4 миллионов женщин подвергались избиению со стороны мужей, любовников и бывших любовников. В том же году, согласно отчетам ФБР об уровне преступности (http://www.fbi.gov/about-us/cjis/ucr/ucr), 913 женщин были убиты своими мужьями, а еще 519 — своими любовниками или бывшими любовниками. Если разделить общее количество убийств 1432 на 2,5 миллиона избитых женщин, то выйдет 1 убийство на 1746 избиений, а если принимать во внимание верхний порог числа избиений в 4 миллиона, то в результате получим одно убийство на 2793 избиений. Очевидно, что среди этих крайних показателей Дершовиц выбрал значение 2500.

Однако остается неясным, какая доля убитых женщин подвергалась при жизни избиениям со стороны этих мужчин. Вероятно, Дершовиц предполагал, что практически всех жертв убийств при жизни избивали, и, скорее всего, сделал вывод, что даже если эти цифры несколько преувеличены, они все равно «бесконечно малы».

100. Согласно отчетам ФБР об уровне преступности, 4936 женщин были убиты в 1992 году. Среди них 1432 (около 29%) убиты мужьями или любовниками. Оставшиеся 3504 пострадали от рук кого-то другого. Следовательно, принимая во внимание, что в США на тот период проживало около 125 миллионов женщин, доля тех, кто стал жертвами убийства со стороны лиц, не являвшихся их партнерами, составила 3504 на 125 миллионов, или 1 убийство на 35 673 женщин в год.

Предположим, что эта доля убийств одинакова для всех женщин независимо от того, избивали их при жизни или нет. Тогда делим 100 тысяч избиваемых женщин из нашей гипотетической выборки на 35 673 и в результате получаем 2,8 женщин, то есть столько убито лицами, которые не являлись их партнерами. Округлив 2,8 до 3, получаем оценку, приведенную в данной работе.

24. Распутывание всемирной паутины

101. Введение в поиск в интернете и анализ ссылок см. D. Easley and J. Kleinberg, Networks, Crowds, and Markets (Cambridge University Press, 2010). Популярное изложение истории поиска в сети, рассказ о его основных действующих лицах и компаниях ищите в J. Battelle, The Search (Portfolio Hardcover, 2005). Тем, кто хорошо знаком с линейной алгеброй, будет интересна история развития анализа ссылок в статье S. Robinson, The ongoing search for efficient Web search algorithms, SIAM News, Vol. 37, № 9 (2004).
102. Если вас смутило использованное мной слово «кузнечик», поясню, что этим ласковым именем называют ученика, которому еще предстоит многому научиться у мастера дзен. В телесериале «Кунг-фу» слепой монах По учит мудрости своего ученика Кэйна и на первом уроке называет его кузнечиком.

    Мастер По. Закрой глаза. Что ты слышишь?
    Юный Кэйн. Я слышу воду. Я слышу пение птиц.
    По. Слышишь ли ты, как бьется твое сердце?
    Кэйн. Нет.
    Мастер По. Слышишь ли ты кузнечика, что стрекочет у твоих ног?
    Кэйн. Старик, как тебе удается слышать все это?
    По. Юноша, как ты умудряешься этого не слышать?

103. Признание существования проблемы замкнутого круга для ранжирования веб-страниц, а также ее решение с помощью линейной алгебры вылилось в два направления исследований, опубликованных в 1998 году. Одно было проведено моим коллегой по Корнуолльскому университету Джоном Клейнбергом, который впоследствии стал экспертом исследовательского центра IBM Almaden Research Center. Его исследование посвящено алгоритму HITS (альтернативной форме анализа ссылок, появившейся немного раньше, чем алгоритм PageRank от Google), см. J. Kleinberg, Authoritative sources in a hyperlinked environment, Proceedings of the Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (1998).

    Вторая линия исследований проводилась основателями Google Ларри Пейджем и Сергеем Брином. В основе их алгоритма PageRank лежало количество времени, которое случайный пользователь сети будет проводить на каждой странице. Этот процесс описывается по-иному, но приводит все к той же проблеме замкнутого круга. Обоснования метода PageRank даны в статье S. Brin and L. Page, The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine, Proceedings of the Seventh International World Wide Web Conference (1998), pp. 107–117.

Как это часто случается в науке, поразительно похожие предвестники этих идей уже были открыты в других ее областях. С предысторией появления PageRank в библиометрике, психологии и социологии можно ознакомиться в статье M. Franceschet, PageRank: Standing on the shoulders of giants, Communications of the ACM, Vol. 54, № 6 (2011), доступной на http://arxiv.org/abs/1002.2858, а также S. Vigna, Spectral ranking, на http://arxiv.org/abs/0912.0238.

104. Введение в линейную алгебру и способы ее применения в различных областях науки прекрасно изложены в книге G. Strang, Introduction to Linear Algebra, 4th edition (Wellesley-Cambridge Press, 2009).

105. Некоторые наиболее впечатляющие области применения линейной алгебры описаны в работе D. James, M. Lachance, and J. Remski, Singular vectors' subtle secrets, College Mathematics Journal, Vol. 42, № 2 (March 2011), pp. 86–95.

106. Согласно Google, термин PageRank происходит от имени Ларри Пейджа, а не от английского слова webpage (веб-страница). См. http://web.archive.org/web/20090424093934/http://www.google.com/press/funfacts.html.

107. Эта идея основана на том, что лицо человека представляет собой комбинацию небольшого числа его основных компонентов. Впервые линейная алгебра была применена для распознавания лиц в работе L. Sirovich and M. Kirby, Low-dimensional procedure for the characterization of human faces, Journal of the Optical Society of America A, Vol. 4 (1987), pp. 519–524 и получила дальнейшую разработку в исследовании M. Turk and A. Pentland, Eigenfaces for recognition, Journal of Cognitive Neuroscience, Vol. 3 (1991), pp. 71–86, доступном на http://cse.seu.edu.cn/people/xgeng/files/under/turk91eigenfaceForRecognition.pdf.

Полный список работ, посвященных этой проблеме, см. на главной странице сайта Face Recognition (http://www.face-rec.org/interesting-papers/).

108. См. L. Sirovich, A pattern analysis of the second Rehnquist U.S. Supreme Court, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 100, № 13 (2003), pp. 7432–7437. Этому исследованию посвящена статья N. Wade, A mathematician crunches the Supreme Court's numbers, New York Times (June 24, 2003). Следующая работа предназначена для специалистов в области права и написана математиком и профессором права: P. H. Edelman, The dimension of the Supreme Court, Constitutional Commentary, Vol. 20, № 3 (2003), pp. 557–570.

109. Историю приза компании Netflix, а также интересные подробности о первых претендентах на него читайте в статье C. Thompson, If you liked this, you're sure to love that — Winning the Netflix prize, New York Times Magazine (November 23, 2008). Победитель был определен в сентябре 2009 года, через три года после начала соревнования, см. S. Lohr, A $1 million research bargain for Netflix, and maybe a model for others, New York Times (September 22, 2009). Применение метода разложения матрицы по собственным значениям для определения приза Netflix описано в работе B. Cipra, Blockbuster algorithm, SIAM News, Vol. 42, № 4 (2009).
110. Для простоты я представлю только базовую версию алгоритма PageRank. Для обработки сетей с некоторыми другими структурными свойствами его необходимо изменить. Предположим, в сети есть страницы, которые ссылаются на другие, но те, в свою очередь, на них не ссылаются. В процессе обновления эти страницы потеряют свой PageRank. Они отдают его другим, и он больше не восполняется. Таким образом, в конце концов они получат значения PageRank, равные нулю, и с этой точки зрения становятся неразличимыми.

    С другой стороны, существуют сети, где некоторые страницы или группы страниц открыты для накапливания PageRank, но при этом не делают ссылок на другие страницы. Подобные страницы действуют как накопители PageRank.

    Чтобы избежать подобных результатов, Брин и Пейдж изменили свой алгоритм следующим образом. После каждого этапа в процессе обновления данных все текущие значения PageRank уменьшаются на постоянный коэффициент, так что их сумма будет меньше 1. Затем остатки PageRank равномерно распределяются между всеми узлами в сети, как будто «сыплются с неба». Таким образом, алгоритм завершается действием уравнивания, распределяющим значения PageRank между самыми «бедными» узлами.

    Более тщательно математика PageRank и интерактивные исследования рассматриваются в работе E. Aghapour, T. P. Chartier, A. N. Langville, and K. E. Pedings, Google PageRank: The mathematics of Google (http://www.whydomath.org/node/google/index.html). Полную информацию, изложенную в доступной форме, вы найдете в книге A. N. Langville and C. D. Meyer, Google's PageRank and Beyond (Princeton University Press, 2006).

25. Самые одинокие числа

111. Гарри Нилссон написал песню One, получившую известность под названием Three Dog Night. Она стала хитом, заняв пятое место в горячей сотне хитов Billboard Hot 100, а Эйми Манн создала ее великолепную версию для фильма «Магнолия».

112. См. P. Giordano, The Solitude of Prime Numbers (Pamela Dorman Books/ Viking Penguin, 2010).
113. Сложно сказать, с чего начать, чтобы поближе познакомиться с теорией чисел*, и особенно с загадками простых чисел. Вы можете выбрать одну из следующих трех замечательных книг. Все они выпущены примерно в одно и то же время и все обращаются к гипотезе Римана, которая рассматривается как самая большая нерешенная задача в математике. Чтобы глубже познакомиться с математическими подробностями и историей гипотезы Римана, я рекомендую книгу J. Derbyshire, Prime Obsession (Joseph Henry Press, 2003).** В книгах D. Rockmore, Stalking the Riemann Hypothesis (Pantheon, 2005) и M. du Sautoy, The Music of the Primes (Harper Collins, 2003) больше внимания уделяется последующему развитию этой темы, однако они тоже написаны в очень доступной форме.
114. Использование теории чисел в криптографии*** описано в работе M. Gardner, Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers (Mathematical Association of America, 1997), главы 13 и 14. В первой из этих глав приводится знаменитая статья Гарднера, опубликованная в августе 1977 года в журнале Scientific American, где он рассказывает о создании криптографической системы RSA, взломать которую практически невозможно. В главе 2 описывается «ужас», который вызвало это открытие в Национальном агентстве безопасности. О последних исследованиях в этой области говорится в главе 10 книги du Sautoy, The Music of the Primes.

---

* По теории чисел существует такая обширная литература, что трудно остановиться на чем-то одном. Вот несколько «классических» введений в эту теорию: Боревич З. И., Шафаревич И. Р.. Теория чисел. М. : Наука, 1972; Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.-Л.: Гостехиздат, 1952; Хинчин А. Я. Три жемчужины теории чисел. М. : Наука, 1979. Литература по простым числам: Гальперин Г. «Просто о простых числах» // Квант. 1987. № 4; Генри С. Уоррен. Формулы для простых чисел // Алгоритмические трюки для программистов. М. : «Вильямс», 2007; Матиясевич Ю. Формулы для простых чисел // Квант. 1975. № 5; Карпушина Н. Палиндромы и «перевертыши» среди простых чисел // Наука и жизнь. 2010. № 5. О гипотезе Римана и ее связи с простыми числами см. интересную статью Николенко С. Проблемы 2000 года: гипотеза Римана // Компьютерра. 2005. Рекомендуем также интересный и познавательный сайт «Числонавтика», посвященный теории чисел (и не только) по адресу http://www.numbernautics.ru/.

** Дж. Дербишир. Простая одержимость. Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема в математике. М. : Астрель, 2010.

*** Литература по криптографии: Нестеренко Ю. В. Алгоритмические проблемы теории чисел // Введение в криптографию / Под редакцией В. В. Ященко. СПб : Питер, 2014. Василенко О. Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. М. : МЦНМО, 2003; Черемушкин А. В. Лекции по арифметическим алгоритмам в криптографии. М. : МЦНМО, 2002; Крэндалл Р., Померанс К. Простые числа. Криптографические и вычислительные аспекты. М. : УРСС, Либроком, 2011.

115. Помимо указанных выше книг Дербишира, Рокмора и Дю Сотоя, в интернете можно найти множество источников о теореме простых чисел, например страницу Chris K. Caldwell How many primes are there? (http://primes.utm.edu/howmany.shtml), страницу MathWorld Prime number theorem (http://mathworld.wolfram.com/PrimeNumberTheorem.html) и страницу «Википедии» Prime number theorem (http://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number_theorem).
116. История о том, как Гаусс в возрасте пятнадцати лет доказал теорему о простых числах, рассказана в книге Derbyshire, Prime Obsession, а также в работе L. J. Goldstein, A history of the prime number theorem, American Mathematical Monthly, Vol. 80, № 6 (1973), pp. 599–615. Гауссу удалось не столько доказать теорему, сколько угадать ее благодаря наблюдениям за таблицами простых чисел, которые он вычислил вручную для собственного развлечения. Первое доказательство теоремы было опубликовано Жаком Адамаром и Шарлем де ля Валле Пуссеном в 1896 году, примерно век спустя, причем каждый из них работал над ней независимо.
117. Как могут существовать простые числа-близнецы при большом N, если рассматривать их в свете теории простых чисел? Согласно теореме, $\ln N$ — это всего лишь средний промежуток. Однако он может колебаться, а поскольку существует бесконечное множество простых чисел, некоторым из них удается преодолеть ограничение и создать счастливую пару. Другими словами, даже если большинство простых чисел не обнаружат другие простые числа среди своих соседей намного ближе, чем на расстоянии $\ln N$, все же некоторым это удастся.

    Для тех, кто желает узнать, как математика управляет «очень маленькими промежутками между простыми числами», эта тема красиво и четко изложена в статье Эндрю Гранвиля, посвященной аналитической теории чисел, см. T. Gowers, The Princeton Companion to Mathematics (Princeton University Press, 2008), pp. 332–348.

    В интернете также есть прекрасная статья Терри Тао, которая позволяет проникнуть в мир простых чисел-близнецов. В частности, в ней рассказывается, как они распределяются, а также дается ответ на вопрос, почему математики считают, что их существует бесконечное множество. Затем приводится подробное доказательство его знаменитой теоремы (совместно с Беном Грином) о том, что простые числа могут образовывать арифметические прогрессии произвольной длины. См. T. Tao, Structure and randomness in the prime numbers, http://terrytao.wordpress.com/2008/01/07/ams-lecture-structure-and-randomness-in-the-prime-numbers/.

    Подробнее о простых числах-близнецах см. http://en.wikipedia.org/wiki/Twin_prime, http://mathworld.wolfram.com/TwinPrimeConjecture.html.

118. Здесь я привожу свои соображения и не пытаюсь дать окончательный ответ на вопрос о расстоянии между двумя последовательными парами простых чисел-близнецов. Возможно, где-нибудь очень далеко на числовой прямой существуют две пары простых чисел-близнецов, которые находятся очень близко друг к другу. Введение в эти вопросы см. I. Peterson, Prime twins (June 4, 2001), http://www.maa.org/mathland/mathtrek_6_4_01.html.

В любом случае метафора о загадочных парах простых чисел-близнецов не осталась незамеченной в Голливуде. Вы можете посмотреть фильм под названием The Mirror Has Two Faces («У зеркала два лица»), в котором снимаются Барбра Стрейзанд и Джефф Бриджес. Он красивый, но не приспособленный к жизни в обществе профессор математики. Она профессор на кафедре английской литературы, смелая, энергичная, но привязанная к дому женщина (или, по крайней мере, таковой кажется), живущая вместе с матерью и неуравновешенной сестрой. В конце концов этим двум профессорам удается встретиться. Но когда их разговор за ужином заходит о танцах (что ему совсем не нравится), мужчина внезапно меняет тему и рассказывает о простых числах-близнецах. Она мгновенно понимает его мысль и спрашивает: «Что случится, если досчитать до миллиона? Там еще останутся такие пары?» Он почти падает со стула, восклицая: «Не могу поверить, что вы думали об этом! Именно это предстоит доказать в гипотезе о простых числах». Далее по фильму их отношения развиваются, и на день рождения она дарит ему пару запонок, на которых изображены простые числа.

26. Групповое мышление

119. Группа матраса известна в математике как четверная группа Клейна. Это одно из самых простых и гигантских скоплений возможностей. На протяжении почти 200 лет математики занимаются анализом групп и классификацией их структур. Захватывающее исследование теории групп* и последние попытки классификации всех конечных простых групп см. M. du Sautoy, Symmetry (Harper, 2008).

120. Эта глава навеяна двумя недавно вышедшими книгами. N. Carter, Visual Group Theory (Mathematical Association of America, 2009) и B. Hayes, Group Theory in the Bedroom (Hill and Wang, 2008). Картер интересно

---

* В качестве введения в теорию групп рекомендуем: Ляховский В. Д., Болохов А. А. Группы симметрии и элементарные частицы. Л. : Изд-во ЛГУ, 1983; Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М. : Наука, 1972; Богопольский О.В. Введение в теорию групп. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002; Артамонов В. А., Словохотов Ю. Л. Группы и их приложения в физике, химии, кристаллографии. М. : Изд. центр «Академия», 2005.

и живописно рассказывает об основах теории групп. Он повествует о том, как она связана с кубиком Рубика, танцами, кристаллами, химией, искусством и архитектурой.

Читателям, которых заинтересует определение «группы», следует обратиться к авторитетным онлайн-справочникам или обычным учебникам. Для начала можно посоветовать страницу MathWorld http://mathworld.wolfram.com/topics/GroupTheory.html или страницу «Википедии» http://en.wikipedia.org/wiki/Group_(mathematics). В этой главе я больше внимания уделил группам симметрии, чем другим группам.

121. Майкл Филд и Мартин Голубицкий изучали взаимосвязи между теорией групп и нелинейной динамикой. В ходе исследования они создали на компьютере потрясающие графические изображения симметрии хаоса. О математике в искусстве и науке см. M. Field and M. Golubitsky, Symmetry in Chaos, 2nd edition (Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009).
122. Несколько слов об обозначениях в этой главе, которые могут сбить с толку: в уравнениях типа $HR = V$ символ H написан слева, поскольку демонстрирует, что это преобразование произведено в первую очередь. Картер применяет подобное обозначение в своей книге для функциональной композиции, однако читатель, возможно, знает, что многие математики используют обратную запись, в которой первое преобразование H находится справа.
123. Историю о Фейнмане и психиатре см. R. P. Feynman, Surely You're Joking, Mr. Feynman! (W. W. Norton and Company, 1985), p. 158; J. Gleick, Genius (Random House, 1993), p. 223.

27. Кручение и склеивание

124. Если вас интересует искусство, лимерики, патенты, уловки ораторов и серьезная математика, как-то связанная с лентами Мебиуса, тогда все это вы найдете в увлекательной книге Cliff Pickover, The Mobius Strip (Basic Books, 2006). Ранее об этих чудесах писалось в статье M. Gardner, The world of the Mobius strip: Endless, edgeless, and one-sided, Scientific American, Vol. 219, № 6 (December 1968).
125. Пошаговые инструкции с фотографиями для некоторых занятий, описанных в этой главе, можно найти в статье How to explore a Mobius strip на http://www.wiki-how.com/Explore-a-Mobius-Strip. Джулиан Флерон предлагает множество других идей: бумажные гирлянды, сердечки и звездочки, для создания которых используются свойства ленты Мебиуса. См. Recycling Mobius, http://artofmathematics.wsc.ma.edu/sculpture/workinprogress/Mobius1206.pdf.

    Кроме того, интересные бумажные модели описаны в классической книге S. Barr, Experiments in Topology (Crowell, 1964).

126. Основы топологии* изложены в авторитетной работе R. Courant and H. Robbins (revised by I. Stewart), What Is Mathematics? 2nd edition (Oxford University Press, 1996). Увлекательный обзор этой области математики дан в книге M. Gardner, The Colossal Book of Mathematics (W. W. Norton and Company, 2001). В ней рассматриваются бутылки Клейна, узлы, сцепленные бублики и прочие занимательные примеры из топологии. Прекрасное современное изложение представлено в книге D. S. Richeson, Euler's Gem (Princeton University Press, 2008). Более сложная подача материала, которая все же будет понятна тем, кто имеет прочные школьные знания по математике, представлена в главах по алгебраической топологии и дифференциальной топологии книги T. Gowers, The Princeton Companion to Mathematics (Princeton University Press, 2008), pp. 383–408.
127. Принимая во внимание, что окружность и квадрат представляют собой топологически эквивалентные кривые, возникает вопрос: какие кривые будут топологически отличными друг от друга? Самый простой пример — отрезок прямой. Чтобы доказать это, предположим, что вы движетесь в одном направлении по окружности, квадрату или любой другой замкнутой кривой. Вы всегда будете возвращаться в исходную точку, что неверно при движении по отрезку прямой. Поскольку это свойство неизменно для всех преобразований, при которых сохраняется топология объекта (то есть при непрерывных деформациях, когда непрерывны и обратные деформации), и различается для замкнутых кривых и отрезков прямой, делаем вывод о том, что замкнутые кривые и отрезки прямой являются топологически различными объектами.
128. Видеоролики Ви, о которых шла речь в этой главе, — «Музыкальная шкатулка Мебиуса» и «История ленты Мебиуса: Винди и мистер Уг» — можно найти на YouTube. Со множеством других увлекательных путешествий в математику можно ознакомиться на сайте Ви http://vihart.com.
129. Работы Морица Эшера**, Макса Билла и Кейдзо Ушио, в основе которых лежит лента Мебиуса, можно найти в интернете, введя в поисковую строку имя художника и слово «Мебиус». Использование ленты Мебиуса в литературе, искусстве, архитектуре и скульптуре описано в блоге Иварса

* Популярные книги по топологии для начинающих: Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. М. : Наука, 1982; Васильев В. А. Введение в топологию. М. : ФАЗИС, 1997; Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. М. : Мир, 1983; Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. М. : Мир, 1972; Прасолов В. В. Наглядная топология. М. : МЦНМО, 1995; Стюарт Я. Топология. // Квант. 1992. № 7.

** Прекрасную статью «Математическое искусство М. К. Эшера» см. на http://impossible.info/russian/articles/escher_math/escher_math.html.

Петерсона Mathematical Tourist, где приводятся фотографии и пояснения, http://mathtourist.blogspot.com/search/label/Moebius%20Strips.

130. Эта библиотека в настоящий момент находится в стадии строительства. Информацию о разработке ее дизайна и макет проекта можно найти на сайте архитектурного бюро BIG (Bjarke Ingels Group), http://www.big.dk/. На сайте представлен также 41 слайд с изображением внутренней и внешней архитектуры библиотеки, обзором музея, воздействия температур и т. п. Все это необычно, поскольку проект здания построен на принципе ленты Мебиуса. Сведения об архитекторе Бьярке Ингельсе и его работе содержатся в статье G. Williams, Open source architect: Meet the maestro of 'hedonistic sustainability, http://www.wired.co.uk/magazine/archive/2011/07/features/open-source-architect.
131. Некоторые из них описаны в книге Pickover, The Mobius Strip. Вы можете найти сотни других, произведя поиск по ключевым словам «лента Мебиуса».
132. Способ разрезания бублика таким образом показан на сайте Джорджа Гарта http://www.georgehart.com/bagel/bagel.html. Можно также посмотреть компьютерную анимацию, выполненную Биллом Джайлсом, на http://www.youtube.com/watch?v=hYXnZ8-ux80. Если хотите проследить за процессом в реальном времени, найдите видео компании UltraNurd под названием Mobius Bagel («Бублик Мебиуса») на http://www.youtube.com/watch?v=Zu5z1BCC70s. Однако, строго говоря, это не совсем бублик Мебиуса, о чем говорят многие, кто писал о работе Джорджа или пытался повторить его опыт. Поверхность, по которой растекается сливочный сыр, не является эквивалентом ленты Мебиуса, поскольку в ней два полуоборота вместо одного, в результате она имеет две стороны, а не одну. Кроме того, настоящий бублик Мебиуса, разрезанный пополам, состоит из одной части, а не из двух. Видеоролик о том, как разрезать бублик, действительно используя метод Мебиуса, см. http://www.youtube.com/watch?v=l6Vuh16r8o8.

28. Мысли глобально

133. Может показаться, что я говорю о геометрии на плоскости с некоторым пренебрежением, но это ошибочное впечатление. Я так не думаю, поскольку метод локальной аппроксимации криволинейной формы плоскости часто оказывался полезным упрощением во многих разделах математики и физики — от простых вычислений до теории относительности. Планиметрия — первый пример этой великой идеи.

    И я не утверждаю, что буквально все древние думали, будто мир плоский. Об измерении Эратосфеном окружности и радиуса Земли см. N. Nicastro, Circumference (St. Martin's Press, 2008). Более современный подход недавно продемонстрировал профессор Принстонского университета Роберт

Вандербей во время выступления перед учениками геометрического класса средней школы, в котором учится его дочь. Возможно, вы захотите повторить его опыт. Чтобы показать, что Земля не плоская, и оценить ее диаметр, он использовал фотографию заката. Его слайды размещены по адресу http://orfe.princeton.edu/~rvdb/tex/sunset/34-39.OPN.1108twoup.pdf.

134. Превосходное введение в современную геометрию написано одним из величайших математиков XX века Давидом Гильбертом. Эта классическая работа, первоначально опубликованная в 1952 году, была переиздана в 1999-м, см. D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, Geometry and the Imagination (American Mathematical Society, 1999). Список нескольких хороших учебников и онлайн-курсов по дифференциальной геометрии* приведен в «Википедии» по адресу http://en.wikipedia.org/wiki/Differential_geometry.
135. Интерактивное видео в режиме онлайн, которое позволит найти кратчайший маршрут между двумя любыми точками на поверхности Земли, см. http://demonstrations.wolfram.com/GreatCirclesOnMercatorsChart/. (Для просмотра потребуется загрузить Mathematica Player, который в дальнейшем позволит открыть сотни других видео из всех разделов математики.)
136. Традиция пришла из средних веков, когда парикмахеры, чтобы привлечь внимание горожан к своему бизнесу, вешали на стене парикмахерской специальные знаки (что-то вроде вывески) в виде цилиндров, раскрашенных спиралями белого и красного цветов. В настоящее время в США эти знаки красят в белый, красный и синий цвета, а сам цилиндр помещается в стеклянную капсулу.
137. Фрагменты из ряда увлекательных образовательных видео по разделам математики Полтье можно найти в интернете по адресу: http://page.mi.fu-berlin.de/polthier/video/Geodesics/Scenes.html. Видео Полтье и его коллег, получившие награды на фестивале VideoMath Festival, размещены на http://page.mi.fu-berlin.de/polthier/Events/VideoMath/index.html. Для получения дополнительных сведений см. G. Glaeser and K. Polthier, A Mathematical Picture Book (Springer, 2012). Изображения, использованные в этой главе, взяты из DVD Touching Soap Films (Springer, 1995), by Andreas Arnez, Konrad Polthier, Martin Steffens, and Christian Teitzel.
138. Классический алгоритм для задач нахождения кратчайшего пути разработан Эдсгером Дейкстрой. За информацией обращайтесь по адресу

* Книги по дифференциальной геометрии: Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию / 2-е изд., исправл. Ижевск : Издательский дом «Удмуртский университет». 2000; Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004; Позняк Э. Г., Шикин Е. В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. М. : Изд-во МГУ, 1990; Прасолов В. В. Наглядная топология /2-е изд., доп. М. : МЦНМО, 2006.

http://en.wikipedia.org/wiki/Dijkstra's_algorithm. Стивен Скиена разместил в своем блоге анимированную инструкцию алгоритма Дейкстры, см. http://www.cs.sunysb.edu/~skiena/combinatorica/animations/dijkstra.html.

139. Восхитительные примеры историй в шести словах даны на страницах http://www.smithmag.net/sixwords/; http://en.wikipedia.org/wiki/Six-Word_Memoirs.

29. Анализируй это!

140. Анализ возник в связи с необходимостью укрепить логические основы исчисления. Уильям Данхэм прослеживает его историю на основе работ одиннадцати гениальных математиков, от Ньютона до Лебега, в книге W. Dunham, The Calculus Gallery (Princeton University Press, 2005). Эта книга содержит точные математические представления, которые будут понятны читателям уровня выпускников колледжа. См. также учебник, написанный в аналогичной манере, D. Bressoud, A Radical Approach to Real Analysis, 2nd edition (Mathematical Association of America, 2006). Для более полного исторического обзора см. C. B. Boyer, The History of the Calculus and Its Conceptual Development (Dover, 1959).

141. Об истории ряда Гранди 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + ... его дальнейшем математическом статусе и его роли в математическом образовании говорится в статье «Википедии», опирающейся на тщательно отобранные источники, со ссылками по темам. Все это можно найти на странице Grandi's series («Ряды Гранди») по адресу http://en.wikipedia.org/wiki/Grandi's_series.

142. Для получения четкого представления о теореме Римана см. Dunham, The Calculus Gallery, pp. 112–115.

143. Если знакочередующийся ряд сходится условно, это означает, что он сходится, но не абсолютно (сумма абсолютных значений его членов *не* сходится). Для рядов, подобных гармоническому, можно изменять порядок членов, чтобы получить *любое* действительное число. Таковы шокирующие следствия теоремы Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда. Поэтому сумма сходящегося ряда, если он не сходится *абсолютно,* может не соответствовать нашим интуитивным ожиданиям.

    В случае абсолютно сходящегося ряда все перестановки ряда сходятся к одному значению. Что удивительно удобно. Это означает, что абсолютно сходящийся ряд ведет себя как конечная сумма. В частности, он подчиняется коммутативному закону сложения. Вы можете переставить члены ряда, как вам захочется, и получите тот же ответ. Более подробно о сходимости рядов*, см. http://mathworld.wolfram.com/AbsoluteConvergence.html и http://en.wikipedia.org/wiki/Absolute_convergence.

---

* Простая книга о сходимости рядов: Воробьев Н. Н. Теория рядов. М.: Наука, 1986.

144. Выдающаяся книга Tom Korner's Fourier Analysis (Cambridge University Press, 1989) представляется как «витрина магазина» идей, методов, приложений и истории анализа Фурье*. Уровень математической строгости высок, хотя книга остроумная, элегантная и приятно занимательная. Для получения представления о работе Фурье и ее связи с музыкой см. M. Kline, Mathematics in Western Culture (Oxford University Press, 1974), chapter 19.
145. Феномен Гиббса и его нелегкая история рассматриваются в книге E. Hewitt and R. E. Hewitt, The Gibbs-Wilbraham phenomenon: An episode in Fourier analysis, Archive for the History of Exact Sciences, Vol. 21 (1979), pp. 129–160.
146. Как феномен Гиббса может повлиять на MPEG и JPEG технологии сжатия цифрового видео, см. http://www.doc.ic.ac.uk/~nd/surprise_96/journal/vol4/sab/report.html.

    В МРТ-сканировании эффект Гиббса называется усеченным сигналом Гиббса: http://www.mr-tip.com/serv1.php?type=art&sub=Gibbs%20Artifact. Методы для работы с этим артефактом см. T. B. Smith and K. S. Nayak, MRI artifacts and correction strategies, Imaging Medicine, Vol. 2, № 4 (2010), pp. 445–457, доступно на http://mrel.usc.edu/pdf/Smith_IM_2010.pdf.
147. Аналитики XIX века нашли математическое обоснование феномена Гиббса. Для функции (или в настоящее время изображения), отображающей края или другие устранимые точки с простым разрывом, было доказано, что частичные суммы синусоидальных волн сходятся в этих точках к пределу поточечно, но неравномерно. Поточечная сходимость означает, что в любой *определенной* точке x при добавлении большего числа членов ряда значения частичных сумм приближаются сколь угодно близко к предельному значению. В этом смысле можно надеяться, что ряд действительно сходится. Загвоздка в том, что одни точки гораздо привередливее, чем другие. Эффект Гиббса происходит вблизи худших из этих точек на границах интервалов непрерывности исходной функции. Например, рассмотрим пилообразную волну, о которой говорилось в этой главе. По мере приближения x к краю пилообразной волны для достижения заданного уровня приближения требуется все больше и больше членов ряда Фурье. Это то, что мы имеем в виду, утверждая, что сходимость не является равномерной. Она происходит для разных x с различной скоростью.

    В этом случае неравномерная сходимость обусловлена «патологией» знакочередующегося гармонического ряда, чьи члены появляются в виде коэффициентов Фурье для пилообразной волны. Как уже обсуждалось выше, знакочередующиеся гармонические ряды сходятся, но только благодаря грандиозному сокращению членов с противоположными знаками. Если бы

* Литература по анализу Фурье и рядам Фурье: Толстов Г. П. Ряды Фурье. М. : Наука, 1980; Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т. М. : Мир, 1985.

ряд состоял исключительно из положительных (абсолютных) значений его членов, то он был бы расходящимся, а сумма стремилась бы к бесконечности. Вот почему говорят, что знакочередующийся гармонический ряд сходится *условно*, но *не абсолютно*. Затем такая форма сходимости заражает соответствующий ряд Фурье и приводит к тому, что он сходится неравномерно; тут и возникает феномен Гиббса с его насмешливо поднятыми у края пальцами.

В противоположность этому, когда коэффициенты рядов Фурье абсолютно сходятся, связанные с ними ряды Фурье равномерно сходятся к исходной функции. И феномен Гиббса не возникает. Для получения дополнительной информации см. http://mathworld.wolfram.com/GibbsPhenomenon.html и http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon.

Мораль наших рассуждений такова: нужно быть осторожными с условно сходящимися рядами. У них сходимость все же недостаточно хорошая. Чтобы бесконечный ряд во всех отношениях вел себя как конечная сумма, он должен быть более жестко ограничен, чего не может обеспечить условная сходимость. Требование абсолютной сходимости приводит к тому, что мы интуитивно ожидаем как для исходного ряда, так и для связанного с ним ряда Фурье.

30. Отель Гильберта

148. Более подробную информацию о Канторе*, в том числе о математических, философских и богословских спорах, связанных с его работой, см. J. W. Dauben, Georg Cantor (Princeton University Press, 1990).
149. Если вы еще не читали, рекомендую прочесть удивительный бестселлер «Логикомикс», потрясающе творческий и «графический» роман о теории множеств, логике, бесконечности, безумии и стремлении к математической истине: A. Doxiadis and C. H. Papadimitriou, Logicomix (Bloomsbury, 2009). Главный герой — Бертран Рассел, но появление Кантора, Гильберта, Пуанкаре и многих других незабываемо.
150. Классическая биография Давида Гильберта — трогательный и неакадемичный рассказ о его жизни, работе и эпохе, см. C. Reid, Hilbert (Springer, 1996)**. Вклад Гильберта в математику слишком велик, чтобы перечислять здесь все достижения, но, вероятно, величайшее из них — это коллекция из двадцати трех тогда еще не решенных задач, которые, по мнению ученого, могли бы сформировать ход развития математики в XX веке. Продолжение истории

* О Георге Канторе и его научном наследии см. Катасонов В. Н. Боровшийся с бесконечным: философско-религиозные аспекты генезиса теории множеств Г. Кантора. М. : Мартис, 1999; Пуркет В., Ильгаудс Х. И. Георг Кантор / Пер. с нем. Н. М. Флайшера. Харьков : Основа, 1991.

** Русский перевод первого издания: Констанс Рид. Гильберт. М. : Наука, 1977.

о значимости задач, предложенных Гильбертом*, и людях, которые решили кое-какие из них, см. B. H. Yandell, The Honors Class (A K Peters, 2002). Некоторые из этих проблем до сих пор остаются неразрешенными.

151. Притча Гильберта о бесконечном отеле приведена в незабываемом шедевре George Gamow's One Two Three ... Infinity (Dover, 1988), p. 17. Гамов также хорошо объясняет понятия исчислимых и неисчислимых множеств и связанные с ними идеи о бесконечности.

Авторы математической беллетристики часто раскрывали комедийные и драматические стороны отеля Гильберта. Например, см. S. Lem, The extraordinary hotel or the thousand and first journey of Ion the Quiet, (Wiley, 1999) и I. Stewart, Professor Stewart's Cabinet of Mathematical Curiosities (Basic Books, 2009). Детская книга на эту же тему: I. Ekeland, The Cat in Numberland (Cricket Books, 2006).

152. При доказательстве неисчислимости вещественных чисел я прибегнул к крошечной хитрости, когда потребовал заменить диагональные цифры на цифры от 1 до 8. В этом не было необходимости. Но я хотел избежать использования цифр от 0 до 9, чтобы обойти некую неопределенность, вызванную тем, что у некоторых действительных чисел есть два десятичных представления. Например, 0,200000... равно 0,199999... Таким образом, если бы мы не исключили использование 0 и 9 при замене цифры, этот придуманный диагональный аргумент мог бы невольно подготовить ряд, который уже есть в списке (и это разрушило бы наше доказательство). Но при выполнении моего запрета на цифры от 0 до 9 такого казуса не произойдет.

153. Чтобы ознакомиться с более строгой математически, но все же довольно понятной дискуссией о бесконечности (и многих других идеях, обсуждаемых в этой книге), см. J. C. Stillwell, Yearning for the Impossible (A K Peters, 2006). Читатели, которые захотят получить более глубокие знания о бесконечности, вероятно, с удовольствием посетят блог Терри Тао о самоопределяющихся объектах, см. http://terrytao.wordpress.com/2009/11/05/the-no-self-defeating-object-argument/.

В очень доступной форме он представляет и освещает массу фундаментальных рассуждений о бесконечности, которые возникают в теории множеств, философии, физике, информатике, теории игр и логике. Для обзора основополагающих вопросов, вызванных этими идеями, см. также J. C. Stillwell, Roads to Infinity (A K Peters, 2010).

---

* О творчестве Гильберта см.: Вейль Г. Давид Гильберт и его математическое творчество. // Математическое мышление. М. : Наука, 1989. По проблемам Гильберта см.: Проблемы Гильберта. Сборник под ред. П. С. Александрова. М. : Наука, 1969.

Предметный указатель

Максимально полезные книги от издательства «Манн, Иванов и Фербер»