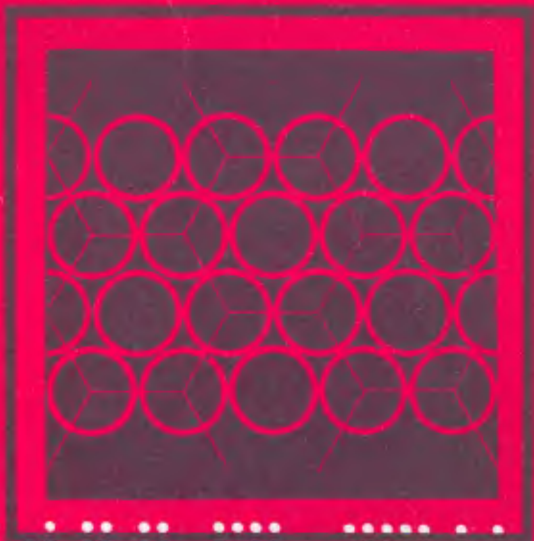
НОВОЕ
В ЖИЗНИ, НАУКЕ,
ТЕХНИКЕ

ЗНАНИЕ

И. М. Яглом

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРЕЖДЕ И ТЕПЕРЬ



10/1972

СЕРИЯ
МАТЕМАТИКА,
КИБЕРНЕТИКА

И. М. Яглом,

доктор физико-математических наук,
профессор

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРЕЖДЕ И ТЕПЕРЬ

Издательство «Знание»
Москва 1972

513
Я29

Яглом Исаак Моисеевич

Я 29 Элементарная геометрия прежде и теперь. М., «Знание», 1972.

48 стр. (Новое в жизни, науке и технике. Серия «Математика, кибернетика», 10).

В брошюре рассказано о современных тенденциях в развитии математики и на примере геометрии показано, как изобретение ЭВМ и создание кибернетики изменило лицо этой древней науки.

2—2—2 513

Предисловие

В 1971 г. автор настоящих строк выпустил в серии «Математика, кибернетика» брошюру, посвященную комбинаторной геометрии *. При подготовке этой брошюры было естественно задуматься над причинами, вызвавшими бурный расцвет этой своеобразной области математики. Первое упоминание о ней как о самостоятельной ветви геометрии относится к середине 50-х годов **, в настоящее же время число посвященных комбинаторной геометрии книг измеряется десятками, а число относящихся к ней научных статей давно перевалило за тысячу. Так, например, доведенный лишь до 1968 г. и касающийся только одного направления внутри комбинаторной геометрии *** список литературы к книге Л. Данцера, Б. Грюнбаума и В. Кли включает около пятисот названий. Настоящая брошюра содержит обсуждение некоторых общих тенденций современной математики, вызвавших частичный закат «элементарной геометрии» в традиционном понимании этого термина и способствовавших появлению новых направлений геометрии.

Следует только иметь в виду, что автор сознательно излагает в этой брошюре лишь те факты, которые иллюстрируют некоторые явления, достаточно характерные для современной математики, но, разумеется, отнюдь ее не исчерпывающие. Образно выражаясь, можно сказать, что здесь предоставлено слово лишь одной стороне, что, конечно, никак не может служить полноте и объективности освещения разбираемого «дела». В частности, автор хочет подчеркнуть свое решительное несогласие с крово-

* И. М. Яглом. О комбинаторной геометрии. М., «Знание», 1971.

** «Рождение» комбинаторной геометрии можно датировать 1955 годом, когда вышла в свет статья «Характеристика Эйлера и комбинаторная геометрия» швейцарца Г. Хадвигера (H. Hadwiger. Eulers charakteristik und Kombinatorische Geometrie. Journ. Reine und Angew. Math., **194**, 1955, стр. 101—110), в названии которой впервые был использован соответствующий термин.

*** Связанного с так называемой «теоремой Хелли», даже не особенно характерной для всего этого направления.

жадным лозунгом Жана Дьедонне «Смерть треугольникам!» (см. стр. 11): разумеется, нет никаких оснований ожидать исчезновения треугольников из школьного курса математики; упоминаемая же в тексте книга Дьедонне «Линейная алгебра и элементарная геометрия» для целей школьного преподавания никак не подходит. Также и резкое повышение интереса к «дискретной» математике ни в какой степени не свидетельствует о том, что классический «математический анализ» (т. е. дифференциальное и интегральное исчисление) утратил свое положение основного аппарата инженера и естествоиспытателя. На одинаковой важности дискретной математики и анализа не будут, видимо, настаивать даже представители экстремистской «Дартмутской группы», о которой говорится на стр. 18. Наконец, отмеченное на стр. 18 частичное понижение интереса к дифференциальной геометрии является, вернее всего, временным и непринципиальным, ибо сейчас можно наблюдать и явления, дающие основание ожидать нового расцвета этой ветви математики в будущем.

Число замечаний подобного рода можно было бы еще увеличить. В этом, однако, нет никакой нужды, поскольку настоящая брошюра направлена лишь на то, чтобы стимулировать у читателя интерес к развитию науки, но не претендует ни на какую окончательность излагаемых в ней суждений: она посвящена не теоремам, которые можно (и должно) доказывать, а лишь тенденциям, которые уместно только обсуждать.

Основной текст брошюры сопровождается довольно многочисленными примечаниями, собранными в ее конце — они содержат ссылки на литературу и некоторые детали, которые могут быть при первом чтении опущены. Ссылки на эти примечания помечены в тексте соответствующими номерами.

И. М. Яглом

§ 1. Элементарная геометрия XIX века

Что такое элементарная геометрия и когда эта наука была создана? Первый из поставленных вопросов — о содержании элементарной геометрии — совсем не прост и однозначного ответа не допускает. Наиболее естественным ответом здесь, видимо, был бы следующий: «элементарная геометрия — это совокупность всех тех геометрических понятий и теорем, которые проходятся в средней школе». Однако, несмотря на кажущуюся простоту этого ответа, он сразу вызывает массу возражений. Не говоря уж о том, что сама апелляция в этом определении к термину «геометрический» (без приставки «элементарно») не может быть просто расшифрована (об этом мы еще скажем ниже), быстрота изменений во всех странах мира школьных учебных планов и программ, в настоящее время достигнувшая, кажется, своего апогея, приводит к тому, что, приняв это определение, мы вынуждены будем также согласиться с одновременным существованием множества «элементарных геометрий» — чуть ли не стольких же, сколько есть на земле стран, причем для каждой отдельно взятой страны это понятие тоже меняется из года в год и чуть ли не от школы к школе. Да кроме того, подобное определение, очевидно, отвечает лишь на вопрос о содержании *учебного предмета* «элементарная геометрия», в то время как мы спрашиваем здесь о содержании соответствующей науки, или — поскольку слово «наука» звучит в этом случае, пожалуй, чересчур громко, — об определенном *направлении научной мысли*.

Однако трудность определения самого понятия «элементарная геометрия» вовсе не лишает нас права пользоваться этим термином. Так, в первой половине нашего века много дискуссий вызвало обсуждение содержания термина «геометрия». Первое общее определение геометрии, данное в 1872 г. выдающимся немецким математиком и педагогом Феликсом Клейном[1], оказалось неприложимым к целому ряду разделов геометрии, причем именно тех, которые в этот период привлекали наибольшее внимание математиков и физиков; замены же ему найти не удавалось. В этой связи видный американский геометр Освальд Веблен предложил в 1932 г. ограничиться следующим определением: «геометрией называется та часть математики, которую достаточно большое число лиц, признаваемых компетентными в этом вопросе, считают уместным так называть, руководствуясь при этом своими склонностями и интуитивными представлениями, а также традицией». Это «определение» имело откровенно иронический характер — но на долгие годы оно стало единственным общепризнанным у ученых и в защиту его писались научные статьи и исследования (разумеется, не столько обсуждавшие «определение» Веблена, сколько доказывающие невозможность никакого другого). Этому примеру мы и призываем последовать, условившись называть «элементарной геометрией» то направление геометрической науки, которое признается заслуживающим этого наименования достаточно большим числом знатоков и ценителей. Если принять это соглашение, то станет ясно, что элементарная геометрия — это учение о многочисленных свойствах треугольников и многоугольников, окружностей и систем окружностей, свойств глубоко нетривиальных и зачастую неожиданных, хорошо известных лишь немногочисленным специалистам в этой области, число которых столь же мало, сколь мало число серьезных специалистов в любой достаточно обширной и продвинутой области знания, начиная от коллекционирования почтовых марок и кончая математической биофизикой.

Продемонстрируем сказанное лишь на одной небольшой группе теорем, достаточно характерных для «классической элементарной геометрии» или, поскольку здесь прилагательное «классическая», как мы об этом еще скажем ниже, отсылает нас не к седой древности, а к сравнительно (в масштабах истории человечества!) недавнему прошлому, — для «элементарной геометрии XIX века». Рассмотрим произвольный четырехугольник (не трапецию !) Δ со сторонами $a_1 \equiv A_{14}A_{12}$, $a_2 \equiv A_{12}A_{23}$, $a_3 \equiv A_{23}A_{34}$ и $a_4 \equiv A_{14}A_{34}$; точки пересечения противоположных сторон a_1 и a_3, a_2 и a_4 этого четырехугольника обозначим через A_{13} и A_{24} (рекомендуем читателю самому сделать чертеж)[2]. Тогда *точки* H_4, H_3, H_2 *и* H_1 *пересечения высот (ортоцентры) четырех треугольников* $T_{123} \equiv A_{12}A_{23}A_{13}$, $T_{124} \equiv A_{12}A_{24}A_{14}, T_{134} \equiv A_{13}A_{34}A_{14}$ *и* $T_{234} \equiv A_{23}A_{34}A_{24}$, *образованных сторонами четырехугольника* Δ, *принадлежат одной прямой* s (ее иногда называют прямой Штейнера[3] четырехугольника Δ); далее, *середины* S_1, S_2, *диагоналей четырехугольника* Δ *и середина* S_3 *отрезка* $A_{13}A_{24}$, *соединяющего точки пересечения его противоположных сторон, также принадлежат одной прямой* g (называемой прямой Гаусса[4] четырехугольника Δ); при этом всегда (т. е. для любого четырехугольника Δ !) *прямая Штейнера* s *перпендикулярна прямой Гаусса* g. Далее, *описанные вокруг треугольников* T_{123}, T_{124}, T_{134} *и* T_{234} *окружности* S_{123}, S_{124}, S_{134} *и* S_{234} всегда *пересекаются в одной точке* C (точке Клиффорда[5] четырехугольника Δ), а *основания* P_1, P_2, P_3, P_4 *перпендикуляров, опущенных из точки* C *на стороны* a_1, a_2, a_3, a_4 *четырехугольника* Δ, *принадлежат одной прямой* w (так называемой прямой Валлиса[6] четырехугольника Δ). Также и *окружности* s_{123}, s_{124}, s_{134}, s_{234} *девяти точек треугольников* T_{123}, T_{124}, T_{134}, T_{234} (т. е. окружности, проходящие через середины сторон этих треугольников[7]) *пересекаются в одной точке* E (ее можно было бы назвать точкой Эйлера[8] четырехугольника Δ).

Рассмотрим теперь пятиугольник π со сторонами a_1 a_2, a_3, a_4 и a_5[9]. Пять четверок прямых a_1, a_2, a_3, a_4; a_1, a_2, a_3, a_5; a_1, a_2, a_4, a_5; a_1, a_3, a_4, a_5 и a_2, a_3, a_4, a_5 образуют пять четырехугольников Δ_5, Δ_4, Δ_3, Δ_2 и Δ_1. При этом *отвечающие этим четырехугольникам прямые Гаусса* g_5, g_4, g_3, g_2, g_1 *пересекаются в одной точке* G (точка Гаусса пятиугольника π); *их точки Клиффорда* C_5, C_4, C_3, C_2, C_1 *принадлежат одной окружности* c (окружности Клиффорда пятиугольника π). Для случая вписанного в окружность пятиугольника π можно определить также понятия его «точки Эйлера» и «прямой Валлиса[10]» — и этот ряд теорем может быть далеко продолжен.

После того как мы таким образом ответили на вопрос о содержании элементарной геометрии (не скрою, что автор дал здесь этот ответ только для того, чтобы несколько ниже попытаться его оспорить), можно перейти ко второму из поставленных в начале настоящей статьи вопросов — о времени создания элементарной геометрии. Знатокам элементарной геометрии ответ на этот вопрос хорошо известен, но всех остальных он может немало удивить: наука о треугольниках и окружностях — элементарная геометрия — была создана в XIX веке. Как ? не раньше ? не в Древней Греции ? — слышу я недоуменные вопросы читателей, — не Евклидом и Архимедом, а какими-то неведомыми математиками, жившими всего сто или даже меньше лет тому назад? Да, именно меньше, склонен ответить автор на это. Меньше ста лет тому назад потому, что основной массив известных сегодня теорем элементарной геометрии был открыт в последней трети XIX века и (в меньшей своей части) в первое десятилетие XX века[11].

Дело в том, что среди корифеев древнегреческой математики (которые, быть может, именно поэтому и заслуживают наименования «корифеи») вообще, как будто, не было лиц, серьезно интересовавшихся элементарной геометрией. Великий Евклид был автором первого[12] (и притом выдающегося) учебника (элементарной) геометрии, однако его собственные научные интересы лежали, видимо, совсем в другой области. Разумеется, общее строение «Начал» Евклида и положенные в основу этой замечательной книги методологические принципы свидетельствуют о глубоком интересе ее автора к общим вопросам обоснования геометрии — но сегодня этот круг вопросов мы склонны относить к «основаниям математики» (базирующимся на математической логике), но никак не к элементарной геометрии. Что же касается конкретного содержания евклидовых «Начал»[13], то наиболее оригинальными и яркими здесь являются разделы, посвященные не геометрии, а арифметике (теории чисел) и математическому анализу, как мы сказали бы сегодня: великолепное доказательство бесконечности ряда простых чисел (предложение IX, 20); тонкий анализ вопроса о так называемых «совершенных числах», т. е. числах, равных сумме всех своих делителей (IX, 36)[14]; производящая и сегодня глубокое впечатление параллельная трактовка вопросов измерения отрезков (кн. V) и учения о (натуральных) числах (кн. VII), логическим завершением которых служит знаменитый «алгоритм Евклида» для нахождения общей меры двух отрезков (кн. X) или общего наибольшего делителя двух чисел (кн. VII) и выводы, которые можно сделать из рассмотрения этого алгоритма; близкий к современному интегральному исчислению вывод формулы объема треугольной пирамиды (XII,5) — возможно, что именно в этих разделах (частично, впрочем, связанных с идеями одного из предшественников Евклида — Евдокса Книдского) нашли отражение самостоятельные научные достижения Евклида. В области же собственно «элементарной геометрии» знания Евклида не были особенно впечатляющими: так, например, он, видимо, не знал даже элементарную теорему о точке пересечения высот треугольника, которую так ценил за ее нетривиальность и красоту Альберт Эйнштейн, — и неизвестно, знал ли эту теорему хоть кто-нибудь из древнегреческих геометров[15]. Гениальный Архимед являлся одним из основателей (теоретической или «математической») механики и одним из родоначальников современной «высшей математики», в первую очередь интегрального исчисления; однако треугольник со своими «замечательными точками» его, как будто, совсем не интересовал. Третий из крупнейших греческих геометров Аполлоний Пергский был глубоким знатоком разнообразных свойств так называемых «конических сечений», т. е. эллипсов, парабол и гипербол — но не треугольников и окружностей. Наконец, последний из великих математиков Древней Греции — Диофант Александрийский вообще интересовался исключительно арифметикой и теорией (целых) чисел, но никак не геометрией.

Таким образом, знания в области элементарной геометрии (в традиционном понимании последнего термина), накопленные в Древней Греции, не были особенно глубокими; также и последующие столетия, вплоть до XIX, не принесли особенного прогресса в этой области. Напротив, в XIX веке, особенно во второй половине его, трудами бесчисленных исследователей, в значительной своей части — преподавателей математики в средних школах[16], было открыто множество ярких и неожиданных теорем, представление о которых могут дать те, которые перечислены на стр. 6—7. Эти теоремы собраны в многочисленных руководствах по элементарной геометрии (и — у́же того — по «геометрии треугольника»[17], или «геометрии окружностей»[18]), большая часть которых вышла в свет в конце XIX или начале XX века.

Хорошим свидетельством сказанного может служить следующий факт. На рубеже XIX и XX столетий Феликс Клейн задумал издание грандиозной «Энциклопедии математических наук» (Enzyklopedie der mathematische Wessenschaften), которая, по его мысли, должна была охватить весь объем накопленных к этому времени знаний по чистой и прикладной математике. Клейн развил в этой связи огромную деятельность: ему удалось сплотить вокруг своей идеи обширный коллектив ученых из разных стран и завершить издание многотомной «Энциклопедии», ныне занимающей в больших библиотеках не одну полку, но — увы! — в настоящее время уже безнадежно устаревшей. Составление статьи по элементарной геометрии Ф. Клейн поручил немецкому педагогу Максу С и м о н у, пользовавшемуся репутацией крупнейшего знатока в этой области. Однако впоследствии Клейн отказался от включения в свою «Энциклопедию» раздела, посвященного элементарной геометрии, справедливо считая, что эта отрасль знания, имеющая скорее педагогическое, чем научное значение, неуместна в сочинении чисто научного характера[19]. В связи с этим обширное сочинение М. Симона, претендующее на академическую полноту охвата всех без исключения известных к началу XX века сведений по элементарной геометрии, было издано отдельной книгой; это издание и сегодня высоко ценится знатоками и любителями элементарной геометрии. Книга Симона была издана под названием «О развитии элементарной геометрии в XIX столетии»[20] — при ее составлении выяснилось, что полный обзор этой дисциплины практически совпадает с подробной историей успехов, достигнутых в рассматриваемой области в XIX столетии (!).

Итак, «золотым веком» классической элементарной геометрии, понимаемой так, как это было объяснено на первых страницах настоящей брошюры, явился XIX век. Этот расцвет учения о треугольниках, окружностях и их комбинациях растянулся и на начало XX века; однако примерно к концу первой четверти нашего века в рассматриваемой области наметился определенный спад. Хотя по-прежнему выходили обширные сочинения по элементарной геометрии и продолжали издаваться специально посвященные ей (полностью или в большей своей части) журналы (некоторые из которых сохранились до настоящего времени[21]), но стало заметно, что общий интерес к этой части геометрии начал заметно убывать. Так, например, почти полностью исчезли публикации на эту тему в серьезных математических журналах или выступления с соответствующими сообщениями видных ученых на больших научных конференциях и конгрессах — а между тем в конце XIX и начале XX века и то и другое было почти нормой. И это происходило несмотря на то, что новые теоремы по элементарной геометрии (и притом зачастую весьма яркие и неожиданные!) продолжали находиться. Дело здесь явно заключалось не в исчерпанности соответствующей тематики, а в иных, более глубоких обстоятельствах.

Для того чтобы охарактеризовать некоторые из причин как расцвета, так и последующего частичного заката классической элементарной геометрии, нам придется обратиться к иногда трудно формулируемым, но легко наблюдаемым и принципиально объяснимым общим закономерностям развития науки. Прежде всего здесь следует отметить, что появлявшийся на протяжении всего XIX века острый интерес к учению о свойствах треугольников, четырехугольников и окружностей отнюдь не был изолированным явлением — он был тесно связан с общим расцветом в этот период так называемой *синтетической геометрии*, т. е. геометрии, базирующейся не на аналитических выкладках, связанных с использованием той или иной системы координат, а на последовательных дедуктивных выводах из аксиом[22]. Занятия синтетической геометрией в тот период отнюдь не были самоцелью: они стимулировали ряд крайне важных общематематических идей. На базе этих занятий сформировалось представление о «неединственности» традиционной (или «школьной») евклидовой геометрии, о существовании целого ряда в какой-то мере равноправных геометрических «наук», подобных *неевклидовой геометрии Лобачевского* или *проективной геометрии*, они же подготовили почву для некоторых чрезвычайно серьезных общих концепций, вроде «Эрлангенской программы» Ф. Клейна. Все это также способствовало серьезной постановке вопроса о логической природе геометрии (или даже всей математики), приведшей к нескольким системам аксиоматического обоснования геометрии, разработанным рядом исследователей в конце XIX и начале XX века[23], что заложило фундамент для целого ряда построений, характерных для математики XX века (скажем, для теории метрических или гильбертовых пространств), и сыграло большую роль во всех дальнейших успехах математической науки.

Особенно большую роль в развитии синтетической геометрии XIX века сыграла проективная геометрия, изучающая *свойства (плоских) фигур, сохраняющиеся при (параллельной или центральной) проекции фигуры, переводящей ее из одной плоскости в другую*[24]. При этом можно смело утверждать, что не только проективная геометрия в известной степени выросла из элементарной[25], но и элементарная геометрия XIX века в значительной степени была порождена проективной геометрией — обстоятельство, которое особенно любил подчеркивать Феликс Клейн и которое становится особенно заметным при анализе элементарно-геометрического творчества видных представителей математики XIX века — таких, как К. Ф. Гаусс или Я. Штейнер[26].

Однако в первой половине нашего века наступает явственно ощутимый (хотя, быть может, и временный) закат синтетической геометрии. «Мавр сделал свое дело, — мавр может уйти» — те общие идеи и концепции, возникшие на базе синтетической геометрии, о которых упоминалось раньше, были уже созданы, и синтетическая геометрия оказалась далее не нужна. Хорошо известно, что история науки знает свои «приливы и отливы»: если XIX век явился «золотым веком» для геометрии, то наши дни характеризуются колоссальным расцветом алгебры, своеобразной «алгебраизацией» всей математики, отражающейся, например, в концепции «математических структур» (можно было бы также сказать «алгебраических структур»!) Никола́ Бурбаки[27], обращающей также и геометрию чуть ли не в часть алгебры. В этих условиях может не так уж удивить и то, что, например, проективная геометрия спасла в наши дни свои научные позиции тем, что незаметно перешла из разряда одной из важных ветвей геометрии в разряд одного из разделов современной алгебры[28]. А если к тому же учесть, что общая «алгебраизация» математики, выдвижение на передний план всевозможных алгебраических структур вплотную поставила вопрос о перестройке школьного курса геометрии, который многие математики и педагоги предлагают основывать на (алгебраическом, по существу!) «векторном» определении пространства (или плоскости)[29], то станет ясно, что также и корни единственно возможных «приложений» классической элементарной геометрии — педагогических применений, связанных с преподаванием геометрии в средней школе, — оказываются в значительной степени подорванными.

В этой связи представляет интерес позиция знаменитого Жана Дьедонне — одного из авторитетнейших современных математиков, сыгравшего большую, возможно, даже основную, роль в создании группы «Никола́ Бурбаки». В соответствии с основными установками представляемого Ж. Дьедонне направления он является чрезвычайно резким противником сохранения в преподавании каких-бы то ни было следов «геометрии треугольника» и родственных теорий: еще в 1959 г. на конференции по вопросам преподавания математики в г. Руаймон (Франция) Ж. Дьедонне выступил с броскими лозунгами «Долой Евклида!» и «Смерть треугольникам!» — и этим лозунгам он остается верен и по сей день. В многочисленных выступлениях на педагогические темы Дьедонне неоднократно высказывал пожелание, чтобы учащиеся (и учителя) средних школ возможно скорее забыли о самом существовании таких фигур, как треугольник или окружность. Темпераментно написанная книга Ж. Дьедонне «Линейная алгебра и элементарная геометрия» вся посвящена отстаиванию следующей методической идеи: *элементарная геометрия — это есть то, что* в «высшей» (или «университетской») математике *называют линейной алгеброй — и никакой иной «элементарной геометрии» быть не должно* (в соответствии с чем в книге Дьедонне действительно ни разу не встречается слово «треугольник» и нет ни одного чертежа!). Во введении к этой книге автор, в частности, пишет:

«... Ров между средним образованием и тем, чему учат в университете, все время расширяется. Я прошу Вас беспристрастно посмотреть на следующие темы, занимающие большое место в школьной математике:

1) Задача на построение циркулем и линейкой;

2) Свойства традиционных фигур, таких как треугольники, четырехугольники, окружности и системы окружностей, конические сечения[30] — все это со всеми изощрениями, накопленными поколениями геометров и преподавателей, вечно находящихся в поисках подходящих экзаменационных задач ...

Если Вы теперь наугад откроете любую книгу, трактующую какую-либо область, изучаемую в высшем учебном заведении, то Вы сразу заметите, что ни в одной из них нет ни малейшего упоминания всей это роскоши. Если иногда случайно и встретится коническое сечение, то оно исследуется... общими методами анализа. Что же касается других фигур, дорогих сердцу геометров предшествующих поколений (т. е. треугольников и окружностей. — *И. Я.*), то они просто растворились в небытии.

Конечно, можно возразить, что университетское обучение слишком абстрактно, и то, чему учат в средней школе, будет куда полезней, скажем, будущему инженеру. Действительно, случается, что пилоны некоторых металлических конструкций покрыты целыми каскадами треугольников... Но спрашивается. важнее ли при этом для конструктора знать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, или же овладеть принципами сопротивления материалов?..

Согласен, скажете Вы, пусть теоремы, которым учат школьников, предназначены для того, чтобы их забыть; однако, упражняясь на этих искусственных примерах, они познакомятся с методами исследования и приобретут навыки мышления, которые в дальнейшем окажут им большую пользу. На это можно ответить, что сказанное несомненно было правильно в предшествующую Декарту эпоху, но оно устарело уже для современников Ньютона... В результате работ Грассмана, Кэли и других более чем столетней давности в элементарной геометрии открылся, по образному выражению Г. Шоке[31], «королевский путь».

Отправляясь от очень простых аксиом... можно при помощи тривиальных вычислений непосредственно и в несколько строчек получить все то, для чего раньше нужно было возводить леса сложных и искусственных систем треугольников, чтобы свести задачу к священным случаям равенства или подобия треугольников — к этой единственной основе всей традиционной техники Евклида».

Надо также иметь в виду, что сегодня позиция Дьедонне активно поддерживается рядом ученых и педагогов, реально связанных с преподаванием в средних школах. Так, глава Бельгийского педагогического центра в Брюсселе известный алгебраист Жорж Папи начинает посвященный геометрии третий том своего учебника для средних школ «Современная математика»[32] (по этому учебнику в настоящее время учатся около половины бельгийских школьников старших классов!) заимствованным из Дьедонне эпиграфом «Смерть треугольникам!» и последовательно проводит «антиевклидову» линию изложения геометрии[33], базирующуюся на векторном исчислении (хоть он все же стоит на более умеренных позициях, чем Дьедонне, и треугольники в его книге все же встречаются). Близкую точку зрения на преподавание геометрии имеет и другой коллектив бельгийских педагогов, возглавляемый известным методистом Вили Серве: в составляемом этим коллективом учебнике[34] геометрия также излагается с «последовательно-векторных» позиций.

Но «природа не терпит пустоты» — и освобождаемое «классической элементарной геометрией» (или «элементарной геометрией XIX века») место на наших глазах стремительно занимает «новая» (или «современная») элементарная геометрия — «элементарная геометрия XX века». Содержанию, задачам и методам этой «новой» геометрии и посвящены последующие параграфы брошюры.

§ 2. Дискретная математика и дискретная геометрия

В § 1 мы рассказали о расцвете и закате «классической элементарной геометрии» или «элементарной геометрии XIX века» — науки о треугольниках и окружностях, изучению которой посвящен традиционный школьный курс геометрии[35] и разработке которой отдали столько сил бесчисленные школьные учителя математики в разных странах мира. Здесь мы попытаемся охарактеризовать некоторые новые направления геометрической науки, из которых черпает проблематику та ветвь знания, которую можно, видимо, назвать «элементарной геометрией XX века».

Для того чтобы объяснить сдвиги, которые произошли в наши дни в геометрии, необходимо коснуться некоторых весьма существенных общих тенденций всей современной математики. Первая из них связана с тем огромным значением, которое за последние десятилетия или даже годы приобрел в прикладной математике — а через это и в «чистой» (или «теоретической») математике! — определенный тип задач, названный «задачами на оптимизацию». Так называются все задачи, требующие указать в том или ином отношении «самый лучший» (или по крайней мере «достаточно хороший») режим работы отдельного механизма или большой системы — этой системой может быть, например, живой организм или его отдельная часть (скажем, совокупность зрительных, пищеварительных органов млекопитающего), фабрика или сколь угодно обширная экономическая корпорация (к примеру, СЭВ или зарубежная биржа), учебное заведение или линия связи (которой может служить один определенный канал телевидения или вся телефонная сеть большого города). Крайняя сложность таких систем, основанных на взаимодействии колоссального числа отдельных звеньев, делает полный математический их анализ весьма трудным. С другой стороны, создание целесообразных режимов работы представляет здесь крайне важную задачу, в случае живых организмов, как правило, решавшуюся путем постепенного самосовершенствования биологических механизмов в процессе естественного отбора, а в иных случаях требующую развитых и зачастую совершенно новых методов. На пути поисков решения имеющих такой характер задач за последние десятилетия возник целый конгломерат новых направлений, своеобразных математических «наук», зачастую не оформившихся еще в полной мере и находящихся в постоянном взаимодействии друг с другом: оптимальное управление и исследование операций, линейное программирование и динамическое планирование, теория игр и теория кодирования информации[36] — важность их для практики хорошо иллюстрируется тем, что посвященные, скажем, исследованию операций математические курсы (обязательные для всех студентов данной специальности!) читаются сегодня в целом ряде втузов. В утвержденный в этом году Министерством высшего и среднего специального образования СССР новый план математической подготовки студентов математических факультетов наших университетов наряду с традиционно читавшимися курсами алгебры и геометрии, (математического) анализа и теории вероятностей включен также обязательный курс методов оптимизации — и это несмотря на то, что сами дисциплины «исследование операций» или «методы оптимизации» не сложились еще с должной степенью определенности и имеют пока достаточно расплывчатый характер.

Вторая тенденция современной математики, которую мы хотим здесь затронуть, касается существенного сдвига в наших представлениях о месте в математике конечного и бесконечного, непрерывного и дискретного. «Математическая революция XVII века», основными деятелями которой явились Исаак Ньютон и Готфрид Вильгельм Лейбниц, почти одновременно и независимо друг от друга создавшие так называемый математический анализ, т. е. дифференциальное и интегральное исчисление, в значительной степени сводилась к замене «конечной» математики древних — арифметики и геометрии — изучением непрерывных функций, описывающих процессы, каждый из которых проходит через бесконечное множество состояний (скажем, непрерывного движения одной точки или материального тела). Методы изучения этих функций базировались на понятиях предела и предельного перехода. «Если все законченные точные вычисления[37], единственные, которые допускались древними... и должны изучаться современными математиками, то их практическое значение значительно уменьшилось, а порой и совершенно исчезло», — писал в начале 30-х годов нашего столетия один из крупнейших математиков первой половины XX века француз Анри Лебег[38]. В те дни эта точка зрения была почти всеобщей. Однако начиная с конца 40-х годов в связи с появлением электронных цифровых вычислительных машин и в значительной степени порожденных этим обстоятельством новых направлений научной мысли, ныне обозначаемых собирательным термином «кибернетика», положение стало коренным образом меняться. Принципиально не непрерывный, а «дискретный» (разъединенный, разрывный) или «конечный» характер этих машин (подчеркнутый прилагательным «цифровые»!) в какой-то степени раскрыл нам глаза на дискретный характер огромного количества явлений окружающего нас мира. Мир этот еще в прошлом веке представлялся ученым как исправно работающая «машина непрерывного действия», наподобие паровой или электрической; сейчас же мы воспринимаем его совсем по-другому. Так, например, типично дискретным является характер высшей нервной деятельности человека, слагающейся из действий колоссального числа отдельных («разъединенных») нервных клеток или *нейронов*, каждая из которых в данный момент времени может находиться лишь в одном из д в у х возможных для нее состояний — «возбужденном» или «невозбужденном». Несколько огрубляя, можно сказать, что, скажем, чувство более сильной или менее сильной боли связано отнюдь не с силой передаваемого по соответствующему нервному волокну возбуждения, а только с числом затронутых нервных «каналов связи» и с числом возбужденных нейронов коры головного мозга. Еще более поражающим воображение является тонкий механизм наследственности, во многом связанный с самим существованием и с природой органической жизни. Основную роль в этом механизме играют длинные полимерные молекулы так называемой *дезоксирибонуклеиновой* кислоты, которую весь мир сегодня несколько фамильярно называет просто ДНК (подобно тому, как американцы обозначают одними инициалами своих знаменитостей, скажем кинозвезд или президентов). Эти молекулы представляют собой цепочку следующих друг за другом оснований, каждое из которых может быть одного из четырех возможных типов (*аденин, гуанин, цитозин и тимин* — их обычно сокращенно обозначают одними первыми буквами *А*, *Г*, *Ц* и *Т*). Все эти обстоятельства обнаружили универсальность дискретных систем записи информации, использующих конечные «алфавиты», состоящие из определенного (возможно — небольшого!) числа различных символов или «букв»: на таком алфавите можно записать все — от романа «Война и мир» до телефонной книги и от сигнала «стоп» до живой особи, в определенном смысле «записываемой» на четырехбуквенном алфавите ДНК. Именно этот универсальный характер конечных (буквенных или цифровых) алфавитов и определил в значительной мере успех электронных вычислительных машин *дискретного* действия, которым на первой стадии их развития некоторые ученые пытались противопоставить так называемые «аналоговые» машины *непрерывного* действия, в конечном счете оказавшиеся гораздо менее удобными, чем ЭЦВМ.

В свете широкого распространения ЭЦВМ математики вынуждены были (в который раз!) кардинальным образом пересмотреть свои взгляды на место, занимаемое «непрерывной» и «дискретной» (т. е. не связанной с непрерывными функциями и пределами) математикой — и уже сегодня высказанное столь недавно утверждение Лебега надо считать безнадежно устаревшим. В настоящее время мы являемся свидетелями расцвета многих «конечных» разделов математики, вдруг оказавшихся чрезвычайно важными для приложений, — от *математической логики*, некогда воспринимавшейся как один из самых абстрактных и далеких от практики разделов математической науки (а сегодня активно штудируемой инженерами!), до *комбинаторики*, оценивающей числа расположений определенных элементов, подчиненные тем или иным дополнительным условиям[39]: до недавнего времени комбинаторику склонны были относить к области «математических развлечений», а сейчас вдруг оказалось, что она имеет огромное прикладное значение[40]. «Конечный» характер имеют и некоторые из новых «математических наук» (см. стр. 15), связанных с задачами на оптимизацию, например *теория игр*[41], или *теория кодирования*, причем в этих разделах математики зачастую используются самые тонкие разделы теории чисел или абстрактной алгебры[42].

Вот несколько фактов, хорошо характеризующих изменившуюся роль «конечной» или «дискретной» математики. Во второй половине 50-х годов нашего века в США вышли в свет две книги «Современной математики для инженеров», составленные видным американским математиком и педагогом Эдвином Беккенбахом. Эти книги сразу же приобрели известность во всем мире; первая из них (в несколько сокращенном виде) была переведена и на русский язык[43]. Книги импонировали читателю в первую очередь ориентацией на те именно разделы математики, которые имеют прикладное значение сегодня. С этих позиций поучительно их сравнение с вышедшей в свет в США перед войной сходной по направленности книгой выдающегося механика Теодора фон Кармана и специалиста по прикладной математике М. Био[44]: если в книге Кармана — Био вообще отсутствовали главы, связанные с теорией вероятностей, то в составленных Беккенбахом сборниках эти главы составляли чуть ли не половину всего объема. А в 60-х годах тем же Э. Беккенбахом был выпущен специальный обширный сборник, посвященный прикладным аспектам «конечной» (или «комбинаторной») математики; извлечения из этого сборника ныне также переведены на русский язык[45].

В некоторых американских университетах сейчас принята следующая система преподавания: на первых двух курсах студенты-математики или лица иной специальности (например, биологи), серьезно заинтересованные в использовании математических методов, слушают два годовых математических курса — анализа («непрерывной математики»)[46] и «конечной математики». Равноправие этих курсов подчеркивается тем, что порядок их прохождения студент может выбирать сам: он может слушать на первом курсе анализ, а на втором — «конечную математику» или наоборот. Наибольшей известностью пользуется подобная система преподавания, разработанная коллективом сотрудников

Дартмутского колледжа (в г. Ганновер, штат Нью Гемпшир), ныне являющегося одним из ведущих вузов США; составленный работниками отделения математики Дартмутского колледжа учебник «конечной» математики переведен и на русский язык[47]. Свидетельством признания в США заслуг этой группы ученых и педагогов является избрание ее главы Джона Кемени ректором Дартмутского колледжа.

Другим отражением изменившихся взаимоотношений «непрерывной» и «дискретной» математики является изменение подходов к *дифференциальным уравнениям*, всегда рассматривавшимся как основной язык математического описания естественнонаучных законов, и к *разностным уравнениям*, являющимся их «дискретным» аналогом. (Родство между этими двумя типами уравнений особенно подчеркивается их немецкими наименованиями: Differentialgleichungen — дифференциальные уравнения; Differenzengleichungen — разностные уравнения.) Еще лет двадцать назад на разностные уравнения смотрели как на довольно примитивную модель дифференциальных уравнений, составляющих главный аппарат естествоиспытателя и инженера; так, рассчитанная на старших школьников книжка А. И. Маркушевича по теории линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами[48] студентами воспринималась как чисто «игрушечная» арифметическая модель линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, занимающими столь большое место во втузовском курсе математики. Этому способствовало и то, что при решении разностных уравнений их ранее обычно старались свести к дифференциальным. Однако сегодня гораздо более обычен обратный переход — подготовка дифференциального уравнения к «машинному» его решению (к решению на электронной цифровой вычислительной машине) в значительной степени состоит в замене дифференциального уравнения приближающим его разностным[49].

Но какое же отношение имеет все сказанное к геометрии? — может спросить нетерпеливый читатель. Самое непосредственное, можно ответить на это, ибо геометрия является частью математики и «ничто математическое ей не чуждо». Перечисленные выше обстоятельства (и не только они) вызвали частичный (и, скорее всего, временный) закат классической *дифференциальной геометрии*, базирующейся на концепциях и методах математического анализа и еще в первой половине нашего века твердо занимавшей положение «первой» дисциплины геометрического цикла. Но кроме того — и это для нас гораздо существенней,— те же факторы способствовали «выходу на авансцену» ряда разделов геометрии, ранее считавшихся второстепенными или вовсе не существовавшими.

Прежде всего здесь следует сказать о несколько неожиданном расцвете учения о так называемых *конечных геометриях*, рассматривающего «геометрические системы», содержащие лишь

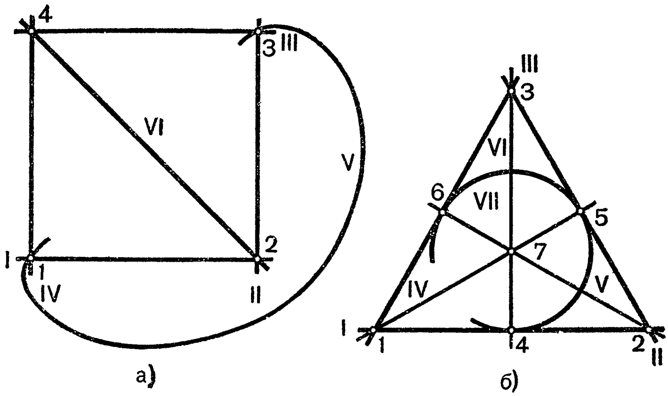
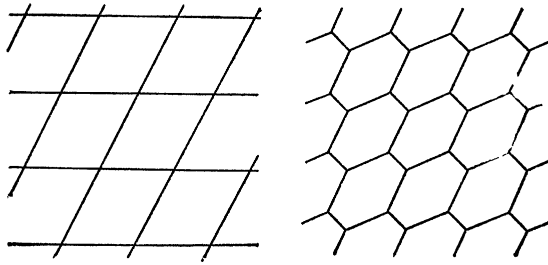


Рис. 1.

конечное число образующих систему элементов — например точек и прямых. Такого рода «геометрии» ученые рассматривали давно: так, на рис. 1, *а* изображена простейшая «евклидова плоскость» (точнее было бы сказать — аффинная), содержащая *четыре* (перенумерованные арабскими цифрами) точки и *шесть* (перенумерованных римскими цифрами) прямых. Действительно, здесь через каждые две точки проходит единственная прямая; каждые две прямые пересекаются не более чем в одной точке; выполнена «евклидова аксиома параллельности», т. е. через каждую не принадлежащую данной прямой точку проходит единственная прямая, не пересекающая этой прямой («параллельная» ей). Аналогично этому на рис. 1, *б* изображена простейшая «проективная плоскость», содержащая *семь* точек и *семь* прямых: здесь через каждые две точки проходит единственная прямая и каждые две прямые пересекаются в единственной точке. Однако ранее подобные схемы рассматривались как своеобразные «геометрические игрушки», представляющие некоторый (и то — скорее педагогический, чем научный) интерес для оснований геометрии, но не претендующие ни на какое серьезное значение. Поэтому в отрыве от общих тенденций современной математики, о которых говорилось выше, может вызвать недоумение внезапно вспыхнувший острый интерес к конечным геометриям. За последние годы в разных странах мира появилось довольно много книг, посвященных этой тематике, в том числе обстоятельный обзор видного немецкого геометра Петера Дембовского, вышедший в свет в 1968 г. и включенный в известную серию обзоров «Итоги математики и смежных с ней областей»[50]; сопровождающий этот обзор список литературы содержит около 1500 названий книг и статей, из которых около 1300 (!) относятся к работам, опубликованным в 50-х и 60-х годах нашего столетия. Секрет здесь заключается в том, что помимо всего прочего в наше время конечные геометрии неожиданно приобрели довольно серьезное прикладное значение (они используются, например, в некоторых прикладных вопросах математической статистики или теории кодирования).

Одновременно с этим резко возрос интерес к одной возникшей в XIX веке ветви геометрии, тоже имеющей чисто «дискретный» характер, и так и называемой *дискретная геометрия*. Создателями дискретной геометрии явились видные специалисты по теории чисел — единственного известного в XIX столетии серьезного раздела математики, имеющего «конечный» характер — немецкий математик Герман Минковский, русские Георгий Феодосьевич Вороной, Александр Николаевич Коркин, Егор Иванович Золотарев и норвежец Адольф Туэ. Первые серьезные применения эта область математики нашла именно в теории чисел. Созданием дискретной геометрии ознаменовалось зарождение нового раздела «высшей арифметики» (теории чисел), появление геометрических подходов к решению теоретико-числовых задач—не случайно основополагающая для всего этого направления книга Г. Минковского так и называлась «Геометрия чисел»[51]. В течение длительного времени дискретную геометрию математики склонны были относить скорее к теории чисел, чем к геометрии, для которой методы Г. Минковского, Г. Ф. Вороного и А. Туэ оставались совершенно чуждыми. Так обстояло дело вплоть до последних десятилетий нашего века, когда этим кругом вопросов активно занялись ученые, примыкающие к ряду чисто геометрических в своей основе школ (серьезная английская школа во главе с недавно умершим Гарольдом Давенпортом, более молодым Клодом Амброзом Роджерсом и канадцем Гарольдом Скоттом Макдональдом Кокстером[52]; венгерская школа, возглавляемая Ласло Фейешем Тотом[53], московская группа Бориса Николаевича Делоне). При этом, как и в случае учения о конечных геометриях, расцвет рассматриваемого направления, наступивший в последние годы, связан не только с отмеченными выше общими тенденциями, но и с тем обстоятельством, что конкретные достижения дискретной геометрии оказались применимыми к ряду направлений современной прикладной математики, в первую очередь — к теории информации (точнее — к теории кодирования информации; подробнее об этом мы еще скажем ниже) и к вычислительной («машинной») математике. С другой стороны, исследования выдающегося немецкого алгебраиста Карла Людвига Зигеля — одного из продолжателей «геометрической теории чисел» Минковского и Вороного — непосредственно связали некоторые из проблем дискретной геометрии с наиболее актуальными вопросами современной теории чисел и алгебры.

Что же представляет собой дискретная геометрия? По существу, речь в ней идет о трех достаточно просто формулируемых геометрических задачах. Первой из них является проблема *плотнейшего заполнения* плоскости, пространства или некоторой их части непересекающимися равными фигурами («укладка» или «упаковка» фигур). При этом в случае ограниченной части плоскости (пространства) речь здесь идет просто о том, чтобы расположить в ней наибольшее возможное число одинаковых копий заданной фигуры, а в случае, скажем, всей плоскости — чтобы была возможно меньшей плотность упаковки, определяемая как предел, к которому стремится при $R \to \infty$ отношение площади части круга радиуса R с центром в любой точке плоскости, покрытой рассматриваемыми фигурами, к общей площади πR^2 всего круга. Второй задачей является задача *редчайшего покрытия* плоскости, пространства или некоторой их части равными фигурами; при этом термин «редчайшее» означает, что в случае ограниченной области нам требуется покрыть ее наименьшим возможным числом фигур, а в случае всей плоскости надо добиваться возможно меньшей плотности покрытия, определяемой аналогично плотности упаковки. Наконец, последний тип задач, несколько отличающийся по характеру от первых двух, связан с *разбиениями* плоскости, пространства или их части, т. е. с такими расположениями фигур, которые одновременно являются и упаковкой (фигуры не должны пересекаться) и покрытием. Здесь «плотность расположения фигур», разумеется, всегда равна 1, так что сама постановка задачи не может быть связана с оценками плотности. Наиболее известной проблемой этого рода является идущая от знаменитого русского кристаллографа Евграфа Степановича Федорова задача отыскания всех типов параллелоэдров, т. е. фигур, на которые можно разбить плоскость[54] или пространство так, чтобы все эти фигуры были расположены параллельно, другими словами — получились одна из другой параллельными переносами[55]. В случае плоскости единственными возможными параллелоэдрами являются *параллелограмм* и *центрально-симметричный шестиугольник* (см. рис. 2, *а* и 2. *б*).

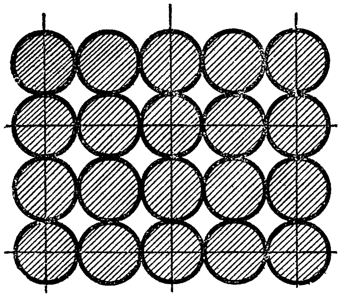


а)   б)

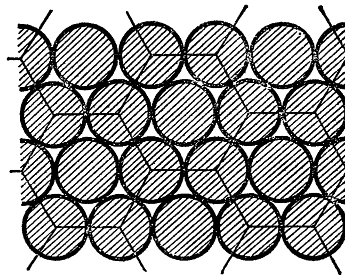
Рис. 2.

Последняя задача одновременно намечает одно весьма часто встречающееся ограничение в постановке задач, касающихся упаковок и покрытий, — здесь можно требовать не только р а в е н с т в а всех рассматриваемых фигур, но также и их п а р а л л е л ь н о г о друг другу р а с п о л о ж е н и я[56]. Наконец, еще одно «типичное ограничение» в задачах дискретной геометрии идет от связи этих задач с теорией чисел, а в чисто геометрическом плане является лишь свидетельством нашей «бедности», нашего неумения справиться с задачами в общей их постановке. Оно заключается в требовании «решетчатости» рассматриваемого расположения фигур, означающей существование определенной совокупности («дискретной группы») движений, переводящих в с ю рассматриваемую конфигурацию в себя (в случае изображенных на рис. 2, *а* и 2, *б* расположений такими движениями будут, например, параллельные переносы, переводящие каждый из изображенных параллелограммов или шестиугольников в другой параллелограмм или шестиугольник, а также симметрии относительно центров параллелограммов или шестиугольников).

«Самой главной» задачей дискретной геометрии надо, видимо, считать задачу нахождения «оптимальной» (т. е. имеющей *самую большую плотность из всех возможных*) упаковки равных кругов или шаров. Эта задача идет еще от знаменитого Иоганна Кеплера: она ставилась в его весьма необычном как по форме, так и по содержанию небольшом трактате «О снежинке, или Новогодний дар»[57]. По богатству идей и глубине проблематики этот трактат занимает выдающееся положение даже в огромном научном наследии Кеплера, содержащем так много драгоценных мыслей, касающихся самых разных разделов математики и астрономии. Этот трактат представляет собой, видимо вымышленный, рассказ о размышлениях ученого по пути к его другу, которому Кеплер желает поднести подарок по случаю наступления нового, 1611 года. В связи с рядом соображений (далеко обогнавших свое время !), о роли симметрии в природе и о том, почему в неживой природе так часто встречается (типичная для снежинок) симметрия 6-го порядка, но никогда (обычная в мире цветов или морских звезд) симметрия 5-го порядка или симметрия 7-го порядка, Кеплер рассматривает несколько упаковок равных кругов на плоскости или шаров в пространстве. Он сравнивает две упаковки кругов: «квадратную», для которой центры шаров расположены в узлах решетки равных квадратов (рис. 3, *а*), и «шестиугольную», где центры кругов образуют «решетку» правильных шестиугольников (рис. 3, *б*), а также несколько упаковок равных шаров, в том числе «кубическую» (или «гранекубическую»), образованную шарами, вписанными в одинаковые кубы, на которые разбито все пространство, и касающимися всех *граней* этих кубов, и «кубореберную», где центры кубов, на которые разбито простран-



а)



б)

Рис. 3.

ство, имеют (в пространственной декартовой системе координат) целочисленные координаты и все точки с четными координатами являются центрами шаров, касающихся *ребер* соответствующих кубов [58]. При этом Кеплер отмечает преимущество «шестиугольной» упаковки кругов перед «квадратной» (плотность «квадратной» упаковки равна $\frac{\pi}{4} \approx 0,785$, а «шестиугольной» больше: $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0,907$) и «кубореберной» упаковки шаров над «кубической» (плотность «кубической» упаковки равна $\frac{\pi}{6} \approx 0,525$, а «кубореберной» больше: $\frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0,740$) и высказывает убеждение в том, что *«шестиугольная» и «кубореберная» упаковки являются самыми плотными упаковками равных кругов* соответственно *равных шаров*.

Последнее заключение Кеплера, видимо, никто никогда не подвергал сомнению — но доказать его оказалось вовсе не просто. Обычно считают, что первое доказательство относящегося к упаковкам равных кругов утверждения Кеплера дал в 1882 г. Адольф Туэ. Однако это доказательство Туэ никогда не было опубликовано, а напечатанное краткое резюме прочитанного им доклада на эту тему [59] содержит серьезные и трудновосполнимые проблемы. Более убедительным представляется совсем другое доказательство того же факта, данное тем же А. Туэ в 1910 г. [60], однако и его никак нельзя считать удовлетворяющим современным требованиям математической строгости. Таким образом, приходится считать, что первые доказательства «теоремы о плотнейших упаковках кругов» независимо дали в годы последней мировой войны (т. е. через 330 лет после Кеплера!) Ласло Фейеш Тот [61] и работавшие в те годы в США известные специалисты по геометрической теории чисел итальянский математик Беньямино Сегре и немецкий математик Курт Малер [62].

Что же касается предположения Кеплера об упаковках равных шаров, то оно никем не доказано до сих пор. При этом если нам, видимо, известна истинная величина $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$ плотности плотнейшей упаковки шаров (указанная еще И. Кеплером), то в наиболее интересных для приложений «многомерных аналогах» соответствующей задачи мы до сих пор не имеем даже достаточно надежных гипотез об интересующем нас результате [63].

В заключение скажем еще несколько слов о связи соответствующих геометрических задач с задачами кодирования информации. Предположим, что мы имеем некоторую линию связи, по которой можно передавать сигналы только двух родов — скажем, посылку тока и «паузу», отвечающую разрыву цепи. Эти два сигнала мы условимся обозначать символами 1 («посылка тока») и 0 («пауза»). Если нам надо передать по этой линии связи сообщение, записанное на некотором k-буквенном алфавите (скажем, на обычном русском алфавите, включающем 32 буквы [64], 10 цифр и, кроме того, еще ряд знаков препинания и специальных знаков, например, скобок), то нам придется сопоставить каждой из наших k букв какую-то цепочку из m «элементарных сигналов» (т. е. символов 1 и 0); 2^m таких цепочек можно рассматривать как «координаты 2^m вершин (единичного) куба» m-мерного евклидова пространства, подобно тому как восемь цепочек из трех символов 0 и 1: (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0) и (1, 1, 1) отвечают восьми вершинам куба обычного (трехмерного) пространства (рис. 4). При этом если передача сообщений по нашей линии связи происходит в условиях наличия помех («шумов»), то естественно стремиться выбирать кодовые обозначения букв таким образом, чтобы они отличались одно от другого достаточно **большим** числом элементарных сигналов — при этом одна или другое малое число ошибок при расшифровке последовательностей сигналов можно исправить исходя из таблицы имеющихся кодовых обозначений. Но определив расстояние между точками A $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и B $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ m-мерного пространства обычной («евклидовой») формулой [65]

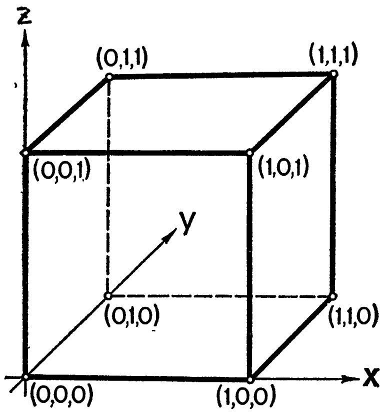


Рис. 4.

$$d_{AB}=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\ldots+(y_m-x_m)^2},$$

мы получим, что требование отличия двух цепочек сигналов не менее чем в p сигналах означает, что шары радиуса $\sqrt{p}/2$ с центрами в отвечающих кодовым обозначениям вершинах m-мерного куба не должны пересекаться, т. е. должны образовывать *упаковку* равных шаров. (Под «шаром» m-мерного пространства с центром Q и радиусом r понимается множество таких точек M этого пространства, что $d_{QM} \leqslant r$.) Эти соображения и определяют указанную еще создателем теории информации Клодом Шенноном[66] связь между задачами теории кодирования и задачами нахождения «самых лучших» (или по крайней мере достаточно «экономичных») упаковок равных шаров.

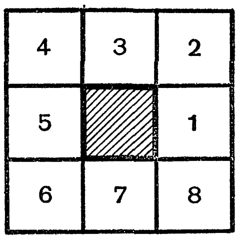
§ 3. Комбинаторная геометрия — элементарная геометрия второй половины XX века

Основные задачи дискретной геометрии касаются бесконечных систем фигур (например, упаковок или покрытий, отвечающих всей плоскости или всему пространству); поэтому их никак нельзя отнести к элементарной геометрии. Но за последние годы в связи с интересом к дискретной геометрии возникло еще одно направление геометрических исследований — так называемая *комбинаторная геометрия*, изучающая «оптимизационные задачи» (о них было сказано на стр. 14), связанные с расположениями конечного числа точек или (выпуклых)[67] фигур.

В противоположность дискретной геометрии комбинаторная геометрия не имеет никаких серьезных практических применений — в этом отношении она похожа на «классическую» элементарную геометрию, рассматривавшую красивые, но в научном отношении «тупиковые» (т. е. никуда не ведущие, не имеющие выходов в «большую» математическую науку) свойства треугольников или окружностей. Однако подобно тому как «элементарная геометрия XIX века» была тесно связана с тематикой, занимавшей видное место в том, что можно назвать современной ей «научной атмосферой» (с проективной геометрией и с неевклидовыми геометриями, один из естественных путей к которым ведет через изучение систем окружностей[68]), так и комбинаторная геометрия порождена серьезными научными интересами наших дней и может дать достаточное представление об общем характере весьма важных для практики «оптимизационных» задач. Именно поэтому нам кажутся полезными занятия комбинаторной геометрией в школьных или студенческих математических кружках, что само по себе намечает достаточно серьезную линию «приложений» комбинаторной геометрии — приложений педагогического характера (напомним, что никаких иных серьезных приложений не имела и «классическая» элементарная геометрия!).

Для того чтобы дать некоторое представление о типичных для комбинаторной геометрии задачах и об ее связи с дискретной геометрией, мы остановимся здесь на одном достаточно характерном примере. Нетрудно видеть, что изображенное на рис. 3, *а* (стр. 23) расположение равных кругов таково, что каждый круг соприкасается с четырьмя «соседями», а в изображенном на рис. 3, *б* расположении кругов каждый круг соприкасается с шестью «соседями». При этом очевидно, что *больше шести непересекающихся кругов приложить* [69] *к равному им всем кругу К нельзя* (ибо каждый из этих кругов виден из центра K под углом 60°; непересекающимся кругам, приложенным к K, отвечают неперекрывающиеся углы с вершиной в центре K, и $\frac{360°}{60°}=6$). С другой стороны, в «кубической» упаковке равных шаров в пространстве каждый шар K касается шести «соседей» (отвечающих шести граням описанного вокруг K куба), а в «кубореберной» упаковке —12 «соседей» (отвечающих 12 ребрам куба с четными координатами центра). В этой связи возникает естественный вопрос о *наибольшем возможном числе* «материальных» (т. е. *непересекающихся*) *шаров, которые можно приложить к равному им всем шару.*

Подобную конфигурацию из 13 шаров, где 12 шаров «окружают» 13-й шар K, указал еще К е п л е р в 1611 г.; вопрос стоял лишь о том, нельзя ли эту конфигурацию «улучшить». В 1694 г. по этому поводу разгорелась довольно оживленная полемика: известный естествоиспытатель того времени Дэвид Г р е г о р и с азартом утверждал, что к шару можно приложить 13 равных ему материальных шаров [70], а Исаак Н ь ю т о н — что нельзя, но доказать свою правоту ни одному из них не удалось (да и Ньютону тоже!). По-видимому, первым, кому удалось решить поставленную задачу, — а именно доказать правоту Ньютона — был немецкий геометр Рудольф Г о п п е. Об этом сообщается в статье его соотечественника К. Б е н д е р а [71], опубликованной в 1874 г. (т. е. через 180 лет после дискуссии Ньютон — Грегори и более чем через 260 лет после того, как Кеплер размышлял о проблемах симметрии в неживой природе !). Годом позже доказательство Р. Гоппе усовершенствовал другой немецкий геометр С. Г ю н т е р [72]; однако и рассуждения Гюнтера, как и аргументы Гоппе, не кажутся безукоризненными современным геометрам, большинство которых считают, что впервые решили «проблему 13 шаров» (как сегодня принято называть эту задачу) лишь один из крупнейших современных алгебраистов голландец Бертольд Людвиг ван дер В а р д е н и выдающийся немецкий логик Карл Ш ю т т е (их совместная работа [73] вышла в свет в 1953 г.). Несколько более простое решение проблемы 13 шаров получил в 1956 г. англичанин Джон Л и ч [74]. Оно совершенно элементарно по методам, но довольно громоздко и требует тонкого анализа возможных расположений шаров. Для евклидовых же пространств размерности >3 соответствующая задача не решена до сих пор, несмотря на то, что ее пытались решить многие видные ученые [75].



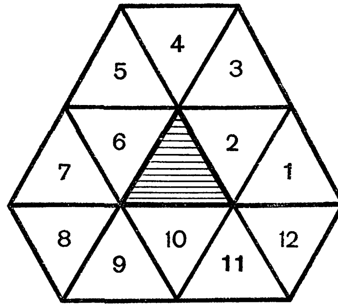


Рис. 5.

Последующие работы в развитии проблемы 13 шаров связаны с заменой кругов и шаров иными фигурами. Так, например, в школьном математическом кружке при Московском университете одно время была популярна задача о *наибольшем возможном числе непересекающихся квадратов, которые можно приложить к равному им всем квадрату* (это число равно восьми; см. рис. 5, *а*) [76]. Можно также искать «ньютоново число» (так в память о знаменитой дискуссии Л. Фейеш Тот предложил называть наибольшее число непересекающихся фигур, которые можно приложить к равной им всем фигуре F) для каких-то иных фигур. Так, например, автор настоящих строк в 1965 г. предложил учащимся физико-математической школы № 2 при Московском государственном университете задачу определения «ньютонова числа» *правильного треугольника* [77] (оно равно 12; см. рис. 5, *б*) — и эта задача была тогда же решена несколькими школьниками (впоследствии решение этой задачи появилось и в научной литературе [78]).

Дальнейшие серьезные успехи в этой области связаны с требованием, чтобы прикладываемые к F фигуры были не только равны F, но и параллельно F расположены (ср. стр. 22). Так, в 1957 г. видный швейцарский геометр Гуго Хадвигер показал, что *наибольшее число равных F и параллельно F расположенных непересекающихся плоских (выпуклых) фигур, которые можно приложить к F, не меньше шести* (оно равно шести, например, для круга; см. рис. 3, *б*) *и не больше восьми* (оно равно восьми, например, для квадрата; см. рис. 5, *а*) [79]. Г. Хадвигер предположил также, что это число равно восьми только для *параллелограммов*; четырьмя годами позже это было доказано Г. Грёмером [80] и Б. Грюнбаумом [81]. Наибольших успехов в этом направлении добился Бранко Грюнбаум, работающий ныне в США: ему удалось решить соответствующую задачу также и для (выпуклых) тел трехмерного и произвольного m-мерного (евклидова) пространства [1].

Связь проблемы 13 шаров с задачами дискретной геометрии определяется не только ее происхождением из рассмотрения указанных И. Кеплером упаковок кругов и шаров, но и самим содержанием проблемы. В самом деле, вопрос о наибольшем количестве материальных (т. е. непересекающихся) шаров радиуса r, которые можно приложить к равному им всем шару, равносилен, очевидно, вопросу о *плотнейшей упаковке шаров радиуса* r *внутри шара втрое большего радиуса* $3r$, при том дополнительном условии, что *один из входящих в упаковку шаров* обязательно *должен располагаться* в самом *центре большого шара* (почему?). Также и задачу о прикладывании (произвольных) фигур к равной им всем фигуре F удается свести к проблеме плотнейшей упаковки фигур внутри фигуры втрое большего размера, что существенно использовалось, скажем, в работе Г. Хадвигера.

Тесно связана с проблематикой дискретной геометрии также еще одна формулировка проблемы 13 шаров. Она состоит в требовании *указать внутри шара радиуса* $3r$ *наибольшее возможное число точек* (одна из которых должна совпадать с *центром* шара), *таких, что расстояние между каждыми двумя точками не меньше* $2r$ *и расстояние каждой точки от границы шара не меньше* r. В таком виде «проблема 13 шаров» обращается в вариант одной задачи, имеющей серьезное прикладное значение и получившей название «задачи о враждующих братьях». Последняя задача требует *«расселить» внутри заданной области* F *определенное число* n *«братьев» так, чтобы наименьшее из расстояний между двумя «братьями» было возможно больше*. В иной постановке эта задача требует *указать число* n *«братьев», которых можно расселить внутри* F, *если известно, что расстояние между каждыми двумя «братьями» не должно быть меньше заданного числа* δ. Ясно, что «задача о враждующих братьях» также тесно связана с проблемой плотнейшей упаковки шаров внутри области F.

Другой вариант «проблемы 13 шаров» заключается в требовании *определения наибольшего возможного числа* $k\ (F)$ *шаров диаметра* 1, *которые можно приложить к данной фигуре* F. Ясно, что в планиметрическом варианте этой задачи шары надо заменить кругами. Разумеется, если фигура F будет очень большой, то очень большим будет и число $k\ (F)$. Поэтому для того, чтобы сделать задачу содержательной, надо как-то ограничить класс рассматриваемых фигур F. Так, можно поставить вопрос об оценке чисел $k\ (F)$, отвечающих *фигурам* F *единичного диаметра*; здесь под д и а м е т р о м фигуры F, как обычно, понимается наибольшее расстояние d между ее точками (рис. 6). Нетрудно доказать (постарайтесь сделать это самостоятельно!), что *в случае плоских выпуклых фигур* F *диаметра* 1 *число* $k\ (F)$ *может принимать всего три значения*: 4, 5 *или* 6; при этом проблема конструктивного описания, скажем, множества таких плоских (выпуклых) фигур F единичного диаметра, что $k\ (F)=4$, остается открытой (она, видимо, достаточно сложна). В случае выпу-

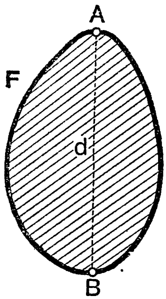


Рис. 6.

клых фигур трехмерного и многомерного пространства даже сама оценка возможных значений величин $k(F)$, отвечающих (выпуклым) фигурам F единичного диаметра, может представлять известные трудности.

Для иллюстрации сложности задач комбинаторной геометрии остановимся здесь еще на одной группе проблем, которые также можно считать «родственными» проблеме 13 шаров. Зададим вопрос о *наибольшем возможном числе параллелограммов* (например, квадратов), P_1, P_2, ... , P_n, *которые можно приложить к данному параллелограмму* (или квадрату) P_0 *так, что каждые два из многоугольников* P_0, P_1, P_2, ... , P_n *соприкасаются по какому-то участку стороны*. Этот вопрос не является особенно сложным: достаточно немного «поэкспериментировать» с параллелограммами, чтобы убедиться, что *больше двух параллелограммов приложить к параллелограмму* P_0 *с соблюдением условий задачи нельзя* (а два параллелограмма P_1 и P_2 приложить к P_0 можно — см., например, рис. 7, *а*). Аналогично формулируется и родственная задача, в которой параллелограммы заменены *треугольниками*; для нее ответом будет служить число 3 (см. рис. 7, *б*).

Перейдем теперь от плоскости к пространству и попробуем оценить *наибольшее возможное число параллелепипедов* (например, кубов) $П_1$, $П_2$, ... , $П_N$, *которые можно приложить к параллелепипеду* (к кубу) $П_0$ *так, чтобы каждые два из многогранников* $П_0$, $П_1$, $П_2$, ..., $П_N$ *соприкасались по плоскому участку границы*. Нетрудно видеть, что пять кубов «приложить» к кубу $П_0$ с соблюдением условий задачи можно. В самом деле, рассмотрим тот же рис. 7, *а* и «поставим» на плоскость этого рисунка (он повторен сплошными линиями на рис. 8, *а*) кубы, основаниями которых служат изображенные на рис. 7, *а* квадраты. Далее наложим на рис. 7, *а* еще один подобный рисунок так, как это показано на рис. 8, *а*, где новых три квадрата изображены пунк-

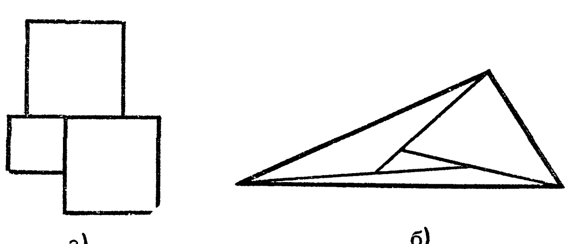
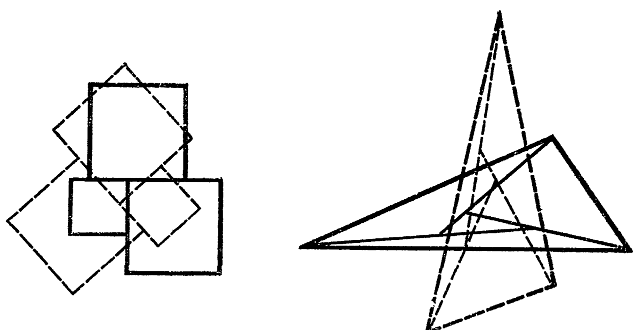


Рис. 7.

тирными линиями, и предположим, что эти новые квадраты являются горизонтальными гранями кубов, расположенных п о д плоскостью чертежа. При этом мы, очевидно, придем к конфигурации шести кубов (их можно обозначить через $П_0$, $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ и $П_5$), к а ж д ы е д в а из которых соприкасаются по куску грани. Однако нельзя ли расположить больше чем шесть параллелепипедов так, чтобы все условия задачи были выполнены?



а) б)

Рис. 8.

Аналогично формулируется задача о расположении в пространстве тетраэдров (треугольных пирамид) T_1, T_2, ..., T_M, «приложенных» к данному тетраэдру T_0 так, что каждый из них соприкасается с T_0 по куску грани и любые два из приложенных к T_0 тетраэдров также соприкасаются по плоскому участку (по части грани каждого из них). Нетрудно показать, что семь тетраэдров T_1, T_2, ..., T_7 м о ж н о приложить к тетраэдру T_0 с соблюдением всех наших требований. Для того чтобы убедиться в этом, вернемся снова к рис. 7, *б* (см. также сплошные линии на рис. 8, *б*) и «поставим» на плоскость этого рисунка четыре тетраэдра с общей вершиной, расположенной выше нашей плоскости, основаниями которых служат изображенные на рис. 7, *б* треугольники. Далее, наложим на рис. 7, *б* еще один подобный рисунок так, как это показано на рис. 8, *б* пунктирными линиями. Примем новые четыре треугольника за основания четырех тетраэдров, с общей вершиной, расположенной п о д горизонтальной плоскостью (т. е. ниже плоскости рис. 8, *б*). Ясно, что все восемь полученных таким образом тетраэдров (их можно обозначить через T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 и T_7) расположены так, что каждые два из них соприкасаются по куску плоскости. Однако нельзя ли расположить сходным образом больше восьми тетраэдров?

Сформулированные задачи были поставлены американским математиком Ф. Бейджимилом в 1956 г. [82], однако он не сумел их решить. Впоследствии «решительный штурм» этих задач произвел англичанин В. Дж. Д. Бестон, которому, впрочем, тоже не удалось добиться полного успеха. Этой проблематике посвящена диссертация Р. Дж. Д. Бестона (1961 г.). В 1965 г. он же опубликовал обстоятельную монографию «Некоторые свойства многогранников в евклидовом пространстве» [83], целиком посвященную «задаче о прикладывании тетраэдров». В. Бестон пишет в своей книге, что он сумел решить «задачу о прикладывании кубов», т. е. доказать, что *больше пяти кубов приложить к кубу* $П_0$ *с соблюдением наших требований нельзя*; автору, однако, неизвестно, опубликовано ли где-нибудь это доказательство. Для решения «задачи о прикладывании тетраэдров» В. Дж. Д. Бестон разработал специальный алгебраический аппарат. Однако и с помощью используемых им довольно сложных методов он не сумел доказать, что к тетраэдру $Т_0$ нельзя приложить восемь других тетраэдров с соблюдением условий задачи — и это несмотря на то, что последнее утверждение, видимо, справедливо. Единственное, что удалось Бестону доказать (этому доказательству и посвящена его толстая книга!), — что *девять тетраэдров с соблюдением наших требований приложить к тетраэдру* $Т_0$ *нельзя*; таким образом, наибольшее число тетраэдров, которые можно так приложить к тетраэдру $Т_0$, наверное, не меньше семи (это показывает изображенный на рис. 8, *б* пример) и, наверное, не больше восьми (это доказал В. Бестон).

«Задача Бейджимила — Бестона» возникла в связи со знаменитой (и тоже близкой по проблематике к комбинаторной геометрии!) «проблемой четырех красок», рассказом о которой мы и завершим наше изложение круга вопросов, который можно называть «элементарной геометрией сегодняшнего дня». Первое упоминание об этой проблеме относится к 1840 г. и принадлежит известному немецкому геометру Августу Фердинанду Мёбиусу. В 1850 г. ее вновь сформулировал известный английский логик Аугустус де Морган, а к 1878 г. относится знаменитый доклад на эту тему в Британском географическом обществе крупнейшего английского математика того времени Артура Кэли. Проблема четырех красок требует доказать, что *каждую географическую карту на плоскости или на сфере* (на «глобусе») *можно «правильно» закрасить четырьмя красками*; здесь слово «*правильно*» означает, что одним цветом не должны быть закрашены никакие две страны, имеющие общий участок границы (но не одну общую граничную точку, а именно «участок» границы, имеющий определенную длину!). Ясно, что меньше чем четырьмя красками каждую карту закрасить нельзя: это доказывает уже рис. 7, *б*, на который можно смотреть как на «карту», содержащую четыре (треугольные) страны, каждые две из которых имеют общий участок границы.

«Проблема четырех красок» до сих пор не решена, хотя ей занимались многие выдающиеся математики. Многократно публиковались ее решения, но все они оказались неправильными; первое такое «решение» было опубликовано в Англии в 1879 г. — через год после выступления А. Кэли. Доказано лишь, что *каждую карту можно правильно закрасить пятью красками*[84]; показано также, что каждую карту, содержащую н е с л и ш к о м м н о г о с т р а н, можно правильно закрасить четырьмя красками, однако общий результат упорно не поддается усилиям ученых.

Заметим теперь, что, как можно установить, *на плоскости нельзя расположить больше четырех произвольных* (может быть, невыпуклых!) *многоугольников* (или даже произвольных областей, которые могут служить изображениями «стран» на географической карте!) *так, чтобы каждые два многоугольника* (две области) *имели общий участок границы*. Это обстоятельство делает предсказываемый «проблемой четырех красок» результат весьма правдоподобным — однако не доказывает его [85]; при этом на сегодняшний день не видно перспектив скорого решения соответствующей задачи, несмотря на то что в последнее время к решению «проблемы четырех красок» подключена и электронная вычислительная техника.

Обратимся теперь к соответствующим стереометрическим задачам. Мы уже видели, что ответ относящегося к треугольникам «плоского» варианта задачи Бейджимила — Бестона парадоксальным образом не изменится при замене треугольников произвольными многоугольниками. Однако в пространстве положение дела оказывается совершенно иным: удается доказать, что здесь *можно расположить любое* (сколь угодно большое!) *число* (скажем, выпуклых) *многогранников так, что каждые два из них будут иметь общий плоский участок границы*. Из этого результата, кстати сказать, вытекает бессодержательность пространственного варианта «задачи о красках» — здесь можно указать такую «пространственную географическую карту» (причем можно даже потребовать, что все «страны» этой «карты» были выпуклыми многогранниками!), *что для «правильной» ее раскраски не хватит никакого заданного заранее числа К красок*.

Сформулированный выше результат, относящийся к произвольным выпуклым многогранникам, впервые установил еще в 1905 г. известный немецкий геометр Генрих Т и т ц е [86]. В 1947 г. этот результат повторил видный английский математик Александр Б е з и к о в и ч [87], видимо, не знакомый с работой Титце. Именно этот результат Титце — Безиковича и породил проблематику, о которой говорилось выше: здесь вопрос о расположении произвольных многогранников оказывается бессодержательным, что и побудило Ф. Бейджимила предложить ограничиться в этой задаче многогранниками того или иного частного вида, например треугольными пирамидами (тетраэдрами) или параллелепипедами (а может быть, даже кубами).

Заметим, кстати, что сравнение общей теоремы Титце — Безиковича с результатами Бестона показывает опасность бездумного перенесения на пространство относящихся к плоскости результатов. Если в планиметрическом варианте «задачи Бейджимила» замена треугольников произвольными многоугольниками или даже более общими областями не отражается на результатах, то в стереометрической задаче переход от тетраэдров к любым многогранникам резко меняет картину!

Мы обсудили здесь только один единственный круг вопросов, дающий представление о характере постановки задач в комбинаторной геометрии. Существует много других типов, относящихся к комбинаторной геометрии задач. Здесь можно упомянуть задачи *о системах фигур и тел с общими точками*; *о покрытии фигур меньшими фигурами той же формы*; *о разрезании фигур на меньшие части*. Мы, однако, не станем углубляться в рассмотрение их, отослав читателя к названной на стр. 3 брошюре автора и к книгам:

Г. Хадвигер, Г. Дебруннер. Комбинаторная геометрия плоскости. М., «Наука», 1965.

В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг. Разбиение фигур на меньшие части. М., «Наука», 1971.

В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М., «Наука», 1965.

Л. Данцер, Г. Грюнбаум, В. Кли. Теорема Хелли и ее применения. М., «Мир», 1968.

Б. Грюнбаум. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М., «Наука», 1971.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] См. Ф. Клейн. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»).— В сб.: «Об основаниях геометрии». М., Гостехиздат, 1956, стр. 399—434.

[2] Вместо четырехугольника Δ здесь можно было бы говорить о четырех прямых a_1, a_2, a_3, a_4 «общего положения» (т. е. таких, что никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке) и шести точках A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24} и A_{34} их пересечения.

[3] Якоб Штейнер (1796—1863) — один из крупнейших геометров XIX века.

[4] Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) — крупнейший математик XIX века.

[5] Уильям Клиффорд (1845—1879) — видный английский геометр.

[6] Джон Валлис (1616—1703) — один из крупнейших математиков XVII века.

[7] Окружность s, проходящая через середины сторон (три точки!) треугольника T, называется его *окружностью девяти точек*, поскольку она проходит также через основания высот треугольника T (еще три точки!) и через середины отрезков высот, заключенных между точкой пересечения высот (ортоцентром) и вершинами треугольника (еще три точки!). По этому поводу см., например, Д. И. Перепелкин. Курс элементарной геометрии. Ч. I. М.— Л., Гостехиздат, 1948, § 29.

[8] Леонард Эйлер (1707—1783) — крупнейший математик XVIII века.

[9] Вместо этого можно говорить о пяти прямых a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 «общего положения».

[10] См., например, И. М. Яглом. Комплексные числа и их применение в геометрии. М., Физматгиз, 1963, гл. II, § 8.

[11] Укажем, в частности, что Штейнер, Гаусс и Клиффорд (это все — математики XIX в.) реально знали связанные с их

именами теоремы, но названия «прямая Валлиса» и «точка Эйлера» в значительной степени условны, ибо Дж. Валлис (XVII в.) не знал теоремы о прямой Валлиса четырехугольника, а Л. Эйлер (XVIII в.) — теоремы о точке Эйлера четырехугольника (им были известны заметно более простые теоремы, относящиеся к треугольнику).

[12] Точнее — первого дошедшего до нас (что, впрочем, целиком связано с выдающимися достоинствами книги Евклида).

[13] См. «Начала» Евклида. Кн. I—VI. М.— Л., Гостехиздат, 1948; кн. VII—X, 1949; кн. XI—XV, 1950. (Отдельные теоремы «Начал» Евклида принято нумеровать двумя числами: римскими цифрами указывается номер книги, а арабскими — номер предложения из этой книги.)

[14] Евклид указал формулу, позволяющую перечислить все *четные* совершенные числа; что же касается *нечетных* совершенных чисел, то до сих пор никому не удалось ни указать хотя бы одно такое число, ни доказать, что их вовсе не существует.

[15] Возможно, что впервые доказал эту теорему лишь Леонард Эйлер (XVIII век!).

[16] Из когорты преподавателей немецких, французских и английских средних школ, совместными усилиями которых элементарная геометрия выросла в содержательный раздел геометрии, заслуживает особого упоминания рано скончавшийся Карл Вильгельм Фейербах (1800—1834), брат знаменитого философа Людвига Фейербаха; ныне он считается чуть ли не «классиком» всего этого направления. Впрочем, и крупнейшие ученые XIX века, такие, как знаменитый К. Ф. Гаусс или самый замечательный геометр XIX века Я. Штейнер, отнюдь не брезговали исследованиями в области элементарной геометрии. (Заметим, что Штейнер почти всю свою жизнь проработал учителем в одной из берлинских гимназий, причем в связи с отсутствием высшего образования и невозможностью из-за слабого знания математического анализа сдать требуемый экзамен даже не допускался до преподавания в старших классах.)

[17] На русском языке имеются книги: С. И. Зетель. Новая геометрия треугольника. М., Учпедгиз, 1962 и Д. Ефремов. Новая геометрия угольника. Одесса, «Матезис», 1903. Вторая из них, давно уже ставшая библиографической редкостью, содержит гораздо больше материала и гораздо типичнее для сочинений такого рода. Несравненно больше книг этой тематики имеется на немецком, французском и английском языках.

[18] Относительно (также созданных в XIX в.) принципиальных основ «теории окружностей» (но не по поводу бесчисленных частных теорем этой теории!) см., например, И. М. Яглом. Окружности.— Энциклопедия элементарной математики. Книга

четвертая. М., Физматгиз, 1963, стр. 448—517. Что же касается обзоров, охватывающих конкретное содержание теории окружностей, то лучшим здесь, видимо, является обстоятельнейший «Трактат об окружности и сфере» видного английского геометра Дж. Л. Кулиджа (J. L. Coolidge. A treatise on the circle and the sphere. Oxford, 1916).

[19] Но бесспорно уместна в любом серьезном обозрении достижений педагогической мысли. В этой связи следует напомнить, что когда в 40-х годах наша Академия педагогических наук задумала составление обстоятельной Педагогической энциклопедии, в ней планировалось поместить и статью об элементарной геометрии. Эта статья была составлена профессором Д. И. Перепелкиным, являвшимся глубоким знатоком предмета,— и можно только сожалеть, что статья эта так и не увидела свет (как, впрочем, и вся Педагогическая энциклопедия).

[20] M. Simon. Über Entwicklung der Elementargeometrie im XIX Jahrhundert. Berlin, 1906.

[21] Наибольшей известностью из журналов подобного типа пользовался издающийся с 1881 г. бельгийский журнал «Mathesis». Этот журнал существует и в настоящее время; однако общий упадок интереса к пропагандируемой им тематике отразился на судьбе журнала, и сегодня уже мало кто из математиков и педагогов слышал о его существовании. Заметно большей популярностью пользуется издаваемый с 1968 г. в той же Бельгии Жоржем Папи и его приверженцами журнал «Nico», во всем являющийся прямой противоположностью журнала «Матезис». (Название последнего журнала — это уменьшительная форма имени Николá Бурбаки, известного псевдонима группы французских математиков.)

[22] Как характерную для той эпохи тенденцию отметим прямое запрещение решать задачу на построение алгебраическим методом. Решенную таким методом задачу педагоги, придерживающиеся характерных для начала нашего века взглядов, просто не считали решенной. (Связь традиционных «построений циркулем и линейкой» с аксиоматическим методом в геометрии хорошо обрисована, например, в брошюре: Д. И. Перепелкин. Геометрические построения в средней школе. М., Учпедгиз, 1953.)

[23] См., например, И. М. Яглом. Аксиоматические обоснования евклидовой геометрии.— В сб.: «Новое в школьной математике». М., «Знание», 1971, стр. 40—63; В. Г. Болтянский и И. М. Яглом. Векторное обоснование геометрии. Там же, стр. 64—92.

[24] См., например, Г. С. М. Кокстер. Введение в геометрию. М., «Наука», 1966, гл. 14.

[25] Попытка отразить эту сторону дела сделана в книге:

И. М. Яглом. Геометрические преобразования. Т. II (см. первую главу).

[26] Так, например, вся «геометрия треугольника» со всеми свойствами связанных с треугольником окружностей целиком укладывается в схему изучения проективных свойств пятиугольников — первых многоугольников, обладающих содержательными свойствами (ибо с точки зрения проективной геометрии все четырехугольники «равны» друг другу и ни один из них никакими индивидуальными свойствами не обладает). В самом деле, евклидова геометрия по схеме Ф, Клейна (см. например, Ф. Клейн. Неевклидова геометрия. М.—Л., ОНТИ, 1935) выделяется из проективной фиксацией двух «циклических» (мнимых!) точек Z_1, Z_2; поэтому евклидовы свойства треугольника ABC совпадают с проективными свойствами «пятиугольника» $ABCZ_1Z_2$; далее, связанные тем или иным образом с треугольником окружности — это суть проходящие через точки Z_1 и Z_2 конические сечения (эллипсы, гиперболы и параболы), являющиеся основным объектом изучения в проективной геометрии.

[27] По поводу основных позиций группы «Никола́ Бурбаки» см., например, Н. Бурбаки. Архитектура математики. М., «Знание», 1972, стр. 4—18. По поводу самой группы «Н. Бурбаки» см., например, П. Р. Халмош. Николай Бурбаки.— Математическое просвещение. М., Физматгиз, 1960, вып. 5 [Новая серия], стр. 229—239.

[28] Из элементарных учебников эта точка зрения лучше всего отражена в книге: Р. Хартсхорн. Основы проективной геометрии. М., «Мир», 1970; см. также более серьезную книгу Р. Бэр. Линейная алгебра и проективная геометрия. М., ИЛ, 1955.

Другой разительный пример современных тенденций «алгебраизации» геометрии доставляет недавняя книга «*n*-угольники» известного немецкого геометра Фридриха Бахмана и его ученика Э. Шмидта (русский перевод готовится к печати издательством «Мир»). Относящаяся к элементарной геометрии по названию и по большинству результатов, она целиком базируется на аппарате современной (абстрактной) алгебры.

[29] См., например, указанную статью В. Г. Болтянского и И. М. Яглома (Примечание 24) или гораздо более экстремистскую по своим установкам книгу Ж. Дьедонне «Линейная алгебра и элементарная геометрия» (русский перевод готовится к печати издательством «Наука»).

[30] В старших классах французских средних школ традиционно изучается теория *конических сечений* (т. е. эллипсов, парабол и гипербол), излагаемая в духе древнегреческих геометров.

[31] Имеется в виду книга: Р. Шоке. Геометрия. М., «Мир» 1970, стр. 14.

[32] Рапу. Mathématique moderne. Тт. 1, 2, 3, 5, 6. Marcel Didier. Bruxelles — Montreal — Paris, 1963—1967.

[33] См. доклад Ж. Папи, с которым он выступил на Международном конгрессе математиков в Москве в 1966 г.: Ж. Папи. Геометрия в современном преподавании математики.—«Математика в школе», 1967, № 1, стр. 39—41.

[34] См. W. Servais, C. Clersy, M. Biefnot, Mathèmatique 1. Paris — Bruxelles, 1969; W. Servais, C. Clersy, S. Keymellen, J. van Bost. Mathématique 2. Paris — Bruxelles, 1971.

[35] В настоящее время этот курс во всех странах мира претерпевает кардинальные изменения (ср. со сказанным в конце § 1) — и довольно трудно предсказать, какой вид примет он окончательно.

[36] Представление о некоторых из этих научных направлений может дать хорошая популярная книга: А. Кофман, Р. Фор. Займемся исследованием операций. М., «Мир», 1966; см. также несколько более раннюю (и еще более популярную) книгу: Дж. Д. Вильямс. Совершенный стратег или Букварь по теории стратегических игр. М., «Советское радио», 1960.

[37] То есть не связанные с бесконечными процессами и с предельными переходами (например, с дифференцированием или интегрированием).

[38] См. А. Лебег. Об измерении величин. М., Учпедгиз, 1960, стр. 42—43.

[39] Так, например, достаточно типичной для комбинаторики надо считать, скажем, известную задачу о возможном числе размещений за круглым столом n супружеских пар, с тем чтобы каждый мужчина сидел между двумя женщинами и никакие супруги не сидели рядом.

[40] Значение комбинаторики подчеркивается тем обстоятельством, что за последние годы на русском языке были изданы пять (!) серьезных пособий по комбинаторике (Дж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ. М., ИЛ, 1963; М. Холл. Комбинаторный анализ. М., ИЛ, 1963; Г. Дж. Райзер. Комбинаторная математика. М., «Мир», 1966; М. Холл. Комбинаторика. М., «Мир», 1970; К. А. Рыбников. Введение в комбинаторный анализ. М., Изд-во МГУ, 1972) и одна книга для школьников и учителей (Н. Я. Виленкин. Комбинаторика. М., «Наука», 1969), в то время как ранее в нашей литературе таких книг не было вовсе.

Наряду с этим в последние годы были изданы три пособия о такой сравнительно специальной области комбинаторного анализа, как *теория графов* (К. Б е р ж. Теория графов и ее применения. М., ИЛ, 1962; О. О р е. Теория графов. М., «Наука», 1968; А. А. З ы к о в. Теория конечных графов. Т. I. Новосибирск, «Наука», 1969), и одна научно-популярная книга по теории графов (О. О р е. Графы и их применение. М., «Мир», 1965).

Укажем еще, что с начала 60-х годов выходит в свет специальный математический журнал по комбинаторике (Journal of Combinatorial Theory; печатается он в Бельгии; редколлегия журнала состоит из многих математиков из разных стран мира). В последнее время и в нашей стране начали выходить систематически публикуемые сборники, специально посвященные комбинаторике (Комбинаторный анализ. М., Изд-во МГУ; вып. I вышел в 1971 г.). В то же время такая, скажем, старая математическая наука, как проективная геометрия, до сих пор не имеет «своего» журнала — и вряд ли когда дождется его.

[41] См., например, доступно написанную брошюру: Е. С. В е н ц е л ь. Элементы теории игр. М., Физматгиз, 1959, или гл. 10 книги А. К о ф м а н а и Р. Ф о р а, или книгу Дж. В и л ь я м с а, или гл. VI книги Дж. К е м е н и и др. (Заметим еще, что в последнее время значительное распространение получила так называемая «теория дифференциальных игр», в которой традиционные методы «дискретной» математики своеобразно соседствуют с подходами, идущими от математического анализа.)

[42] С этим связано название доступного обзора по теории кодирования, написанного известным американским математиком Норманом Л е в и н с о н о м: «Теория кодирования: контрпример к принадлежащей Г. Г. Харди концепции прикладной математики» (N. L e v i n s o n. Coding Theory: a counterexemple to G. H. Hardy's conception of applied mathematics. American Math. Monthly, **77**, № 3, 1970, стр. 249—258). Знаменитый английский математик Годфри Гарольд Х а р д и (на русский язык переведен его учебник математического анализа, которому автор дал несколько вызывающее название: Курс чистой математики. М., ИЛ, 1949) любил противопоставлять «чистую» математику, не имеющую прямых выходов в практику, но зато обладающую большим внутренним совершенством, глубиной и своеобразной (и очень важной для математиков!) красотой, и прикладную математику, гораздо менее богатую идейно. Сам Харди любил подчеркивать, что его не интересуют прикладные вопросы. Теорию кодирования Н. Левинсон рассматривает в своей статье как прямое опровержение взглядов Харди: этот раздел математики обладает бесспорной математической красотой, частично связанной с использованием развитого и глубоко нетривиального аппарата современной абстрактной алгебры

(например, теории конечных полей Галуа), и имеет несомненно большое прикладное значение.

Относительно взглядов Харди на математику см., например, переведенный на русский язык отрывок из его книги «Апология математики»: Г. Г. Харди. Исповедь математика.— В сб.: «Математики о математике». М., «Знание», 1967, стр. 4—15. Что же касается личного отношения Харди к прикладным проблемам, то по иронии судьбы сегодня его имя в гораздо большей степени известно в связи с одной выполненной им еще в студенческие годы работой прикладного содержания (так называемый закон Харди — Вейнберга популяционной генетики), чем со всеми его достижениями в математическом анализе и теории чисел.

[43] Современная математика для инженеров. Под. ред. Э. Ф. Беккенбаха. М., ИЛ, 1958.

[44] Т. Карман, М. Био. Математические методы в инженерном деле. М.— Л., Гостехиздат, 1946.

[45] Прикладная комбинаторная математика. Сборник статей под ред. Э. Беккенбаха. М., «Мир», 1968.

[46] Эти разделы математики до сих пор часто называют «высшей математикой», противопоставляя их тем самым «низшей» математике — алгебре и геометрии, математической логике и комбинаторному анализу. Ясно, что сегодня такое противопоставление уже не оправдывается ничем, кроме традиции, и от него давно следует отказаться.

[47] См. Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон. Введение в конечную математику. М., «Мир», 1964. (Эта книга возникла в результате объединения и частичной переработки двух американских учебников, один из которых рассчитан на студентов-математиков, а второй — на нематематиков.)

[48] А. И. Маркушевич. Возвратные последовательности. М.— Л., Гостехиздат, 1950.

[49] Эта сторона дела отражена, например, в недавно изданном университетском учебнике теории дифференциальных уравнений в частных производных (см. С. К. Годунов. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1971; ср. также Р. Рихтмайер, К. Мортон. Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972).

[50] P. Dembowski. Finite Geometries. Berlin — Heidelberg — New York, 1968. [Серия «Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete», Bd. 44.]

[51] H. Minkowski. Geometrie der Zahlen. Leipzig, 1910.

[52] Значительная часть результатов этой группы излагается в книге: К. Роджерс. Укладки и покрытия. М., «Мир», 1968.

[53] Относительно полученных Л. Фейеш Тотом и его учениками результатов см. доступно написанную книгу: Ласло Фейеш Тот. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М., Физматгиз, 1958.

[54] Соответствующие плоские фигуры называются также *параллелогонами*.

[55] В определение параллелоэров обычно включается еще одно дополнительное требование, состоящее в том, что соответствующие многогранники (в плоском случае — многоугольники) должны *прилегать друг к другу по целой грани* (соответственно — *стороне*).

Е. С. Федоров перечислил все параллелоэдры в трехмерном (обычном) евклидовом пространстве: кроме параллелепипедов и (быть может — наклонных) призм с шестиугольным центрально-симметричным основанием их оказалось еще три типа: два 12-гранника и один 14-гранник с центрально-симметричными гранями (по этому поводу см., например, Б. Н. Делоне и О. К. Житомирский. Задачник по геометрии. М.—Л., Гостехиздат, 1952, стр. 275—282 или А. Д. Александров. Выпуклые многогранники. М.— Л., Гостехиздат, 1950, § 1 гл. VIII.) Б. Н. Делоне нашел в 1929 г. все параллелоэдры четырехмерного евклидова пространства — их оказалось 51 тип. Параллелоэдры в пространствах размерности > 4 неизвестны до сих пор.

[56] Можно также фиксировать определенную совокупность (группу) G движений и требовать, чтобы рассматриваемые фигуры получались одна из другой движениями из G (ср., например, с содержанием § 4 книги: В. Г. Болтянский. Равновеликие и равносоставленные фигуры. М., Гостехиздат, 1956); соответствующие расположения фигур (упаковки, покрытия, разбиения) можно назвать G-расположениями. Так, например, если S—группа всех центральных симметрий и параллельных переносов плоскости, то к числу «S-параллелогонов» наряду с параллелограммами и центрально-симметричными шестиугольниками будут принадлежать также треугольники или равнобедренные трапеции (рекомендуем читателю сделать соответствующие чертежи).

[57] Johannis Kepleris. Mathematice Sterna Seu de Nive Sexangula. Francofurti ad Moenum, apnd Godefridum Tampach Anno MDCXI. (Франкфурт-на-Майне, 1611, стр. 61.); изд. 2-е — 1619; перепечатано в J. Kepler. Gesammelte Werke. Bd. 4, Munchen, 1911, стр. 259—280.

[58] В связи с изучением упаковок равных шаров в пространстве И. Кеплер получил также ряд результатов, касающихся разбиений пространства, в частности — нашел интересные типы (пространственных) параллелоэдров.

[59] A. Thue. On nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer. Forhandl. Scand. Naturförsk., **14**, 1892, стр. 352—353.

[60] A. Thue. Über dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene. Christianica Vid. selsk. skr. **1**, 1910, стр. 3—9.

[61] L. Fejes Tóth. Über einen geometrischen Satz. Math. Zeitschr., **46**, 1940, стр. 83—85.

[62] B. Segre, K. Mahler. On the densest packing of circles. Amer. Math. Monthly, **51**, 1944, стр. 261—270. (Ряд доказательств этой теоремы собран в указанной в Примечании 53 книге Л. Фейеша Тота.)

[63] См. по этому поводу книгу К. Роджерса (Примечание 52).

[64] В русских телеграфных кодах обычно буквы *ь* и *ъ* имеют один и тот же кодовый знак; однако к числу букв причисляется 32-я «нулевая буква» — пробел между словами.

[65] См., например, Б. А. Розенфельд, И. М. Яглом. Многомерные пространства.— Энциклопедия элементарной математики. Книга пятая. М., «Наука», 1966, стр. 349—392.

[66] См. К. Шеннон. Связь при наличии шума.— В кн.: Работы по теории информации и кибернетике. М., ИЛ, 1963, стр. 433—460. (Заметим, что в последние годы каждый новый результат, касающийся плотнейших упаковок шаров, совершенно немедленно «берется на вооружение» специалистами по теории связи.)

[67] Фигура F называется выпуклой, если *вместе с каждыми двумя своими точками F содержит и целиком весь соединяющий эти точки отрезок.* Так, выпуклыми фигурами являются все выпуклые многоугольники и круги; выпуклым является также каждый круговой сегмент и те из круговых секторов, которые отвечают центральным углам, не превосходящим 180°. Требование выпуклости является важным потому, что, скажем, произвольные (невыпуклые) плоские фигуры могут обладать очень далекими от всякой геометрической наглядности свойствами (например, не иметь ни площади, ни периметра); условие же выпуклости отметает все эти нежелательные возможности. (По этому поводу см., например, В. Г. Болтянский, И. М. Яглом. Выпуклые фигуры и тела.— Энциклопедия элементарной математики, книга пятая, стр. 182—269.)

[68] См., например, Приложение к гл. 2 книги: И. М. Яглом. Геометрические преобразования. Т. II. М., Гостехиздат, 1956.

[69] «Приложить» фигуру F к другой фигуре F_0 — значит расположить ее так, чтобы она «соприкасалась» с F_0 (т. е. чтобы F и F_0 имели общие гра́ничные точки), но не пересекалась с ней (F и F_0 не должны иметь общих внутренних точек).

[70] В библиотеке Кембриджского университета в Англии до сих пор хранится рукопись Д. Грегори, в которой он обосновывал свои выводы. Однако эта рукопись может представлять лишь исторический, но никак не научный интерес, поскольку предсказанный Грегори результат оказался неверным.

[71] C. Bender. Bestimmung der größten Anzahl gleichgrößer Kugeln, welche sich aufeine Kugel von demselben Radius, wie die übrigen, auflegen lassen. Grunert Archiv, **56**, 1874, стр. 302—313.

[72] S. Günter. Eine stereometrisches Problem. Grunert Archiv. **57**, 1875, стр. 209—215.

[73] K. Schütte, B. L. van der Waerden. Das Problem der dreizehn Kugeln. Math. Annalen. **125**, 1953, стр. 325—334.

[74] J. Leeche. The problem of the thirteen spheres. Math. Gazette, **40**, 1956, стр. 22—23.

[75] Обзор результатов, относящихся к многомерным аналогам «задачи Ньютона — Грегори», дан в статье H. S. M. Coxeter. An upper bound for the number of equal nonoverlapping spheres that can touch another on the same size.— В сб.: Convexity (редактор V. Klee). Providence, 1963, стр. 53—71; см. также H. S. M. Coxeter. Twelve geometric Essays. London, 1968, стр. 179—198.

[76] См., например, Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Избранные задачи и теоремы элементарной геометрии. Ч. 2. М., Гостехиздат, 1952, задача 51.

[77] См. И. М. Яглом. Задачи трудные и легкие.— Математическая школа (лекции и задачи). Вып. IV—V. М., Изд-во МГУ, 1965, стр. 12—18.

[78] K. Böröczky. Über die Newtonische Zahl regulärer Vielecke. Period. math. hungar., **1**, № 2, 1971, стр. 113—119. Относительно общих оценок «ньютонова числа» плоских (выпуклых) фигур в зависимости от «степени вытянутости» фигуры см., например, L. Fejes Tòth. On the number of equal discs that can touch another of the same kind. Studia scient. math. hungar., **2**, 1967, стр. 363—367.

[79] H. Hadwiger. Über Treffanzdal bei translationsgleiche Eikörper. Archiv der Math., **8**, 1957, стр. 212—213.

[80] H. Groemer. Abschätzungen für die Anzahl der konvexen Körper die einen konvexen Körper berühren. Monatshefte fur Math., **65**, 1961, стр. 74—81.

[81] B. Grünbaum. On a conjecture of Hadwiger. Pacific Journ. of Math., **11**, 1961, стр. 215—219.

[82] F. Bajemihl. A conjecture conserning neighboring tetrahedra. Amer. Math. Monthly, **63**, 1956, стр. 328—329.

[83] V. J. D. Baston. Some properties of polyhedra in euclidean space. Oxford, 1965.

[84] См., например, Г. Радемахер и О. Теплиц. Числа и фигуры. М., «Наука», 1966, тема 13; Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. М.— Л., Гостехиздат, 1951, п. 51; Р. Курант и Г. Роббинс. Что такое математика? М., Учпедгиз, 1963, гл. V, § 3; Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский. Математические беседы. М.— Л., Гостехиздат, 1952, раздел I; И. С. Соминский, Л. И. Головина, И. М. Яглом. О математической индукции. М., «Наука», 1967, ч. II, § 2.

[85] Любопытно следующее: сравнительно недавно немецкий геометр Г. Рингель доказал, *что для всех отличных от плоскости и от сферы поверхностей наименьшее число «красок», которыми можно правильно раскрасить любую изображенную на этой поверхности «географическую карту», в точности равно наибольшему числу областей, которые можно расположить на этой поверхности так, чтобы никакие две области не пересекались, но любые две имели общий участок границы*; отсюда Рингель получил решение «проблемы о красках» для многих поверхностей, например для тора («баранки») и для «кренделя», и «почти решение» ее для всех остальных. Таким образом, здесь неожиданно оказалось, что самые простые из всех поверхностей — плоскость и сфера — в отношении «проблемы о красках» являются «самыми неудачными»: лишь для них эту проблему не удалось свести к нахождению системы областей, каждые две из которых имеют общий участок границы. По этому поводу см. G. Ringel. Farbungsprobleme auf Flächen und Graphen. Berlin, 1959; или И. М. Яглом. Новые результаты, относящиеся к проблеме четырех красок.— Математическое просвещение. Вып. 3. [Новая серия]. М., Физматгиз, 1958, стр. 265—266.

[86] H. Titze. Über das Problem der Nachbargebiete im Raum. Monatshefte für Math., **16**, 1905, стр. 211—216.

[87] A. S. Besicovitsch. On Crum's Problem. Journ. of London Math. Soc., **22**, 1947, стр. 285—287.

СОДЕРЖАНИЕ

Исаак Моисеевич ЯГЛОМ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРЕЖДЕ И ТЕПЕРЬ

Редактор В. Ю. Иваницкий
Обложка Л. П. Ромасенко
Худож. редактор В. Н. Конюхов
Техн. редактор Т. В. Самсонова
Корректор В. И. Гуляева

А11214 Сдано в набор 28/VII-72 г. Подписано к печати 18/IX-72 г. Формат бумаги 60×90[1]/16. Бумага типографская № 3 Бум. л. 1,5 Печ. л. 3,0 Уч.-изд. л. 2,68 Тираж 47 000 экз. Зак. 1460 Цена 9 коп. Издательство «Знание». Москва, Центр, Новая пл., д. 3/4.
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

47