ЛАНЬ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР

В. В. КОЛБИН

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание второе, стереотипное

ЛАНЬ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2021

УДК 51
ББК 22.18я73

К 60 **Колбин В. В.** Вероятностное программирование : учебное пособие для вузов / В. В. Колбин. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 392 с. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-8114-7895-8

Модели и методы математического программирования в условиях дефицита информации используются в технике, экономике, биологии, военном деле и других областях человеческой деятельности. Они адекватнее других современных формальных методов приспособлены к анализу сложных систем, к подготовке и выбору оптимальных и компромиссных решений. Представлены одноэтапные, двухэтапные и многоэтапные модели с вероятностными условиями и функционалами, многокритериальные и игровые постановки задач. Приведены методы оптимизации соответствующих эквивалентов исходных моделей. Исследованы проблемы устойчивости решений и целевых функционалов. Работа содержит большое число прикладных задач в условиях дефицита информации.

Предназначено для студентов направлений подготовки «Прикладная информатика», «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика», «Менеджмент» и других направлений.

УДК 51
ББК 22.18я73

Издается в авторской редакции

Обложка
П. И. ПОЛЯКОВА

Содержание

Предисловие

Настоящее пособие посвящено проблемам моделирования стохастических систем планирования и управления. В основу работы положены лекции специального курса «Стохастическое программирование», читавшиеся автором выпускникам отделения экономической кибернетики Ленинградского университета, начиная с 1967 года; с 1971 года специальный курс читается выпускникам факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. В 1977 году в издательстве Д.Рейдель (Голландия — США) была опубликована книга «Стохастическое программирование».

Пособие содержит семь глав. В первой главе, носящей вводный характер, рассматриваются проблемы неопределенности и вероятности, используемые для моделирования сложных систем. Приводятся основные признаки классификации задач стохастического программирования. Глава 2 посвящена анализу различных моделей стохастического программирования с вероятностными ограничениями. Даются примеры технических и экономических прикладных задач управления с вероятностными ограничениями. В третьей главе исследуются двухэтапные задачи стохастического программирования, приводятся различные модели и проводится их качественный анализ. В заключение главы рассматриваются транспортная задача со случайными данными, задача определения объемов производства и задача планирования полетов самолетов как двухэтапные задачи стохастического программирования. Многоэтапные задачи стохастического программирования исследуются в главе 4. Устанавливаются зависимости между априорными и апостериорными решающими правилами и решающими распределениями. Исследуются двойственные задачи. Примеры прикладных задач многоэтапного стохастического программирования завершают эту главу. Игровой подход к задачам стохастического программирования является предметом главы 5. Проблемы существования решения и его оптимальности в задачах стохастического программирования исследуются в шестой главе. В главе 7 рассматриваются проблемы устойчивости решений в задачах стохастического программирования.

Стохастическое программирование становится важным направлением исследования недетерминированных систем планирования и управления в технике, экономике, биологии и военном деле. Модели и методы стохастического программирования больше, чем другие современные формальные методы приспособлены к анализу сложных с систем, к подготовке и выбору решений в сложных ситуациях.

Автор выражает глубокую благодарность бывшей аспирантке И.Ю.Быковой, совместно с которой были получены некоторые результаты, нашедшие место в данной работе. А также особую благодарность автор выражает аспиранту кафедры математической теории экономических решений Санкт-Петербургского государственного университета Г.О. Атрахимовичу, взявшего на себя труд оформления книги.

Введение

В настоящее время все большее признание при оптимизации, управлении и научном исследовании сложных систем находит системный подход. При этом понимают метод преодоления структурной сложности путем упорядочения многочисленных элементов системы и связей в виде определенной иерархии подсистем, каждая из которых "реализуема" с использованием современных средств обработки информации. Следует распространить методологию системного подхода не только в отношении структурно-сложных, но и недостаточно формализованных проблем, и в этой связи отдельного внимания заслуживают системы, о структуре и условиях функционирования которых мы не располагаем полной информацией. Во многих областях знания человек сталкивается со сложными системами двойственной природы, которая заключается в следующем. В некотором отношении такие сложные системы причинно обусловлены, развиваются под действием объективных закономерностей и в этом смысле могут рассматриваться как детерминированные. Одновременно на эти сложные системы оказывают действие многие неоднозначные факторы, носящие случайный или неопределенный характер, и в результате невозможно точно предсказать условия и направления будущего развития таких систем. Примеры таких систем имеют место в экономике, технике, военном деле, где исходная информация для планирования, проектирования и управления, как правило, недостаточно достоверна или отсутствует. Любая задача планирования производства осуществляется в условиях неполной информации об условиях, в которых будет реализовываться план. Непредвиденные случайные помехи, относительно статистических закономерностей которых не всегда удается получить данные, сопровождают работу автоматических устройств. В военных задачах приходится иметь дело не только с недостатком информации, но приходится учитывать и возможность дезинформации, организуемой с помощью случайных механизмов.

Конец XX столетия вошел в историю человечества как период величайших социально-экономических преобразований, существенных изменений во всех областях материальной и духовной жизни. В современных условиях первостепенное значение приобретают такие глобальные проблемы, как установление прочного мира и равноправного международного сотрудничества, рациональное использование природных ресурсов и удовлетворение потребностей общества в энергии, ликвидация распространенных и опасных заболеваний, охрана окружающей среды и другие. Все эти проблемы отличаются высокой степенью сложности, подлинно глобальной масштабностью и зависимостью от большого числа разнородных факторов — природных, экономических, технических, политических, социальных, культурных. Названные проблемы должны анализироваться с использованием системного подхода как в части учета взаимных связей, путем широкого применения междисциплинарного аппарата, так и в связи с учетом анализа проблем в условиях риска и неопределенности. В современных условиях результаты такого анализа можно формулировать не только в области теории, но уже имеются предпосылки для перевода его на язык управленческой практики. Эти исследования позволят дать более обоснованную картину современного состояния общества и выяснить возможные альтернативы его дальнейшего развития. Такая область исследований потребует использования глобального моделирования с применением формальных методов, базирующихся на аппарате решения задач планирования и управления в условиях риска и неопределенности; на использовании методов реализации многокритериальных задач и задач большой размерности.

В задачах планирования, управления и исследования параметры могут иметь вероятностные характеристики, полученные в результате анализа опытных данных, обработки статистического материала или на основании изучения процессов, подлежащих моделированию. В тех случаях, когда имеют место те или иные вероятностные характеристики параметров задач, принято говорить о моделировании или о принятии решений в условиях риска. Однако может оказаться, что в ситуации, подлежащей моделированию, нет оснований для каких-либо суждений о природе и характеристиках вероятностей, которыми используются параметры задачи. В последнем случае принято говорить о принятии решений в условиях неопределенности. Условные экстремальные задачи, связанные с риском или с неопределенностью, и являются предметом стохастического программирования. В последние годы сформировался раздел математического программирования в условиях риска и неопределенности, получивший название стохастического программирования и исследующий теорию и приложения условных оптимизационных задач, когда имеет место неполнота информации о характеристиках параметров моделей.

1 Риск и неопределенность в задачах планирования и управления сложными системами

В настоящее время преобладающим в процессах исследования и оптимизации сложных систем при планировании и управлении в экономике, технике, военном деле и других областях человеческой деятельности является детерминистический подход. Предполагая однозначность всех категорий исходных данных, детерминистический подход игнорирует двойственность природы сложных систем, которые, с одной стороны, развиваются под действием объективных закономерностей и в этом смысле действительно являются детерминированными, с другой стороны, эти системы осуществляют свое закономерное развитие лишь в виде тенденций, постоянно нарушаемых влиянием случайных факторов, т.е. обладают вероятностными свойствами в смысле невозможности однозначного предсказания их последующего развития.

Игнорирование вероятностных свойств сложных систем приводит к таким крайностям детерменистического подхода, как стремление к полной формализации процесса оптимального планирования и управления, к построению максимально подробных математических моделей и получению с их помощью единственного, предельно точного оптимального результата. Все это чревато опасностью формирования неправильных концепций оптимального планирования и управления сложными системами и искаженных представлений о рациональных направлениях их развития.

1.1 Неопределенность и вероятность в задачах планирования и управления

Перспективным подходом к проблеме учета факторов риска и неопределенности при постановке и реализации условных оптимизационных задач планирования и управления сложными системами является вероятностный подход. Разработка и использование методов оптимального планирования и управления без учета условий неопределенности и вероятности не могут быть эффективными. В процессе моделирования сложных систем мы должны по возможности реально оценивать неточность самих моделей, неадекватность самих моделей действительным явлениям и процессам. Кроме того, имеет место неопределенность исходной информации, необходимой для использования в моделях. Наконец, никакие модели не в состоянии учесть все факторы, оказывающие влияние на результаты планирования и управления в сложных системах, поэтому заведомо нужно принимать во внимание ту неопределенность, которая обусловлена невозможностью учета всех обстоятельств действительного положения вещей.

Представляется целесообразным в подавляющем большинстве случаев не разрабатывать и применять точные методы оптимизации планирования и управления при исследовании сложных систем, а создавать и использовать методы учета неопределенности и вероятности в процессах принятия решений. Условия неопределенности и вероятности всегда будут иметь место при описании сложных систем в силу ряда объективных причин (нет нужды перечислять их) какими бы ни были наши затраты, вызванные стремлением совершенствовать модели и методы планирования и управления, или наши усилия, направленные на получение достоверной информации.

С точки зрения решения практических задач актуальной является разработка эффективных методов принятия во внимание неопределенности и вероятности как самих моделей, так и их параметров. В настоящее время наметились несколько подходов учета вероятности и неопределенности в задачах планирования и управления. Простейшим, но далеко не самым эффективным, является подход, использующий первые моменты для вероятностных параметров модели. Нередко в стохастических задачах планирования и управления прибегают к значениям математических ожиданий и дисперсий применительно к случайным целевым функциям и вероятностным условиям моделей. Вообще говоря, такой подход приводит к результатам, далёким от реальных обстоятельств, что объясняется сложностью зависимости функционалов задач и их оптимальных планов от случайных параметров моделей. Такие зависимости требуют самостоятельных исследований, при этом они часто выражаются не гладкими функциями. Вместе с тем, использование простейшего подхода и ориентация на средние значения случайных параметров модели иногда может быть оправдана. Можно показать, что при условии частой корректировки, например, в задаче перспективного планирования ошибки от ориентации на средние значения параметров в процессе разработки плана стремятся к нулю независимо от длины планового периода. В этих случаях делается предположение относительно гладкости функций распределения прогнозируемых значений вероятностных параметров модели. Автоматизированные системы управления позволяют осуществлять корректировку плановых решений с необходимой частотой, и в этих условиях можно считать оправданной разработку планов и решений по управлению на базе средних значений вероятностных параметров моделей.

Практика применения подхода, ориентированного на средние значения случайных параметров модели планирования и управления, не учитывает благоприятные и неблагоприятные обстоятельства, в которых происходит фактическая реализация случайных условий. Последнее обстоятельство — отличие параметров модели от принятых средних значений может существенно негативно сказаться на решениях по планированию и управлению. В тех случаях, когда нет оснований предполагать стационарный характер случайных процессов и, как следствие этому, отсутствует возможность достаточно частой корректировки решения, применяют другой подход учета неопределенности. В соответствии с классическим представлением сама неопределенность реализуется в виде конечных множеств проявления внешних условий (состояний природы). В процессе планирования и управления необходимо сопоставить возможные действия и осуществить выбор из них наилучшего в смысле целей, преследуемых при моделировании сложной системы. Принимая во внимание, что в задачах планирования и управления сложными системами, вообще говоря, множества состояний природы бесконечны, исследователи прибегают к отбору ограниченного количества проявлений случайных параметров модели с таким расчетом, чтобы эта совокупность наиболее полно отражала бы все множество проявлений случайных данных. Применяются различные приемы для выделения конечного числа состояний природы, характеризующего исходное бесконечное множество.

Реальные условия решения задач позволяют корректировать выработанные планы, о чем уже упоминалось выше, и, кроме того, в ряде случаев можно рассматривать проявление неопределенности в виде множества альтернатив состояния природы. Отмеченные особенности при моделировании сложных систем позволяют использовать методы многоэтапного принятия решений по планированию и управлению в условиях неопределенности.

Многоэтапные модели принятия решений в условиях риска и неопределенности представляются удобными для принятия решений на перспективу, в частности, сказанное относится к плановым решениям. В условиях дискретного во времени планирования весь процесс разбивается на несколько этапов: на предыдущих этапах принимаются некоторые предварительные решения в условиях неполной информации о фактических проявлениях случайных параметров, а на последующих этапах планы корректируются в зависимости от реализации состояний природы при этом результаты планирования оцениваются в терминах целевой функции задачи.

Наиболее простой и употребимой схемой в подобных случаях является модель двухэтапного стохастического программирования для этой модели пригодятся многочисленные задачи планирования, когда на момент предварительного планирования отсутствует необходимая информация об условиях реализации плана, но, спустя момент принятия предварительного решения по плану, уже в ходе его реализации появляется возможность судить о состоянии природы и на этом основании корректировать предварительный план. При этом в целевой функции задачи находят отражение все те затраты, которые связаны с несовершенством предварительного плана и с необходимостью его изменения под влиянием случайных проявлений моделируемых обстоятельств.

В настоящей работе многоэтапные задачи планирования и управления сложными системами найдут свое отражение в дальнейшем.

Типичным явлением при исследовании задач планирования и управления в сложных системах является наличие многих случайных факторов, влияние которых необходимо учитывать в совокупности. В подобных случаях возникает дополнительная проблема адекватности моделирования и, в частности, оценка принятого в задаче уровня детализации. Вообще говоря, агрегирование параметров задачи (прежде всего, случайных условий и их характеристик) придает модели большую точность, поскольку есть основания считать, что за счет усреднения действия многочисленных случайных факторов, их влияние компенсируется. При этом уровень математического моделирования процессов планирования и управления и точность моделей должны соответствовать достоверности исходной информации. Сформулируем основные результаты, относящиеся к отражению вероятности и неопределенности в задачах планирования и управления при моделировании сложных систем. Прежде всего, приобретает особо важное значение разработка механизмов учета вероятности и неопределенности. Наметились несколько подходов принятия решений в условиях вероятности и неопределенности, среди которых основными можно считать следующие:

- усреднение случайных значений параметров моделей, использование их математических ожиданий;
- выбор конечного разнообразия состояний природы и определение в некотором смысле наилучшей стратегии поведения, применение игровых схем принятия решений;
- применение многоэтапных процедур принятия решений по планированию и управлению, использование аппарата стохастического программирования;
- анализ устойчивости решений под влиянием случайных возмущений с последующим применением экспертных оценок.

Последнее направление с необходимостью использует аппарат параметрического и стохастического программирования, теории ошибок и теории вероятностей. В зависимости от особенностей сложных систем необходимо выбирать соответствующий подход для исчисления вероятностей и учета неопределенности при практическом решении задач планирования и управления в условиях неполной информации.

1.2 Различные вероятностные подходы, используемые при описании сложных систем

Индуктивная логика, изучающая логические процессы. Определяет степень правдоподобия (вероятности) данного события или явления на основании некоторой информации, причем эта информация является неполной. В результате можно говорить об одной из форм индуктивной логики — вероятностной логике. Вероятностная логика позволяет сопоставлять утверждениям не только значения истинности или лжи, но и промежуточные значения — вероятности истинности высказываний или гипотез. При этом здесь нет противоречий тому факту, что высказывание или гипотеза сами по себе могут иметь только одно из двух значений: истины или лжи, поскольку значение вероятности характеризует отношение высказывания или гипотезы к действительности не непосредственно, а через другие высказывания, отражающие состояние наших знаний в данный момент. Количественное определение вероятности одних высказываний относительно других предполагает наличие двух обстоятельств:

- правил получения исходного распределения вероятностей гипотез относительно имеющихся к данному моменту знаний (правил индукции);

- правил исчисления вероятностей сложных гипотез, для которых известны вероятности составляющих их высказываний.

Правила индукции являются дискуссионными и по-разному рассматриваются представителями различных направлений вероятностной логики. Одновременно правила вычисления вероятностей сложных гипотез во всех системах вероятностной логики осуществляются с помощью математического исчисления вероятностей. В основе концепции последнего лежит система аксиом А.Н.Колмогорова. Наличие множества систем вероятностной логики обусловлено множеством вариантов правила индукции. Следует отметить, что в настоящее время системы вероятностной логики ещё недостаточно развиты для учета неопределенности значений параметров сложных систем.

Современное исчисление вероятностей, построенное на аксиоматике А.Н. Колмогорова, положенное в основу концепции объективной вероятности, является общеприменимым математическим аппаратом для всех других концепций вероятности. В рамках концепции объективной вероятности неопределенность понимаемая как незнание действительного состояния сложной системы, не изучается, а исследованию подлежит статистическая определенность. В случае неопределенности исследователь сталкивается с непредсказуемостью, тогда как в условиях статистического детерминизма чисто теоретически можно иметь полную предсказуемость (практически приближенную). Понятие математической вероятности является необходимым средством количественного учета неопределенности, а экстремальные вероятностные модели являются более адекватными, чем детерминированные модели сложных систем в условиях неопределенности. Вероятностные характеристики моделей планирования и управления сложными системами в условиях неопределенности могут быть определены с помощью групп экспертов или путем использования некоторых индуктивных принципов, а также статистических методов.

Большое значение для теории и практики моделирования сложных систем имеет концепция субъективной вероятности, которая развивается в настоящее время в рамках так называемой теории решений. Впервые последовательно и развернуто развил концепцию субъективной вероятности де Финнети. Теория решений впервые возникла как основание байесовской теории статистических решений. Сторонники классического направления Неймана-Пирсона определяли математическую статистику как науку о методах обработки наблюдений в опытных данных с целью установления закономерностей случайных массовых явлений, в то время как сторонники байесовской теории статистических решений определяли её как науку о принятии решений в условиях неопределенности на основе опытных данных. Начиная со второй половины XX века начинают широко использоваться в решении задач планирования, проектирования и управления сложными системами математические методы, среди них заметное место занимают методы математической статистики, применяемые при решении задач управления и организации производства. В теории статистических решений активно рассматриваются не только классические критерии математической статистики, такие как минимум дисперсии и максимум правдоподобия, но и экономические и социальные. Например, А.Вальд в своих работах рассматривал два типа решений: минимаксные (минимальных затрат на максимальной полезности) и байесовские.

В работах Сэвиджа по теории решений обосновывалось применение априорных вероятностных распределений в задачах статистических решений, а в качестве критерия в определенных ситуациях использовался минимаксный риск. Позднее стало очевидным, что теория статистических решений может рассматриваться не только в качестве оснований статистики, но и как нормативная теория принятия решений в условиях неопределенности, как логические основы таких решений. Теория решений развивалась на базе элементов теории игр, теории статистических решений и в результате разработки концепции субъективной вероятности.

Байесовский подход к моделированию сложных систем привел к новому пониманию организации работ в науке управления и исследовании операций.

В настоящее время стало характерным положение дел, когда группа специалистов по исследованию операций содержательно и математически формулирует, а затем решает задачу в контакте с работниками системы управления, ответственными за принятие решения. В концепциях логической и субъективной вероятности исследуется проблема вероятности индивидуального события, в то время как эта проблема совершенно не рассматривается в концепции объективной вероятности.

Во всех сферах нашей жизни люди постоянно находятся в условиях, когда необходимо принимать те или иные решения при неполной информации; человек сталкивается с неопределенностью последствий своих действий, при этом принимающий решения все чаще формализует на вероятностном языке свои индуктивные умозаключения. Следует признать, что вероятностная логика ещё недостаточно развита (вероятностная логика стала формой индуктивной логики), когда возникает проблема учета неопределенности в процессе моделирования поведения сложных систем. Для решения задач наряду с концепцией логической вероятности используются и другие концепции, в частности, концепции субъективной и объективной вероятности. При этом, вообще говоря, концепция субъективной вероятности разрабатывается в пределах байесовской теории решений, что существенно отразилось на развитии методов исследования операций.

Все три концепции вероятности используют понятия исчисления вероятностей, базирующиеся на системе аксиом А.Н.Колмогорова. С помощью аппарата математической вероятности появляется возможность осуществлять количественный учет неопределенности.
При этом нормативные вероятностные модели адекватно описывают процессы планирования и управления сложными системами в условиях неполной информации. Различного рода характеристики случайных параметров вероятностных экстремальных моделей определяют либо с привлечением групп экспертов, либо применяя некоторые индуктивные правила. Кроме того, широко используются статистические методы, в том числе и байесовской теории статистических решений.

1.3 Основы классификации методов и моделей программирования в условиях риска и неопределенности

Почти любую задачу прикладной математики можно отнести к одному из следующих двух классов. Первый из этих классов составляют «дескриптивные» задачи, в которых с помощью математических методов перерабатывается информация об исследуемом объекте или явлении, одни закономерности могут быть выведены из других с использованием принципов индуктивной логики.

Ко второму классу относятся — «оптимизационные» задачи, где из некоторого множества допустимых решений выбирается в том или ином смысле оптимальное. Задачи исследования операций чаще всего относятся к задачам второго класса. Кроме указанных двух классов задач, можно говорить о задачах конструктивных, в которых тоже имеет место использование аппарата прикладной математики. Разумеется, разделение задач на классы дескриптивных, конструктивных и нормативных (оптимизационных) носит условный характер. Кроме указанного разделения задач прикладной математики, можно провести классификацию их и по другим признакам. В частности, естественно различать детерминированные и стохастические задачи. Теория вероятностей может служить примером развития математической дисциплины в результате процесса решения стохастических задач.

Вместе с тем вероятностные методы долгое время применялись исключительно к решению задач дескриптивного класса. Оптимизационные стохастические задачи начали разрабатываться только в последние 50-60 лет. Это же относится и к стохастическим вариантам задач оптимального программирования.

Однако стохастическое оптимальное программирование является весьма важной и перспективной ветвью прикладной математики уже хотя бы потому, что на практике принятие решений всегда происходит в условиях той или иной неопределенности. Задачи оптимального программирования в условиях риска и неопределенности оказываются существенно сложнее соответствующих детерминированных задач, поэтому при разработке проблем данного направления исследований нельзя надеяться на быстрое получение достаточно общих и достаточно эффективных результатов.

В большинстве практических задач математического программирования значения параметров подвержены изменениям. Раздел математического программирования, изучающий теорию и методы решения условных экстремальных задач при неполной информации о параметрах условий задач, получил название стохастического программирования, к этому же разделу математического программирования иногда относят также условные экстремальные задачи с детерминированными условиями, в которых по тем или иным причинам целесообразно искать решение в виде распределения случайного вектора. Такие задачи нередко возникают в повторяющихся ситуациях, в которых условия задачи должны быть выполнены «в среднем» (в определенном смысле), и интерес представляет только «средний» эффект от принятых в этом случае решений.

Предметом стохастического программирования, принимая во внимание сказанное выше, являются условные экстремальные задачи, в которых параметры условий, или составляющие решения, или те и другие являются случайными величинами. Трудности в стохастическом программировании появляются уже при постановке задачи, когда необходимо учесть и отразить тонкие ситуации прогнозирования, планирования или управления сложными системами в условиях риска и неопределенности. Указанный раздел математического программирования в практических приложениях используется для решения задач двух типов. В задачах первого типа прогнозируются статистические характеристики поведения множества идентичных в том или ином смысле экстремальных систем. Раздел стохастического программирования исследующий подобные задачи получил название «пассивного стохастического программирования». Модели второго типа обеспечивают разработку методов и алгоритмов планирования и управления в условиях риска и неопределенности, при этом соответствующий раздел стохастического программирования получил название «активного стохастического программирования». Информационная структура задачи, которая определяется, главным образом, последовательностью наблюдений и решений, играет исключительно важную роль в процессе моделирования сложных систем в условиях риска и неопределенности.

Содержательная постановка задачи стохастического программирования определяет её решение в чистых или смешанных стратегиях. Решения в чистых стратегиях принято называть решающими правилами, решения в смешанных стратегиях называют решающими распределениями. Решение задачи программирования в условиях риска и неопределенности обуславливается либо априорной информацией — характеристиками распределения или выборкой возможных значений случайных параметров условий, либо апостериорной информацией — результатами наблюдения конкретной реализации параметров условий задачи.

В задачах стохастического программирования характеристики распределения случайных величин могут быть заданы (случай риска) или неизвестны (случай неопределенности). Можно осуществлять различие задач данного раздела математического программирования в зависимости от показателей качества решения и самим определением понятия плана (решения) задачи. Среди практических задач важное место занимают многокритериальные задачи планирования и управления в сложных системах. Наряду с однокритериальными условными задачами, можно рассматривать многокритериальные задачи в условиях риска и неопределенности. В системах планирования и управления возникают задачи со строго упорядоченными по важности критериями, такие задачи многокритериальной оптимизации получили название лексикографических задач оптимизации. Представляют интерес методы, с помощью которых решают лексикографические задачи оптимизации и вообще многокритериальные задачи в условиях риска и неопределенности. В последующих главах настоящей работы рассматриваются различные модели и методы математического программирования в условиях риска и неопределенности. Исследуются постановки задач, проблемы существования и оптимальности решений, вопросы устойчивости этих решений, приводятся примеры практических задач стохастического программирования.

2 Задачи стохастического программирования с вероятностными ограничениями

2.1 Постановка и качественный анализ задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями

В настоящей главе рассматриваются задачи стохастического программирования с вероятностными ограничениями. К таким задачам обращаются в тех случаях, когда моделируемая ситуация (проблемы планирования или управления) становится осмысленной только в том случае, если допустить нарушение условий задачи на некотором множестве элементарных событий (состояний природы).

Постановки задачи стохастического программирования с вероятностными ограничениями различаются в зависимости от следующих основных признаков:

- по способу задания решений;
- по виду целевого функционала задачи;
- по характеру задания условий задачи.

Решение в стохастических задачах с вероятностными ограничениями можно определять в виде детерминированного или случайного вектора, зависящего от детерминированных и вероятностных характеристик случайных параметров задачи, в чистых или смешанных стратегиях. В качестве целевых функций в задачах стохастического программирования с вероятностными ограничениями обычно используют следующие функционалы (линейные задачи):

- математическое ожидание линейной формы

$$\overline{C}X = E(C(\omega), X) \ \text{ – } E\text{-модели;}$$

- дисперсию линейной формы

$$E(C(\omega)X - \overline{C}X)^2, \text{либо } E(C(\omega)X - C^0X^0)^2 \ \text{ – } V\text{-модели,}$$

где, вообще говоря, $\overline{C}X \neq C^0X^0$;

- вероятность превышения линейной формой некоторого порога, заранее заданного

$$P\{C(\omega)X \geq C^0X^0\}, \text{либо } f \to \min,\ P\{C(\omega)X \leq f\} = \beta$$

— P-модели.

В общем случае вероятностные ограничения в стохастических задачах принимают вид $P\{g_i(X) \leq 0\} \geq \alpha_i,\ 0 \leq \alpha_i \leq 1,\ i = \overline{1,m}$, где $g_i(X)$ — некоторые случайные функции, ограничивающие область определения целевой функции задачи. При формализации конкретной задачи вероятностные условия могут быть наложены на одно или несколько ограничений. Например, для линейных задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями области определения целевых функций могут быть заданы в виде:

1) $P\{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i\} \geq \alpha_i,\ 0 \leq \alpha_i \leq 1,\ i = \overline{1,m}$;

2) $P\{AX \geq B\} \geq \alpha,\ 0 \leq \alpha \leq 1$;

3) $P\{\sum_{j=1}^n a_{i_kj}x_j \geq b_{i_k},\ i_k \subset I_k\} \geq \alpha_{(k)},\ 0 \leq \alpha_{(k)} \leq 1$, $k = \overline{1,S}$, $\bigcup_{k=1}^S I_k = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Рассмотрим подробнее задачу стохастического линейного программирования с вероятностными ограничениями вида

$$\max Z = \max CX, \tag{2.1.1}$$

$$P\Big\{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\Big\} \geq \alpha_i,\ 0 \leq \alpha_i \leq 1,\ i = \overline{1,m}, \tag{2.1.2}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{2.1.3}$$

где (a_{ij}) — детерминированная матрица, векторы $b = (b_i)$ и $C = (c_j)$ — случайны.

Задачу (2.1.1) - (2.1.3) можно свести к детерминированной задаче линейного программирования

$$\max Z = \max \overline{C} X,$$

$$AX \leq \widetilde{b},$$

$$X \geq 0,$$

где $\overline{C}$ — математическое ожидание вектора C, а вектор $\widetilde{b}$ можно определить следующим образом.

Пусть $\varphi(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ — совместная плотность распределения компонент случайного вектора $b(\omega)$, а $\varphi_i(b_i)$ — плотность распределения i-й компоненты вектора $b(\omega)$, т.е.

$$\varphi_i(b_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots (m-1) \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(b_1, b_2, \ldots, b_m) \prod_{k \neq i} db_k.$$

Зная $\varphi_i(b_i)$, можно найти такое $\widetilde{b}_i$, что выполняется

$$\int_{\widetilde{b}_i}^{\infty} \varphi_i(b_i) db_i = \alpha_i, \; i = \overline{1, m}. \qquad (2.1.4)$$

Если уравнение (2.1.4) имеет множество решений, выбираем в качестве $\widetilde{b}_i$ наибольший корень. Тогда соотношение $P\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i\Big) \geq \alpha_i$ эквивалентно неравенству $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \widetilde{b}_i$, где $\widetilde{b}_i$ вычисляется из уравнения (2.1.4). Следовательно, задача стохастического программирования (2.1.1.)-(2.1.3) эквивалентна детерминированной задаче линейного программирования

$$\overline{C} X \to \max, \qquad (2.1.5)$$

$$AX \leq \widetilde{b}, \qquad (2.1.6)$$

$$X \geq 0, \qquad (2.1.7)$$

где $\overline{C} = E(C(\omega)), \; \widetilde{b} = (\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, \ldots, \widetilde{b}_m)$.

Система $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \widetilde{b}_i$ определяет выпуклое множество и, следовательно, система $P\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\Big) \ge \alpha_i$ ей эквивалентная, также определяет выпуклое множество.

Одновременно доказали утверждение, что

$$S_\alpha = \Big\{X : P\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i(\omega)\big) \ge \alpha_i,\ 0 \le \alpha_i \le 1,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}\Big\}$$

— выпуклое множество.

В работах [376], [377], [378] рассмотрена задача минимизации целевой функции Cx на множестве S_α, в предположении постоянства элементов матрицы $A = (a_{ij})$ и равномерного распределения компонент вектора $b(\omega)$. Доказана выпуклость области определения целевой функции для этого случая и разработан алгоритм решения задачи, который представляет собой модификацию градиентного метода.

Если случайные компоненты вектора $b(\omega)$ характеризуются функцией распределения $\psi_i(b_i)$, то параметр $\widetilde{b}_i$ выбирается как наибольшее решение неравенства $1 - \psi_i(\widetilde{b}_i) \ge \alpha_i$, а если $\psi_i(b_i)$ — непрерывная строго монотонная функция, последнее неравество эквивалентно уравнению $1 - \psi_i(\widetilde{b}_i) = \alpha_i$. В общем случае

$$\widetilde{b}_i = \psi_i^{-1}(1 - \alpha_i),\ \text{где}\ \psi_i^{-1}(f) = sup\{Y|\psi_i(Y) \le f\}. \tag{2.1.8}$$

Бен-Исраэль [22] рассмотрел задачу, двойственную к задаче с вероятностными ограничениями

$$Y\widetilde{b} \to \min, \tag{2.1.9}$$

$$P(yA \ge C) \ge \beta, \tag{2.1.10}$$

$$Y \ge 0, \tag{2.1.11}$$

где A — детерминированная матрица, а решение Y^* представляет собой детерминированный вектор. Если задана $G_j(f)$ — функция распределения случайной компоненты c_j и вектора $C(\omega)$ и если $G_j(f) = P(c_j(\omega) \leq f) = \beta_j$, то запись $f = G_j^{-1}(\beta_j)$ будем считать эквивалентной записи $f = \min\{Y | G_j(Y) \geq \beta_j\}$. Задача (2.1.9)-(2.1.11) примет вид

$$Y\widetilde{b} \to \min, \; YA \geq G^{-1}(\beta), \; Y \geq 0. \tag{2.1.12}$$

Задачи (2.1.1)-(2.1.3) и (2.1.12) представляют собой пару двойственных задач (при условии $\beta = G(\overline{C})$) стохастического программирования с вероятностными ограничениями

$$G^{-1}(\beta)X \to \max, \; P(AX \leq B) \geq \alpha, \; X \geq 0, \tag{2.1.13}$$

$$Y\psi^{-1}(1-\alpha) \to \min, \; P(YA \geq C) \geq \beta, \; Y \geq 0, \tag{2.1.14}$$

где $\alpha = \{\alpha_i\}, \; \beta = \{\beta_j\}, \; \psi^{-1} = \{\psi_i^{-1}\}, \; G^{-1} = \{G_j^{-1}\}$. К задачам (2.1.13), (2.1.14) применимы теоремы двойственности для анализа решений и оценки параметров задачи.

В работе [203] исследована задача (2.1.1)-(2.1.3), у которой элементы матрицы $A = (a_{ij})$ и компоненты вектора $b = (b_i)$ — независимые между собой нормально распределенные случайные величины. Пусть имеем

$$A = (a_{ij}) \in N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2),$$

$$b = (b_i) \in N(\eta_i, \theta_i^2),$$

$$\alpha_i \geq 0,5; \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда невязка i-го условия задачи — случайная величина

$$y_i(X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i,$$

также нормально распределена с характеристиками

$$\mu_i(X) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_j - \eta_i,$$

$$\sigma_i^2(X) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j + \theta_i^2,$$

$$y_i(X) \in N(\mu_i(X), \sigma_i^2(X)).$$

Соотношения (2.1.2) эквивалентны неравенствам $P\{y_i(X) \le 0\} \ge \alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$ или, что тоже самое

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i(X)} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(\nu-\mu_i(X))^2}{2\sigma_i^2(X)}} d\nu \ge \alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Обозначив $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{\nu^2}{2}} d\nu$, последнее неравенство перепишем в виде $\Phi\Big(-\frac{\mu_i(X)}{\sigma_i(X)}\Big) \ge \alpha_i$ или, что то же,

$$\mu_i(X) + \Phi^{-1}(\alpha_i)\sigma_i(X) \le 0.$$

Подставив выражения для $\mu_i(X)$ и $\sigma_i(X)$, получаем

$$\Phi^{-1}(\alpha_i)\Big(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2\Big)^{1/2} \le \Big(\eta_i - \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_j\Big).$$

Левая, а следовательно, и правая части неравенства неотрицательны, т.к. для $\alpha_i \ge 0,5$ имеем $\Phi^{-1}(\alpha_i) \ge 0$ и можем возвести в квадрат обе части неравенства. При этом получим задачу

$$\max Z = \max \overline{C} X, \tag{2.1.15}$$

$$\Phi^{-2}(\alpha_i)\Big(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2\Big) - \Big(\eta_i - \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_j\Big)^2 \le 0, \tag{2.1.16}$$

$$x_j \ge 0;\ i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}. \tag{2.1.17}$$

Следовательно, в этом случае задача (2.1.1)-(2.1.3) сводится к детерминированной задаче выпуклого программирования с линейной целевой функцией и квадратичными ограничениями.

Построим функцию Лагранжа для задачи (2.1.15)-(2.1.17):

$$L(X,\lambda) = Cx - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Big[\Phi^{-2}(\alpha_i) \Big(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j + \theta_i^2 \Big) - \Big(\eta_i - \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_j \Big)^2 \Big]. \tag{2.1.18}$$

Найдем седловую точку функции Лагранжа $L(X,\lambda)$

$$\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} = c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \Big[\Phi^{-2}(\alpha_i) \Big(2\sigma_{ij}^2 x_j^0 + 2\mu_{ij} \Big(\eta_i - \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_j^0 \Big) \Big] \le 0,$$

$$\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i} = -\Phi^{-2}(\alpha_i) \Big(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^0 \Big) + \Big(\eta_i - \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_j^0 \Big)^2 \ge 0,$$

$$x_j^0 \frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} = 0,\ \ \lambda_i^0 \frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,n}.$$

Частные производные функции Лагранжа $L(X,\lambda)$ по X дают n линейных неравенств, которые разрешимы при известном λ_i. Частные производные функции Лагранжа $L(X,\lambda)$ по λ дают m квадратичных неравенств, которые вместе с условиями Куна-Таккера могут быть использованы для исследования решения задачи.

Исходная задача (2.1.1)-(2.1.3) сводится к детерминированной задаче выпуклого программирования с линейной целевой функцией и квадратичными условиями-неравенствами и в том случае, когда случайные ограничения-строки коррелированы между собой. Имеем

$$v_{ij} = E\{(b_i - \eta_i)(a_{ij} - \mu_{ij})\};\ v_{ijk} = E\{(a_{ij} - \mu_{ij})(a_{ik} - \mu_{ik})\}.$$

Рассуждая, как и выше, получаем при $\alpha_i \ge 0,5$

$$\Big[\Phi^{-1}(\alpha_i) \Big] \Big(\sum_{j,k} v_{ijk} x_j x_k + 2 \sum_{j} v_{ij} x_j + \theta_i^2 \Big)^{1/2} \le \eta_i - \sum_{j} \mu_{ij} x_j;\ i = \overline{1,m}. \tag{2.1.19}$$

Область, ограниченная условиями (2.1.19), — выпукла, поскольку положительно определена форма $\sum\limits_{j,k} v_{ijk} x_j x_k$.

Таким образом, получаем задачу выпуклого программирования вида:

$$\max Z = \max \overline{C} X, \tag{2.1.20}$$

$$\left[\Phi^{-1}(\alpha_i)\right]\Big(\sum_{j,k} v_{ijk}x_jx_k+2\sum_j v_{ij}x_j+\theta_i^2\Big)^{1/2} \le \eta_i-\sum_j \mu_{ij}x_j, \tag{2.1.21}$$

$$x_j \ge 0;\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}. \tag{2.1.22}$$

2.2 Детерминированные эквиваленты Чарнса и Купера

Чарнс и Купер [74], [77], [81] ввели в систему условий задачи стохастического программирования с вероятностными ограничениями ещё дополнительное правило управления, которое в общем случае имеет вид $X = \Phi(A, B, C)$, т.е. искомое решение X является функцией от случайных параметров задачи. Такая постановка сводится к тому, что из заданного класса функций Φ нужно выбрать ту, для которой полученное значение удовлетворяет системе вероятностных ограничений и оптимизирует заданную целевую функцию.

Чарнс и Купер рассмотрели линейное правило управления в тех случаях, когда матрица A не содержит случайных параметров
$X = Db(\omega)$, где D — $(n \times m)$-мерная матрица.

В работе [81] показано, что искомая матрица D получается из решения задачи выпуклого программирования, которая эквивалентна стохастической задаче с вероятностными ограничениями и которая получила название детерминированного эквивалента исходной задачи, поскольку она не содержит случайных элементов.

E-**модель.** Задача имеет вид

$$E(C(\omega), X) \to \max, \tag{2.2.1}$$

$$P\{A(\omega)X \le b(\omega)\} \ge \alpha_i;\ 0 \le \alpha_i \le 1;\ i=\overline{1,m}, \tag{2.2.2}$$

$$X = Db(\omega), \tag{2.2.3}$$

$$X \geq 0. \tag{2.2.4}$$

В предположении, что компоненты векторов $C(\omega)$ и $b(\omega)$ не коррелированы между собой, можно задачу (2.2.1)-(2.2.4) заменить задачей

$$\max E(C(\omega), Db(\omega)) = \max \overline{C} D \overline{b} \tag{2.2.5}$$

при ограничениях

$$P\{ADb(\omega) \leq b(\omega)\} \geq \alpha_i. \tag{2.2.6}$$

Если вектор $b(\omega)$ распределен нормально, то и величина $a_i Db(\omega) - b_i(\omega)$ также имеет нормальное распределение.

Рассмотрим величины:

$$Z_i(\omega) = \frac{\widehat{b}_i(\omega) - a_{i\cdot} D\widehat{b}(\omega)}{\sqrt{E[b_i(\omega) - a_{i\cdot} Db(\omega)]^2}}; \ i = \overline{1, m}, \tag{2.2.7}$$

$$Z_i^0(\omega) = \frac{a_{i\cdot} D\overline{b} - \overline{b}_i}{\sqrt{E[\widehat{b}_i(\omega) - a_{i\cdot} D\widehat{b}(\omega)]^2}}; \ i = \overline{1, m}, \tag{2.2.8}$$

где $\widehat{b}(\omega) = b(\omega) - \overline{b}$ при условии $E[\widehat{b}_i(\omega) - a_{i\cdot} D\widehat{b}(\omega)]^2 > 0$.

Случайная величина $Z_i(\omega)$ подчиняется нормальному закону распределения $N(0, 1)$, тогда систему (2.2.6) можно переписать в виде:

$$P\{a_{i\cdot} Db(\omega) - b_i(\omega) \leq 0\} = P\{\widehat{b}_i(\omega) - a_{i\cdot} D\widehat{b}(\omega) \geq a_{i\cdot} D\overline{b} - \overline{b}_i\} =$$

$$= P\{Z_i(\omega) \geq Z_i^0\} = \Psi\Big(Z_i^0 \geq \alpha_i; \ Z_i^0 \leq \Psi^{-1}(\alpha_i) = -k_i; \ i = \overline{1, m}\Big),$$

где при $\alpha_i > 0,5; \ \Psi^{-1}(\alpha_i) < 0, \ k_i > 0$.

Если ввести дополнительные переменные v_i такие, что

$$\overline{b}_i - a_{i\cdot} D\overline{b} \geq v_i \geq k_i \sqrt{E[(\widehat{b}_i(\omega) - a_{i\cdot} D\widehat{b}(\omega))]^2} > 0$$

систему ограничений (2.2.6) можно заменить эквивалентной системой

$$\begin{cases} a_{i\cdot}D\overline{b} - v_i \geq -\overline{b}_i \\ -k_i^2 E[\widehat{b}_i(\omega) - a_{i\cdot}D\widehat{b}(\omega)]^2 + v_i^2 \geq 0 \\ v_i \geq 0 \end{cases} \tag{2.2.9}$$

Окончательно получим, что детерминированным эквивалентом E-модели будет задача

$$\max \overline{C}D\overline{b}, \tag{2.2.10}$$

$$\mu_i(D) - v_i \geq 0, \tag{2.2.11}$$

$$k_i^2[\mu_i(D) - \sigma_i^2(D)] + v_i^2 \geq 0, \ i = \overline{1, m}, \tag{2.2.12}$$

$$v_i \geq 0, \tag{2.2.13}$$

где $\mu_i(D) = \overline{b}_i - a_{i\cdot}D\overline{b}$; $\sigma_i^2(D) = E[b_i(\omega) - a_{i\cdot}Db(\omega)]^2$.

Можно показать, что условия (2.2.6) определяют в пространстве переменных выпуклое множество. Отсюда следует, что детерминированный эквивалент E-модели является задачей выпуклого программирования.

V-**модель.** Под V-моделью будем понимать задачу

$$\min E(C(\omega)X - C^0X^0)^2 \tag{2.2.14}$$

при условиях

$$P\{a_{i\cdot}(\omega)X \leq b_i(\omega)\} \geq \alpha_i; \ 0 \leq \alpha_i \leq 1, \ i = \overline{1, m}, \tag{2.2.15}$$

$$X = Db(\omega). \tag{2.2.16}$$

Поскольку система ограничений не отличается от случая E-модели, в качестве детерминированного эквивалента будем иметь задачу

$$\min E(C(\omega)Db(\omega) - C^0X^0)^2 \tag{2.2.17}$$

при ограничениях (2.2.9).

Можно показать, что и в этом случае имеем задачу выпуклого программирования.

P-**модель.** Эта модель отличается от предыдущих тем, что здесь целевая функция также сведена к вероятностному виду

$$\max P\{C(\omega)X \geq C^0X^0\}, \tag{2.2.18}$$

$$P\{a_{i\cdot}(\omega)X \leq b_i(\omega)\} \geq \alpha_i;\ 0 \leq \alpha_i \leq 1,\ i = \overline{1,m}, \tag{2.2.19}$$

$$X = Db(\omega). \tag{2.2.20}$$

Введя обозначения

$$u(\omega) = \frac{C(\omega)Db(\omega) - \overline{C}D\overline{b}}{\sqrt{E[C(\omega)Db(\omega) - \overline{C}D\overline{b}]^2}};$$

$$u_0 = \frac{C^0X^0 - \overline{C}D\overline{b}}{\sqrt{E[C(\omega)Db(\omega) - \overline{C}D\overline{b}]^2}}$$

и предполагая, что $u(\omega)$ распределено нормально $N(0,1)$, целевую функцию приводим к виду

$$P\{C(\omega)X \geq C^0X^0\} = P\{u(\omega) \geq u^0\} = \Phi(u^0),$$

где

$$\Phi(u^0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{u^0} e^{-y^2/2} dy;$$

задача сводится к максимизации функции $\Phi(u^0)$. Введем переменные

$$w^{0^2} \geq E[C(\omega)Db(\omega) - \overline{C}D\overline{b}]^2;\ w^0 \geq 0, \tag{2.2.21}$$

$$Z^0 \leq \overline{C}D\overline{b} - C^0X^0. \tag{2.2.22}$$

Детерминированным эквивалентом P-модели будет задача максимизации Z^0/w^0 при ограничениях (2.2.9).

Интерес представляют только те задачи, для которых $w^0 > 0$. Для того, чтобы освободиться от дробно-линейной целевой функции, введем переменную $t = 1/w^0$ и обозначим

$$\widetilde{D} = tD,\ \widetilde{Z}_i = tZ_i,\ \widetilde{V}(D) = E(C(\omega)\widetilde{D}b(\omega) - tC^0X^0)^2,$$

$$\widetilde{\sigma}_i(\widetilde{D}) = E[tb_i(\omega) - a_{i\cdot}\widetilde{D}b]^2;\ \widetilde{\mu}_i(\widetilde{D}) = E(tb_i(\omega) - a_{i\cdot}\widetilde{D}b).$$

В новых переменных

$$\widetilde{d}_{ij},\ \widetilde{Z} = tZ_i,\ \widetilde{Z}^0 = tZ^0;\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$$

задача (2.2.18) - (2.2.20) записывается как следующая детерминированная задача выпуклого программирования:

$$\widetilde{Z}^0 \to \max,$$

$$\overline{C}\widetilde{D}\overline{b} - \widetilde{Z}^0 \geq tC^0X^0,$$

$$-\widetilde{V}(\widetilde{D}) + 1 \geq 0,$$

$$\widetilde{\mu}_i(\widetilde{D}) - \widetilde{Z}_i \geq 0,$$

$$-k_i^2[\widetilde{\sigma}_i^2(\widetilde{D}) - \widetilde{\mu}_i^2(\widetilde{D})] + \widetilde{Z}_i^2 \geq 0,$$

$$t \geq 0,\ \widetilde{Z}_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}.$$

2.3 Детерминированные эквиваленты задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями

Во втором разделе настоящей главы приведены детерминированные эквиваленты для нескольких моделей. Рассмотрим еще ряд частных моделей, имеющих важное прикладное значение, и выясним, что собою представляют детерминированные эквиваленты этих задач стохастического программирования.

В работе [224] рассмотрена задача вида

$$\max f, \tag{2.3.1}$$

$$P\{C(\omega)X \leq f\} = \beta, \tag{2.3.2}$$

$$P\{a_{i\cdot}X \leq b_i(\omega)\} \geq \alpha_i;\ i = \overline{1,m}, \tag{2.3.3}$$

$$X \geq 0,\ \omega \in \Omega. \tag{2.3.4}$$

Под планом задачи (2.3.1)-(2.3.4) понимается такой неотрицательный вектор

$$X \in S_\alpha,\ S_\alpha = \Big\{X:\ P\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i(\omega)\Big) \geq \alpha_i,\ i = \overline{1,m},\ X \geq 0\Big\},$$

для которого верхняя граница f интервала $(-\infty, f)$, в который значение линейного функционала попадает с вероятностью β, была бы максимальной. При некоторых допущениях задача (2.3.1)-(2.3.4) может быть сведена к детерминированной задаче выпуклого программирования.

Допущение 2.3.1. *Случайная величина $b_i(\omega)$ имеет нормальное распределение со средним значением $\overline{b}_i$ и дисперсией $\sigma^2_{b_i}$, т.е.*

$$b_i \in N(\overline{b}_i, \sigma^2_{b_i}).$$

В этом предположении условия (2.3.3) могут быть преобразованы:

$$P\Big\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i(\omega)\Big\} = P\left\{\left(\frac{b_i - \overline{b}_i}{\sigma_{b_i}}\right) \geq \left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \overline{b}_i}{\sigma_{b_i}}\right)\right\},$$

где $(b_i - \overline{b}_i)/\sigma_{b_i}$ — нормальная случайная величина со средним значением 0 и дисперсией 1. $\Phi(X)$ — функция распределения случайной величины $N(0,1)$:

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy.$$

Введем функцию $\varphi(x) = 1 - \Phi$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^\infty e^{-y^2/2} dy.$$

Условие (2.3.3) заменяется

$$\varphi\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j - \overline{b}_i}{\sigma_{b_i}}\right) \geq \alpha_i; \; i = \overline{1,m},$$

или иначе

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j - \overline{b}_i}{\sigma_{b_i}} \leq \varphi^{-1}(\alpha_i), \; i = \overline{1,m}.$$

Обычно имеем $\alpha_i \geq 0,5$; тогда $\varphi^{-1}(\alpha_i) \leq 0$, и положим, что $\varphi^{-1}(\alpha_i) = -q_i$. Однако $\alpha_i \geq 0,5$ не является необходимым условием в этом случае. Условие (2.3.3) можно переписать в виде
$a_{i\cdot}X \leq \overline{b}_i - q_i\sigma_{b_i}$, т.е. $a_{i\cdot}X \leq b_i^* = \overline{b}_i - q_i\sigma_{b_i}$ или более компактно, $AX \leq b^*$, где $b^* = (b_1^*, \ldots, b_m^*)$.

Теперь определим значения $\overline{c}_j$ и значения дисперсии матрицы v, таких, что

$$V_{ij} = E(c_i - \overline{c}_i)(c_j - \overline{c}_j), \tag{2.3.5}$$

где $V = V_{ij}$ — матрица ковариаций. Тогда дисперсия величины $\sum\limits_{j=1}^n c_jx_j$ вычисляется следующим образом

$$V\left(\sum_{j=1}^n c_jx_j\right) = E\left[\sum_{j=1}^n (c_j - \overline{c}_j)x_j\right]^2 = \sum_{i,j} E(c_i - \overline{c}_i)(c_j - \overline{c}_j)x_ix_j =$$

$$= \sum_{i,j} V_{ij}x_ix_j = X^TVX.$$

Допущение 2.3.2. *Вектор $C(\omega)$ имеет нормальное рапределение со средним $\overline{C}$ и матрицей ковариаций V. Тогда величина*

$C(\omega)X$ имеет нормальное распределение со средним $\overline{C}X$ и дисперсией X^TVX.

Следовательно,

$$P(C(\omega)X \leq f) = P\left(\frac{CX - \overline{C}X}{\sqrt{X^TVX}} \leq \frac{f - \overline{C}X}{\sqrt{X^TVX}}\right) = J\left(\frac{f - \overline{C}X}{\sqrt{X^TVX}}\right),$$

где

$$J(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2},$$

и из условия $P(CX \leq f) = \beta$ имеем

$$f(x) = \overline{C}X + J^{-1}(\beta)\sqrt{X^TVX}. \qquad (2.3.6)$$

Поскольку $\sqrt{X^TVX}$ — выпуклая функция и если $\beta = 0,5$ или $J^{-1}(\beta) \leq 0$, то функция, определенная в соотношении (2.3.6), является вогнутой, поэтому можно сделать следующее допущение.

Допущение 2.3.3. $\beta \leq 0,5$ *Итак, имеем задачу максимизации*

$$\max f = \overline{C}X - q\sqrt{X^TVX}, \qquad (2.3.7)$$

$$AX \leq b^*, \qquad (2.3.8)$$

$$X \geq 0, \qquad (2.3.9)$$

где $b_i^* = \overline{b}_i - q_i\sigma_{b_i}$; $q_i = -J^{-1}(\beta) \geq 0$; $q_i = -\varphi^{-1}(\alpha_i)$.

Допущение 2.3.4. *Задача (2.3.7)-(2.3.9) имеет ограниченное оптимальное решение.*

Поскольку целевая функция в задаче (2.3.7)-(2.3.9) вогнутая и её ограничения линейны, то здесь должен существовать только один максимум который удовлетворяет следующим условиям Куна-Таккера. Пусть $F(X,U)$ — функция Лагранжа $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и $U = (u_1, \ldots, u_m)$ — неотрицательные векторы, имеем

$$F(X,U) = \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j - q\sqrt{\sum_{i,j} V_{ij} x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i \left(b_i^* - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right).$$

Если $\widehat{X} = (\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$ и $\widehat{U} = (\widehat{u}_1, \ldots, \widehat{u}_n)$ удовлетворяют следующим условиям

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_j}\right|_{\widehat{X},\widehat{U}} = c_j - \frac{q\sum\limits_i V_{ij}\widehat{x}_i}{\sqrt{\sum\limits_{i,j} V_{ij}\widehat{x}_i\widehat{x}_j}} - \sum_i a_{ij}\widehat{u}_i \begin{cases} = 0, \widehat{x}_j > 0, \\ \leq 0, \widehat{x}_j = 0; \end{cases} \tag{2.3.10}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial u_j}\right|_{\widehat{X}} = b_i^* - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widehat{x}_j \begin{cases} = 0, \widehat{u}_i > 0, \\ \geq 0, \widehat{u}_i = 0, \end{cases} \tag{2.3.11}$$

то можно считать, что $\widehat{X}$ — оптимальное решение задачи (2.3.7)-(2.3.9).

Эффективность использования детерминированных эквивалентов для анализа задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями определяется в зависимости от того, будут ли они эквивалентны задачами линейного или выпуклого программирования. В работе [290] исследуются некоторые классы линейных стохастических задач с вероятностными ограничениями, для которых детерминированные эквиваленты представляют собой задачи выпуклого программирования и к ним применимы эффективные методы решения.

Пусть необходимо найти детерминированные векторы X и $Y(X)$ (или X и $\widetilde{b}$), которые удовлетворяют

$$\max \overline{C}X,$$

$$\Phi_X(Y(X)) = \Phi_X(AX - \widetilde{b}) = \alpha,$$

$$Y(X) = AX - \widetilde{b} \leq 0,\ X \geq 0,$$

где $\Phi_X(AX - \widetilde{b}) = P\{AX - b < AX - \widetilde{b}\} = P\{b > \widetilde{b}\}$. Если составляющие b_i вектора b — независимые случайные величины, имеем

$$P\{b \geq \widetilde{b}\} = \prod_{i=1}^{m} P\{b_i \geq \widetilde{b}_i\} = \prod_{i=1}^{m}[1 - P(b_i < \widetilde{b}_i)] = \prod_{i=1}^{m}[1 - \Phi_{b_i}(\widetilde{b}_i)],$$

где $\Phi_{b_i}(\widetilde{b}_i)$ — функция распределения компоненты b_i вектора b. Детерминированный эквивалент задачи имеет вид

$$\max \overline{C}X \tag{2.3.12}$$

при условиях

$$AX \le \widetilde{b}, \tag{2.3.13}$$

$$\prod_{i=1}^{m}[1-\Phi_{b_i}(\widetilde{b}_i)] \ge \alpha, \tag{2.3.14}$$

$$X \ge 0. \tag{2.3.15}$$

В тех случаях, когда плотность распределения составляющих b_i вектора ограничений соответствует нормальному закону, определяется распределением Вейбулла, равномерным распределением или гамма-распределением, задача (2.3.12)-(2.3.15) представляет собой задачу выпуклого программирования. Таким образом, это имеет место, когда плотности распределения составляющих b_i вектора ограничений определяются одной из следующих функций (в соответствии с порядком, приведенным выше)

а) $\Psi_i(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{(x_i-\mu_i)^2/(2\sigma_i)^2}$;

б) $\Psi_i(x_i) = \begin{cases} \lambda_i\zeta_i(x_i-\beta_i)^{\zeta_i-1}e^{-\lambda_i(x_i-\beta_i)\zeta_i}, \ x_i \ge \beta_i, \ \zeta_i \ge 1, \ \lambda_i \ge 0; \\ 0, \ x_i < \beta_i; \end{cases}$

в) $\Psi_i(x_i) = \begin{cases} \frac{n_i}{\overline{a}_i-\underline{a}_i}\left(\frac{x_i-\underline{a}_i}{\overline{a}_i-\underline{a}_i}\right)^{n_i-1}, \ x_i \in [\underline{a}, \overline{a}]; \\ 0, \ x_i \notin [\underline{a}, \overline{a}]; \end{cases}$

г) $\Psi_i(x_i) = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\Gamma(\zeta_i)}(\lambda_i x_i)^{\zeta_i-1}e^{-\lambda_i x_i}, \ x_i \ge 0, \ \zeta_i \ge 1, \ \lambda_i \ge 0; \\ 0, \ x_i < 0. \end{cases}$

Однако левые части в неравенстве (2.3.14) не являются выпуклыми вверх функциями. Следуя [290], можно заменить условия (2.3.14) эквивалентными неравенствами $\sum\limits_{i=1}^{m} \ln[1-\Phi_{b_i}(\widetilde{b}_i)] \ge \ln\alpha$, что для всех перечисленных распределений позволяет перейти к эквивалентным детерминированным задачам, у которых левые части ограничений — линейные или выпуклые вверх функции.

В стохастических задачах программирования с вероятностными ограничениями предполагается известным заранее уровень вероятности выполнения условий задачи. Однако в практических задачах не всегда имеется достаточно информации, чтобы определить априори уровень вероятности выполнения ограничений задачи. В этой связи представляет интерес модель, исследованная в работах [203], [450], [451].

Рассмотрим задачу стохастического программирования с вероятностными ограничениями вида

$$\inf h(X), \tag{2.3.16}$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right\} \ge \beta_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{2.3.17}$$

$$X \in H, \tag{2.3.18}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n)$ — случайный вектор-план, компоненты которого случайные величины x_j независимы и нормально распределены;

b_i — произвольная случайная величина с функцией распределения $F_i(t)$;

$A = \{a_{ij}\}$ — фиксированная матрица размерности $m \times n$;

β_i — фиксированное число, $\frac{1}{2} < \beta_i < 1,\ i = \overline{1,m}$;

$h(X)$ — некоторый функционал, определенный на пространстве X указанных случайных векторов;

H — подмножество X, которому в пространстве (m_j, σ_j) соответствует множество $\overline{H}$.

В соответствии с теорией центральной предельной теоремы функция распределения нормированной соответствующим образом суммы $\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k - a_n}{b_n}\right)$ случайных величин ξ_k сходится при некоторых условиях к нормальной функции распределения

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{-z^2/2}dz.$$

Точнее, если, например, $|\xi_k| \le C < \infty,\ D\xi_k \ge \alpha > 0$, то

$$P\left\{\frac{\sum\limits_k(\xi_k - E\xi_k)}{\sqrt{\sum\limits_k D\xi_k}} < t\right\} \to \Phi(t) \qquad (2.3.19)$$

равномерно по t при $n \to \infty$.

Естественно предположить, что компоненты вектор-плана X являются случайной величиной, полностью определяемой двумя параметрами и независимой от других компонент. Пусть этими параметрами будут математические ожидания m_j и дисперсии σ_j^2, тогда вероятность $P\left\{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i\right\}$ является функцией лишь m_j, σ_j причем, в силу сказанного выше, приблизительно равной

$$\int \Phi\left(\frac{t-\mu_i}{S_i}\right)dF_i(t),$$

где $\mu_i = \sum\limits_j a_{ij}m_j;\ S_i^2 = \sum\limits_j a_{ij}^2\sigma_j^2.$

Таким образом, при достаточно произвольных компонентах вектор-плана подсчет вероятности в задаче (2.3.16)-(2.3.18) приводит при больших n примерно к тому же результату, что и в случае нормально распределенных компонент.

Получим в новых обозначениях детерминированный эквивалент задачи (2.3.16)-(2.3.18), имеем

$$\inf \overline{h}(m_j, \sigma_j), \qquad (2.3.20)$$

$$\int \Phi\left(\frac{t-\mu_i}{S_i}\right) dF_i(t) \geq \beta_i;\ i=\overline{1,m}, \qquad (2.3.21)$$

$$(m,\sigma) \in \overline{H}, \qquad (2.3.22)$$

где $h(m_j,\sigma_j)$ — некоторая функция $2n$-переменных $(m,\sigma)=(m_1,\dots,m_n;\sigma_1,\dots,\sigma_n)$.

Дальнейшие исследования, проведенные в работах [450], [451], [452] показывают, что в рассмотренной модели погрешности в определении уровня вероятности выполнения ограничений сказываются незначительно, если «управлять» математическим ожиданием и дисперсией случайной величины. Частным случаем задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями является ситуация, когда в условиях задачи все уровни вероятностей $\alpha_i = 1$ $(i=1,2,\dots,m)$. Это означает, что допустимый вектор X должен удовлетворять всем ограничениям при любой реализации случайных параметров. Такой вектор называется перманентным планом задачи, а соответствующая постановка стохастической задачи называется жесткой. Рассмотрим жесткую постановку задачи стохастического линейного программирования с вероятностными ограничениями.

Введем обозначения

$$\widehat{S} = \bigcap_{\omega\in\Omega} S(\omega);\ S(\omega) = \{X:\ A(\omega)X \leq b(\omega),\ X \geq 0\}.$$

Тогда задача минимизации функционала CX при ограничениях $P\{A(\omega)X \leq b(\omega)\} = 1,\ X \geq 0$ эквивалентна задаче

$$\min_{X\in\widehat{S}} \overline{C}X.$$

В некоторых случаях выпуклый многогранник $\widehat{S}$ можно описать системой линейных неравенств. Если число реализаций ω конечно, то $\widehat{S}$ определяется системой неравенств $X \geq 0$; $A(\omega_r)X \leq b(\omega_r)$, $r = 1, 2, \ldots, R$, где R — число возможных реализаций. Решение такой задачи из-за увеличения числа ограничений связано с большими вычислительными трудностями.

Если только вектор $b(\omega)$ случаен, детерминированную эквивалентную задачу получим следующим образом: пусть $\widetilde{b}$ — вектор, i-я координата $(\widetilde{b}_i)$ которого определяется из соотношения $\widetilde{b}_i = \inf\{b_i(\omega)\}$, тогда множество $\widehat{S} = \{X : \ AX \leq \widetilde{b}, \ X \geq 0\}$ является подмножеством множества S_α.

Обычно для задач в жесткой постановке в качестве реализации берут математическое ожидание случайных параметров. Для того, чтобы установить перманентность решения по средним $\overline{X}^*$, используется эквивалентность задачи линейного программирования и матричной игры двух лиц с нулевой суммой. Если имеется игра с матрицей выигрышей

$$M = \left| \begin{array}{ccc} 0 & A & -b \\ -A^T & 0 & C \\ b^T & -C^T & 0 \end{array} \right|_{(m+n+1)\times(m+n+1)}$$

и найдена такая оптимальная смешанная стратегия (Y_0, X_0, t), что $t > 0$, то $X^* = \frac{X_0}{t}$ и $Y^* = \frac{Y_0}{t}$ — решение пары двойственных задач линейного программирования.

Пусть EM — матрица той игры, которая соответствует задаче по средним и пусть $Z = (Y, X, t)$ — такое решение этой игры, что $t > 0$. Тогда решение по средним $\overline{X}^*$ получается из соотношения

$$\overline{X}^* = \frac{\widehat{X}}{\widehat{t}}.$$

Для перманентности $\overline{X}^*$ необходимо и достаточно выполнение неравенства $A(\omega)\overline{X}^* \leq b(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$, что равносильно неравенству $A(\omega)\widehat{X} - b(\omega)\widehat{t} \le 0$. В работе [275] показана вычислительная процедура для проверки последнего условия при любом $\omega \in \Omega$.

Пусть $g(M) = MZ$. Первые m компонент вектора $g(M)$ имеют вид $g_i(M) = a_{i\cdot}(\omega)\widehat{X} - b_i(\omega)\widehat{t},\ i = \overline{1,m}$. Предположим, что множество Ω_i реализаций $\omega(a_{i\cdot}(\omega), b_i(\omega))$ для каждого i образует выпуклый многогранник. Если решить m задач вида $\max_{\omega\in\Omega_i} g_i(M) = \widehat{g}_i$, то достаточным условием перманентности $\overline{X}^*$ будет $\max \widehat{g}_i \le 0$.

Во всех рассмотренных выше частных моделях стохастического программирования с вероятностными ограничениями имели место условия, позволившие построить детерминированный эквивалент задачи. Ниже приводится общий прием построения детерминированного эквивалента для широкого класса задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями. Пусть имеем следующие формы записи вероятностных условий задачи в общем случае:

1) $P\{f_i(X) \le 0\} \ge \alpha_i,\ i = \overline{1,m}$,

2) $P\{f(X) \le 0\} \ge \alpha$,

3) $P\{f_{i_k}(X) \le 0,\ i_k \subset I_k\} \ge \alpha_{i_k},\ k = 1,\ldots,S$;
$\bigcup\limits_k I_k = \{1,\ldots,m\}$.

В форме записи 1) допускается зависимость только между случайными параметрами, принадлежащими одной и той же строке; в форме 2) все случайные параметры могут быть зависимы; в форме записи 3) случайные параметры, отвечающие функциям f_{i_k} для разных k, независимы между собой.

Пусть $F_{i_k}(t)$ — безусловная функция распределения случайной величины $f_i(X)$ для заданного X, а $F_X(t_1,\ldots,t_m)$ — совместная функция распределения системы случайных величин $f_i(X)$ — компонент вектора $f(X)$ при заданном X:

$$F_{i_X}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{t} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} dF_X(f_1, \dots, f_i, \dots, f_m).$$

Пусть $g(X) = \{g_1(X), \dots, g_m(X)\}$ — детерминированный вектор, область изменения составляющих которого для каждого X ограничивается диапазоном изменения соответствующей случайной величины $f_i(X)$:

$$g_i(X) \in \{\inf_{\omega} f_i(X), \sup_{\omega} f_i(X)\}.$$

Имеем для каждого $0 \leq F_{i_X}(g(X)) = P\{f_i(X) \leq g_i(X)\} \leq 1$,

$$F_X(g(X)) = P\{f_1(X) \leq g_1(X), \dots, f_m(X) \leq g_m(X)\} = P\{f(X) \leq g(X)\}.$$

Сформулируем во введенных понятиях детерминированные задачи математического программирования, решения которых совпадают с решениями соответствующих стохастических задач с вероятностными ограничениями. Такие задачи принято называть детерминированными эквивалентами стохастических задач программирования.

Рассмотрим задачу стохастического программирования с вероятностными ограничениями в форме 1)

$$\max f_0(X), \tag{2.3.23}$$

$$P\{f_i(X) \leq 0\} \geq \alpha_i, \ i = \overline{1, m}. \tag{2.3.24}$$

Детерминированным эквивалентом задачи (2.3.23)-(2.3.24) будет задача

$$\max f_0(X), \tag{2.3.25}$$

$$F_{i_X}(g_i(X)) = \alpha_i, \ i = \overline{1, m}, \tag{2.3.26}$$

$$g_i(X) \leq 0, \ i = \overline{1, m}, \tag{2.3.27}$$

в которой требуется определить векторы (детерминированные) X и $g(X) = \{g_1(X), \ldots, g_m(X)\}$. В том случае, когда имеем непрерывную функцию распределения, детерминированный эквивалент задачи (2.3.23)-(2.3.24) имеет вид

$$\max f_0(X), \tag{2.3.28}$$

$$F_{i_X}^{-1}(\alpha_i) \leq 0, \ i = \overline{1, m}. \tag{2.3.29}$$

Рассмотрим задачу стохастического программирования с вероятностными ограничениями в форме 2)

$$\max f_0(X), \tag{2.3.30}$$

$$P\{f(X) \leq 0\} \geq \alpha. \tag{2.3.31}$$

В соответствии с нижеприведенным утверждением детерминированным эквивалентом задачи (2.3.30)-(2.3.31) является следующая задача

$$\max f_0(X), \tag{2.3.32}$$

$$F_X(g(X)) = \alpha, \tag{2.3.33}$$

$$g(X) \leq 0, \tag{2.3.34}$$

в которой требуется вычислить детерминированные векторы X и $g(X)$.

Теорема 2.3.1. [385] *Если совместная функция распределения $F(X)$ компонент случайного вектора $f(X) = \{f_1(X), \ldots, f_m(X)\}$ непрерывна при каждом X, то задача (2.3.32)-(2.3.34) является детерминированным эквивалентом стохастической задачи (2.3.30)-(2.3.31).*

`Доказательство.` Если доказать, что обе задачи имеют одну и ту же область определения, теорема будет доказана, поскольку целевые функции обеих задач совпадают.

Пусть $g(\widetilde{X})$ удовлетворяет условиям задачи (2.3.32)-(2.3.34), тогда

$$P\{f(\widetilde{X}) \le g(\widetilde{X})\} = \alpha,\ P\{f(\widetilde{X}) \le 0\} \ge \alpha,$$

т.е. $\widetilde{X}$ удовлетворяет условиям стохастической задачи (2.3.30)-(2.3.31).

Пусть теперь $\widetilde{X}$ — план задачи (2.3.30)-(2.3.31), имеем

$$P\{f(\widetilde{X}) \le 0\} \ge \alpha.$$

Разделим для каждого X номера составляющих вектора $f(X)$ на три множества: $I_X^{(1)}, I_X^{(2)}, I_X^{(3)}$, где $i \in I_X^{(1)}$, если $f_i(X)$ — детерминированная величина; $i \in I_X^{(2)}$, если $f_i(X)$ — случайная величина с отрицательной верхней границей, $f_i(X) \le \overline{f}_i(X) < 0$; наконец, $i \in I_X^{(3)}$, если $f_i(X)$ — случайная величина, для которой $P\{f_i(X) \ge 0\} \ge 0$.

План задачи (2.3.30)-(2.3.31) определяет детерминированный вектор

$$g(\widehat{X}) = \begin{cases} f_i(\widehat{X}),\ i \in I_{\widehat{X}}^{(1)} \\ \overline{f}_i(\widehat{X}),\ i \in I_{\widehat{X}}^{(2)} \\ 0,\ i \in I_{\widehat{X}}^{(3)} \end{cases}$$

Имеем

$$P\{f(\widehat{X}) \le 0\} = P\{f(\widehat{X}) \le g(\widehat{X})\} \ge \alpha.$$

Тогда векторы $\widehat{X}$ и $\widehat{g}(\widehat{X})$ удовлетворяют условиям задачи (2.3.32)-(2.3.34).

`Теорема доказана.`

Для решения прикладных задач эффективно можно применять вычислительные алгоритмы и машинные программы в тех случаях, когда детерминированные эквиваленты стохастических задач представляют собой задачи линейного и выпуклого программирования. Поэтому представляет интерес работа [432], в которой выделены случаи, гарантирующие выпуклость целевой функции и области определения детерминированной задачи, эквивалентной той или иной стохастической модели.

Для решения выпуклых задач стохастического программирования (вычисления апостериорных решающих правил) может быть использован любой численный метод выпуклого программирования в гильбертовом пространстве. Эффективным методом решения задач математического программирования в функциональных пространствах является метод возможных направлений, обобщенный и обоснованный в работе [460] для бесконечномерных выпуклых задач. Кроме того, для решения задач стохастического программирования могут быть, в частности, использованы методы, исследованные в работах [322], [326].

2.4 Примеры прикладных задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями

В практических задачах планирования, управления и проектирования приходится, как правило, принимать решения в условиях недостатка информации об исходных данных. Стохастические модели принятия решений в сложных ситуациях, как правило, оказываются более адекватны реальным явлениям и процессам, чем детерминированные постановки задач. При постановке стохастической задачи в качестве целевого функционала и области его определения чаще других используются такие стастистические характеристики моделируемого явления, как математическое ожидание, дисперсия, вероятность попадания в некоторую случайную область. При этом вероятность попадания может быть безусловной или условной.

Ниже приводятся примеры прикладных задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями. Рассмотрим задачу планирования добычи угля в условиях, когда исходные данные частично не могут быть предсказаны заранее, следуя работе [155].

Пусть имеется несколько шахт, добывающих уголь. Требуется для i-й шахты ($i = 1, 2, \ldots, m$) разработать несколько вариантов развития ($j = 1, 2, \ldots, n_i$) и установить наиболее рациональные, с точки зрения всего объединения, варианты развития каждой шахты.

Пусть x_{ij} равен единице, если для i-й шахты принимается к реализации j-й вариант развития, и нулю — в противном случае.

Реализован может быть для каждой шахты только один вариант развития, отсюда

$$\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Введем следующие обозначения:

$c_{ij}(\omega)$ — годовые затраты на добычу угля в i-й шахте по j-му варианту при реализации ω случайных параметров условий, определяемых природными факторами;

$d_{ij}(\omega)$ — годовой объем добычи угля в i-й шахте по j-му варианту при реализации ω случайных природных факторов;

$s_{ij}(\omega)$ — зольность угля i-й шахты, работающей по j-му варианту при реализации ω случайных условий задачи;

$k_{ij}(\omega)$ — годовой фонд заработной платы i-й шахты, функционирующей согласно j-му варианту развития при реализации ω случайных природных факторов;

d — требуемая в соответствии с планом более высокого уровня (или определяемая спросом) годовая добыча угля по объединению в целом;

s — допустимая по объединению зольность угля;

k — общий годовой фонд заработной платы по объединению;

$\alpha_d,\ \alpha_s,\ \alpha_k$ — заданные вышестоящей организацией вероятности соблюдения ограничений по обеспечению спроса, по зольности угля и по фонду заработной платы.

В соответствии с введенными обозначениями и терминами модель планирования добычи угля на уровне горнодобывающего объединения может быть представлена в виде

$$E\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}(\omega)x_{ij}\right\} \to \min, \tag{2.4.1}$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} d_{ij}(\omega)x_{ij} \geq d\right\} \geq \alpha_d, \tag{2.4.2}$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} s_{ij}(\omega)x_{ij} \leq s\right\} \geq \alpha_s, \tag{2.4.3}$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} k_{ij}(\omega)x_{ij} \leq k\right\} \geq \alpha_k, \tag{2.4.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.4.5}$$

$$x_{ij} = \{0, 1\},\ j = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, m. \tag{2.4.6}$$

Решение данной задачи представляет собой случайный вектор-план добычи угля в последующий период, причем фактические реализации природных факторов учитываются при планировании развития горно-добывающего объединения в будующем.

Предположим, что параметры d_{ij}, s_{ij}, k_{ij} независимые между собой нормально распределенные случайные величины и пусть $\overline{c}_{ij}, \overline{d}_{ij}$, $\overline{s}_{ij}, \overline{k}_{ij}, \sigma^2(c_{ij}), \sigma^2(d_{ij}), \sigma^2(s_{ij}), \sigma^2(k_{ij})$ — математические ожидания и дисперсии случайных параметров задачи соответственно. Детерминированный эквивалент задачи (2.4.1) - (2.4.6) имеет вид:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \overline{c}_{ij} x_{ij}, \tag{2.4.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \overline{d}_{ij} x_{ij} + \Phi^{-1}(1-\alpha_d) \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \sigma^2(d_{ij}) x_{ij}^2} \geq d, \tag{2.4.8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \overline{s}_{ij} x_{ij} + \Phi^{-1}(1-\alpha_s) \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \sigma^2(s_{ij}) x_{ij}^2} \geq s, \tag{2.4.9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \overline{k}_{ij} x_{ij} + \Phi^{-1}(1-\alpha_k) \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \sigma^2(k_{ij}) x_{ij}^2} \geq k, \tag{2.4.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = 1, \; i = \overline{1, m}, \tag{2.4.11}$$

$$x_{ij} = \{0, 1\}, \; j = \overline{1, n_i}; \; i = \overline{1, m}. \tag{2.4.12}$$

Приведенная постановка задачи планирования угледобычи со случайными данными простейшая; модель можно усложнить, если, например, допустить, что случайные параметры условий задачи коррелированы между собой. Естественно данную задачу рассматривать как динамическую, когда планирование развития и фактическая реализация природных факторов осуществляются по периодам (этапам).

В качестве ещё одного примера приведем модель планирования сельскохозяйственного производства, представляющую собой задачу стохастического линейного программирования с вероятностными ограничениями [111].

Введем следующие обозначения:

m — число сельскохозяйственных культур ($1 \leq i \leq m$);

n_i — число сортов культур;

p — число типов почвы, на которых планируется сельскохозяйственное производство ($1 \le k \le p$);

s_k — наличная площадь земли типа k;

R_i — запланированный объем продукции культуры i-го вида;

$1 - \alpha_i$ — допустимый риск для невыполнения плана по производству культуры i;

η_{ijk} — урожайность сорта j культуры вида i на почве типа k;

c_{ijk} — издержки на обработку единицы площади типа k для посева сорта j культуры вида i;

$1 - \beta$ — допустимый риск, при котором фактические издержки могут превзойти запланированные;

x_{ijk} — площадь, занятая сортом j культуры вида i на земле типа k.

Во введенных обозначениях задача планирования, сельскохозяйственного производства имеет вид

$$y \to \min, \tag{2.4.13}$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{p} c_{ijk}x_{ijk} \le y\right\} = \beta, \tag{2.4.14}$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{n} \eta_{ijk}x_{ijk} \ge R_i\right\} \ge \alpha_i;\ (1 \le i \le m), \tag{2.4.15}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ijk} = s_k,\ (1 \le k \le p), \tag{2.4.16}$$

$$x_{ijk} \ge 0;\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n_i};\ k = \overline{1,p}. \tag{2.4.17}$$

Среди приложений математических методов планирования и управления в условиях неполной информации используются условные экстремальные задачи, содержащие как вероятностные, так и статистические и жесткие ограничения. Детерминированные эквиваленты задач со случайными параметрами, например, моделей с вероятностными ограничениями представляют собой, вообще говоря, задачи нелинейного, а иногда и невыпуклого программирования. Отсюда в стохастическом программировании обычно несущественно, порождена ли стохастическая задача линейной или нелинейной экстремальной задачей.

2.5 Одноэтапная модель принятия решений с вероятностными ограничениями, классический эгалитаризм

Рассмотрим конкретную задачу принятия решений распределения ресурсов с классическим эгалитарным принципом выбора с вероятностными ограничениями:

$$\max_{i=\overline{1,n}} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i} \right) \to \min;$$

$$P_1 \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j(t) \le c_i(t,\omega) \right\} \ge \alpha_1,\ 0,5 < \alpha_1 < 1;$$

$$P_2\{y_i(t+1) = y_i(t) + S_i(t,\omega)u_i + d_i(t,\omega)\} \ge \alpha_2,\ 0,5 < \alpha_2 < 1;$$

$$y_i(1) > 0,\ y_i(t) \ge y_i(t-1),\ S_i(t,\omega) \ge 0,\ c_i(t,\omega) > 0,\ u_i(t) \ge 0;$$

$$i = \overline{1,n},\ \omega \in \Omega,\ t \in [1,T].$$

Здесь a_{ij} — элементы матрицы A — матрицы условий задачи. В такой постановке величины S_i, d_i, c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ являются случайными на множестве Ω реализации случайного параметра ω.

Для решения поставленной задачи необходимо найти ее детерминированный эквивалент.

Введем следующие обозначения:

$$y_i(t+1) - y_i(t) = b_i(t),\ S_i(t,\omega)u_i(t) + d_i(t,\omega) = h_i(t,\omega).$$

Тогда исходная задача примет вид:

$$\max_{i=\overline{1,n}} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i} \right) \to \min; \qquad (2.5.1)$$

$$P_1 \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j(t) \leq c_i(t,\omega) \right\} \geq \alpha_1,\ 0,5 < \alpha_1 < 1; \qquad (2.5.2)$$

$$P_2 \{ b_i(t) = h_i(t,\omega) \} \geq \alpha_2,\ 0,5 < \alpha_2 < 1; \qquad (2.5.3)$$

$$y_i(1) > 0,\ b_i(t) \geq 0,\ u_i(t) \geq 0,\ c_i(t,\omega) > 0,\ i = \overline{1,n},\ \omega \in \Omega,\ t \in [1,T]. \qquad (2.5.4)$$

Теорема 2.5.1. *Задача принятия решения с эгалитарным оптимизационным критерием и вероятностными условиями (2.5.1)-(2.5.4), решение которой определяется в решающих правилах нулевого порядка, сводится к детерминированной задаче линейного программирования при детерминированной матрице $A = \|a_{ij}\|$ и случайных векторах ограничений $C = \{c_i\},\ H = \{h_i\}$.*

`Доказательство.` Пусть $\varphi = (c_1, \ldots, c_n),\ \psi = (h_1, \ldots, h_n)$ — совместная плотность распределения составляющих случайных векторов ограничений C и H соответственно.

Плотности распределения компоненты c_i вектора C и компоненты h_i вектора H равны соответственно

$$\varphi_i(c_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots (n-1) \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(c_1, \ldots, c_n) \prod_{i \neq j} dc_j,$$

$$\psi_i(h_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots (n-1) \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(h_1, \ldots, h_n) \prod_{i \neq j} dh_j.$$

Из уравнений

$$\int_{\widetilde{c}_i}^{\infty} \varphi_i(c_i) dc_i = \alpha_1, \qquad (2.5.5)$$

$$\int\limits_{\widetilde{h}_i}^{\infty} \psi_i(h_i) dh_i = \alpha_2 \tag{2.5.6}$$

вычислим $\widetilde{c}_i$ и $\widetilde{h}_i$.

Если решения уравнений (2.5.5), (2.5.6) не являются единственными, выберем в качестве $\widetilde{c}_i$ и $\widetilde{h}_i$ наибольшие корни этих уравнений.

Соотношения (2.5.2)-(2.5.3) эквивалентны неравенствам

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i \leq \widetilde{c}_i,$$

$$b_i \leq \widetilde{h}_i,$$

где $\widetilde{c}_i$ и $\widetilde{h}_i$ удовлетворяют соответственно соотношениям (2.5.5) и (2.5.6).

Отсюда следует эквивалентность стохастической задачи принятия решений (2.5.1)-(2.5.4) и детерминированной задачи линейного программирования

$$\max_{i=\overline{1,n}} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i} \right) \rightarrow \min; \tag{2.5.7}$$

$$AU \leq \widetilde{C}; \tag{2.5.8}$$

$$B \leq \widetilde{H}; \tag{2.5.9}$$

$$y_i(1) > 0,\ b_i(t) \geq 0,\ u_i(t) \geq 0,\ \widetilde{c}_i(t),\ i = \overline{1,n},\ t \in [1,T]. \tag{2.5.10}$$

Теорема доказана.

Если случайные величины c_i, h_i характеризуются функциями распределения $F_i(c_i)$, $F_i(h_i)$, то параметры $\widetilde{c}_i$ и $\widetilde{h}_i$ представляют собой наибольшие числа, удовлетворяющие неравенствам

$$1 - F_i(\widetilde{c}_i) \geq \alpha_1,$$

$$1 - F_i(\widetilde{h}_i) \geq \alpha_2.$$

Если $F_i(c_i), F_i(h_i)$ — непрерывные строго монотонные функции, то последние неравенства эквивалентны уравнениям

$$1 - F_i(\widetilde{c}_i) = \alpha_1,$$

$$1 - F_i(\widetilde{h}_i) = \alpha_2.$$

Во всех случаях будем записывать

$$\widetilde{c}_i = F_i^{-1}(1 - \alpha_1),$$

$$\widetilde{h}_i = F_i^{-1}(1 - \alpha_2),$$

где

$$F_i^{-1}(\tau) = \sup\{x | F_i(x) \le \tau\}.$$

Теорема 2.5.2. *Для задачи принятия решений с эгалитарным принципом выбора и вероятностными ограничениями (2.5.1)-(2.5.4) существует эквивалентная детерминированная задача линейного программирования (2.5.7)-(2.5.10), при условии что элементы матрицы ограничений детерминированы, а элементы векторов ограничений распределены по нормальному закону, и эта задача единственна.*

Действительно, существование следует из построения детерминированных эквивалентов (2.5.8), (2.5.9) для вероятностных ограничений (2.5.2), (2.5.3) соответственно.

Единственность следует из выпуклости функций (2.5.2), (2.5.3) по t, непрерывности их по всем аргументам и ограниченности этих функций на их области определения, а также условия минимизации значения вогнутого целевого функционала (2.5.7).

Данная задача принятия решений решается известными методами линейного программирования.

Откажемся теперь от требования детерминированности матрицы A. Пусть элементы матрицы A и составляющие b_i, c_i, h_i векторов B, C, H — независимые между собой нормально распределенные случайные величины, то есть

$$a_{ij} \in N(\overline{a}_{ij}, \sigma_{ij}^2), \ b_i \in N(\overline{b}_i, v_i^2), \ c_i \in N(\overline{c}_i, \eta_i^2), \ h_i \in N(\overline{h}_i, \theta_i^2),$$

где $\overline{a}_{ij}, \overline{b}_i, \overline{c}_i, \overline{h}_i$ — математические ожидания величин a_{ij}, b_i, c_i, h_i, а $\sigma_{ij}^2, v_i^2, \eta_i^2, \theta_i^2$ — соответственно их дисперсии.

При принятых допущениях невязки i-го условия — случайные величины

$$\delta_i(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_j - c_i,$$
$$\mu_i(u) = b_i - h_i$$

являются нормально распределенными величинами с математическими ожиданиями

$$\overline{\delta}_i(u) = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij} u_j - \overline{c}_i, \tag{2.5.11}$$

$$\overline{\mu}_i(u) = \overline{b}_i - \overline{h}_i \tag{2.5.12}$$

и дисперсиями

$$\rho_i^2(u) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 u_j^2 + \eta_i^2, \tag{2.5.13}$$

$$\gamma_i^2(u) = v_i^2 + \theta_i^2. \tag{2.5.14}$$

То есть $\delta_i(u) \in N(\overline{\delta}_i, \rho_i^2), \mu_i(u) \in N(\overline{\mu}_i, \gamma_i^2)$.

В данном случае соотношения (2.5.2), (2.5.3) эквивалентны неравенствам

$$P_1\{\delta_i \leq 0\} \geq \alpha_1, \ i = \overline{1, n},$$

$$P_2\{\mu_i \leq 0\} \geq \alpha_2, \ i = \overline{1, n},$$

или, что в нашем случае то же самое,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho_i(u)}\int\limits_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{(\xi-\overline{\delta}_i(u))^2}{2\rho_i^2(u)}\right\}d\xi \geq \alpha_1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma_i(u)}\int\limits_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{(\xi-\overline{\mu}_i(u))^2}{2\gamma_i^2(u)}\right\}d\xi \geq \alpha_2.$$

Введем обозначение

$$\Phi(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\theta}\exp\left\{-\frac{\xi^2}{2}\right\}d\xi,$$

последние неравенства перепишем в виде

$$\Phi\left(-\frac{\overline{\delta}_i(u)}{\rho_i(u)}\right)\geq \alpha_1,$$

$$\Phi\left(-\frac{\overline{\mu}_i(u)}{\gamma_i(u)}\right)\geq \alpha_2$$

или

$$\overline{\delta}_i(u)+\Phi^{-1}(\alpha_1)\rho_i(u)\leq 0,$$

$$\overline{\mu}_i(u)+\Phi^{-1}(\alpha_2)\gamma_i(u)\leq 0.$$

Учитывая выражения (2.5.11), (2.5.12) и (2.5.13), (2.5.14) для $\overline{\delta}_i(u)$, $\overline{\mu}_i(u)$ и $\rho_i^2(u),\gamma_i^2(u)$, получим

$$\Phi^{-1}(\alpha_1)\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2u_j^2+\eta_i^2\right)^{1/2}\leq \overline{c}_i-\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}u_j,\ i=\overline{1,n}, \qquad (2.5.15)$$

$$\Phi^{-1}(\alpha_2)(v_i^2+\theta_i^2)^{1/2}\leq \overline{h}_i-\overline{b}_i,\ i=\overline{1,n}. \qquad (2.5.16)$$

По условию задачи $\alpha_1\geq 0,5;\ \alpha_2\geq 0,5$, поэтому $\Phi^{-1}(\alpha_1)\geq 0$, $\Phi^{-1}(\alpha_2)\geq 0$, и область, высекаемая условиями (2.5.15), (2.5.16), выпукла.

Введем обозначения:

$$q_{ij}=M\{(c_i-\overline{c}_i)(a_{ij}-\overline{a}_{ij})\},$$

$$q_{ijk} = M\{(a_{ij} - \overline{a}_{ij})(a_{ik} - \overline{a}_{ik})\},$$

$$q_i = M\{(h_i - \overline{h}_i)(b_i - \overline{b}_i)\}.$$

Рассуждая по аналогии с вышеизложенным, получаем, что при $\alpha_1 \geq 0,5$ и $\alpha_2 \geq 0,5$

$$[\Phi^{-1}(\alpha_1)]\left(\sum_{j,k=1}^{n} q_{ijk}u_j u_k + 2\sum_{j=1}^{n} q_{ij}u_j + \eta_i^2\right)^{1/2} \leq \overline{c}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j,$$

$$[\Phi^{-1}(\alpha_2)](2q_i + \theta_i^2)^{1/2} \leq \overline{h}_i - \overline{b}_i.$$

Положительная определенность формы $\sum\limits_{j,k=1}^{n} q_{ijk}u_j u_k$ гарантирует выпуклость области, высекаемой условиями (2.5.15)-(2.5.16).

Таким образом, при принятых допущениях задача (2.5.1)-(2.5.4) с вероятностными ограничениями сводится к детерминированной задаче выпуклого программирования с линейной целевой функцией и квадратичными условиями-неравенствами:

$$\max_{i=\overline{1,n}} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i}\right) \to \min; \tag{2.5.17}$$

$$[\Phi^{-1}(\alpha_1)]\left(\sum_{j,k=1}^{n} q_{ijk}u_j u_k + 2\sum_{j=1}^{n} q_{ij}u_j + \eta_i^2\right)^{1/2} \leq \overline{c}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j, \tag{2.5.18}$$

$$[\Phi^{-1}(\alpha_2)](2q_i + \theta_i^2)^{1/2} \leq \overline{h}_i - \overline{b}_i, \tag{2.5.19}$$

$$u_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}. \tag{2.5.20}$$

Теорема доказана.

2.6 Одноэтапная модель принятия решений с вероятностными ограничениями, классический утилитаризм

Теперь рассмотрим задачу принятия решений с классическим утилитарным принципом выбора и вероятностными ограничениями следующего вида:

$$\max_{i=\overline{1,n}} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i} \right) \to \min;$$

$$P_1 \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j(t) \le c_i(t,\omega) \right\} \ge \alpha_1,\ 0,5 < \alpha_1 < 1;$$

$$P_2\{y_i(t+1) = y_i(t) + S_i(t,\omega)u_i + d_i(t,\omega)\} \ge \alpha_2,\ 0,5 < \alpha_2 < 1;$$

$$y_i(1) > 0,\ y_i(t) \ge y_i(t-1),\ S_i(t,\omega) \ge 0,\ c_i(t,\omega) > 0,\ u_i(t) \ge 0;$$

$$i = \overline{1,n},\ \omega \in \Omega,\ t \in [1,T].$$

Согласно выше введенным обозначениям исходную стохастическую задачу распределения ресурсов с утилитарным принципом выбора перепишем следующим образом.

$$\max_{i=\overline{1,n}} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i} \right) \to \min; \tag{2.6.1}$$

$$P_1 \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j(t) \le c_i(t,\omega) \right\} \ge \alpha_1,\ 0,5 < \alpha_1 < 1; \tag{2.6.2}$$

$$P_2\{b_i(t) = h_i(t,\omega)\} \ge \alpha_2,\ 0,5 < \alpha_2 < 1; \tag{2.6.3}$$

$$u_i(t) \ge 0,\ y_i(1) > 0,\ b_i(t) \ge 0,\ c_i(t,\omega) > 0,\ i = \overline{1,n},\ \omega \in \Omega,\ t \in [1,T]. \tag{2.6.4}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.6.1. *Задача принятия решения с утилитарным правилом выбора и вероятностными условиями (2.6.1)-(2.6.4), решение которой определяется в решающих правилах нулевого порядка, сводится к детерминированной задаче линейного программирования при детерминированной матрице $A = \|a_{ij}\|$ и случайных векторах ограничений $C = \{c_i\}, H = \{h_i\}$.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.5.1.

Задача принятия решений (2.6.1) - (2.6.4) с вероятностными ограничениями эквивалентна детерминированной задаче линейного программирования

$$\max_{i=\overline{1,n}} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i} \right) \to \min; \tag{2.6.5}$$

$$AU \le \widetilde{C}; \tag{2.6.6}$$

$$B \le \widetilde{H}; \tag{2.6.7}$$

$$y_i(1) > 0,\ b_i(t) \ge 0,\ u_i(t) \ge 0,\ \widetilde{c}_i(t),\ i = \overline{1,n},\ t \in [1,T]. \tag{2.6.8}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.6.2. *Для задачи принятия решений с утилитарным принципом выбора и вероятностными ограничениями (2.6.1)-(2.6.4) существует эквивалентная детерминированная задача линейного программирования (2.6.5)-(2.6.8), при условии что элементы матрицы ограничений детерминированы, а элементы векторов ограничений распределены по нормальному закону, и эта задача единственна.*

Эта теорема доказывается аналогично теореме 2.5.2.

Если мы откажемся от детерминированности матрицы условий A, то стохастическая задача принятия решений с утилитарным принципом выбора (2.6.1)-(2.6.4), решение которой определяется в решающих правилах нулевого порядка, сводится к детерминированной задаче выпуклого программирования с линейной целевой функцией и квадратичными ограничениями

$$\max_{i=\overline{1,n}} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i} \right) \to \min; \tag{2.6.9}$$

$$[\Phi^{-1}(\alpha_1)] \left(\sum_{j,k=1}^{n} q_{ijk} u_j u_k + 2 \sum_{j=1}^{n} q_{ij} u_j + \eta_i^2 \right)^{1/2} \le \overline{c}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j, \tag{2.6.10}$$

$$[\Phi^{-1}(\alpha_2)](2q_i+\theta_i^2)^{1/2} \le \overline{h}_i - \overline{b}_i, \tag{2.6.11}$$

$$u_i \ge 0,\ i=\overline{1,n} \tag{2.6.12}$$

при условии, что элементы матрицы A и составляющие b_i, c_i, h_i векторов B, C, H — независимые между собой нормально распределенные случайные величины.

2.7 Одноэтапная модель принятия решений с вероятностными ограничениями, линейная комбинация классических принципов выбора

Рассмотрим задачу принятия решений с линейной комбинацией классических принципов выбора — эгалитаризм и утилитаризм, с вероятностными ограничениями следующего вида:

$$\Psi = qf_{\text{эг}} + (1-q)f_{\text{ут}} \to \min,\ q\in(0,1);$$

$$P_1\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j(t) \le c_i(t,\omega)\right\} \ge \alpha_1,\ 0,5<\alpha_1<1;$$

$$P_2\{y_i(t+1) = y_i(t) + S_i(t,\omega)u_i + d_i(t,\omega)\} \ge \alpha_2,\ 0,5<\alpha_2<1;$$

$$y_i(1)>0,\ y_i(t)\ge y_i(t-1),\ S_i(t,\omega)\ge 0,\ c_i(t,\omega)>0,\ u_i(t)\ge 0;$$

$$i=\overline{1,n},\ \omega\in\Omega,\ t\in[1,T].$$

Согласно выше введенным обозначениям исходную стохастическую задачу распределения ресурсов с утилитарным принципом выбора перепишем следующим образом.

$$\Psi = qf_{\text{эг}} + (1-q)f_{\text{ут}} \to \min,\ q\in(0,1); \tag{2.7.1}$$

$$P_1\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j(t) \le c_i(t,\omega)\right\} \ge \alpha_1,\ 0,5<\alpha_1<1; \tag{2.7.2}$$

$$P_2\{b_i(t) = h_i(t,\omega)\} \ge \alpha_2,\ 0,5<\alpha_2<1; \tag{2.7.3}$$

$$u_i(t)\ge 0,\ y_i(1)>0,\ b_i(t)\ge 0,\ c_i(t,\omega)>0,\ i=\overline{1,n},\ \omega\in\Omega,\ t\in[1,T]. \tag{2.7.4}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.7.1. *Задача принятия решения с вероятностными условиями (2.7.1)-(2.7.4), решение которой определяется в решающих правилах нулевого порядка, сводится к детерминированной задаче линейного программирования при детерминированной матрице* $A = \|a_{ij}\|$ *и случайных векторах ограничений* $C = \{c_i\}$, $H = \{h_i\}$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.5.1.

Задача принятия решений (2.7.1)-(2.7.4) с вероятностными ограничениями эквивалентна детерминированной задаче линейного программирования

$$\Psi = qf_{\text{эг}} + (1-q)f_{\text{ут}} \to \min,\ q \in (0,1); \tag{2.7.5}$$

$$AU \le \widetilde{C}; \tag{2.7.6}$$

$$B \le \widetilde{H}; \tag{2.7.7}$$

$$y_i(1) > 0,\ b_i(t) \ge 0,\ u_i(t) \ge 0,\ \widetilde{c}_i(t),\ i = \overline{1,n},\ t \in [1,T]. \tag{2.7.8}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.7.2. *Для задачи принятия решений с вероятностными ограничениями (2.7.1)-(2.7.4) существует эквивалентная детерминированная задача линейного программирования (2.7.5)-(2.7.8), при условии что элементы матрицы ограничений детерминированы, а элементы векторов ограничений распределены по нормальному закону, и эта задача единственна.*

Эта теорема доказывается аналогично теореме 2.5.2.

Откажемся от детерминированности матрицы условий A, тогда стохастическая задача принятия решений с утилитарным принципом выбора (2.7.1)-(2.7.4), решение которой определяется в решающих правилах нулевого порядка, сводится к детерминированной задаче выпуклого программирования с линейной целевой функцией и квадратичными ограничениями

$$\Psi = q f_{\text{эг}} + (1-q) f_{\text{ут}} \to \min,\ q \in (0,1); \tag{2.7.9}$$

$$[\Phi^{-1}(\alpha_1)] \left(\sum_{j,k=1}^{n} q_{ijk} u_j u_k + 2 \sum_{j=1}^{n} q_{ij} u_j + \eta_i^2 \right)^{1/2} \leq \overline{c}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j, \tag{2.7.10}$$

$$[\Phi^{-1}(\alpha_2)](2q_i + \theta_i^2)^{1/2} \leq \overline{h}_i - \overline{b}_i. \tag{2.7.11}$$

$$u_i \geq 0,\ i = \overline{1,n} \tag{2.7.12}$$

при условии, что элементы матрицы A и составляющие b_i, c_i, h_i векторов B, C, H — независимые между собой нормально распределенные случайные величины.

2.8 Одноэтапная модель принятия решений с вероятностным функционалом, классический утилитаризм

Рассмотрим постановку одноэтапной задачи принятия решений с вероятностным функционалом на примере задачи принятия решений по распределению ресурсов с классическим утилитарным принципом выбора.

Требуется максимизировать пороговую величину k, которой не должно быть превышено значение функционала, попадающего в интервал $(-\infty, k)$ с заданной вероятностью α_0.

$$k \to \max;$$

$$P\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{y}_i(\omega) - y_i(t+1)}{\overline{y}_i(\omega)} \right) \leq k \right\} = \alpha_0,\ 0 < \alpha_0 < 0,5;$$

$$P\left\{ \sum_{i=1}^{n} u_i(t) \leq c(t,\omega) \right\} \geq \alpha_1,\ 0,5 < \alpha_1 < 1;$$

$$P_i\{y_i(t+1) = y_i(t) + S_i(t,\omega)u_i(t) + d_i(t,\omega)\}\alpha_2^i,\ 0,5 < \alpha_2^i < 1;$$

$$\overline{y}_i(\omega) \geq y_i(t),\ y_i(0) > 0;$$

$$u_i(t) \geq 0,\ S_i(t,\omega) \geq 0,\ c(t,\omega) > 0,\ i = \overline{1,n},\ t \in [0, T-1],\ \omega \in \Omega.$$

В такой постановке величины $S_i, d_i, c, (i = 1, 2, \ldots, n)$ являются случайными на множестве Ω реализации случайного параметра ω.

Выбор значений вероятностей $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2^i$ являются предметом самостоятельной задачи. В частности эти величины могут быть выбраны как результат предварительного исследования и сопоставления затрат, связанных с увеличением параметров $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2^i$ и достигаемого за счет этого эффекта при оптимизации показателя качества решения исходной задачи принятия решений при наличии неполноты информации.

При такой постановке задачи существенным является выбор вероятностного функционала. В нашем случае мы учитываем следующее. Известна вероятность того, что суммарное отклонение от перспективного состояния по каждому направлению не превосходит некоторой пороговой величины k в каждый период времени $(t+1)$. Необходимым критерием оптимальности при данной постановке является минимизация пороговой величины k. Таким образом, цель оптимизации такого рода задачи есть получение наибольшего выигрыша (прибыли, прироста на единицу вложенных средств) от вложения ограниченного количества ресурсов.

Заметим, что при идеальных условиях развития направлений, когда распределяемых средств достаточно, количество вкладываемых ресурсов i-е направление можно определить следующим образом:

$$y_i(t) = \frac{\overline{y}_i - y_i(t+1)}{S_i(t,\omega)},\ y_i(0) > 0,\ i = \overline{1,n},$$

при этом $d_i(t,\omega) = 0$.

Последнее равенство означает, что в текущий момент времени t отсутствует влияние внешних факторов на поведение экономической системы. В реальных условиях $d_i(t,\omega)$ — эффект случайных внешних факторов чаще всего является отрицательной величиной и определяет необходимое количество средств, которые дополнительно затрачиваются на развитие i-го направления, чтобы поддерживать его в текущем состоянии.

Рассматриваемую задачу можно переписать в следующем виде.

$$k \to \max;$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{S_i(t,\omega)}{\overline{y}_i(\omega)}u_i(t)\right) \le k\right\} = \alpha_0,\ 0 < \alpha_0 < 0,5;$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i(t) \le c(t,\omega)\right\} \ge \alpha_1,\ 0,5 < \alpha_1 < 1;$$

$$P_i\{y_i(t+1) = y_i(t) + S_i(t,\omega)u_i(t) + d_i(t,\omega)\}\alpha_2^i,\ 0,5 < \alpha_2^i < 1;$$

$$\overline{y}_i(\omega) \ge y_i(t),\ y_i(0) > 0;$$

$$u_i(t) \ge 0,\ S_i(t,\omega) \ge 0,\ c(t,\omega) > 0,\ i = \overline{1,n},\ t \in [0, T-1],\ \omega \in \Omega.$$

Ведем обозначение $\tau = t+1$, тогда наша задача перепишется в следующем виде:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{S_i(\tau-1,\omega)}{\overline{y}_i(\omega)}u_i(\tau-1)\right) \le k\right\} = \alpha_0,\ 0 < \alpha_0 < 0,5;\ k \to \max; \tag{2.8.1}$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i(\tau-1) \le c(\tau-1,\omega)\right\} \ge \alpha_1,\ 0,5 < \alpha_1 < 1; \tag{2.8.2}$$

$$P_i\{y_i(\tau-1) = y_i(t) + S_i(\tau-1,\omega)u_i(\tau-1) + d_i(\tau-1,\omega)\}\alpha_2^i,\ 0,5 < \alpha_2^i < 1; \tag{2.8.3}$$

$$u_i(\tau-1) \ge 0,\ S_i(\tau-1,\omega) \ge 0,\ y_i(1) > 0,\ c(\tau-1,\omega) > 0,$$

$$i = \overline{1,n},\ t \in [0, T-1],\ \omega \in \Omega. \tag{2.8.4}$$

Теорема 2.8.1. *Задача принятия решения с утилитарным принципом выбора и вероятностным функционалом (2.8.1)-(2.8.4), решение которой определяется в решающих правилах нулевого порядка, сводится к детерминированной задаче выпуклого программирования.*

`Доказательство.` Построим детерминированное эквивалентное неравенство для условия (2.8.2), исходя из плотности распределения вероятности случайной величины $c(\tau-1,\omega)$. Если известна $\varphi(c)$ — плотность распределения $c(\tau-1,\omega)$, то найдем нижнюю границу $\widetilde{c}$ случайной величины $c(\omega)$ с вероятностью α_1 из уравнения

$$\int\limits_{\widetilde{c}}^{\infty}\varphi(c)dc=\alpha_1.$$

Если это уравнение имеет более одного корня, то выберем из этих корней наибольший. Соотношение

$$\sum_{i=1}^{n}u_i(\tau-1)\leq\widetilde{c}(\tau-1)$$

является эквивалентным неравенству (2.8.2).

Если случайная величина $c(\tau-1,\omega)$ характеризуется функцией распределения $F(c)$, то параметр $\widetilde{c}$ представляет собой наибольшее число, удовлетворяющее неравенству

$$1-F(\tau)\geq\alpha_1. \tag{2.8.5}$$

Если функция $F(c)$ непрерывна и строго монотонна, то неравенство (2.8.5) превращается в равенство

$$1-F(\tau)=\alpha_1.$$

Тогда

$$\widetilde{c}=F^{-1}(1-\alpha_1),$$

где

$$F^{-1}(1-\alpha_1) = \sup\{\widetilde{c}: \ F(\widetilde{c}) \leq \alpha_1 - 1\}.$$

Рассмотрим построение детерминированного эквивалента для условий (2.8.3). Перепишем (2.8.3) в следующем виде.

$$P_i\{y_i(\tau) - y_i(\tau-1) - d_i(\tau-1,\omega) = S_i(\tau-1,\omega)u_i(\tau-1)\} \geq \alpha_2^i,$$

$$0,5 < \alpha_2^i < 1, \ i = \overline{1,n}.$$

Случайные величины $S_i(\tau-1,\omega)$ и $d_i(\tau-1,\omega)$ независимы между собой. Будем полагать, что они распределены по нормальному закону. Такое распределение имеет место, так как случайная величина $d_i(\tau-1,\omega)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ может принимать отрицательное значение, а случайная величина $S_i(\tau-1,\omega)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ не требует условия неотрицательности.

Ведем обозначение $\Delta_i = y_i(\tau) - y_i(\tau-1)$. Тогда условие нормального распределения случайных величин $S_i(\tau-1,\omega), d_i(\tau-1,\omega)$, $\Delta_i(\omega)$ можно записать в виде:

$$S_i(\omega) \in N(\overline{S}_i, \delta_i^2), \ d_i(\omega) \in N(\overline{d}_i, \nu_i^2), \ \Delta_i(\omega) \in N(\overline{\Delta}_i, \sigma_i^2),$$

где $\overline{S}_i, \overline{d}_i, \overline{\Delta}_i$ — математические ожидания нормально распределенных, независимых между собой случайных величин $S_i(\tau-1,\omega)$, $d_i(\tau-1,\omega), \Delta_i(\omega)$ соответственно, а $\delta_i^2, \nu_i^2, \sigma_i^2$ — соответственно их дисперсии.

Введем штрафную функцию

$$g_i(u,\omega) = \Delta_i(\omega) - d_i(\omega) - S_i(\omega)u_i,$$

которая является случайной величиной, распределенной по нормальному закону, для любых $i = 1,2,\dots,n$, т.е.

$$g_i(u) \in N(\overline{g}_i, Dg_i),$$

где $\overline{g}_i = \overline{g}_i(u)$ — математическое ожидание случайной величины $g_i(u,\omega), Dg_i = Dg_i(u)$ — дисперсия случайной величины $g_i(u,\omega)$.

$$\overline{g}_i = \overline{\Delta}_i - \overline{d}_i - \overline{S}_i u_i,\ Dg_i = \sigma_i^2 + \nu_i^2 + \delta_i^2 u_i.$$

Соотношения (2.8.4) эквивалентны неравенствам

$$P_i\{g_i(u,\omega) = 0\} \geq \alpha_2^i,\ i = \overline{1,n}.$$

Так как $g_i(u,\omega)$ распределена по нормальному закону, справедлива следующая запись:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi Dg_i}} \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\left\{\frac{-(\xi - \overline{g}_i)^2}{2Dg_i}\right\} d\xi \geq \alpha_2^i,\ i = \overline{1,n}.$$

Введем обозначение

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{\frac{-\xi^2}{2}\right\} d\xi,$$

тогда последнее неравенство можно записать в следующем виде

$$\Phi\left(\frac{-\overline{g}_i}{\sqrt{Dg_i}}\right) \geq \alpha_2^i$$

или $\overline{g}_i + \Phi^{-1}(\alpha_2^i)\sqrt{Dg_i} \leq 0$. Учитывая выражения для $\overline{g}_i, Dg_i$, получаем

$$\Phi^{-1}(\alpha_2^i)(\sigma_i^2 + \nu_i^2 + \delta_i^2 u_i)^{1/2} + \overline{\Delta}_i - \overline{d}_i - \overline{S}_i u_i \leq 0,\ i = \overline{1,n}. \quad (2.8.6)$$

Таким образом, мы получили детерминированные эквивалентные неравенства для условий (2.8.3). Так как $\alpha_2^i \geq 0,5$, тогда $\Phi^{-1}(\alpha_2^i) \geq 0$ и, следовательно, область высекаемая условиями (2.8.6) выпукла.

Рассмотрим построение детерминированного эквивалента для вероятностного функционала (2.8.1). Введем обозначение

$$z_i(\tau - 1, \omega) = \frac{S_i(\tau - 1, \omega)}{\overline{y}_i}.$$

Тогда целевой функционал будет выглядеть так:

$$P\left\{ \sum_{i=1}^{n} |z_i(\tau-1,\omega)u_i(\tau-1)| \le k \right\} = \alpha_0,\ k \to \max. \qquad (2.8.7)$$

При этом, случайные коэффициенты z_i распределены нормально с математическим ожиданием $\overline{z}_i$, что следует из предположения нормального распределения случайной величины S_i. Будем считать, что известна корреляционная матрица $Z = \|z_{ji}\|$, где

$$z_{ji} = M\{(c_j - \overline{c}_j)(c_i - \overline{c}_i)\},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}.$$

При принятых допущениях о распределении коэффициентов z_i линейная форма zu представляет собой нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{z}_i u_i$ и дисперсией $\sum\limits_{j,i=1}^{n} z_{ji}u_iu_j$:

$$zu \in N\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i u_i,\ \sum_{j,i=1}^{n} z_{ji}u_iu_j \right).$$

Поэтому соотношение (2.8.7) может быть переписано в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \sum\limits_{j,i=1}^{n} z_{ji}u_iu_j}} \int\limits_{-\infty}^{k} e^{-\left(\xi - \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{z}_i u_i\right) \Big/ \left(2 \sum\limits_{j,i=1}^{n} z_{ji}u_iu_j\right)} d\xi = \alpha_0$$

или

$$\Phi\left(\frac{k - \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{z}_i u_i}{\sqrt{\sum\limits_{j,i=1}^{n} z_{ji}u_iu_j}} \right) = \alpha_0.$$

Отсюда видно, что максимизация k при условии (2.8.7) эквивалентна минимизации

$$k = \sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i u_i + \Phi^{-1}(\alpha_0) \sqrt{\sum_{j,i=1}^{n} z_{ji}u_iu_j}.$$

Так как $\sum\limits_{j,i=1}^{n} z_{ji}u_i u_j$ — положительно определенная квадратичная форма и $0 < \alpha_0 < 0,5$, то k представляет собой выпуклую вниз функцию u.

Таким образом, при сделанных допущениях вероятностный функционал (2.8.1) эквивалентен следующему детерминированному функционалу:

$$k = \sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i u_i + \Phi^{-1}(\alpha_0)\sqrt{\sum_{j,i=1}^{n} z_{ji}u_i u_j} \to \max\,. \tag{2.8.8}$$

Теорема доказана.

Теорема 2.8.2. *Для задачи принятия решений с вероятностным функционалом (2.8.1)-(2.8.4) существует эквивалентная детерминированная задача*

$$k = \sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i u_i + \Phi^{-1}(\alpha_0)\sqrt{\sum_{j,i=1}^{n} z_{ji}u_i u_j} \to \max, \tag{2.8.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \le \widetilde{c}, \tag{2.8.10}$$

$$\Phi^{-1}(\alpha_2^i)(\sigma_i^2 + \nu_i^2 + \delta_i^2 u_i)^{1/2} + \overline{\Delta}_i - \overline{d}_i - \overline{S}_i u_i \le 0, \tag{2.8.11}$$

$$u_i \ge 0,\ \widetilde{c} > 0,\ i = \overline{1,n} \tag{2.8.12}$$

и эта задача единственна.

Действительно, существование детерминированной задачи (2.8.9)-(2.8.12), эквивалентной для задачи (2.8.1)-(2.8.4), следует из построенных выше детерминированных эквивалентов (2.8.8), (2.8.7), (2.8.5) для выражений (2.8.1), (2.8.2), (2.8.3) соответственно.

Единственность детерминированной задачи (2.8.9)-(2.8.12), эквивалентной для задачи (2.8.1)-(2.8.4), следует из условия минимизации значения целевого функционала k.

Построенная детерминированная задача (2.8.9)-(2.8.12), эквивалентная задаче (2.8.1)-(2.8.4), решается уже известными методами выпуклого программирования.

2.9 Одноэтапная модель принятия решений с вероятностным функционалом, линейная комбинация классических принципов выбора

Сформулируем задачу принятия решений по распределению ресурсов с вероятностным функционалом и линейной комбинацией классических принципов выбора — эгалитаризм и утилитаризм следующим образом:

$$P\left\{\left(q\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{S_i(\tau-1,\omega)}{\overline{y}_i}u_i(\tau-1)\right)+(1-q)\max_{i=\overline{1,n}}\left(\frac{S_i(\tau-1,\omega)}{\overline{y}_i}u_i(\tau-1)\right)\right)\leq k\right\}=\alpha_0,$$

$$0<\alpha_0<0,5,\ q\in(0,1),\ k\to\max; \tag{2.9.1}$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}u_i(\tau-1)\leq c(\tau-1,\omega)\right\}\geq\alpha_1,\ 0,5<\alpha_1<1; \tag{2.9.2}$$

$$P_i\{y_i(\tau-1)=y_i(t)+S_i(\tau-1,\omega)u_i(\tau-1)+d_i(\tau-1,\omega)\}\alpha_2^i,\ 0,5<\alpha_2^i<1; \tag{2.9.3}$$

$$u_i(\tau-1)\geq0,\ S_i(\tau-1,\omega)\geq0,\ y_i(1)>0,\ c(\tau-1,\omega)>0,$$

$$i=\overline{1,n},\ t\in[0,T-1],\ \omega\in\Omega. \tag{2.9.4}$$

Теорема 2.9.1. *Задача принятия решения с линейной комбинацией классических принципов выбора и вероятностным функционалом (2.9.1)-(2.9.4), решение которой определяется в решающих правилах нулевого порядка, сводится к детерминированной задаче следующего вида:*

$$k=\sum_{i=1}^{n}\overline{z}_iu_i+\Phi^{-1}(\alpha_0)\sqrt{\sum_{j,i=1}^{n}z_{ji}u_iu_j}\to\max, \tag{2.9.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \le \widetilde{c}, \tag{2.9.6}$$

$$\Phi^{-1}(\alpha_2^i)(\sigma_i^2 + \nu_i^2 + \delta_i^2 u_i^2)^{1/2} + \overline{\Delta}_i - \overline{d}_i - \overline{S}_i u_i \le 0, \tag{2.9.7}$$

$$u_i \ge 0,\ \widetilde{c} > 0,\ i = \overline{1, n}. \tag{2.9.8}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.8.1.

Теорема 2.9.2. *Для задачи принятия решений с линейной комбинацией классических принципов выбора и вероятностным функционалом (2.9.1)-(2.9.4) существует эквивалентная детерминированная задача (2.9.5)-(2.9.8) и эта задача единственна.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.8.2.

Краткая библиография

Первые работы по исследованию задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями появились в 1953 году, когда были опубликованы работы А. Чарнса, В. Купера и Дж. Саймонда [70], [71]. Значительный вклад в разработку различных проблем качественного анализа задач с вероятностными ограничениями внесли Б. Миллер и Х. Вагнер [290], С. Катаока [221], [222], [223], [224], И. Сенгупта [355], [356] и другие авторы.

Дж. Саймонд [385] сформулировал и обосновал условия построения детерминированных эквиваленвов для стохастических задач с вероятностными ограничениями, а И. Весельс [432] исследовал условия выпуклости детерминированного эквивалента.

Конкретные модели стохастического программирования с вероятностными ограничениями рассматривали А. Чарнс и В. Купер [74], [77], [81], А. Д. Иоффе и Д. Б. Юдин [192], Д. Б. Юдин [196], [203], С. В. Жуленев [450], [451], Б. Миллер и Г. Вагнер [290] и другие.

Для решения задач с вероятностными ограничениями могут быть использованы итеративные методы, в частности, предложенные Б. Т. Поляком [322] и М. Е. Примак [326].

Прикладные задачи стохастического программирования с вероятностными ограничениями рассматривали А. Я. Фридлянд [155], А. Д. Юдин [205], Е. П. Лавриненко [261], М. Б. Щепакин [368], М. Драгомиреску [112] и другие. Обзорные работы, включающие рассмотрение стохастических задач с вероятностными ограничениями, выполнены Е. Г. Гольштейном и Д. Б. Юдиным [184], Д. Б. Юдиным [203], Г. Цельмером [455], В. В. Колбиным [238] и другими.

3 Двухэтапная задача стохастического программирования

3.1 Постановка двухэтапной задачи стохастического программирования

Многие задачи планирования и управления в условиях неполной информации рассматриваются и решаются как двухэтапные задачи стохастического программирования. Стохастические задачи с компенсацией невязок в системах ограничений наиболее часто встречаются в приложениях, этим задачам посвящено больше публикаций, чем любым другим моделям стохастического программирования. Решение двухэтапной задачи составлено из детерминированного и случайного векторов. На первом этапе решения задачи выбирается детерминированный предварительный план, принимаемый до реализации случайных условий задачи. Случайный вектор в решении двухэтапной задачи отвечает плану компенсации невязок, вообще говоря, появляющихся после наблюдения реализованных параметров задачи на втором этапе. Целью управляющего является минимизация среднего значения суммарных затрат, возникающих на этапе предварительного планирования, и на втором этапе, когда требуется компенсировать невязки в системе ограничений задачи. Если задача стохастического программирования в двухэтапной постановке разрешима, выбор детерминированного предварительного плана должен гарантировать существование случайного вектора плана компенсации невязок.

Пусть имеем следующую задачу:

$$(C, X) \to \min, \tag{3.1.1}$$

$$A^0 X = B^0, \tag{3.1.2}$$

$$AX = B, \tag{3.1.3}$$

$$X \geq 0, \tag{3.1.4}$$

где

$$C = \{c_j\},\ j = \overline{1,n};\ B = (b_i),\ i = \overline{1,m};$$

$$B^0 = \{b_k^0\},\ k = \overline{1,m_1};$$

$$A^0 = \|a_{kj}^0\|,\ k = \overline{1,m_1};\ j = \overline{1,n};$$

$$A = \|a_{ij}\|,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$$

Пусть элементы матрицы $A = A(\omega)$ и векторов $B = B(\omega)$ и $C = C(\omega)$ — случайные величины, тогда процесс решения задачи (3.1.1)-(3.1.4) целесообразно разделить на два этапа: до наблюдения реализации случайных параметров условий задачи и после фиксированной реализации. На первом этапе выберем детерминированный неотрицательный план X^0, удовлетворяющий условиям (3.1.2).

На втором этапе зафиксируем реализацию ω^0 случайного события и соответствующие ему значения $A(\omega^0)$ и $B(\omega^0)$. Вычислим невязку $B(\omega^0) - A(\omega^0)X^0$, возникшую, вообще говоря, в условиях (3.1.3) после реализации $\omega^0 \in \Omega$. Определим вектор $Y \geq 0$, компенсирующий невязки в соответствии с соотношением

$$D(\omega^0)Y(\omega^0) = B(\omega^0) - A(\omega^0)X^0, \tag{3.1.5}$$

где $D = \|d_{il}\|,\ i = \overline{1,m},\ l = \overline{1,n_1}$ — матрица компенсации, вообще говоря, составленная из случайных элементов. При этом будем предполагать, что случайная реализация ω, которая наблюдается на втором этапе, не зависит от выбора предварительного плана X^0.

Рассматривается следующая задача математического программирования: найти n-мерный вектор X и n_1-мерный вектор $Y(\omega)$, $\omega \in \Omega$, обеспечивающие

$$\min_X E_\omega\{(C(\omega), X) + \min_Y (H, Y(\omega))\} \tag{3.1.6}$$

при условиях:

$$A^0 X = B^0, \tag{3.1.7}$$

$$A(\omega)X + D(\omega)Y(\omega) = B(\omega),\ \omega \in \Omega, \tag{3.1.8}$$

$$X \geq 0,\ Y \geq 0. \tag{3.1.9}$$

Здесь H — заданный вектор штрафов, зависящий от величин составляющих вектора $Y(\omega)$, компенсирующего невязку. E — символ математического ожидания. Определив предварительный план X^0, будем выбирать составляющие вектора $Y(\omega)$ таким образом, чтобы обеспечить минимальный штраф, за компенсацию невязок условий задачи. Иными словами, зафиксировав вектор X^0, нужно решить задачу

$$\{\min_Y (H, Y(\omega)) | D(\omega)Y(\omega) = B(\omega) - A(\omega)X^0, Y(\omega) \geq 0\}. \tag{3.1.10}$$

Задача (3.1.10) должна обладать планами, иначе не для всякого $\omega \in \Omega$ найдется вектор $Y(\omega)$, обеспечивающий выполнение условий (3.1.8). Задачу (3.1.6)-(3.1.9) будем называть двухэтапной задачей стохастического программирования, а задачу (3.1.10) — задачей второго этапа.

Модели и методы решения двухэтапных (многоэтапных) задач стохастического программирования целесообразно использовать для перспективного планирования и оперативного управления, поскольку всегда имеют место случайные воздействия на планируемую и управляющую системы и, кроме того, двухэтапные модели малочувствительны к изменению параметров условий задачи, т.е. в определенном смысле устойчивы. Для того, чтобы вектор X был планом допустимым на первом этапе, необходимо, чтобы для всех $\omega \in \Omega$ существовал вектор $Y \geq 0$ такой, что

$$D(\omega)Y(\omega) = B(\omega) - A(\omega)X. \tag{3.1.11}$$

Назовем дополнительные неявно заданные ограничения вида (3.1.11), возникающие в задаче второго этапа, индуцированными, а условия, наложенные на неотрицательный вектор X вида (3.1.7), фиксированными.

Пусть множество

$$K_1 = \{X:\ A^0X = B^0, X \geq 0\}$$

образовано фиксированными ограничениями, а множество

$$K_2 = \{X:\ \forall\omega \in \Omega, \exists Y \geq 0, A(\omega)X = B(\omega) - D(\omega)Y(\omega)\}$$

определено индуцированными ограничениями. Тогда множество $K = K_1 \cap K_2$ является множеством допустимых векторов X задачи (3.1.6) - (3.1.9); если $X \in K$, вектор X удовлетворяет фиксированным ограничениям $A^0X = B^0, X \geq 0$ и кроме того, задача второго этапа (3.1.3) обладает планами.

Теорема 3.1.1. *Множество K вектров X двухэтапной задачи стохастического программирования выпукло.*

`Доказательство.` Имеем $K = K_1 \cap K_2$, но множество $K_1 = \{X:\ A^0X = B^0, X \geq 0\}$ выпукло. Для фиксированного $\omega \in \Omega$ определим множество $K_{2\omega} = \{X|\exists Y(\omega) \geq 0\}$ такое, что $A(\omega)X = B(\omega) - D(\omega)Y(\omega)$, которое является выпуклым. Это означает, что $K_2 \cap \omega \in \Omega K_{2\omega}$, вместе с ним и $K = K_1 \cap K_2$ — выпуклые множества, пересечения выпуклых множеств. В работе [435] установлено, что при случайном векторе $B(\omega)$ и детерминированной матрице условий задачи A стохастического линейного программирования множество K_2, а вместе с ним и множество K являются выпуклыми многогранными множествами.

`Теорема доказана.`

Множество K предварительного плана двухэтапной задачи стохастического программирования задано неявно. В общем случае неясно, как конструктивно строить множество K_2. Для некоторых частных случаев, весьма важных для приложений, множество совпадает K_2 с R^n, т.е. индуцированные ограничения отсутствуют. Можно считать, что ранг матрицы D равен m, в противном случае (3.1.8) может быть заменено эквивалентным соотношением, у которого p строк имеют вид $OY = B - AX$, где O — вектор, состоящий из нулей, размерности m, а p — число зависимых строк в D. В этом случае их можно включить в число фиксированных ограничений (3.1.7).

Будем предполагать, что ранг матрицы D размерностью $m \times n$ равен m и первые m столбцов (без ограничения общности) линейно-независимы.

Предположение 3.2.1. *Для каждого $\nu \in R^m$ существует $Y \geq 0$ такое, что*

$$DY = \nu. \qquad (3.2.1)$$

Лемма 3.2.1. [208] *Если предположение 3.2.1 выполняется, то D имеет по крайней мере $m+1$ столбцов, т.е. $n \geq m+1$.*

Теорема 3.2.1. [208] *Для того, чтобы система уравнений $DY = \nu$ имела неотрицательное решение для $\forall \nu \in R^m$, достаточно, чтобы существовало неотрицательное решение однородной системы линейных уравнений:*

$$D\pi = 0 \qquad (3.2.2)$$

причем, чтобы $\pi_j > 0$ для $j = \overline{1, m}$.

Доказательство. Система уравнений $DY = \nu$ всегда имеет решение. Пусть оно таково, что первые $\widehat{y}_j \neq 0$ для $j = \overline{1,m}$, а остальные равны нулю, тогда, так как соотношение $\alpha(D\pi) + D\widehat{Y}$ верно для любого α, то, взяв α достаточно большим, получим неотрицательное решение системы (3.2.1).

Условие (3.2.2), вообще говоря, трудно проверить за исключением некоторых частных случаев.

Пусть $n = m + 1$, тогда достаточное условие примет вид $\sum\limits_{j=1}^{m+1} \widehat{\pi}_j D_j = 0$, так как если $\pi_{m+1} = 0$, то имеем линейную зависимость первых m столбцов D_j, что противоречит тому, что матрица D имеет ранг m. Следовательно, $\pi_{m+1} > 0$ отсюда имеем

$$-D_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} \pi_j D_j,\ \pi_j = \frac{\widehat{\pi}_j}{\widehat{\pi}_{m+1}}. \qquad (3.2.3)$$

Вышеприведенная система линейных уравнений имеет единственное решение, если оно положительно, то $K_2 \equiv R^n$.

Теорема доказана.

Условия теоремы 3.2.1 не только достаточны, но и необходимы для того, чтобы система $DY = \nu$ имела неотрицательное решение при любом $\nu \in R^m$. Однако для того чтобы $K_2 \equiv R^n$ достаточно требовать неотрицательной разрешимости $DY = \nu$ не для всех $\nu \in R^m$, а только для $\nu = B - AX$ при всех $X \in K$, и всех $\omega \in \Omega$. Такие ν далеко не всегда пробегают все R^m.

Задачу (3.1.1)-(3.1.4) можно интерпретировать в терминах планирования производства, где A — матрица основных технологических способов, а D — истолковывается как матрица аварийных технологических способов, определяющих возможные варианты компенсации невязок в системе условий. В этом случае условия теоремы 3.2.1 можно интерпретировать следующим образом. Для того, чтобы для любой невязки $\nu \in R^m$ нашлась допустимая компенсация Y, достаточно, чтобы аварийные технологические способы представляли собой «замкнутую» систему, т.е. существовали бы ненулевые интенсивности π, при которых все, что производится при эксплуатации одних производственных способов, потребляется другими, например, купля-продажа отдельных товаров.

Теорема 3.2.2. *Для того, чтобы задача (3.1.10) имела конечное решение, необходимо и достаточно, чтобы система неравенств*

$$ZD \leq H \tag{3.2.4}$$

была разрешима.

Доказательство, очевидно, следует из теоремы двойственности линейного программирования [105]. Действительно, если задача (3.1.10) разрешима и имеет конечное оптимальное решение, то и двойственная к ней разрешима, и наоборот, а ограничениями двойственной к задаче (3.1.10) и являются условия (3.2.4).

Условия теоремы 3.2.2 имеют экономический смысл. Для того, чтобы издержки от эксплуатации аварийных технологических способов при ликвидации невязки были бы конечны, необходимо и достаточно, чтобы существовала система оценок Z продукции, которая выпускается при помощи аварийных технологических способов, причем стоимость продукции в этих оценках, выпущенной i-м технологическим способом, при его эксплуатации с единичной интенсивностью была бы не выше издержек на его эксплуатацию с единичной интенсивностью.

Теорема 3.2.3. [203] *Пусть матрица D имеет $m + 1$ столбцов* *и удовлетворяет условию теоремы 3.2.1, т.е.*

$$-D_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} \pi_j D_j,\ \ \pi_j > 0;\ \ j = \overline{1, m}.$$

Тогда для того, чтобы выполнялось условие теоремы 3.2.2, необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения:

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_j h_j + h_{m+1} \geq 0,\ \ \pi_j > 0,\ \ j = \overline{1, m}. \tag{3.2.5}$$

`Доказательство.` Необходимость. Пусть задача второго этапа (3.1.10) разрешима, тогда множество планов двойственной к ней задачи непусто. Пусть вектор Z_0 удовлетворяет условиям (3.2.4) двойственной задачи, т.е.

$$Z_0 D_i \leq h_j,\ \ j = \overline{1, m+1}. \tag{3.2.6}$$

Отсюда при $\pi_j > 0$,

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_j Z_0 D_j \leq \sum_{j=1}^{m} \pi_j h_j;\quad Z_0 D_{m+1} = -\sum_{j=1}^{m} Z_0 \pi_j D_j. \tag{3.2.7}$$

Кроме того, имеем

$$Z_0 D_{m+1} = -\sum_{j=1}^{m} Z_0 \pi_j D_j \leq h_{m+1}. \tag{3.2.8}$$

Из условий (3.2.7) и (3.2.8) получаем требуемый результат (3.2.5).

Достаточность. Пусть (3.2.5) имеет место, а целевая функция задачи второго этапа (3.1.10) не ограничена на множестве планов, тогда множество планов задачи, двойственной к задаче второго этапа, пусто

$$\{Z | ZD \leq H\} = \emptyset. \tag{3.2.9}$$

Из линейной независимости векторов $D_1, \ldots, D_m$ следует, что система

$$ZD_j = h_j,\ \ j = \overline{1, m} \tag{3.2.10}$$

имеет единственное решение Z_0. В силу соотношения (3.2.9) имеем

$$Z_0 D_{m+1} > h_{m+1}. \qquad (3.2.11)$$

Из условий теоремы и соотношений (3.2.10), (3.2.11) получаем

$$Z_0 D_{m+1} = -\sum_{j=1}^{m} Z_0 \pi_j D_j = -\sum_{j=1}^{m} \pi_j h_j > h_{m+1},$$

что противоречит условию (3.2.5).

Теорема доказана.

Условие (3.2.5) имеет экономический смысл в терминах задачи планирования. Пусть технологические способы составляют замкнутую систему, тогда издержки от эксплуатации аварийных производственных способов с целью компенсации невязок, будут конечны, если нельзя получить прибыль при холостом режиме работы, т.е. когда выполняется соотношение (3.2.3). В работе [208] показано, что аналогичное условие отсутствия прибыли имеет место и для случаев, когда $n > m+1$. Но тогда это условие будет только необходимым.

Рассмотрим детерминированный эквивалент к двухэтапной задаче стохастического программирования (3.1.6)-(3.1.9) и покажем, что он является задачей выпуклого программирования. Двойственной к задаче второго этапа (3.1.10) является следующая:

$$(Z, B - AX) \to \max, \qquad (3.2.12)$$

$$ZD \le H. \qquad (3.2.13)$$

Пусть решение задачи (3.1.10) существует и конечно, тогда существует и конечно решение задачи (3.2.12)-(3.2.13) и оптимальные значения обоих функционалов совпадают [105], обозначим значение функционала через Ф. Можно утверждать, что $\Phi(X, A, B)$ — выпуклый по X. Действительно, пусть $Z(X, A, B)$ — точка, в которой достигается максимум (3.2.12) при условиях (3.2.13) для фиксированных X, A, B. Тогда для любых X_1 и X_2, для которых экстремальное значение целевой функции (3.2.12) конечно, имеем:

$$Z(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2, A, B)(B - A(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2)) =$$

$$= Z(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2, A, B)[\alpha(B - AX_1) + (1-\alpha)(B - AX_2)] \leq$$

$$\leq \alpha Z(X_1, A, B)(B - AX_1) + (1-\alpha)Z(X_2, A, B)(B - AX_2).$$

Пусть Ф — целевой функционал детерминированной эквивалентной задачи, тогда Ф — выпуклая функция, поскольку неотрицательная комбинация выпуклых функций есть функция выпуклая. Из выпуклости целевого функционала Ф вытекает его непрерывность во всех внутренних точках выпуклого множества K. Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 3.2.4. *Детерминированный эквивалент двухэтапной задачи стохастического программирования (3.1.6)-(3.1.9) является задачей выпуклого программирования.*

Последнее утверждение служит теоретической основой для построения численных методов решения двухэтапных задач. Для рассмотрения методов решения двухэтапной задачи потребуется использовать выражение опорного функционала к $\Phi(X)$ и установить условие дифференцируемости. При этом будем понимать под опорным функционалом к выпуклому функционалу $F(\mu)$ в точке $\mu_0 \in M$ линейный функционал L, если $F(\mu) - F(\mu_0) \geq (L, \mu - \mu_0)$ при всех $\mu \in M$. Приведем утверждения, следуя [203] и [208].

Теорема 3.2.5. *Функционал*

$$E\{C - Z^*(A, B, X_0)A\} = \int_\Omega \{C(\omega) - Z^*[A(\omega), B(\omega), X_0]A(\omega)\}dp$$

является опорным к целевому функционалу эквивалентной детерминированной задачи в точке $X_0 \in K$.

В работе [208] показано, что если вероятностная мера в пространстве A, B абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в пространстве A, B и выполняются некоторые условия, то целевая функция $\Phi(X)$ эквивалентной детерминированной задачи всюду на множестве K непрерывно дифференцируема.

Для исследования условий оптимальности плана X первого этапа нам потребуется вектор $C_X = E[C - Z^*(A, B, X)A]$ и линейная форма $L_{X_1} = (C_{X_1}, X) = E[C - Z^*(A, B, X)A]X$. В соответствии с работой [203] сформулируем необходимые условия оптимальности детерминированного плана X двухэтапной задачи стохастического программирования.

Теорема 3.2.6. *Если* X^* *— детерминированный план двухэтапной задачи, то для любого* $X \in K$ *имеет место*

$$L_X(X^*) \leq L_X(X). \tag{3.2.14}$$

Доказательство. Пусть X^* — оптимальный план, а X — допустимый план двухэтапной задачи, тогда имеем $\Phi(X^*) \leq \Phi(X)$

$$E(CX^* + Z^*(A, B, X^*)(B - AX^*)) \leq E(CX + Z^*(A, B, X)(B - AX)); \tag{3.2.15}$$

$$E(Z^*(A, B, X^*)(B - AX^*)) \leq E(Z^*(A, B, X)(B - AX^*)). \tag{3.2.16}$$

Вычитая (3.2.16) из (3.2.13) и учитывая, что $Z^*(A, B, X^*)$ — оптимальный план двойственной задачи, получаем требуемый результат (3.2.14).

Теорема доказана.

Следуя работам [119] и [203], приведем экономический смысл условия (3.2.14). Вектор $Z^*(A,B,X)$ — решение двойственной задачи к задаче второго этапа является вектором оценок продуктов, оказавшихся дефицитными или излишними при интенсивностях X технологических способов после того, как реализовались технологическая матрица A и вектор спроса B. Эти оценки определяют влияние величины невязки на издержки, связанные с наиболее экономной ликвидацией невязок. Величина $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} Z_i^*(A,B,X) - c_j$ указывает прибыльность эксплуатации j-го технологического способа с единичной интенсивностью в предположении, что параметры задачи реализовались как элементы матрицы A и составляющие векторов B и C, а оценки продуктов подсчитаны для случая, когда эксплуатация технологических способов производится с интенсивностью X. Если вектор X^* определяет оптимальный предварительный план двухэтапной задачи, то суммарная средняя прибыль при интенсивностях X^* использования технологических способов производства, подсчитанная в оптимальных (отвечающих X^*) оценках, не меньше суммарной средней прибыли, подсчитанной в оптимальных оценках для любого другого допустимого плана X.

Сформулируем без доказательства теорему о необходимых и достаточных условиях оптимальности плана двухэтапной задачи стохастического программирования.

Теорема 3.2.7. *Пусть X^* — внутренняя точка множества K, а целевая функция $\Phi(X)$ детерминированной задачи, эквивалентной двухэтапной задаче, дифференцируема в окрестности точки X^*. Тогда задача, двойственная к задаче второго этапа имеет ре-*

шение $Z^*(A, B, X^*)$, *такое, что*

$$C_{X^*} = E[C - Z^*(A, B, X^*)A] = 0, \tag{3.2.17}$$

тогда и только тогда, когда X^* *— решение двухэтапной задачи [203].*

3.3 Некоторые частные модели двухэтапной задачи стохастического программирования

В настоящем разделе рассмотрим часто встречающиеся в приложениях частные постановки двухэтапной задачи стохастического линейного программирования, в которых случайными являются только составляющие вектора ограничений $B(\omega)$. Все остальные параметры условий задачи детерминированы.

Пусть матрица аварийных технологических способов имеет вид $D = (I, -I)$. Задачу (3.1.6)-(3.1.9) с такой матрицей называют простейшей постановкой двухэтапной задачи стохастического линейного программирования. Наличие невязки в условиях задачи в данном случае учитывается простейшим способом: как за недопроизводство, так и за перепроизводство платится штраф, который в частности может равняться нулю. Вектор штрафов от перепроизводства H^+ (m-мерный вектор) может отражать дополнительные издержки от хранения готовой продукции, не реализованой и лежащей на складах; вектор штрафов от недопроизводства H^- (m-мерный вектор) может отражать недополученную прибыль из-за неудовлетворенного спроса на продукцию. Данная постановка двухэтапной задачи была исследована многочисленными авторами и, прежде всего, в работах [117], [201], [433], [434], [435]. Для простейшей постановки получены некоторые конструктивные результаты, которые позволяют находить решение задачи точно или приближенно.

Пусть матрица D имеет вид $(I, -I)$, где I — $m \times m$-мерная единичная матрица. Векторы Y и H разобьем на две части, соответствующие подматрицам $I, -I$. Задача в этом случае (3.1.6)-(3.1.9) примет вид

$$(C, X) + E[(H^+, Y^+) + (H^-, Y^-)] \to \min \qquad (3.3.1)$$

при условиях

$$A^0 X = B^0, \qquad (3.3.2)$$

$$AX + IY^+ - IY^- = B, \qquad (3.3.3)$$

$$X \geq 0,\ Y^+ \geq 0,\ Y^- \geq 0, \qquad (3.3.4)$$

где H^+, H^-, Y^+, Y^- — m-мерные векторы.

Задача второго этапа имеет вид

$$[(H^+, Y^+) + (H^-, Y^-)] \to \min, \qquad (3.3.5)$$

$$IY^+ - IY^- = B - AX,\ Y^+ \geq 0,\ Y^- \geq 0 \qquad (3.3.6)$$

и обладает планами при любой правой части $B - AX$. Для разрешимости задачи (3.3.5)-(3.3.6) необходимо и достаточно, чтобы $H^+ + H^- \geq 0$. Будем считать, что $H^+ + H^- \geq 0$, исключив из рассмотрения такие задачи (3.3.1)-(3.3.4), для которых $\Phi(X) \equiv -\infty$ при $X \in K$. Очевидно, что у эквивалентной детерминированной задачи к задаче (3.3.1)-(3.3.4) индуцированные ограничения будут отсутствовать.

Рассмотрим задачу, двойственную к задаче (3.3.5)-(3.3.6):

$$\left[\max \sum_{i=1}^{m} (b_i - (A_i, X)) Z_i | - H^- \leq Z \leq H^+ \right]. \qquad (3.3.7)$$

Оптимальный план задачи (3.3.7) примет вид:

$$Z_i((A_i, X), b_i) = -h_i^-, \text{ если } b_i - (A_i, X) < 0,$$

$$Z_i((A_i,X),b_i)=h_i^+,\ \text{если } b_i-(A_i,X)>0,$$

$Z_i((A_i,X),b_i)$ — произвольное число на интервале $[-h_i^-,h_i^+]$, если $b_i-(A_i,X)=0$.

Если ввести выпуклые по (A_i,X) функции

$$\varphi_i((A_i,X),b_i)=$$

$$=\left\{\min(h_i^+y_i^+ + h_i^-y_i^-)\middle| y_i^+ - y_i^- = b_i-(A_i,X); y_i^+\geq 0, y_i^-\geq 0\right\}=$$

$$=Z_i((A_i,X),b_i)(b_i-(A_i,X)),\ i=\overline{1,m},$$

то задача (3.3.1)-(3.3.4) сводится к следующей задаче выпуклого сепарабельного программирования:

$$\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(A_i,X)\to\min \qquad (3.3.8)$$

при условиях

$$A^0X=B^0,\ AX-(A_i,X)=0,\ X\geq 0. \qquad (3.3.9)$$

В случае конечного числа реализаций вектора B простейшую двухэтапную задачу можно представить в виде:

$$\min_{X,Y}\left\{(C,X)+\sum_{r=1}^{N}P_rHY(\omega_r)\right\}, \qquad (3.3.10)$$

где X и $Y(\omega_r)$ удовлетворяют нижеследующим ограничениям, притом имеет место $P\{B(\omega)=B(\omega_r)\}=P_r,\ r=\overline{1,N}$

$$\left\{\begin{array}{lllll} AX & + & DY(\omega_1) & & =B(\omega_1)\\ AX & + & & DY(\omega_2) \quad & =B(\omega_2)\\ \multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\ AX & + & & \quad\quad DY(\omega_N) & =B(\omega_N)\end{array}\right. \qquad (3.3.11)$$

$$X\geq 0;\ Y(\omega_r)\geq 0,\ r=\overline{1,N}. \qquad (3.3.12)$$

Соответствующая двойственная задача имеет вид:

$$\max\left\{B(\omega_1)^T\widehat{Z}^1 + B(\omega_2)^T\widehat{Z}^2 + \cdots + B(\omega_N)^T\widehat{Z}^N\right\} \tag{3.3.13}$$

$$\begin{cases} A^T\widehat{Z}^1 \; + \; A^T\widehat{Z}^2 \; + \; \ldots \; + \; A^T\widehat{Z}^N \le C \\ D^T\widehat{Z}^1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \le P_1H \\ \qquad\qquad A^T\widehat{Z}^2 \qquad\qquad\qquad\quad \le P_2H \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad D^T\widehat{Z}^N \le P_NH \end{cases} \tag{3.3.14}$$

Если в качестве переменных двойственной задачи рассматривать величины $Z^r = \frac{\widehat{Z}^r}{P_r}$ $(r = \overline{1,N})$, то получим задачу

$$\max\left\{P_1B(\omega_1)^T\widehat{Z}^1 + P_2B(\omega_2)^T\widehat{Z}^2 + \cdots + P_NB(\omega_N)^T\widehat{Z}^N\right\} \tag{3.3.15}$$

$$\begin{cases} P_1A^T\widehat{Z}^1 \; + \; P_2A^T\widehat{Z}^2 \; + \; \ldots \; + \; P_NA^T\widehat{Z}^N \le C \\ D^T\widehat{Z}^1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \le H \\ \qquad\qquad A^T\widehat{Z}^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \le H \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad D^T\widehat{Z}^N \le H \end{cases} \tag{3.3.16}$$

Структура матрицы задачи (3.3.15)-(3.3.16) позволяет решать эту задачу методом разложения, используя первые ограничения в (3.3.16) в качестве «зацепляющих» ограничений, а все остальные рассматривать как единый блок.

Пусть вектор $B(\omega)$ распределен дискретно с конечным числом реализаций при этом составляющие b_i вектора $B(\omega)$ могут принимать значения $b_i^1 < b_i^2 < \cdots < b_i^{k_i}$ с вероятностями $p_i^1, p_i^2, \ldots, p_i^{k_i}$ соответственно. В этом случае ввод дополнительных переменных и ограничений может свести выпуклую кусочно-линейную задачу к задаче линейного программирования.

Если составляющие вектора $B(\omega)$ равномерно распределены на отрезке $[u_i, v_i]$, т.е.

$$\Psi_i(b_i) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad b_i < u_i \\ \frac{b_i - u_i}{v_i - u_i} & \text{при} \quad b_i \in [u_i, v_i] \\ 1 & \text{при} \quad b_i > v_i \end{cases} \tag{3.3.17}$$

детерминированный эквивалент двухэтапной задачи (3.3.1)-(3.3.4) оказывается задачей квадратичного программирования.

К задаче квадратичного программирования можно свести задачу (3.3.1)-(3.3.4) и в этом случае, когда все компоненты b_i вектора $B(\omega)$ распределены экспоненциально, т.е.

$$\Psi_i(b_i) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad b_i < u_i \\ 1 - e^{-\lambda_i (b_i - u_i)} & \text{при} \quad b_i \in [u_i, \infty) \end{cases} \tag{3.3.18}$$

Двухэтапную задачу стохастического программирования, в которой все случайные компоненты вектора $B(\omega)$ имеют непрерывную функцию распределения, можно приближенно свести к задаче квадратичного программирования. Для этого достаточно заменить случайные величины взвешенными суммами равномерно распределенных случайных величин

$$b_i = \sum_{r=1}^{k_i} p_i^r b_i^r; \ \sum_{r=1}^{k_i} p_i^r = 1 \tag{3.3.19}$$

$$\Psi_i^r(b_i^r) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad b_i^r < u_i^r \\ \frac{b_i^r - u_i^r}{v_i^r - u_i^r} & \text{при} \quad b_i^r \in [u_i^r, v_i^r] \\ 1 & \text{при} \quad b_i^r > v_i^r \end{cases} \tag{3.3.20}$$

3.4 Двухэтапная задача стохастического нелинейного программирования

Двухэтапная задача стохастического нелинейного программирования рассматривается как обобщение линейного случая в работе [280] и в специальном виде в работе [396], где дается особый алгоритм ее решения.

Рассмотрим задачу:

$$\min_X E \min_Y [\varphi(X) + \psi(Y)] \tag{3.4.1}$$

при условии

$$g(X) + h(Y) \geq b, \tag{3.4.2}$$

где $\varphi(X)$ — скалярная функция n_1-мерного вектора X, $\psi(Y)$ — скалярная функция n_2-мерного вектора Y, $g(X)$ и $h(Y)$ — векторы размерности m, компоненты которых являются скалярными функциями своих аргументов, и b — есть случайный m-мерный вектор с известным распределением. E — обозначает математическое ожидание относительно распределения вектора b. В литературе такую постановку задачи (3.4.1)-(3.4.2) называют ситуацией «here and now» по Данцигу. Сначала принимается решение относительно X, затем ждут и наблюдают какую-либо реализацию случайных величин и только после этого решают нестохастическую задачу, выбирая вектор Y оптимальным образом. Дальнейшее изложение будет относиться к двухэтапной задаче на минимум (3.4.1)-(3.4.2), хотя аналогичные результаты могут быть получены в соответствующих условиях и для постановки двухэтапной задачи на максимум.

Для удобства обозначим:

$$\gamma(b, X) = \min_Y \{\varphi(X) + \psi(X) | g(X) + h(Y) \geq b\}. \tag{3.4.3}$$

Тогда задача (3.4.1) - (3.4.2) примет вид:

$$\min_X E\gamma(b, X). \tag{3.4.4}$$

Так как задача (3.4.4) имеет ограниченный минимум в пространстве X, будем полагать, что существует выпуклое множество K такое, что для каждого $X \in K$ существует Y такой, что выполняется $g(X) + h(Y) \geq b$ при любом векторе b. Такие X будем называть допустимыми.

Определим $\overline{X}(Eb)$ как решение задачи

$$\min_X \gamma(Eb, X) = \min_{X,Y} \{\varphi(X) + \psi(X) | g(X) + h(Y) \geq Eb\}. \qquad (3.4.5)$$

Кроме того, введем задачу для всех $b \leq b_{\max}$ с конечным распределением

$$\min_X \gamma(b_{\max}, X) = \min_X \min_Y \{\varphi(X) + \psi(Y) | g(X) + h(X) \geq b_{\max}\}. \qquad (3.4.6)$$

Задачи (3.4.5), (3.4.6) являются нестохастическими и, если функции $g(X)$ и $h(X)$ являются вогнутыми, они могут быть решены с использованием условий Куна-Таккера [256].

Задача (3.4.1)-(3.4.2) может быть решена непосредственно в частично-линейном случае, когда $\psi(Y)$ и $h(Y)$ являются линейными функциями, а вектор b имеет конечное дискретное распределение $\pi_i,\ i = \overline{1,l}$. В этом случае можно ввести векторы $Y^i,\ i = \overline{1,l}$, каждый из которых имеет ту же размерность, что и Y. Тогда задача (3.4.1)-(3.4.2) переходит в детерминированную задачу с $n_1 + ln_2$ неизвестными и $m \times l$ ограничениями

$$\min_{X,Y^i} \left\{ \varphi(X) + \sum_{i=1}^{l} \pi_i \psi(Y^i) \middle| g(X) + h(Y^i) \geq b_i,\ i = \overline{1,l} \right\}.$$

Для дальнейшего нам потребуется рассмотреть некоторые результаты работы [280]. Пусть имеем следующую задачу параметрического нелинейного программирования:

$$\min_Z \theta(Z, a) \qquad (3.4.7)$$

при условии

$$f(Z, a) \geq 0, \qquad (3.4.8)$$

где θ — скалярная функция от векторов Z и a, f — векторная функция от Z и a.

Лемма 3.4.1. *Скалярная функция*

$$\alpha(a) \equiv \min_Z \{\theta(Z, a) | f(Z, a) \geq 0\}$$

является выпуклой и непрерывной по a при условии, что θ есть выпуклая и непрерывная функция от $[Z, a]$, и каждая компонента функции f является вогнутой и непрерывной функцией от $[Z, a]$.

Более общая формулировка леммы 3.4.1 приводится в работе [265] относительно двухэтапной задачи стохастического нелинейного программирования.

Лемма 3.4.2. *Пусть $\varphi : \ R^n \to R$ и $\psi : \ R^m \to R$ — выпуклые функции. Пусть g и h вектор-функции, $g : \ R^n \to R^k$ и $h : \ R^m \to R^k$, компоненты которых являются вещественными вогнутыми функциями. Если функции φ, ψ, g и h принимают только конечные значения на множестве*

$$B_b = \{(X, Y) | g(X) + h(Y) \geq b\},$$

тогда $\alpha(b) = \inf\limits_{(X,Y) \in B_b} [\varphi(X) + \psi(Y)]$ — есть вещественная выпуклая и непрерывная функция на W, где

$$W = \{b | b \in R^k, b < b_{SI}\},$$

$$b_{SI} = \sup_{X \in R^n} \inf_{j=\overline{1,k}} g_j(X) + \sup_{Y \in R^m} \inf_{j=\overline{1,k}} h_j(Y).$$

На основе вышеприведенных утверждений можно доказать следующую теорему.

Теорема 3.4.1. *Скалярная функция*

$$\alpha(b) \equiv \min_X \gamma(b, X) = \min_X \min_Y \{\varphi(X) + \psi(Y) | g(X) + h(Y) \geq b\} \tag{3.4.9}$$

является выпуклой и неувеличивающейся функцией по b *при условии, что* $\varphi(X)$ *и* $\psi(Y)$ *являются вогнутыми функциями своих аргументов.*

Следствие 3.4.1. *Скалярная функция* $\alpha(b) \equiv \min_X \gamma(b, X)$, *определенная (3.4.9), является непрерывной функцией по* b *при условии, что* $\psi(Y)$ *и* $h(Y)$ *являются выпуклыми и непрерывными функциями своих аргументов.*

Это следствие доказывается с применением теоремы 3.4.1.

Выше приводились утверждения, использующие выпуклость функции по случайному вектору, рассмотрим теорему, которая обеспечивает выпуклость функции $\gamma(b, X)$ по допустимым X.

Теорема 3.4.2. *Функция*

$$\gamma(b, X) = \min\{\varphi(X) + \psi(Y) | g(X) + h(Y) \geq b\}$$

есть выпуклая функция по допустимым X *для любого фиксированного* b *при условии, что* φ *и* ψ *являются выпуклыми функциями и компоненты* g *и* h *являются вогнутыми функциями своих аргументов.*

Доказательство осуществляется, вводя соответствующие обозначения и применяя лемму 3.4.1 и теорему 3.4.1.

Следствие 3.4.2. *Функция* $E\gamma(b, X)$ *является выпуклой функцией по допустимым* X *при выполнении условий теоремы 3.4.2.*

Приведенные общие результаты позволяют указать некоторые теоремы, дающие верхние и нижние границы для задачи (3.4.1)-(3.4.2). Введем задачу «wait and see» по Маданскому, которая отличается от постановки задачи по Данцигу тем, что в начале наблюдается реализация случайного вектора b, а затем решается задача нестохастического программирования, основанная на этой реализации b, т.е. задача

$$E\min_X \gamma(b,X) = E\min_X \min_Y\{\varphi(X)+\psi(Y)|g(X)+h(Y)\geq b\}. \quad (3.4.10)$$

Теорема 3.4.3. *Пусть $\overline{X}(Eb)$ решение задачи $\min_X \gamma(Eb,X)$.*

Имеют место неравенства:

$$E\gamma(b,\overline{X}(Eb)) \geq \min_X E\gamma(b,X) \geq E\min_X \gamma(b,X) \geq \min_X \gamma(Eb,X).$$

При этом только для последнего неравенства предполагается, что $\varphi(X)$ и $\psi(Y)$ являются выпуклыми и непрерывными функциями, а компоненты $g(X)$ и $h(Y)$ являются вогнутыми и непрерывными функциями своих соответствующих аргументов.

`Доказательство.` Первое из неравенств очевидно, т.к. $\min_X E\gamma(b,X)$ не превосходит значения функции $E\gamma(b,X)$, вычисленного в некоторой точке $X = \overline{X}(Eb)$. Для второго неравенства имеем, если $\overline{X}$ — решение, которое минимизирует $E\gamma(b,X)$, и если $\overline{X}(b)$ — решение, минимизирующее $\gamma(b,X)$:

$$\min_X E\gamma(b,X) = E\gamma(b,\overline{X}).$$

$$E\min_X \gamma(b,X) = E\gamma(b,\overline{X}(b)).$$

Так как для каждого b выполняется неравенство

$$\gamma(b,X) \geq \gamma(b,\overline{X}(b)),$$

то по свойствам математического ожидания

$$E\gamma(b,\overline{X}) \geq E\gamma(b,\overline{X}(b)) \quad \text{или} \quad \min_X E\gamma(b,X) \geq E\min_X \gamma(b,X).$$

Для доказательства третьего неравенства следует применить неравенство Иенсена, которое устанавливает, что для выпуклой непрерывной функции G, зависящей от случайного вектора X выполняется $EG(X) \geq G(EX)$. Поскольку в соответствии с теоремой 3.4.1

и следствием 3.4.1 $\min_X \gamma(b, X)$ является выпуклой и непрерывной функцией по b, то, следовательно, выполняется
$E \min_X \gamma(b, X) \geq \min_X \gamma(Eb, X)$, что и доказывает теорему 3.4.3.

Теорема доказана.

Важным следствием этой теоремы является то, что можно дать значениям целевых функций в задачах (3.4.1)-(3.4.2) и (3.4.10) приближенную оценку снизу, решая единственную нестохастическую задачу, именно задачу (3.4.5). Если вектор b имеет конечное распределение, можно получить некоторую приближенную верхнюю границу задачи (3.4.1)-(3.4.2) и тем самым для задачи (3.4.10), решая единственную детерминированную задачу (3.4.6).

Теорема 3.4.4. *Если случайный вектор b имеет конечное распределение, т.е. $-\infty < b_{\min} \leq b \leq b_{\max} < \infty$, то выполняется соотношение*

$$\min_X \gamma(b_{\max}, X) \geq \min_X E\gamma(b, X).$$

Доказательство. По определению имеем:

$$\min_X \gamma(b_{\max}, X) = \min_X \min_Y \{\varphi(X) + \psi(Y) | g(X) + h(Y) \geq b_{\max}\},$$

$$\min_X \gamma(b, X) = \min_X \min_Y \{\varphi(X) + \psi(Y) | g(X) + h(Y) \geq b\}.$$

Для фиксированных X и b, каждое значение Y, которое удовлетворяет $g(X) + h(Y) \geq b_{max}$, также удовлетворяет $g(X) + h(Y) \geq b$. Отсюда следует, что и $\gamma(b_{\max}, X) \geq \gamma(b, X)$, а также
$\gamma(b_{\max}, X) \geq E\gamma(b, X)$. Следовательно, выполняется

$$\min_X \gamma(b_{\max}, X) \geq \min_X E\gamma(b, X).$$

Теорема доказана.

Следующая теорема обеспечивает нижнюю границу для значений целевой функции в задаче (3.4.1)-(3.4.2).

Теорема 3.4.5. *Если φ и ψ являются выпуклыми, а компоненты g и h — вогнутыми функциями и $E\gamma(b, X)$ дифференцируема в точке $X = \overline{X}(Eb)$, имеет место соотношение*

$$\min_X E\gamma(b, X) \geq E\gamma(b, \overline{X}(Eb)) + [\overline{X} - \overline{X}(Eb)]^T \nabla E\gamma(b, \overline{X}(Eb)),$$

где $\overline{X}(E)b$ и $\overline{X}$ — решения, которые минимизируют $\gamma(Eb, X)$ и $E\gamma(b, X)$ соответственно, а ∇ — есть вектор-столбец частных дифференциальных операторов $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

Доказательство проводится с применением следствия 3.4.2. Так как само решение $\overline{X}$ задачи (3.4.4) входит в оценку правой части неравенства, то эта теорема представляет практический интерес только тогда, когда $\overline{X} = \overline{X}(Eb)$ или $\nabla E\gamma(b, \overline{X}(Eb)) = 0$, откуда следует (из теорем 3.4.3 и 3.4.5), что $E\gamma(b, \overline{X}(Eb)) = \min_X E\gamma(b, X)$.

В работе [280] представлен нетривиальный пример двухэтапной задачи (3.4.1)-(3.4.2), на котором основные результаты приведенные выше, численно подтверждаются. В работе [265] переформулированы некоторые утверждения из работы [280], в частности теорема 3.4.3. Рассматриваются функциональные пространства и отказываются от значений верхних границ функций. Обобщаются условия, из которых конкретные результаты для стохастического линейного и нелинейного программирования получаются как частные случаи.

В работе [396] исследуется следующая задача.

Найти вектор $Y \in R^n$, который доставляет

$$\min_Y \left(S(Y) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(Y) \right) \tag{3.4.11}$$

при условии $f_i(Y) \leq g_i$, $i = \overline{1, m}$, где $S(Y)$ — некоторая функция затрат, $p_i(Y)$ — вероятность невыполнения i-го условия системы ограничений, а α_i — связанные с этим затраты. Невыполнение условия $f_i(Y) \leq g_i$ рассматривается как случайное событие G_i, причем вероятность наступления каждого события G_i зависит только от Y. Задачу (3.4.11) можно записать в другой форме.

Найти вектор $Y \in R^n$, который доставляет

$$\min_Y \left(S(Y) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(Y) \right) \tag{3.4.12}$$

при условии $f_i(Y) + \Delta_i \le g_i,\ i = \overline{1,m}$, где $p_i(Y)$ — вероятность невыполнения i-го ограничения, α_i — соответствующие затраты, а Δ_i — случайные величины с законами распределения $F_i(\xi)$, $i = \overline{1,m}$. В линейном случае задачу (3.4.12) можно решить как обычную двухэтапную задачу. Для нелинейного случая в работе [396] показано как привести (3.4.12) к задаче детерминированного выпуклого программирования. Сформулируем следующую теорему.

Теорема 3.4.6. *Пусть $S(Y), f_1(Y), \dots, f_m(Y)$ — выпуклые функции и каждая функция $F_j(\xi)$ вогнута на некотором отрезке $[a_j, b_j]$, содержащем число ξ_j^*, причем $\xi_j^* = g_j - f_j(Y^*)$, а Y^* — оптимальное решение в задаче (3.4.12). Тогда для того чтобы задачу (3.4.12) заменить эквивалентной ей задачей выпуклого программирования, достаточно ввести дополнительные переменные $u_1, u_2, \dots, u_m$, на которые наложены условия*

$$\begin{cases} u_j & \le & 1 - F_j(a_j) \\ u_j & \ge & 1 - F_j(b_j) \\ u_j & \ge & p_j(Y),\ j = \overline{1,m} \end{cases} \tag{3.4.13}$$

где $p_i(Y) = 1 - F_j(r_j(Y)),\ r_j(Y) = g_j - f_j(Y)$. Целевая функция задачи имеет вид:

$$S(Y) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, \tag{3.4.14}$$

а оптимальный вектор $u^* = (p_1(Y^*), \dots, p_m(Y^*))$.

Эту задачу с $m + l$ неизвестными можно решить методами выпуклого программирования, поскольку по условию теоремы целевая функция (3.4.14) выпуклая вблизи оптимального решения Y^*. Однако возникают трудности из-за «овражности» задачи, т.к. при переходе через некоторую границу в пространстве R^n затраты $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i p_i$ начинают быстро возрастать из-за увеличения вероятности невыполнения i-го условия.

В работе [396] приводится пример практического поиска решения, причем число переменных увеличивается.

В работах [25]-[28] обобщаются модели двухэтапных задач стохастического программирования таким образом, что в них укладываются задачи стохастического оптимального управления поведением динамических систем. Рассматриваются системы, управляемое поведение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Начальное состояние системы, закон ее движения, целевой функционал и ограничения на фазовые координаты зависят от случайных параметров. Предварительное решение об управлении системой принимается до наблюдения реализаций случайных параметров условий задачи. Невязки в ограничениях задачи, выявляющиеся после выбора предварительного решения, компенсируются коррекциями. Для оптимального выбора коррекции при каждой реализации случайных параметров условий требуется решить новую задачу оптимального управления — задачу второго этапа. Математическое ожидание значений нижней грани целевого функционала задачи второго этапа, как и в классической двухэтапной задаче стохастического программирования, определяет штраф за коррекцию и входит составной частью в целевой функционал бесконечномерной двухэтапной задачи.

3.5 Методы решения двухэтапной задачи стохастического программирования

Многие двухэтапные задачи стохастического программирования на этапе определения предварительного плана заменяются детерминированными эквивалентами-задачами выпуклого программирования. Однако традиционные методы решения задач выпуклого программирования, как правило, неприменимы для решения двухэтапных задач стохастического программирования, поскольку целевая функция и множество допустимых решений задачи в общем случае заданы неявно. Методы решения, которые рассмотрены в настоящем разделе, используют специфические особенности эквивалентной детерминированной задачи и позволяют вычислить предварительный план и получить приближенные оценки решения исходной задачи. В частных случаях удается свести двухэтапную задачу к линейной или кусочно-линейной задаче, естественно, в этих случаях нет необходимости прибегать к нижеследующим трудоемким методам решения.

В работах [133]-[136] исследуется метод обобщенных стохастических градиентов, позволяющий по реализациям случайных параметров условий задачи последовательно уточнять оптимальный план первого этапа. Следуя [133], рассмотрим сущность метода обобщенных стохастических градиентов.

Пусть заданы:

1) система линейных неравенств вида

$$AX + DY \geq B(\omega), \tag{3.5.1}$$

$$X \geq 0,\ Y \geq 0, \tag{3.5.2}$$

где A — матрица $m \times n_1$, D — матрица $m \times n_2$, X, Y — соответственно n_1- и n_2-мерные вектора, $B(\omega)$ — m-мерный, случайный вектор с распределением $dP(\omega)$ с ограниченной дисперсией;

2) две линейные формы:

$$L_1(X) = (C^1, X);\ L_2(X) = (C^2, Y),$$

где C^1 — n_1-мерный, а C^2 — n_2-мерный вектор.

Обозначим через $\Phi(X, B(\omega))$ значение

$$\min(C^2, Y) \tag{3.5.3}$$

при условиях

$$DY \geq B(\omega) - AX, \tag{3.5.4}$$

$$Y \geq 0. \tag{3.5.5}$$

Будем считать, что для любого $X \geq 0$ и $B(\omega)$ существует решение задачи (3.5.3)-(3.5.5). Пусть $E(X) = \int \Phi(X, B(\omega))dP(\omega)$. Требуется найти

$$\min_{X \geq 0} F(X) = \min_{X \geq 0}[(C^1, X) + E(X)]. \tag{3.5.6}$$

Функция $F(X)$ выпуклая, но не обязательно непрерывно-дифференцируемая. Найдем выражение для внутренней нормали опорной гиперплоскости к телу $\{X:\ F(X) \leq F(X^0)\}$ в некоторой точке X^0. Рассмотрим двойственную задачу к задаче второго этапа (3.5.3)-(3.5.5).

Найти

$$G(X, B(\omega)) = \max[(\lambda, B(\omega)) - (X, A^*\lambda)] \tag{3.5.7}$$

при ограничениях

$$D^*\lambda \leq C^2, \tag{3.5.8}$$

$$\lambda \geq 0. \tag{3.5.9}$$

Из теоремы двойственности следует

$$G(X, B(\omega)) = \Phi(X, B(\omega)). \tag{3.5.10}$$

Функция $G(X, B(\omega))$ — выпуклая по X. Пусть $\lambda(X, B(\omega))$ — точка, в которой достигается максимум в (3.5.7). Будем считать область R, высекаемую ограничениями (3.5.8)-(3.5.9), ограниченной, тогда $\lambda(X, B(\omega))$ можно выбирать совпадающей с одной из вершин R. В случае неоднозначности решения задачи (3.5.7)-(3.5.9) $\lambda(X, B(\omega))$ можно выбирать, например, следующим образом: перенумеруем условно вершины R и будем выбирать $\lambda(X, B(\omega))$ равной вершине с наименьшим номером из вершин, являющихся решением этой задачи. При таком определении $\lambda(X, B(\omega))$ будет представлять кусочно-постоянную вектор-функцию от X и $B(\omega)$, $G(X, B(\omega))$ — кусочно-линейную функцию от X, измеримую по мере Лебега-Стильтьеса $dP(\omega)$. Зафиксируем некоторую точку $X = X^0$. Тогда справедливы соотношения:

$$G(X, B(\omega)) \geq [(\lambda(X^0, B(\omega)), B(\omega)) - (X, A^*\lambda(X^0, B(\omega)))],$$

$$G(X^0, B(\omega)) = [(\lambda(X^0, B(\omega)), B(\omega)) - (X^0, A^*\lambda(X^0, B(\omega)))].$$

Отсюда следует

$$E(X) \geq \int (\lambda(X^0, B(\omega)), B(\omega)) dP(\omega) - \int (X, A^*\lambda(X^0, B(\omega))) dP(\omega),$$

$$E(X) = \int (\lambda(X^0, B(\omega)), B(\omega)) dP(\omega) - \int (X^0, A^*\lambda(X^0, B(\omega))) dP(\omega),$$

$$E(X) - E(X^0) \geq - \int (X - X^0, A^*\lambda(X^0, B(\omega))) dP(\omega). \tag{3.5.11}$$

В соответствии с неравенством (3.5.11) математическое ожидание случайного вектора $C^1 - A^*\lambda(X^0, B(\omega))$ и является искомым вектором внутренней нормали опорной гиперплоскости к телу $\{X : \ F(X) \leq F(X^0)\}$.

Таким обазом, вычисление обобщенного стохастического градиента функции $F(X)$ сводится к вычислению интегралов (3.5.11), что при известном $dP(\omega)$ приводит к решению параметрической задачи линейного программирования. В частном случае, когда $B(\omega)$ принимает конечное число значений, получаем алгоритм, описанный в [133]. Однако решение параметрической задачи вызывает большие трудности. Кроме того, вектор $B(\omega)$ часто получается путем случайных испытаний и распределение $dP(\omega)$ априори не известно. Поэтому в общем случае предлагается алгоритм случайного поиска следующего вида.

Пусть на s-м шаге получено значение X^s. Тогда $(s+1)$-й шаг описывается следующим образом:

а) выбираем случайную реализацию $B(\omega)^{(s)}$ в соответствии с $dP(\omega)$;

б) находим $\lambda(X^{(s)}, B(\omega)^{(s)})$, решая задачу (3.5.7) - (3.5.9) при $X = X^{(s)},\ B(\omega) = B(\omega)^{(s)}$;

в) находим

$$X^{(s+1)} = \max\{0, X^{(s)} + \rho_s[C^1 - A^*\lambda(X^{(s)}, B(\omega)^{(s)})]\}, \qquad (3.5.12)$$

где ρ_s — величина шага. Движение точки $X^{(s)}$ при этом происходит в случайном направлении, математическое ожидание которого совпадает с направлением обобщенного градиентного спуска.

Сущность метода обобщенных стохастических градиентов заключается в следующем.

Пусть требуется минимизировать выпуклую вниз функцию $F(X) = F(X_1, \ldots, X_n)$. Рассматривается итеративный процесс

$$X^{(s+1)} = X^{(s)} + \rho_s\xi^{(s)},\ s = 0, 1, \ldots, \qquad (3.5.13)$$

где $X^{(0)}$ — произвольная точка, ρ_s — величина шага, $\xi^{(s)}$ — случайное направление такое, что

$$E\{\xi^{(s)}/X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(s)}\} = \overline{F}_X(X^{(s)}), \tag{3.5.14}$$

где $\overline{F}_X$ удовлетворяет неравенству

$$F(Y) - F(X) \geq (\overline{F}_X(X), Y - X). \tag{3.5.15}$$

Пусть $\min F(X) = F(X^*) > -\infty$. Без ограничения общности считаем, что точка X^* единственная.

Теорема 3.5.1. *Пусть*

$$\rho_s > 0,\ \sum_{s=1}^{\infty} \rho_s = \infty,\ \sum_{s=1}^{\infty} \rho_s^2 < \infty; \tag{I}$$

$$E(\|\xi^{(s)}\|^2/X^{(1)}, \ldots, X_{(s)}) \leq C < \infty. \tag{II}$$

Тогда $\lim \|X^* - X^{(s)}\| = 0,\ s \to \infty$, *с вероятностью 1.*

Доказательство этого утверждения приведено в работе [137]. Покажем, что для процесса (3.5.12) условия теоремы 3.5.1 выполняются. Действительно, из предположения об ограниченности области R, высекаемой неравенствами (3.5.8)-(3.5.9) следует ограниченность нормы случайного вектора $C^1 - A^*\lambda(X, B(\omega))$. Таким образом, для сходимости процесса (3.5.12) достаточно только условия

$$\rho_s > 0,\ \sum_{s=1}^{\infty} \rho_s = \infty,\ \sum_{s=1}^{\infty} \rho_s^2 < \infty.$$

Иными словами, итеративный процесс обобщенных стохастических градиентов, минимизирующий выпуклую вниз функцию $F(X)$ выпуклом множестве K может быть представлен следующим соотношением

$$X^{(s+1)} = W(X^{(s)} - \rho_s \nu_s \xi^{(s)}),\ s = 0, 1, \ldots, \tag{3.5.16}$$

где $X^{(0)}$ — произвольный n-мерный вектор, принадлежащий множеству K — начальная точка процесса; ρ_s — величина шага на

s-й итерации; ν_s — нормирующий множитель; $\xi^{(s)}$ — случайный вектор, условное математическое ожидание которого относительно $X^{(0)}, \ldots, X^{(s)}$ зависит линейно от обобщенного градиента F_X функции $F(X)$ в точке $X^{(s)}$;

$$E(\xi^{(s)}/X^{(0)}, \ldots, X^{(s)}) = a_s F_X(X^{(s)}) + m^{(s)}, \tag{3.5.17}$$

здесь a_s — некоторое число; $m^{(s)}$ — n-мерный вектор; W — оператор проектирования на множество K, такой, что $W(X) \in K$ и $\|X - W(X)\|^2 \leq \|Y - X\|^2$ для любого $Y \in K$. Оператор проектирования, таким образом, $Y = W(X)$ представляет собой решение следующей задачи выпуклого программирования с квадратичной целевой функцией

$$\inf_{Y \in K} \|X - Y\|^2. \tag{3.5.18}$$

В некоторых частных случаях при явном задании множества K вычисление оператора проектирования $W(X)$ и, следовательно, определение $X^{(s+1)}$ может быть существенно упрощено. Назовем несколько таких случаев:

а) если $K = \{X | X \geq 0\}$, решение задачи (3.5.18) имеет вид $Y^* = W(X) = \max\{0, X\}$, а процесс (3.5.16) записывается

$$X^{(s+1)} = \max\{0, X^{(s)} - \rho_s \nu_s \xi^{(s)}\}; \tag{3.5.19}$$

б) если $K = \{X | a_j \leq X_j \leq b_j\}$, итеративный процесс (3.5.16) можно представить в виде

$$X_j^{(s+1)} = \begin{cases} a_j, & X_j^{(s)} - \rho_s \nu_s \xi_j^{(s)} \leq a_j \\ X_j^{(s)} - \rho_s \nu_s \xi_j^{(s)}, & a_j < X_j^{(s)} - \rho_s \nu_s \xi_j^{(s)} < b_j \\ b_j, & X_j^{(s)} - \rho_s \nu_s \xi_j^{(s)} \geq b_j \end{cases} \tag{3.5.20}$$

в) если $K = \{X | DX = g\} = \{X | (d^{(i)}, X) = g_i,\ i = \overline{1, m}\}$, где векторы $d^{(1)}, \ldots, d^{(m)}$ — линейно независимые строки матрицы D, тогда процесс (3.5.16) принимает вид

$$X^{(s+1)} = W(X^{(s)} - \rho_s \nu_s \xi^{(s)}) = X^{(s)} - \rho_s \nu_s \xi^{(s)} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i d^i, \quad (3.5.21)$$

где λ_i — множители Лагранжа;

г) если $K = \{X | g(X) \leq 0\}$, где $g(X)$ — выпуклая дифференцируемая функция, тогда задача вычисления оператора проектирования имеет решение

$$Y = W(X) = \begin{cases} X, \ g(X) \leq 0, \\ \widetilde{X}, \ g(X) > 0 \end{cases} \quad (3.5.22)$$

и $\widetilde{X}$ вычисляется из условий $\widetilde{X} = X - \lambda \frac{dg\widetilde{X}}{dX}; \ \lambda \geq 0, \ g(\widetilde{X}) = 0$, а итеративный процесс (3.5.16) принимает вид

$$X^{(s+1)} = \begin{cases} X^{(s)} - \rho_s \nu_s \xi^{(s)}, \text{если } g(X^{(s)} - \rho_s \nu_s \xi^{(s)}) \leq 0, \\ \widetilde{X}, \qquad \text{если } g(X^{(s)} - \rho_s \nu_s \xi^{(s)}) > 0 \end{cases} \quad (3.5.23)$$

и $\widetilde{X}$ вычисляется из условий $X^{(s)} - \rho_s \nu_s \xi^{(s)} = \widetilde{X} + \lambda \frac{dg(\widetilde{X})}{dX}$;
$\lambda \geq 0; \ g(\widetilde{X}) = 0$;

д) если K — выпуклый многогранник $K = \{X | DX \leq d\}$ вычисление оператора проектирования сводится к решению задачи квадратичного программирования

$$\|X - Y\|^2 \to \min, \ DY \leq d \quad (3.5.24)$$

итеративный процесс (3.5.16) предполагает на каждом шаге решения задачи квадратичного программирования

$$X^{(s+1)} = \min_{DY \leq d} \|X^{(s)} - \rho_s \nu_s \xi^{(s)} - Y\|^2. \quad (3.5.25)$$

Рассмотрим специальный метод решения задач выпуклого программирования, учитывающий особенности структуры детерминированного эквивалента, двухэтапной задачи стохастического линейного программирования. Пусть имеем задачу

$$\psi \to \min \tag{3.5.26}$$

при условиях

$$E(CX + Z^*(A, B, X^0)(B - AX)) \le \psi, \tag{3.5.27}$$

$$X \in K, \tag{3.5.28}$$

где K — выпуклое многогранное множество, последнее имеет место, когда $K_2 = R^n$ или когда матрица A детерминированная. В тех случаях, если множество K задано в явном виде, задача (3.5.26)-(3.5.28) представляет собой задачу линейного программирования, которая может быть решена традиционными методами. В общем случае множество K — выпуклое и настоящий метод может быть применим лишь для качественного анализа задачи. Пусть K — ограниченное множество и $X^{(1)}$ — решение задачи (3.5.26)-(3.5.28), тогда на второй итерации решается следующая задача

$$\psi \to \min,$$

$$E[CX + Z^*(A, B, X^0)(B - AX)] \le \psi,$$

$$E[CX + Z^*(A, B, X^{(1)})(B - AX)] \le \psi.$$

На k-й итерации решается задача

$$\psi \to \min,$$

$$E[CX + Z^*(A, B, X^{(i)})(B - AX)] \le \psi,\ i = \overline{0, k-1},\ X \in K,$$

где $X^{(i)}$ — оптимальный план на i-й итерации. В работе [136] показано, что $\lim\limits_{k\to\infty} F(X^k) = \min\limits_{X\in K} F(X)$, при этом $\lim\limits_{k\to\infty} X^k$ не обязательно является оптимальным планом исходной задачи.

Теперь обратимся к методам решения отдельных частных случаев задачи в двухэтапной постановке. Рассмотрим полную двухэтапную задачу стохастического программирования со случайным вектором ограничений B вида (3.3.1) - (3.3.4). Пусть задача второго этапа (3.3.5) - (3.3.6) разрешима, т.е. выполняется условие $H^+ + H^- \geq 0$.

Введем два класса функций распределения вектора
$B = (b_1, \ldots, b_m)^T$.

Определение 3.5.1. *Функция* $F^1 = \{F(\beta) = F(\beta_1, \ldots, \beta_2)\}$; $F_i(\beta_i) = F(-\infty, \ldots, \beta_i, \ldots, \infty)$ *для любого* $i = \overline{1, m}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\text{а)}\;\; F_i(\beta_i) = 0\left(\frac{1}{\beta_i}\right) \;\; \text{\textit{при}} \;\; \beta_i \to -\infty \;\; \text{\textit{или}} \;\; \lim_{\beta_i \to -\infty} \beta_i F_i(\beta_i) = 0,$$

$$1 - F_i(\beta_i) = 0\left(\frac{1}{\beta_i}\right) \;\; \text{\textit{при}} \;\; \beta_i \to \infty \;\; \text{\textit{или}} \;\; \lim_{\beta_i \to \infty} \beta_i (1 - F_i(\beta_i)) = 0,$$

б) *в любом конечном интервале* $F_i(\beta_i)$ *имеет не более чем конечное число точек разрыва. Условие* а) *предполагает наличие первых моментов* $F_i(\beta_i)$ *для любого* $i = \overline{1, m}$. *Второе условие* б) *обеспечивает возможность интегрировать по частям интеграл Римана-Стильтъеса по мере* $dF_i(\beta_i)$, *если подынтегральное выражение непрерывно.*

Определение 3.5.2. *Класс* $F^0 = \{F(\beta)\}$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

а) $F(\beta) \in F^1$ б) *для любого* i *существуют числа* y_i^0, y_i^1, *такие, что* $F_i(y_i^0) = 0; F_i(y_i^1) = 1$. *Если* $F(\beta) \in F^1$ *и ввести обозначение* $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_m)^T = ((A_1 X), \ldots, (A_m X))^T$, *можно опустить постоянное слагаемое* (H^+, EB), *в этих предположениях задачу (3.3.1)-(3.3.4) представим в виде*

$$\varphi(X, \chi) \to \min, \tag{3.5.29}$$

$$AX - \chi = 0, \;\; X \geq 0. \tag{3.5.30}$$

Задача (3.5.29)-(3.5.30) является задачей выпуклого программирования, поскольку функция $\varphi(X,\chi)$ линейна по X и вогнута по χ.

В работе [440] доказаны следующие критерии разрешимости задачи (3.5.29)-(3.5.30).

Теорема 3.5.2. *Пусть* $F(\beta) \in F^1$ *и* $H^+ + H^- \geq 0$, *тогда задача (3.5.29)-(3.5.30) имеет при решении следующие исходы:*

1) *не имеет решения в силу неограниченности сверху значений функции* $\varphi(X,\chi)$ *тогда и только тогда, когда не существует вектора* π, *удовлетворяющего условиям* $\pi A \geq C,\ H^+ \leq \pi \leq -H^-$;

2) *разрешима тогда и только тогда, когда существует пара векторов* (π^0, χ^0) *такая, что*

а) $F_i(\chi_i^0) = \frac{\pi_i^0 - h_i^+}{-h_i^- - h_i^+}$ *для всех* i, *для которых* $-h_i^- > h_i^+$;

б) π^0 — *оптимальный план задачи*

$[\min(\pi,\chi^0) | \pi A \geq C,\ H^+ \leq \pi \leq -H^-]$;

в) *фуккция* $\varphi(X,\chi)$ *ограничена сверху, но максимум не достигается, причем этот случай имеет место тогда и только тогда, когда не существует пары векторов* (π^0,χ^0), *удовлетворяющих условиям* а) *и* б) *пункта* 2).

Теорема 3.5.3. *Пусть* $F(\beta) \in F^0, H^+ + H^- \geq 0$, *тогда задача (3.5.29)-(3.5.30) имеет*

1) *не разрешима в силу неограниченности сверху значений функций* $\varphi(X,\chi)$ *тогда и только тогда, когда не существует решения системы* $\pi A \geq C, H^+ \leq \pi \leq -H^-$;

2) *разрешима тогда и только тогда, когда система* $\pi A \geq C$, $H^+ \leq \pi \leq -H^-$ *обладает решением.*

Теоремы 3.5.2 и 3.5.3 позволяют сформулировать ряд следствий.

Следствие 3.5.1. *Если задача (3.5.29)-(3.5.30) разрешима для* *некоторой функции* $F(\beta) \in F^0$ *и выполняется условие* $H^+ + H^- \geq 0$, *то задача разрешима при всех* $F(\beta) \in F^0$.

Следствие 3.5.2. *Если задача (3.5.29)-(3.5.30) конечна для некоторой функции* $F(\beta) \in F^1$ *при заданных* A, C, H^-, H^+, *то она конечна при всех* $F(\beta) \in F^1$.

Следствие 3.5.3. *Задача (3.5.29)-(3.5.30) разрешима тогда и только тогда при* $F(\beta) \in F^1, H^+ + h^- \geq 0$, *когда выполнены следующие условия:*

а) *существует решение системы* $\pi A \geq C, H^+ \leq \pi \leq -H^-$;

б) *для каждого* i *такого, что* $-h_i^- > h_i^+$, *либо* $F_i(\chi) = 1$ *для достаточно большого* χ, *либо существует вектор* π, *удовлетворяющий условиям* $\pi A \geq C, H^+ \leq \pi \leq -H^-, \pi_i < -h_i^-$;

в) *для каждого* i *такого, что* $-h_i^- > h_i^+$, *либо* $F_i(\chi) = 0$ *для достаточно малого* χ, *либо существует вектор* π, *удовлетворяющий условиям* $\pi A \geq C, H^+ \leq \pi \leq -H^-, h_i^+ < \pi_i$.

Из теорем двойственности и теоремы 3.5.3, если задача (3.5.29)-(3.5.30) разрешима, следует утверждение.

Теорема 3.5.4. *Для того, чтобы вектор* (X^0, χ^0) *был решением задачи (3.5.29)-(3.5.30), необходимо и достаточно, чтобы*

1) $X^0 \geq 0, AX^0 - \chi^0 = 0$;

2) *для некоторого вектора* π^0, *удовлетворяющего соотношению* $\pi^0 A \geq C$, *выполнялись условия*

а) $x_i^0 > 0$, *если* $(\pi^0 A)_i = C_i$;

б) $F_i(\chi_i^0) = \frac{\pi_i^0 - h_i^+}{-h_i^- - h_i^+}$, *если* $-h_i^- > h_i^+$.

Сформулированные выше утверждения позволяют решать двухэтапные задачи стохастического программирования вида (3.3.1)-(3.3.4) при случайном векторе ограничений B.

Работы [86], [91], [109], [209] посвящены исследованию двухэтапных задач стохастического программирования с помощью обобщенной обратной матрицы. Напомним, что обобщенной обратной матрицей D^+ для матрицы D называется решение системы уравнений

$$DD^+D = D, \tag{3.5.31}$$

$$D^+DD^+ = D^+, \tag{3.5.32}$$

$$(DD^+)^T = DD^+, \tag{3.5.33}$$

$$(D^+D)^T = D^+D. \tag{3.5.34}$$

Можно показать, что такая система имеет единственное решение для любой матрицы D, при этом если матрица D имеет размерность $m \times n$, то обобщенная обратная матрица D^+ — $(n \times m)$, в тех случаях, когда D — квадратная невырожденная матрица, D^+ совпадает с D^{-1}. В общем случае, $D^+ = R_1 D R_2$, где R_1, R_2 — решения уравнений $RDD^T = D^T$ и $D^T DR = D^T$ соответственно. Предполагается, что для полной двухэтапной задачи (3.1.6)-(3.1.9), у которой при любых $B(\omega), \omega \in \Omega, X \in K$, система условий $DY = B - AX, Y \geq 0$ непротиворечива, найдётся вектор η, обеспечивающий существование неотрицательного решения системы $DY = B - AX$:

$$Y = D^+(B - AX) + P\eta \geq 0. \tag{3.5.35}$$

При условиях (3.5.35) задача (3.1.6) - (3.1.9) может быть представлена в виде

$$Z(X) = (C, X) + E \min_{\eta}(H, D^+(B - AX) + P\eta) \to \min \tag{3.5.36}$$

при условиях

$$P\eta \geq D^+(AX - B), \tag{3.5.37}$$

$$A^0X = B^0, X \geq 0. \tag{3.5.38}$$

Задача второго этапа (3.1.10) в этом случае преобразуется в задачу выбора η, удовлетворяющего неравенству $P\eta \geq D^+(AX - B)$ и минимизирующего $(H, D^+(B - AX) + P\eta)$, т.е. в задачу

$$[\min_{\eta}(HP, \eta)|P\eta \geq D^+(AX - B)]. \tag{3.5.39}$$

Тогда можно записать

$$\{\min_{\eta}(HP, \eta)|P\eta \geq D^+(AX - B)\} =$$

$$= \{\max_{\omega}(\omega, D^+(AX - B))|\omega P = HP, \omega \geq 0\}. \tag{3.5.40}$$

Задача (3.5.39), содержащая случайную величину в ограничениях, заменена задачей (3.5.40), у которой множество планов детерминировано.

После преобразований задача (3.5.36) - (3.5.38) приводится к виду

$$\widehat{Z}(X)=(C-HD^+A, X) + E\{\max_{\omega}(\omega, D^+(AX-B))|\omega P=HP, \omega\geq 0\}\rightarrow\min \tag{3.5.41}$$

при условиях

$$A^0X = B^0, X \geq 0. \tag{3.5.42}$$

Целевые функции отличаются $Z(X)$ и $\widehat{Z}(X)$ на постоянное слагаемое $E(H, D^+B)$.

Задача (3.3.6)-(3.1.9) в форме (3.5.41)-(3.5.42), как правило, не более конструктивна с вычислительной точки зрения, чем любая другая форма записи исходной задачи. В работе [86] показано, что иногда использование обобщенной обратной матрицы позволяет получить удобные детерминированные эквиваленты двухэтапной задачи стохастического программирования.

3.6 Примеры прикладных двухэтапных задач стохастического программирования

Транспортная задача со случайными данными исследована в работах [30], [89], [93], [125], [287], [367], [391], [438], при этом чаще всего предполагается, что спрос b_j в j-м пункте потребления — случайная величина. Пусть спрос непрерывно распределен с плотностью $\varphi_j(b_j)$. Общее количество продукции, перевезенной в j-й пункт потребления при данном плане перевозок обозначим $y_j = \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}$. Если в ходе реализации этого плана оказывается, что $y_j < b_j(\omega)$, то имеют место потери в размере $m_j(b_j(\omega) - y_j)$. Если же $y_j > b_j(\omega)$, то возникают дополнительные затраты в размере $k_j(y_j - b_j(\omega))$ (коэффициенты m_j и k_j определяются в зависимости от конкретного содержания задачи), которые связаны с хранением нереализованной части продукции, с ее транспортировкой или потерями, возникающими при ее реализации по более низкой цене. Если в целевую функцию классической транспортной задачи включить математическое ожидание этих издержек, стохастическая транспортная задача принимает вид:

$$\min_X F(X) = \min \Bigg\{ \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} k_j \int\limits_{-\infty}^{y_j} (y_j - b_j(\omega)) \varphi_j(b_j) db_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} m_j \int\limits_{y_j}^{\infty} (b_j(\omega) - y_j) \varphi_j(b_j) db_j \Bigg\} \tag{3.6.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1,m}, \tag{3.6.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - y_j = 0, \ j = \overline{1,n}. \tag{3.6.3}$$

Если через $\mu_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} b_j(\omega)\varphi_j(b_j)db_j$ обозначить ожидаемый спрос в j-м пункте потребления, то целевая функция задачи может быть представлена в виде

$$F(X) = \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} k_j(y_j - \mu_j) + \sum_{j=1}^{n}(m_j + \mu_j)\int\limits_{y_j}^{\infty}(b_j(\omega) - y_j)\varphi_j(b_j)db_j. \tag{3.6.4}$$

Для решения этой задачи Вильямс [438] разработал алгоритм, который основывается на методе разложения Данцига в нелинейном программировании. В работе [129] Эль-Маграби рассмотрел обобщенную транспортную задачу в условиях случайного спроса с непрерывным распределением. Для того, чтобы получить критерий оптимальности решения этой задачи, Эль-Маграби модифицировал условия Куна-Таккера.

Аналогично рассмотренной модели могут быть исследованы стохастические транспортные задачи, в которых случайными являются объемы производства или такие модели, в которых не могут быть заранее предсказаны как объемы производства, так и спрос в пунктах потребления. Анализ этих моделей сводится к решению задач выпуклого или линейного программирования в зависимости от того, непрерывно или дискретно распределены параметры условий задачи.

Приведем задачу определения объема производства, как она сформулирована в работе [170]. Пусть имеются ресурсы i $(i = \overline{1,m})$ видов, которые расходуются в количестве λ_{ij} на производство единицы j-го продукта $(j = \overline{1,n})$.

Наличное количество i-го ресурса составляет a_i единиц, а спрос b_j на каждый из продуктов является случайной величиной с плотностью распределения $\varphi_j(b_j)$. Пусть x_j — производимое количество j-го продукта; в случае, если $x_j < b_j(\omega)$, возникают затраты в количестве $m_j(b_j(\omega) - x_j)$, если же $x_j > b_j$, то потери составляют $k_j(x_j - b_j(\omega))$.

Обозначим через p_j цену и через c_j затраты на производство единицы j-го продукта, а через y_j — запасы этого прдукта в начале рассматриваемого периода. Тогда задача стохастического линейного программирования имеет вид:

$$\max_X F(X) = \max\left\{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{j=1}^{n} k_j \int_{-\infty}^{x_j+y_j} (x_j + y_j - b_j(\omega))\varphi_j(b_j)db_j - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{n} m_j \int_{x_j+y_j}^{\infty} (b_j(\omega) - x_j - y_j)\varphi_j(b_j)db_j \right\} =$$

$$= \max\left\{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j - \sum_{j=1}^{n} (k_j + c_j)x_j - \sum_{j=1}^{n} (k_j + \mu_j)\int_{x_j+y_j}^{\infty} (b_j(\omega) - x_j - y_j)\varphi_j b_j db_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} m_j(\mu_j - y_j)\right\} \tag{3.6.5}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_j \le a_i, \ i = \overline{1, m}, \tag{3.6.6}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, n}. \tag{3.6.7}$$

Если задача вообще разрешима, то при фиксированном спросе b_j она имеет тривиальное решение $x_j = b_j$ $(j = \overline{1, n})$.

Эль-Маграби в работе [127] рассмотрел задачу, близкую к задаче (3.6.5)-(3.6.7), и сделал предположение, что вектор $b_j(\omega)$ распределен дискретно, т.е. принимает значения $b_j(\omega_t)$; $t = \overline{1, T_j}$ с вероятностью p_{jt}.

В этом случае задача принимает вид

$$\min f(X)=\min\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j x_j+k_j\sum_{t=1}^{t=t^*}(x_j-b_j(\omega_t))p_{jt}+m_j\sum_{t=t^*}^{T_j}(b_j(\omega_t)-x_j)p_{jt}\right]\right\} \tag{3.6.8}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}x_j \le a_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{3.6.9}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}, \tag{3.6.10}$$

где t^* определяется из соотношения $b_j(\omega_{t^*}) \le x_j < b_j(\omega_{t^*+1})$. В работе [197] показано, что решение задачи (3.6.8)-(3.6.10) эквивалентно решению задачи линейного программирования.

В работе [289] рассмотрена задача планирования полетов самолетов как двухэтапная задача стохастического программирования. Пусть требуется составить план полетов самолетов на регулярные и дополнительные рейсы. Регулярные рейсы осуществляются между фиксированными пунктами и планируются заранее на каждый рассматриваемый период. Дополнительные рейсы возникают случайным образом, при этом не фиксируются время и пункты перелетов, а самолеты для дополнительных рейсов могут быть сняты с регулярных линий. Различные типы самолетов отличаются полезной нагрузкой, продолжительностью полета и затратами на различных маршрутах. Спрос на дополнительные перевозки заранее неизвестен; количество груза, которое необходимо перевезти в течение дня, не может быть полностью предсказано. С того момента, когда поступила информация о неопределенных параметрах задачи, возникает необходимость в переназначении самолетов с маршрутов, на которые поступило меньше заявок, чем планировалось, на линии, обслуживающие перевозки, спрос на которые оказался выше ожидаемого, при этом переназначение, в частности, может осуществляться на промежуточных остановках. Задача ставится на минимум средних ожидаемых затрат за весь плановый период.

Введем следующие обозначения:

x_{ij} — количество полетов в течение планового периода самолетов типа i, первоначально назначенных на маршрут j;

x_{ijk} — количество полетов самолетов типа i, снятых с маршрута j и переназначенных на маршрут k;

y_j^+ — неудовлетворенные заявки (в тоннах груза) на перевозки по маршруту j;

y_j^- — незагруженная емкость самолетов (в тоннах груза) на j-м маршруте;

a_{ij} — число часов, требуемое самолету типа i для преодоления маршрута j, если самолет с самого начала был назначен на этот маршрут;

a_{ijk} — число часов, требуемое самолету типа i, первоначально назначенному на маршрут j для того, чтобы преодолеть маршрут k. При этом $a_{ijk} \geq a_{ik}$;

b_{ij} — число тонн груза, перевозимое за один полет самолетом типа i по маршруту j;

a_i — допустимое в течение планового периода число часов полета самолета типа i;

d_j — заявки на перевозки груза (в тоннах) по маршруту j;

c_{ij} — стоимость полета самолета типа i по маршруту j, при условии, что самолет с самого начала был назначен на этот маршрут;

c_{ijk} — стоимость полета самолета типа i по маршруту k, если он был снят с маршрута j. Очевидно, $c_{ijk} \geq c_{ik}$;

q_j^+ — штраф за неудовлетворение заявки на перевозку тонны груза по маршруту j;

q_j^- — штраф за недогрузку на одну тонну самолета на маршруте j.

Задача планирования полетов ставится как двухэтапная задача стохастического программирования. На первом этапе, до того как станут известны заявки на дополнительные рейсы, самолеты каждого типа распределяются между маршрутами и определяется число полетов самолетов каждого типа по каждой линии. На втором этапе, после установления реализации случайных параметров условий задачи, производится переназначение самолетов с маршрута на маршрут.

Условия первого этапа ограничивают сверху для самолетов каждого типа общее число летных часов по всем маршрутам

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \le a_i, \; i = \overline{1,m}. \tag{3.6.11}$$

Условия второго этапа фиксируют тот факт, что для каждого типа самолетов общее число самолето-часов, переведенных с данного маршрута на другие линии, не превышает числа самолето-часов, первоначально запланированных на этот маршрут. Кроме того, необходимы балансовые соотношения для каждого маршрута, обычные для двухэтапных задач стохастического программирования. Если самолет типа i, длительность полета которого по маршруту j равна a_{ij} часов, переназначить на маршрут k, то преодоление последнего маршрута займет a_{ijk} часов; тогда полет по маршруту k вызовет отмену a_{ijk}/a_{ij} полетов по маршруту j.

Ограничения второго этапа в этих предположениях имеют вид

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{K} \frac{a_{ijk}}{a_{ij}} x_{ijk} \le x_{ij}; \; i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n}, \tag{3.6.12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{K} b_{ik}x_{ikj} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{K} b_{ij}\frac{a_{ijk}}{a_{ij}}x_{ijk} + y_j^{+} - y_j^{-} = d_j;\ j=\overline{1,n}. \tag{3.6.13}$$

Целевая функция задачи планирования полетов в условиях полной информации выражается следующим образом

$$\left\{\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + E\left\{\min_{x_{ijk},y_j^{+},y_j^{-}}\left[\sum_{i,j}\sum_{k\neq j}\left(c_{ijk} - c_{ij}\frac{a_{ijk}}{a_{ij}}\right)x_{ijk} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \sum_{j}(q_j^{+}y_j^{+} + q_j^{-}y_j^{-})\right]\right\}\right\} \to \min. \tag{3.6.14}$$

Таким образом требуется вычислить неотрицательные параметры $x_{ij}, x_{ijk}, y_j^{+}, y_j^{-}$, минимизирующие целевую функцию (3.6.14) при условиях (3.6.11) - (3.6.13), на переменные x_{ij} и x_{ijk} накладывается дополнительное требование целочисленности.

Для более адекватного описания процесса планирования полетов самолетов в условиях неполной информации естественно обратиться к многоэтапным задачам стохастического программирования, в которых последовательно учитывались бы ежедневные изменения заявок на перевозки.

Многоэтапные задачи стохастического программирования будут рассмотрены в следующей главе.

Краткая библиография

Первые исследования двухэтапных задач стохастического линейного программирования относятся к 1955 году, когда появились работы Дж. Данцига [104] и Е. Била [16]. Дальнейшее развитие модели двухэтапных задач получили в результате работ Р. Ветса [433], [434], [435], [437], А. Маданского [275], [276], [277], К.Сенгупты [360], [365], П. Калля [208], [209] и других авторов. Исследованию двухэтапных задач, их планов, условий разрешимости и оптимальности посвящена достаточно многочисленная литература [86], [103], [109], [201], [227], [299], [411], [420], [428]. Дж. Данциг и А. Маданский [108] доказали необходимые и достаточные условия оптимальности плана двухэтапной задачи стохастического линейного программирования с конечным числом реализаций случайного вектора ограничений.

В работах О. Мангазаряна и Г. Розена [279], [280] исследованы свойства нелинейной двухэтапной задачи стохастического программирования. Двухэтапные задачи стохастического оптимального управления поведением динамических систем в условиях неполной информации представлены в работах Е. Берковича [25], [26], [27].

Итеративный метод решения двухэтапных задач, не требующий предварительной информации о характере изменения случайных параметров условий, разработан Ю. Ермольевым и Н. Шором [137], кроме того, Ермольеву принадлежит ряд результатов позволяющих проводить анализ задач стохастического программирования [131], [132], [133], [134], [135].

Дж. Вессельс [432], М. Демпстер [109] и другие предложили различные обобщения двухэтапных задач и исследовали оценки невязок в стохастических задачах.

Эффективные методы анализа двухэтапных задач с помощью обобщенной обратной матрицы разработаны в [86], [91], [109], [209].

Приближенные методы оценки значений целевого функционала разработаны в [209], [273], [411].

Стохастическая транспортная задача обсуждалась в [30], [89], [93], [125], [287], [367], [391], [438]. Задача перспективного планирования в условиях неполной информации рассматривалась в работах [127], [170], [203] и других. Г. Хедли [170] исследовал двухэтапную задачу со случайной матрицей коэффициентов.

Обзоры результатов по двухэтапным задачам стохастического программирования выполнены в работах [6], [184], [238], [365], [454] и других.

4 Исследование многоэтапных моделей принятия решений в условиях неполной информации

4.1 Постановки динамических задач стохастического программирования

Обобщением двухэтапных задач являются многоэтапные задачи стохастического программирования. Многочисленные практические проблемы перспективного планирования, проектирования и управления не могут быть удовлетворительно описаны при помощи статических моделей. Планирование на длительные периоды времени развития хозяйственных систем, оперативное управление боевыми операциями, регулирование технологическими процессами и другие проблемы содержат случайные параметры и требуют для своего описания применения динамических вероятностных моделей. В частности, для этих целей используются модели и методы многоэтапного стохастического программирования. Впервые замена статических моделей стохастического программирования динамическими была произведена с разработкой двухэтапной модели стохастического программирования.

Модели многоэтапных задач стохастического программирования и методы их реализации существенно зависят от информации о значениях параметров условий задачи, которыми располагают к моменту принятия очередного решения. Можно различать многоэтапные задачи, в которых на каждом последующем этапе требуется полностью компенсировать невязки, обусловленные реализованными условиями задачи и принятыми ранее (на предыдущих этапах) решениями. В других задачах требуется, чтобы на каждом этапе вероятность удовлетворения ограничений превышала некоторую заранее заданную величину или чтобы математические ожидания функций от невязок условий были бы ограничены заданными числами или функциями от реализованных на предыдущих этапах значений случайных параметров.

В зависимости от того, какими являются реальные процессы, подлежащие моделированию, многоэтапные задачи могут иметь безусловные или условные вероятностные или статистические ограничения. Для многоэтапных задач с безусловными ограничениями характерно, что решение принимается на основе информации о совместном распределении случайных параметров условий всех этапов. В многоэтапных задачах с условными ограничениями различают два случая, когда к моменту принятия решения предполагаются известными только реализации случайных параметров предыдущих этапов и когда к моменту принятия решения имеется вся информация о реализации случайных параметров вплоть до условий текущего этапа, но неизвестны значения случайных параметров последующих этапов. Между многоэтапными задачами с безусловными и условными ограничениями имеет место определенное соотношение.

Оптимальные решения многоэтапных задач стохастического программирования могут быть получены в чистых либо смешанных стратегиях. В последнем случае компоненты решения или статистические характеристики распределения составляющего решение зависят от реализованных к моменту принятия решения значений случайных параметров условий задачи.

Построение динамических вероятностных моделей и разработка методов их реализации представляет значительные трудности, в частности, это относится к многоэтапным задачам стохастического программирования. В настоящей главе рассмотрены некоторые вопросы, связанные с математическими постановками многоэтапных задач и процедурами построения их решений.

Для дальнейшего изложения постановок и анализа многоэтапных задач стохастического программирования определим нижеприведенные понятия. Пусть имеем на i-м этапе $\Omega_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ — некоторые пространства элементарных событий ω_i, где Ω_0 состоит из единственного элемента ω_0. Пусть Ω^k — декартово произведение $\Omega_i,\ i = \overline{1, k},\ \omega^k = (\omega_1, \ldots, \omega_k);\ \Omega^n = \Omega$ и пусть на Ω задана вероятностная мера P, определенная следующим образом: если $A \subset \Omega^k$, то $P^k(A) = P(A \times \Omega^{k+1} \times \ldots \times \Omega^n)$. Введем вероятностное пространство (Ω, Σ, P) с соответствующей σ-алгеброй Σ, определим P^k — условную вероятностную меру на Ω^k :

$$P_k(A \mid \omega^{k-1} \in B) = \frac{P^k(A \times B)}{P^k(\Omega_k \times B)}$$

для любых $A \subset \Omega_k,\ \ B \subset \Omega_{k-1}$.

Обозначим через X^k декартово произведение $X_i,\ i = 1, \ldots, k$; $x^k = (x_1, \ldots, x_k) \in X^k$, $X^n = X$, где $X_0, X_1, \ldots, X_n$ — последовательность множеств произвольной структуры $x_k \in X_k$,
$k = 0, 1, \ldots, n$ и где множество X_0 включает одну точку x_0.

Пусть задана вектор-функция $\varphi_k(\omega^k, x^k)$ размерности m_k для каждого $\omega^k \in \Omega^k$ и $x^k \in X^k,\ k = \overline{1, n}$; кроме того, для каждого $\omega \in \Omega$ на множестве X задан функционал $\varphi_0(\omega^n, x^n)$. Введем $G_k^0 = G_k^0(\omega^k)$ — некоторые случайные множества и $b_k(\omega^{k-1})$ — m-мерные случайные вектор-функции от ω^{k-1} (ограниченные и измеримые). Обозначим через B_k некоторое банахово пространство, которому принадлежит $b^k(\omega^{k-1})$ — вектор-функция размерности $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i$. Наконец, обозначим через $E_{\omega_k}(u(\omega^k) \mid \omega^{k-1})$ условное математическое ожидание $u(\omega^k)$ в предположении, что известна реализация ω^{k-1}.

Рассмотрим различные постановки многоэтапных задач стохастического программирования, используя введенные понятия и обозначения.

Пусть имеем следующую задачу многоэтапного стохастического программирования

$$E\varphi_0(\omega^n, x^n) \to \inf, \qquad (4.1.1)$$

$$E\varphi_k(\omega^k, x^k) \geq b_k, \qquad (4.1.2)$$

$$x^k \in G_k,\ k = \overline{1,n}. \qquad (4.1.3)$$

Для того, чтобы задача была сформулирована полностью, необходимо указать, являются ли ограничения безусловными или условными, определяются ли решения задачи в чистых или смешанных стратегиях и среди какого класса измеримых функций или распределений следует искать решение. В практических задачах в зависимости от содержательного смысла решение на каждом этапе можно вычислять как детерминированный вектор, как решающее правило-функцию от реализованных и наблюденных случайных параметров условий или как решающее распределение — условное распределение x_k в предположении, что получена та или иная информация о реализованных значениях случайных исходных данных. Конкретизация постановки задачи и её информационная структура определяются той информацией, которая поступает к моменту принятия очередного решения. В терминологии, принятой в [134], многоэтапные стохастические задачи порождаются цепочками вида

— наблюдение — решение — наблюдение — ... — решение

решение — наблюдение — решение — ...— решение

Рассмотрим различные модели многоэтапных задач стохастического программирования, используя классификацию, приведенную в работе [197].

Многоэтапная стохастическая задача с безусловными ограничениями имеет вид

$$\int\limits_{\Omega^n \times X^n} \varphi_0(\omega^n, x^n) dF_{\omega^n, x^n} \to \inf, \tag{4.1.4}$$

$$\int\limits_{\Omega^k \times X^k} \varphi_k(\omega^k, x^k) dF_{\omega^k, x^k} \geq b_k, \tag{4.1.5}$$

$$x^k \in G_k, \ k = \overline{1, n}. \tag{4.1.6}$$

Выделим несколько классов, представляющих наибольший интерес для приложений, из множества информационных структур, отвечающих многоэтапным задачам с условными ограничениями. Конкретизация модели (4.1.1) - (4.1.3) в случае задачи с условными ограничениями, разрешимой в смешанных стратегиях, имеет вид

$$\int\limits_{\Omega^n \times X^n} \varphi_0(\omega^n, x^n) dF_{\omega^n, x^n} \to \inf, \tag{4.1.7}$$

$$\int\limits_{\Omega_k \times X_k} \varphi_k(\omega^k, x^k) dF_{x_k|\omega^k} dF_{\omega^k|\omega^{k-1}} \geq b_k(\omega^{k-1}), \tag{4.1.8}$$

$$x^k \in G_k(\omega^k); \ k = \overline{1, n}. \tag{4.1.9}$$

Решением задачи является набор функций распределения $F_{x_k|\omega^k}$. Принято говорить, что задача решается в апостериорных решающих распределениях, если $F_{x_k|\omega^k}$ определяется после реализации и наблюдения случайных параметров ω^k, апостериорные решающие распределения зависят от x^{k-1} и ω^k. Говорят, что задача решается в априорных решающих распределениях, если $F_{x_k|\omega^k}$ определяется после реализации и наблюдения ω^{k-1}, но до наблюдения ω^k, априорные решающие распределения зависят от x^{k-1} и ω^{k-1}.

Если многоэтапная задача с условными ограничениями решается в чистых стратегиях, конкретизация модели (4.1.1) - (4.1.3) принимает вид

$$\int\limits_{\Omega^n \times X^n} \varphi_0(\omega^n, x^n) dF_{\omega^n} \to \inf, \tag{4.1.10}$$

$$\int\limits_{\Omega_k \times X_k} \varphi_k(\omega^k, x^k) dF_{\omega^k|\omega^{k-1}} \geq b_k(\omega^{k-1}), \tag{4.1.11}$$

$$x^k \in G_k(\omega^k),\ k = \overline{1, n}. \tag{4.1.12}$$

Набор функций x_k от реализованных и наблюденных случайных параметров условий задачи является её решением. Задача решается в апостериорных решающих правилах, если решение принимается после реализации и наблюдения ω^k, тогда апостериорные решающие правила имеют вид $x_k = x_k(\omega^k)$. Говорят, что задача решается в априорных решающих правилах, если решение принимается после реализации и наблюдения ω^{k-1}, но до наблюдения ω^k; в этом случае априорные решающие правила имеют вид $x_k = x_k(\omega^{k-1})$.

Принято называть задачи (4.1.7)-(4.1.9) (или (4.1.10)-(4.1.12)) многоэтапными стохастическими задачами в жесткой постановке, если условия вида (4.1.8) (или соответственно (4.1.11)) в них отсутствуют и решение на каждом этапе принимается после наблюдения параметров условий и решений предшествующих этапов.

Между областями определения задач с безусловными и условными ограничениями имеют место определенные соотношения. Нижеприведенные утверждения являются обобщением результата, полученного в работе [122] для частной линейной многоэтапной стохастической задачи, рассмотрим его, следуя [203].

Пусть U — множество допустимых решений многоэтапной стохастической задачи с безусловными ограничениями

$$U = \{x^k \in G_1 \times \ldots \times G_n \mid E\varphi_k(\omega^k, x^k) \geq b_k,\ k = \overline{1,n}\},$$

а $V[b_n(\omega^{n-1})]$ — множество допустимых решений (решающих правил или решающих распределений, априорных или апостериорных) задачи с условными ограничениями.

Теорема 4.1.1. *Множества U и V связаны соотношением*

$$U = \{x^n \in V[\widetilde{b}_n(\omega^{n-1})] \mid E\widetilde{b}_k(\omega^{k-1}) = b_k,\ k = \overline{1,n}\}.$$

Доказательство. Введем обозначение:

$$\widetilde{V} = \{x^n \in V[\widetilde{b}^n(\omega^{n-1})] \mid E\widetilde{b}_k(\omega^{k-1}) = b_k,\ k = \overline{1,n}\}.$$

Пусть $x^n \in \widetilde{V}$. Это значит, что

$$E_{\omega^k}\varphi_k(\omega^k, x^k) = E_{\omega^{k-1}}\{E_{\omega^k}\varphi_k(\omega^k, x^k) \mid \omega^{k-1}\} \geq$$

$$\geq E_{\omega^{k-1}}\widetilde{b}_k(\omega^{k-1}) = b_k,\ k = \overline{1,n},$$

т.е. $x^n \in U$. Пусть теперь $x^n \in U$. Определим:

$$\widetilde{b}_k(\omega^{k-1}) = E_{\omega^k}\{\varphi_k(\omega^k, x^k) \mid \omega^{k-1}\} + \{b_k - E_{\omega^k}\varphi_k(\omega^k, x^k)\} \leq$$

$$\leq E_{\omega^k}\{\varphi_k(\omega^k, x^k) \mid \omega^{k-1}\},\ k = \overline{1,n}.$$

По определению $\widetilde{b}_k(\omega^{k-1})$ имеем $E_{\omega^{k-1}}\widetilde{b}_k(\omega^{k-1}) = b_k$.
Поэтому $x^n \in \widetilde{V}$.

Теорема доказана.

Следствие 4.1.1. *При одних и тех же функциях $\varphi_k(\omega^k, x^k)$ и множествах G_k, $k = \overline{1,n}$ области допустимых решений задач (4.1.4)-(4.1.6) и (4.1.7)-(4.1.9) или (4.1.10)-(4.1.12) (в зависимости от того решается ли задача в смешанных или в чистых стратегиях) совпадают в том и только в том случае, если $Eb_k(\omega^{k-1}) = b_k$.*

Приведенные утверждения позволяют переформулировать качественные результаты, а иногда и вычислительные методы, разработанные применительно к задачам одного класса, для конструктивного исследования задач другого класса.

Представляют интерес для практических задач соотношения между решающими распределениями и решающими правилами. Если функция φ_0 выпукла и компоненты вектор-функции φ_k вогнуты по x при каждом ω, то оптимальные значения целевого функционала, достигаемые на решающих распределениях, могут быть достигнуты и на решающих правилах. Выпуклость φ_0 и $-\varphi_k$ не исчерпывают условий, при которых оптимальные чистые и смешанные стратегии определяют одно и то же значение целевой функции (целевого функционала).

Значение целевого функционала на оптимальных априорных решающих правилах многоэтапной стохастической задачи в жесткой постановке совпадает со значением целевого функционала на оптимальных априорных решаюших распределениях.

Более сильное утверждение имеет место для апостериорных решающих правил и решающих распределений.

Теорема 4.1.2. *Пусть*

а) вероятностная мера F_ω на $\Omega \equiv \Omega^n$ непрерывна,

б) существуют положительные функции $g_0(\omega)$ и $g_k(\omega^k)$, ограничивающие по модулю соответственно $\varphi_0(\omega^n, x^n)$ и все составляющие $\varphi_k(\omega^k, x^k)$.

Тогда оптимальные апостериорные решающие правила многоэтапной стохастической задачи определяют такое же значение целевого функционала, что и оптимальные апостериорные решающие *распределения.*

`Доказательство.` Применительно к одноэтапной стохастической задаче приведено в работе [197], переход к многоэтапной задаче требует более громоздких обозначений и выкладок.

Утверждение теоремы остается в силе и для борелевских функций φ_i и при отсутствии допущения о регулярности меры $F_{\omega,x}$.

Задачи многоэтапного стохастического программирования с условными ограничениями могут быть заменены системой задач, отвечающих отдельным этапам. Пусть имеем задачу вида (4.1.10) - (4.1.12), которая решается в чистых стратегиях (в априорных или апостериорных решающих правилах).

Области определения задачи i-го этапа соответствует множество

$$\begin{gathered}K_i = \{x_i \in G_i^0 \mid \exists [y_{i+1} \in G_{i+1}^0, \ldots, y_n \in G_n^0];\\ E_{\omega_i}[\varphi_i(\omega^i, x^i) \mid \omega^{i-1}] \geq b_i(\omega^{i-1}),\\ E_{\omega_{i+s}}[\varphi_i(\omega^{i+s}, x^i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+s}) \mid \omega^{i+s-1}] \geq b_{i+s}(\omega^{i+s-1}),\\ \forall \omega_{i+s-1}, \ldots, \omega_{n-1},\ s = \overline{1, n-i}\}, \qquad (4.1.13)\end{gathered}$$

где G_i^0 представляет собой проекцию G_i на координатную гиперплоскость, определяемую составляющими вектора x_i. Требование существования векторов y_{i+s}, $s = \overline{1, n-i}$, удовлетворяющих условиям (4.1.13), эквивалентно наличию индуцированных ограничений в классической двухэтапной задаче. Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (4.1.10) - (4.1.12) является условие $K_1 \neq \Phi$ (целевая функция (4.1.10) по предположению ограничена снизу), если, кроме того, $K_1 \neq \Phi$, то и $K_i \neq \Phi$, $i = \overline{2, n}$.

Целевая функция $Q_i(x_i)$ задачи i-го этапа представляет собой условное математическое ожидание $\varphi_0(\omega^n, x^n)$ в предположении, что на этапах предшествующих i-му, реализован набор ω^{i-1} случайных параметров условий задачи и приняты решения, составляющие набор x^{i-1}, а на этапах, следующих за i-м, приняты оптимальные решения $x^*_{i+1}, \ldots, x^*_n$:

$$Q_i(x_i) = E_{\omega^n|\omega^{i-1}}(\omega^n, x^{i-1}, x_i, x^*_{i+1}, \ldots, x^*_n). \tag{4.1.14}$$

Таким образом, определение оптимального решающего правила на i-м этапе многоэтапной стохастической задачи сводится к решению следующей задачи математического программирования:

$$\inf_{x_i \in K_i} Q_i(x_i). \tag{4.1.15}$$

При этом апостериорные решающие правила имеют вид $x_i = x_i(\omega^i)$, $y_{i+s} = y_{i+s}(\omega^{i+s})$, $s = \overline{1, n-i}$, а априорные решающие правила — $x_i = x_i(\omega^{i-1})$, $y_{i+s} = y_{i+s}(\omega^{i+s-1})$, $s = \overline{1, n-i}$. Если целевая функция сепарабельна, т. е. $\varphi_0(\omega^n, x^n) = \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_{0j}(\omega^j, x^j)$, имеем

$$Q_i(x_i) = E_{\omega_i|\omega^{i-1}}\{\varphi_{0i}(\omega^i, x^i) + Q^*_{i+1}(\omega^i, x^i)\},$$

где

$$Q^*_i(\omega^{i-1}, x^{i-1}) = \inf_{x_i \in K_i} E_{\omega_i|\omega^{i-1}}\{\varphi_{0i}(\omega^i, x^i) + Q^*_{i+1}(\omega^i, x^i)\}, \ i = \overline{1, n-1},$$

при $i = n$

$$Q^*_n(\omega^{n-1}, x^{n-1}) = \inf_{x_n \in K_n} E_{\omega_n|\omega^{n-1}} \varphi_{0n}(\omega^n, x^n).$$

Теорема доказана.

Аналогично строятся задачи отдельных этапов для многоэтапных стохастических задач, решаемых в смешанных стратегиях (в решающих распределениях).

4.2 Постановка задачи принятия решений с принципами выбора равномерного и пропорционального развития направлений

Как уже упоминалось выше, классическими механизмами принятия решений являются эгалитаризм (стремление уравнять индивидуальные выигрыши участников) и утилитаризм (максимизация суммы индивидуальных выигрышей). Однако, между двумя этими крайними суждениями лежит обширный класс других принципов выбора решений, каждое из которых обращает внимание и на перераспределение средств между объектами и на повышение суммарного благосостояния. Одними из таких принципов выбора, которые сочетают в себе классические принципы выбора, является принцип сглаживания (уменьшения) диспропорций в развитии направлений и равномерного развития.

Рассмотрим задачу принятия решения на конкретном примере распределения ресурсов.

Задача заключается в таком распределении затрат на развитие объектов (направлений), чтобы при ограниченных средствах получить максимальный выигрыш (прибыль, прирост на единицу вложений) от их вложения.

В качестве критерия оптимальности мы можем использовать как классические принципы выбора решения - эгалитаризм и утилитаризм, так и принципы выбора, составляющими которых являются эгалитаризм и утилитаризм.

В качестве критерия оптимальности $F(y_1(t),_2(t),\ldots,y_n(t))$ возьмем принцип выбора оптимального решения по критерию пропорционального развития направлений:

$$u_i(t) = \frac{\sigma_i}{\delta} c_i(t), \tag{4.2.1}$$

$$\text{где } \sigma_i = \frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{S_i(t)},\ \delta = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{S_i(t)} \right).$$

Данная модель используется, когда целью является постепенное сглаживание диспропорций в развитии направлений, и предполагает вложение некоторого количества средств во все объекты. Распределение затрат осуществляется пропорционально требуемым средствам для достижения эталонного состояния каждого направления. Происходит «подтягивание» объектов пропорционально их отставанию. Такое распределение есть пропорциональное. План распределения позволяет одновременно перевести все объекты из начального состояния в требуемое.

Определим экономический смысл формулы (4.2.1):

$\sigma_i = \frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{S_i(t)}$ — сумма средств, необходимых для перевода отрасли i из текущего состояния в некоторое эталонное (желаемое);

$\delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{S_i(t)} \right)$ — сумма средств, необходимых на развитие всех отраслей из текущего состояния в эталонное.

Следовательно,

$\frac{\sigma_i}{\delta}$ — доля средств, необходимых для развития i-го направления.

Пропорциональное распределение - один из достаточно распространенных принципов математической теории принятия решений при распределении затрат и дележе прибыли. Ресурсы можно распределять также пропорционально уровню развития объектов, может быть пропорциональное распределение средств $c(t)$ и пропорциональное распределение дефицита средств: $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{S_i(t)} \right) - c(t)$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{S_i(t)} \right)$ — требуемые средства на развитие всех объектов, а $c(t)$ — имеющиеся средства.

Пропорциональное распределение затрат предполагает выделение средств по каждому направлению пропорционально его отставанию от эталонного состояния. Такой подход дает возможность «подтягивать» до эталонного состояния одновременно все направления. Чем больше отстает текущее состояние z-го направления от эталонного, тем больше средств выделяется на уменьшение этой диспропорции в развитии объектов.

Тогда задача принятия решения распределения ресурсов будет иметь вид:

$$u_i(t) - \frac{\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{S_i(t)}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{S_i(t)}\right)} \to \min,\ \overline{y}_i \neq y_i(t);$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(t) \leq c(t) = \varphi(t) + \psi(t);$$

$$y_i(t) = y_i(t-1) + S_i(t)u_i(t) + d_i(t);$$

$$y_i(t) \geq y_i(t+1),\ y_i(1) > 0;$$

$$S_i(t) \geq 0,\ c(t) > 0,\ u_i(t) \geq 0;$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,\ t \in [1, T].$$

Модель принятия решения распределения ресурсов с принципом выбора равномерного развития является частным случаем принципа пропорционального развития. Эта модель может использоваться тогда, когда целью политики распределения ресурсов является постепенное сглаживание диспропорций в развитии направлений (объектов).

Сформулируем эту задачу следующим образом.

$$\left\{\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i}\right) - \left(\frac{\overline{y}_j - y_j(t)}{\overline{y}_j}\right)\right\} \to \min;$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(t) \le c(t) = \varphi(t) + \psi(t);$$

$$y_i(t) = y_i(t-1) + S_i(t)u_i(t) + d_i(t);$$

$$y_i(t) \ge y_i(t+1),\ y_i(1) > 0;$$

$$S_i(t) \ge 0,\ c(t) > 0,\ u_i(t) \ge 0;$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n,\ i \ne j,\ t \in [1, T].$$

Ставя задачу с экономической точки зрения, говорим о стремлении получить такое распределение ресурсов, которое стимулировало бы уничтожение диспропорций и достижение общего эффекта. Эта модель описывает, как наиболее эффективным способом приблизиться к некоторым эталонным состояниям развития всех направлений, это достижение будет одновременным.

В реальных задачах принятия решения распределения ресурсов с принципом выбора равномерного развития в первую очередь распределяются средства в малоразвитые, но жизненно важные направления (объекты) для достижения ими некоторого, заранее заданного, эталонного состояния. Оставшиеся после этого ресурсы могут использоваться на повышение общего уровня развития. При этом необходимо задать обязательный уровень так, чтобы на его достижение не ушли все имеющиеся ресурсы.

Несмотря на простоту использования и широкое применение, детерминированные модели нередко оказываются существенно непригодными для описаний и решений задач в сложных реальных экономических условиях, так как параметры детерминированных моделей, к которым сводятся задачи планирования, распределения ресурсов и управления, рассчитываются на информации, которая носит в той или иной мере вероятностный характер. Все это приводит к тому, что часть или все параметры моделей могут выступать либо как случайные, либо как неопределенные величины.

Исходя из возможности получения далеко не лучших и даже абсурдных результатов решения моделей оптимального планирования, а также из необходимости повышения надежности и максимального приближения к реальным ситуациям, можно сделать вывод о необходимости учета вероятностного характера исходной экономической информации в указанных моделях.

С другой стороны, система производственных отношений такова, что она с необходимостью осуществляет направление деятельности, которое в свою очередь детерминировано плановым способом руководства фирмой, организацией, предприятием и в целом муниципальным и народным хозяйством. Но в силу бесконечного многообразия форм этой деятельности в самом процессе планирования необходимо использование законов случайных явлений и процессов в интересах обеспечения необходимости в социально-экономическом развитии общества и научно-технического прогресса.

Создание процедур принятия и корректировки решения, сочетающих противоречивые требования оперативности и обоснованности корректировки, приводит к рассмотрению многоэтапных задач стохастического программирования. Корректировка плана, применяемая в многоэтапных стохастических моделях состоит не в изменении показателей ранее принятого плана, а в планировании мероприятий, которые позволят достигнуть этих показателей.

Назовем некоторые причины необходимости корректировки плана, приводящие к рассмотрению многоэтапных моделей стохастического программирования:

1. в процессе управления часто не представляется возможным

одновременное наблюдение фактических значений всех параметров модели, которые полагались случайными;

2. с информационной точки зрения окончательную корректировку плана следует осуществлять как можно позже, когда известны уже все значения фактических параметров модели;

3. поздняя корректировка существенно снижает эффективность ее реализации;

4. уменьшение времени, выделяемого на проведение корректировки, обычно приводит к повышению степени риска или необходимости дополнительных затрат;

5. иногда для приемлемого хода моделируемого процесса приходится осуществлять некоторые управляющие воздействия, строго привязанные к определенным интервалам времени.

Однако необходимость корректировки плана не является следствием недостатков в системе планирования. Корректировка принятого ранее плана органически присуща планированию в условиях неопределенности.

Чтобы перейти к рассмотрению стохастических моделей принятия решений введем вспомогательные понятия.

Как мы уже говорили в первой главе (см. п. 1.2.1) в общем случае решение стохастической задачи принятия решений представляет собой решающее правило или решающее распределение, зависящее от двух групп факторов. Факторы первой группы не связаны с наблюдением текущих значений параметров условий задачи. Они определяются *априорной информацией* — некоторыми характеристиками распределения или выборкой возможных значений случайных параметров условий. Факторы первой группы могут заблаговременно использоваться для построения или для последовательного усовершенствования решающего правила или решающего распределения. Факторы второй группы определяются апостериорной информацией, появляющейся в результате наблюдения за конкретной реализацией параметров условий задачи принятия решений.

В случае, когда решение предшествует наблюдению, решающие правила и решающие распределения зависят только от детерминированных параметров и статистических характеристик случайных параметров условий задачи. В задачах принятия решений, в которых решение следует за наблюдением, решающие правила и статистические характеристики решающих распределений представляют собой функции, таблицы или инструкции, устанавливающие зависимость решения как от априорной информации, так и от реализованных значений случайных параметров условий задачи.

Определение 4.2.1. *Решающие правила и решающие распределения в процедуре принятия решения, в которой решение принимается до наблюдения, будем называть априорными.*

Определение 4.2.2. *Решающие правила и решающие распределения в процедуре принятия решения, в которой решение принимается после наблюдения, будем называть апостериорными.*

Перейдем к рассмотрению и исследованию многоэтапных стохастических моделей принятия решений распределения ресурсов с принципами выбора классического утилитаризма, пропорционального и равномерного развития.

4.3 Качественный анализ многоэтапных стохастических задач с апостериорными решающими правилами

Пусть задача (4.1.10)-(4.1.12) решается в апостериорных решающих правилах. Совокупность вектор-функций $b^k(\omega^{k-1})$ правых частей ограничений (4.1.11) при соответствующим образом определенной норме образует банахово пространство B_k, при этом каждой вектор-функции $b^n(\omega^{n-1}) \in B_n$ соответствует своя задача (4.1.10)-(4.1.12). Обозначим через $S(b^n(\omega^{n-1}))$ нижнюю грань значений целевого функционала (4.1.10) в зависимости от правой части ограничений (4.1.11), тогда $S(b^n(\omega^{n-1}))$ — функция на B_n. Предположим, что мера F_{ω^n} непрерывна. Имеем следующее утверждение.

Теорема 4.3.1. *При выпуклых по x функциях $\varphi_0(\omega^n, x^n)$ и $-\varphi_k(\omega^k, x^k)$, $k = \overline{1,n}$ функционал $S(b^n(\omega^{n-1}))$ — выпуклый.*

При $n = 1$ выпуклость $S(b_1)$ следует из теоремы Ляпунова о векторных мерах [270] таким же образом, например, как в [191]. Для справедливости утверждения при $n = 1$ нет необходимости в допущении о выпуклости φ_0 и $-\varphi_1$. При $n > 1$ обеспечение выпуклости $S(b^n(\omega^{n-1}))$ требует некоторых предположений о структуре целевой функции и ограничений задачи, например, выпуклости φ_0 и $-\varphi_k$, $k = \overline{1,n}$. Условие выпуклости φ_0 и $-\varphi_k$ по x достаточное, но не необходимое условие для выпуклости $S(b^n(\omega^{n-1}))$.

Теорема 4.3.1 позволяет построить задачу, двойственную к (4.1.10)-(4.1.12). Пусть имеем

$$h_k(\lambda_k, \omega^k, x^{k-1}) =$$

$$= \sup_{x_k \in G_k^0} \left[(\lambda_k, \varphi_k(\omega^k, x^{k-1}, x_k)) - \overline{S}_{k+1}(\omega^k, x^k) \right], \tag{4.3.1}$$

$$H_k(\lambda_k, \omega^{k-1}, x^{k-1}) = \int\limits_{\Omega_k} h_k(\lambda_k, \omega^{k-1}, \omega_k, x^{k-1}) dF_{\omega_k|\omega^{k-1}}, \tag{4.3.2}$$

$$\overline{S}_k(\omega^{k-1}, x^{k-1}) =$$

$$= \sup_{\lambda_k \geq 0} \left[(\lambda_k, b_k(\omega^{k-1})) - H_k(\lambda_k, \omega^{k-1}, x^{k-1}) \right], \ k = \overline{1,n}, \tag{4.3.3}$$

где $\overline{S}_{n+1}(\omega^n, x^n) = \varphi_0(\omega^n, x^n)$, $\lambda_k = \{\lambda_{kj}\}$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m_k}$. Символом $(. \, , \ .)$ обозначается скалярное произведение в эвклидовом пространстве, а символ $\geq$ понимается в смысле обычного упорядочения относительно неотрицательного ортанта. Пусть $\overline{S}(b^n(\omega^{n-1}))$ — замыкание функции $S(b^n(\omega^{n-1}))$ по норме пространства B_n, т.е. $\overline{S}(b^n(\omega^{n-1}))$ — есть наибольшая полунепрерывная снизу на B_n функция, не превосходящая $S(b^n(\omega^{n-1}))$. Имеет место следующая теорема двойственности.

Теорема 4.3.2. *Имеет место соотношение* $\overline{S}_1 = \overline{S}(b^n(\omega^{n-1}))$ *[203]. Здесь* $b_n(\omega^{n-1})$ *не переменный параметр, а тот набор функций, который стоит в правых частях (4.1.11).*

Вышеприведенное утверждение дает возможность сформулировать апостериорные решающие правила для задачи (4.1.10)-(4.1.12), имеем достаточное условие оптимальности.

Теорема 4.3.3. *Пусть существуют вектор-функции*

$$x^n(\omega^n) = \{x_1(\omega^1), \ldots, x_n(\omega^n)\} \in G_n(\omega^n),$$

$$\lambda^n(\omega^{n-1}) = \{\lambda_1, \lambda_2(\omega^1), \ldots, \lambda_n(\omega^{n-1})\} \geq 0,$$

удовлетворяющие соотношениям (4.1.12)*(как равенствам при* $\lambda_{ij}(\omega^{i-1}) \neq 0$ *), и*

$$h_k(\lambda_k, \omega^k, x^{k-1}(\omega^{k-1})) =$$

$$= (\lambda_k, \varphi_k(\omega^k, x^k(\omega^k))) - \overline{S}_{k+1}(\omega^k, x^k),\ k = \overline{1, n}, \qquad (4.3.4)$$

где $\overline{S}_{n+1}(\omega^n, x^n) = \varphi_0(\omega^n, x^n)$*, а остальные вычисляются с помощью рекуррентных соотношений (4.3.1) - (4.3.3), тогда* $x^n(\omega^n)$ *представляет собой набор оптимальных апостериорных решающих правил задачи (4.1.10)-(4.1.12).*

`Доказательство.` Приведем доказательство в соответствии с [203]. Имеем из соотношений (4.3.1)-(4.3.3):

$$\int\limits_{\Omega_k \times \ldots \times \Omega_n} \varphi_0\left(\omega^n, x^n(\omega^n)\right) dF_{\omega^n} \leq$$

$$\leq \int_{\Omega_k} \overline{S}_{k+1}\left(\omega^{k-1}, x^{k-1}(\omega^{k-1})\right) dF_{\omega_k|\omega^{k-1}} =$$

$$= -\int_{\Omega_k} h_k\left(\lambda_k(\omega^{k-1}), \omega^k, x^{k-1}(\omega^{k-1})\right) dF_{\omega_k|\omega^{k-1}} +$$

$$+ \int_{\Omega_k} \left(\lambda_k(\omega^{k-1}), \varphi_k(\omega^k, x^k(\omega^k))\right) dF_{\omega_k|\omega^{k-1}} =$$

$$= -H_k\left(\lambda_k(\omega^{k-1}), \omega^{k-1}, x^{k-1}(\omega^{k-1})\right) + \left(\lambda_k(\omega^{k-1}), b_k(\omega^{k-1})\right) \leq$$

$$\leq \overline{S}_k\left(\omega^{k-1}, x^{k-1}(\omega^{k-1})\right), \ k = n, n-1, \ldots, 1.$$

Когда $k = n$, первое неравенство заменяется по определению равенством. При $k = 1$ имеем, кроме того, $\overline{S}_1 \leq S(b^n(\omega^{n-1}))$, но, с другой стороны, при $k = 1$

$$\int_{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n} \varphi_0\left(\omega^n, x^n(\omega^n)\right) dF_{\omega^n} =$$

$$= \int_{\Omega_n} \varphi_0\left(\omega^n, x^n(\omega^n)\right) dF_{\omega^n} \geq S(b^n(\omega^{n-1})).$$

Поэтому

$$\int_{\Omega_n} \varphi_0\left(\omega^n, x^n(\omega^n)\right) dF_{\omega^n} = S(b^n(\omega^{n-1})),$$

т.е. $x^n(\omega^n)$ — решение задачи (4.1.10)-(4.1.12).

Теорема доказана.

Доказанное утверждение может быть использовано для построения оптимальных апостериорных решающих правил многоэтапной задачи стохастического программирования с условными вероятностными ограничениями.

Пусть имеем задачу вида

$$E\varphi_0(\omega^n, x^n) \to \inf, \tag{4.3.5}$$

$$P\{x_k \in D_k(\omega^k, x^{k-1}) \mid \omega^{k-1}\} \geq \alpha_k(\omega^{k-1}), \tag{4.3.6}$$

$$x_k(\omega^k) \in G_k^0(\omega^k), \; k = \overline{1, n}, \tag{4.3.7}$$

где на каждом этапе $\varphi_k(\omega^k, x^k)$ представляет собой характеристическую функцию случайного множества $D_k(\omega^k, x^{k-1})$, а все $b_k(\omega^{k-1})$ в неравенствах (4.1.11) — скаляры $\alpha_k(\omega^{k-1})$, принадлежащие отрезку $[0,1]$ (задача (4.3.5) - (4.3.7) является частным случаем задачи (4.1.10) - (4.1.12)).

Обозначим

$$\alpha_k(\omega^k, x^{k-1}) = \sup_{x_k \in \widetilde{D}_k} \psi_k(\omega^k, x^k);$$

$$c_k(\omega^k, x^{k-1}) = \sup_{x_k} \psi_k(\omega^k, x^k); \tag{4.3.8}$$

$$U_k(\lambda_k, \omega^{k-1}, x^{k-1}) = \{\omega_k \in \Omega_k \mid c_k(\omega^{k-1}, \omega_k, x^{k-1}) \le$$

$$\le \alpha_k(\omega^{k-1}, \omega_k, x^{k-1}) + \lambda_k\}; \tag{4.3.9}$$

$$V_k(\lambda_k, \omega^{k-1}, x^{k-1}) = \{\omega_k \in \Omega_k \mid c_k(\omega^{k-1}, \omega_k, x^{k-1}) <$$

$$< \alpha_k(\omega^{k-1}, \omega_k, x^{k-1}) + \lambda_k\}; \tag{4.3.10}$$

$u_k(\lambda_k, \omega^{k-1}, x^{k-1})$ и $v_k(\lambda_k, \omega^{k-1}, x^{k-1})$ — меры множеств U_k и V_k соответственно,

$$\lambda_k^*(\omega^{k-1}, x^{k-1}) = \inf\{\lambda \ge 0 \mid \alpha_k(\omega^{k-1}) \le$$

$$\le u_k(\lambda_k, \omega^{k-1}, x^{k-1})\}; \tag{4.3.11}$$

$$\Psi_{k-1}(\omega^{k-1}, x^{k-1}) = H_k(\lambda_k^*(\omega^{k-1}, x^{k-1}), \omega^{k-1}, x^{k-1}) -$$

$$-\alpha_k(\omega^{k-1})\lambda_k^*(\omega^{k-1}, x^{k-1}); \tag{4.3.12}$$

$$H_k(\lambda_k, \omega^{k-1}, x^{k-1}) = \int\limits_{\Omega_k} h_k(\lambda_k, \omega^{k-1}, \omega_k, x^{k-1}) dF_{\omega_k|\omega^{k-1}}; \tag{4.3.13}$$

$$h_k(\lambda_k, \omega^k, x^{k-1}) = \max\{\alpha_k(\omega^k, x^{k-1}) + \lambda_k, \; c_k(\omega^k, x^{k-1})\}. \tag{4.3.14}$$

Используя теорему 4.3.3, можно проверить справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.3.4. *[203] Пусть $\varphi_0(\omega^n, x^n)$ — ограниченная снизу функция и условия (4.3.6)-(4.3.7) совместны, тогда нижняя грань функционала (4.3.5): $\varphi_0^*(\omega^n, x^n) = -\psi_n(\omega^n, x^n)$. Это число определяется в результате решения рекуррентной системы (4.3.8)-(4.3.14), при $k = n, n-1, \ldots, 1$.*

Для того, чтобы выписать оптимальные апостериорные решающие правила многоэтапной стохастической задачи с условными вероятностными ограничениями, введем еще на каждом (k-м) этапе множества $L_k(\omega^{k-1}, x^{k-1})$ и $N_k(\omega^{k-1}, x^{k-1})$. Множество $L_k(\omega^{k-1}, x^{k-1})$ является произвольным подмножеством меры
$\alpha_k(\omega^{k-1}) - v(\lambda_k^*, \omega^{k-1}, x^{k-1})$ множества $R_k(\omega^{k-1}, x^{k-1}) =$
$=U_k(\lambda_k^*(\omega^{k-1}, x^{k-1}), \omega^{k-1}, x^{k-1}) \setminus V_k(\lambda_k^*(\omega^{k-1}, x^{k-1}), \omega^{k-1}, x^{k-1})$.

Множество $N_k(\omega^{k-1}, x^{k-1})$ является дополнением $L_k(\omega^{k-1}, x^{k-1})$ до $R_k(\omega^{k-1}, x^{k-1})$. В этих обозначениях $x_n(\omega^n)$ определяет оптимальный набор апостериорных решающих правил задачи (4.3.5) - (4.3.7) тогда и только тогда, когда на каждом этапе (k-м) имеют место соотношения

$$x_n(\omega^n) = \begin{cases} \in \widetilde{D}_k(\omega^k, x^{k-1}),\ \psi_k(\omega^k, x^k(\omega^k)) = \lambda_k(\omega^k, x^{k-1}(\omega^{k-1})), \\ \text{если } \omega_k \in U_k\left(\lambda_k^*(\omega^{k-1}, x^{k-1}), \omega^{k-1}, x^{k-1}\right) \setminus \\ \qquad \setminus N_k\left(\omega^{k-1}, x^{k-1}\right). \\ \\ \psi_k(\omega^k, x^k(\omega^k)) = c_k(\omega^k, x^{k-1}(\omega^{k-1})), \\ \text{если } \omega_k \in V_k\left(\lambda_k^*(\omega^{k-1}, x^{k-1}), \omega^{k-1}, x^{k-1}\right) \cup \\ \qquad \cup N_k\left(\omega^{k-1}, x^{k-1}\right). \end{cases} \tag{4.3.15}$$

В процессах планирования, проектирования и управления многие проблемы могут быть формализованы в виде задач на экстремум. Решение детерминированных экстремальных задач не вседа удается довести до вида, удобного для практического применения, прежде всего это относится к ситуациям, требующим оперативного выбора решений, поскольку алгоритмы решения детерминированных задач, как правило, очень трудоемки.

В стохастических экстремальных моделях процесс решения может быть растянут во времени и разделен на предварительный и оперативный этапы. На предварительном этапе подготавливаются решающие правила или решающие распределения — решения стохастических задач; на этом этапе не требуется оперативной информации об исходных данных. Необходимо знать структуру задачи и некоторые статистические характеристики случайных параметров условий задачи.

В последние годы сформировался и другой путь решения стохастических задач заслуживающий внимания. Метод итеративного построения решающих правил или решающих распределений по последовательным наблюдениям реализованных значений случайных параметров задачи, имея в виду разработку и адаптивное совершенствование решающих правил или решающих распределений при полном или частичном отсутствии статистических характеристик исходной информации. Ниже рассматривается состояние этого вопроса и приводятся обобщенные схемы стохастической аппроксимации.

4.4 Постановка задачи принятия решений в условиях неполной информации с апостериорными решающими правилами

Рассмотрим многоэтапную задачу принятия решений с вероятностными ограничениями и апостериорными решающими правилами:

$$M_{\omega^n}\psi_0(\omega^n, y_i^n(t)) \to \inf; \tag{4.4.1}$$

$$M_{\omega_k}\{\psi_k(\omega^k, u_i^k(t)) \mid \omega^{k-1}\} =$$
$$= M_{\omega_k}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\{u_{ij}(t,\omega^k) \mid \omega^{k-1}\}\right\} \leq c_k(t,\omega^{k-1}); \tag{4.4.2}$$

$$y_i(t+1,\omega^{k-1}) - y_i(t,\omega^{k-1}) =$$
$$= S_i(t,\omega^{k-1})u_i(t,\omega^{k-1}) + d_i(t,\omega^{k-1}); \tag{4.4.3}$$

$$y_i(t+1,\omega^{k-1}) \geq y_i(t,\omega^{k-1}),\ y_i(1,\omega^{k-1}) > 0; \tag{4.4.4}$$

$$S_i(t,\omega^{k-1}) \geq 0,\ u_i(t,\omega^{k-1}) \geq 0,\ c_k(t,\omega^{k-1}) > 0,$$
$$i = \overline{1,n},\ \omega^k \in \Omega^k = \times_{i=1}^{k}\Omega_i,\ t \in [1,T], \tag{4.4.5}$$

где $c^k(t,\omega^{k-1})$ — вектор статистических ограничений.

Если в качестве целевого функционала мы выберем классический принцип выбора утилитаризма, то данная задача будет иметь вид

$$M_{\omega^n}\psi_0(\omega^n, y_i^n(t)) = M_{\omega^n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t,\omega^n)}{\overline{y}_i}\right)\right\} \to \inf; \tag{4.4.1$'$}$$

$$M_{\omega_k}\{\psi_k(\omega^k, u_i^k(t)) \mid \omega^{k-1}\} =$$
$$= M_{\omega_k}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\{u_{ij}(t,\omega^k) \mid \omega^{k-1}\}\right\} \leq c_k(t,\omega^{k-1}); \tag{4.4.2$'$}$$

$$y_i(t+1,\omega^{k-1}) - y_i(t,\omega^{k-1}) =$$
$$= S_i(t,\omega^{k-1})u_i(t,\omega^{k-1}) + d_i(t,\omega^{k-1}); \tag{4.4.3$'$}$$

$$y_i(t+1,\omega^{k-1}) \geq y_i(t,\omega^{k-1}),\ y_i(1,\omega^{k-1}) > 0; \tag{4.4.4$'$}$$

$$S_i(t,\omega^{k-1}) \geq 0,\ u_i(t,\omega^{k-1}) \geq 0,\ c_k(t,\omega^{k-1}) > 0;$$

$$i = \overline{1,n},\ \omega^k \in \Omega^k = \times_{i=1}^{k} \Omega_i, t \in [1,T]. \tag{4.4.5$'$}$$

Обозначим $y_i(t+1,\omega^{k-1}) - y_i(t,\omega^{k-1})$ через $\Delta_i(t,\omega^{k-1})$, а $S_i(t,\omega^{k-1})u_i(t,\omega^{k-1}) + d_i(t,\omega^{k-1})$ обозначим как $f_i(t,\omega^{k-1})$.

Будем вычислять апостериорные решающие правила, т.е. определять решение среди случайных величин

$$u_i^n(t,\omega^n) = (u_{i1}(t,\omega^1), u_{i2}(t,\omega^2), \ldots, u_{in}(t,\omega^n)).$$

Обозначим через p^i вероятностную меру на Ω^i — множестве элементарных событий A, определенную следующим образом:

если $A \subset \Omega^i$, то $p^i(A) = p(A \times \Omega_{i+1} \times \ldots \times \Omega_n)$, а через p_i — условную вероятностную меру на Ω_i: для всех $A \subset \Omega_i, B \subset \Omega_{i-1}$

$p_i(A \mid \omega^{i-1} \in B) = \frac{p^i(A\times B)}{p^i(\Omega_i \times B)}$ для любого $A \subset \Omega^i, B \subset \Omega^{i-1}$.

Меру p^n будем предполагать непрерывной.

Пусть Σ — σ-алгебра случайных событий на Ω. Таким образом, мы определили вероятностное пространство (Ω, Σ, P).

Переформулируем задачу (4.4.1)-(4.4.5) следующим образом. Требуется минимизировать

$$\sum_{\Omega_n} \psi_0(\omega^n, y_1(t,\omega^1), y_2(t,\omega^2), \ldots, y_n(t,\omega^n)) \tag{4.4.6}$$

на совокупности измеримых отображений

$$u_i^n(\omega^n) = (u_{i1}(\omega^1,t), \ldots, u_{in}(\omega^n,t)),\ u_{ij}(\omega^j,t) : \Omega^j \to U_{ij},$$

где U_i — множества произвольной структуры таких, что $u_{ij} \in U_{ij},\ \ i,j = 1,2,\ldots,n$, удовлетворяющих условиям:

$$\sum_{\Omega_j} \psi_j(\omega^j, u_{i1}(t,\omega^1), u_{i2}(t,\omega^2), \ldots, u_{ij}(t,\omega^j)) =$$

$$= \sum_{\Omega_j} \sum_{j=1}^{n} u_{ij}(t,\omega^j) \le c_j(t,\omega^{j-1}); \tag{4.4.7}$$

$$\sum_{\Omega_j}\{y_{ij}(t+1,\omega^{j-1})-y_{ij}(t,\omega^{j-1})\}=$$

$$=\sum_{\Omega_j}\{S_{ij}(t,\omega^{j-1})u_{ij}(t,\omega^{j-1})+d_{ij}(t,\omega^{j-1})\}; \qquad (4.4.8)$$

$$y_{ij}(t+1,\omega^{j-1})\geq y_{ij}(t,\omega^{j-1}),\ y_{ij}(1,\omega^{j-1})>0; \qquad (4.4.9)$$

$$S_{ij}(t,\omega^{j-1})\geq 0,\ u_{ij}(t,\omega^{j-1})\geq 0,\ c_j(t,\omega^{j-1})>0;$$

$$i=\overline{1,n},\ j=1,2,\ldots,n,\ \omega^j\in\Omega^j=\times_{i=1}^{j}\Omega_i, t\in[1,T]. \qquad (4.4.10)$$

Для задачи принятия решений распределения ресурсов с апостериорными решающими правилами и утилитарным принципом выбора, данная задача может быть переформулирована следующим образом. Требуется минимизировать

$$\sum_{\Omega_n}\psi_0(\omega^n,y_1(t,\omega^1),y_2(t,\omega^2),\ldots,y_n(t,\omega^n))=$$

$$=\sum_{\Omega_n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{y}_i-y_i(t,\omega^n)}{\overline{y}_i}\right)$$

при выполнении условий

$$\sum_{\Omega_j}\psi_j(\omega^j,u_{i1}(t,\omega^1),u_{i2}(t,\omega^2),\ldots,u_{ij}(t,\omega^j))=$$

$$=\sum_{\Omega_j}\sum_{j=1}^{n}u_{ij}(t,\omega^j)\leq c_j(t,\omega^{j-1});\ j=1,2,\ldots,n;$$

$$\sum_{\Omega_j}\{y_{ij}(t+1,\omega^{j-1})-y_{ij}(t,\omega^{j-1})\}=$$

$$=\sum_{\Omega_j}\{S_{ij}(t,\omega^{j-1})u_{ij}(t,\omega^{j-1})+d_{ij}(t,\omega^{j-1})\};$$

$$y_{ij}(t+1,\omega^{j-1})\geq y_{ij}(t,\omega^{j-1}),\ y_{ij}(1,\omega^{j-1})>0;$$

$$S_{ij}(t,\omega^{j-1}) \geq 0,\ u_{ij}(t,\omega^{j-1}) \geq 0,\ c_j(t,\omega^{j-1}) > 0;$$

$$i = \overline{1,n},\ j = 1,2,\ldots,n,\ \omega^j \in \Omega^j = \times_{i=1}^{j}\Omega_i, t \in [1,T].$$

Будем предполагать, что $c_j(t,\omega^{j-1})$ — ограниченные измеримые вектор-функции. Введем $\sum\limits_{k=1}^{j} m_k$-мерные вектор-функции $c_j(t,\omega^{j-1}) = (c_1(t), c_2(t,\omega^1),\ldots,c_j(t,\omega^{j-1}))$ и определим норму вектора $c_j(t,\omega^{j-1})$ следующим образом

$$\|c_j(t,\omega^{j-1})\| = \max(|c_1(t)|, \sup_{\omega^1}|c_2(t,\omega^1)|,\ldots,\sup_{\omega^{j-1}}|c_j(t,\omega^{j-1})|),$$

где $|c_j|$ — евклидова норма вектора c_j в m_j-мерном евклидовом пространстве. Согласно [91], совокупность всех таких функций образует банахово пространство, которое обозначим через C_j. Тогда каждой вектор-функции $c_n(t,\omega^{n-1}) \in C_n$ будет соответствовать своя задача (4.4.6)-(4.4.10). Обозначим через $\breve{S}(c_n(t,\omega^{n-1}))$ нижнюю грань целевого функционала (4.4.6) задачи (4.4.6)-(4.4.10), согласно [96] это функция на C_n.

Зафиксируем $\omega^{k-1},\ \ u_i^{k-1},\ \ c_k \in R_{m_k}$.

Рассмотрим следующую задачу. Минимизировать

$$\sum_{\Omega_k} \psi_0(\omega^{k-1},\omega_k,u_i^{k-1}(t),u_{ik}(t,\omega^k),t) \tag{4.4.11}$$

на совокупности измеряемых отображений:

$$u_{ik}(\omega^k,t) = u_{ik}(\omega^{k-1},\omega^k,t) : \Omega_k \to U_{ik},$$

удовлетворяющих условиям

$$\sum_{\Omega_k} \psi_k(\omega^{k-1},\omega_k,u_i^{k-1},u_{ik}(t,\omega^k),t) \leq c_k(t,\omega^{k-1}), \tag{4.4.12}$$

$$\sum_{\Omega_k} \Delta_k(\omega^{k-1},\omega_k,u_i^{k-1},u_{ik}(t,\omega^k),t) =$$

$$= \sum_{f_k} \Delta_k(\omega^{k-1}, \omega_k, u_i^{k-1}, u_{ik}(t,\omega^k), t), \tag{4.4.13}$$

$$u_i(t,\omega^{k-1}) \geq 0,\ c_k(t,\omega^{k-1}) > 0,\ i = \overline{1,n},\ t \in [1,T]. \tag{4.4.14}$$

Обозначим через $\breve{S}_k(\omega^{k-1}, u_i^{k-1}, c_k)$ нижнюю грань минимизируемого целевого функционала данной задачи.

Теорема 4.4.1. [97].$\breve{S}(c_k(t,\omega^{k-1}))$ *совпадает с нижней гранью минимизируемого функционала в следующей задаче:*

$$\sum_{\Omega^k} \breve{S}_k(\omega^{k-1}, u_i^{k-1}(t,\omega^{k-1}), c^k(t,\omega^{k-1})) \to \min \tag{4.4.15}$$

для всех $u_i^{k-1}(t,\omega^{k-1}) = (u_{i1}(t,\omega^1), u_{i2}(t,\omega^2), \ldots, u_{i,k-1}(t,\omega^{k-1}))$, *таких, что*

$$\sum_{\Omega_l} \psi_l(\omega^l, u_i^l(t,\omega^l), t) \leq c_i(t,\omega^{l-1}), \tag{4.4.16}$$

$$\sum_{\Omega_l} \Delta_l(\omega^l, \omega_k, u_i^l(t,\omega^l), t) = \sum_{\Omega_l} f_l(\omega^l, u_i^l(t,\omega^l), t), \tag{4.4.17}$$

$$u_i(t,\omega^l) \geq 0,\ c_l(t,\omega^{l-1}) > 0,\ t \in [1,T],\ l = \overline{1,k-1},\ i = \overline{1,n}. \tag{4.4.18}$$

`Доказательство.` Если $u_i^k(t,\omega^k) = (u_{i1}(t,\omega^1), \ldots, u_{i,k}(t,\omega^k))$ удовлетворяет условиям (4.4.16), то

$$\sum_{\Omega_k} \psi_k(\omega^{k-1}, \omega_k, u_i^{k-1}, u_{ik}(t,\omega^k), t) \leq c_k(t,\omega^{k-1}).$$

Поэтому по определению:

$$\breve{S}_k(\omega^{k-1}, u_i^{k-1}(t,\omega^{k-1}), c_k(t,\omega^{k-1})) \leq \sum_{\Omega_k} \psi_0(\omega^k, u_i^k(t,\omega^k)).$$

Следовательно, нижняя грань целевого функционала задачи (4.4.15)-(4.4.18) не больше $\breve{S}(c_i^k(t,\omega^{k-1}))$. С другой стороны, можно найти $u_i^{k-1}(t,\omega^{k-1})$ так, чтобы выполнялось соотношение (4.4.16) и чтобы

(4.4.15) отличался от нижней грани целевого функционала задачи (4.4.15)-(4.4.18) не более, чем на заданное $\varepsilon > 0$.

Рассматривая для каждого ω^{k-1} задачу (4.4.11)-(4.4.14) с $u_i^{k-1} = u_i^{k-1}(t, \omega^{k-1})$, найдем такое, чтобы оно удовлетворяло условию (4.4.12) и чтобы (4.4.11) отличался от (4.4.15) не более чем на ε. Тогда вектор-функция $u_i^k(t, \omega^k) = (u_i^{k-1}(t, \omega^{k-1}), u_{ik}(t, \omega^k))$ удовлетворяет условиям (4.4.7).

Обозначая через S' нижнюю грань целевого функционала задачи (4.4.15)-(4.4.18) получаем:

$$S'(c^k(t, \omega^{k-1})) \le \sum_{\Omega^k} \psi_0(\omega^k, u_i^k(t, \omega^k)) =$$

$$= \sum_{\Omega^{k-1}} \left[\sum_{\Omega^k} \psi_0(\omega^{k-1}, \omega_k, u_i^{k-1}(t, \omega^{k-1}), u_{ik}(t, \omega^{k-1}, \omega_k)) \right] \le$$

$$\le \sum_{\Omega^{k-1}} \left[\breve{S}_k(\omega^{k-1}, u_i^{k-1}(t, \omega^{k-1}), c_k(t, \omega^{k-1})) + \varepsilon \right] \le S' + \varepsilon.$$

Так как ε мы выбрали произвольно, то $S'(c^k(t, \omega^{k-1}))$ будет нижняя грань минимизируемого функционала в задаче (4.4.15)-(4.4.18).

Теорема доказана.

Теорема 4.4.2. [96]. *При выпуклых по u_i функциях $\psi_0(\omega^n, u_i^n)$ и $-\psi_k(\omega^k, u_i^k)$, $k = \overline{1, n}$, функционал $\breve{S}(c_i^n(t, \omega^{n-1}))$ — выпуклый.*

4.5 Рекуррентные апостериорные решающие правила

Построим задачу, двойственную к (4.4.6) - (4.4.10), и рекуррентную последовательность решающих правил.

Рассмотрим следующую последовательность функций:

$$h_n(\lambda_n, \omega^n, u_i^{n-1}(t)) =$$

$$= \sup_{u_{in} \in U_{in}} \left[\left(\lambda_n, \psi_n(\omega^n, u_i^{n-1}(t), u_{in}(t)) \right) - \psi_0 \left(\omega^0, u_i^{n-1}(t), u_{in}(t) \right) \right];$$

$$H_n\big(\lambda_n, \omega^{n-1}, u_i^{n-1}(t)\big) = \int\limits_{\Omega_n} h_n\big(\lambda_n, \omega^{n-1}, \omega_n, u_i^{n-1}(t)\big) dp_n;$$

$$\overline{S}_n\big(\omega^{n-1}, u_i^{n-1}(t)\big) = \sup_{\lambda_n \geq 0}\big[\big(\lambda_n, c_n(t, \omega^{n-1})\big) - H_n\big(\lambda_n, \omega^n, u_i^{n-1}(t)\big)\big];$$

$$h_{n-1}(\lambda_{n-1}, \omega^{n-1}, u_i^{n-2}(t)) =$$

$$= \sup_{u_{i,n-1} \in U_{i,n-1}} \big[\big(\lambda_{n-1}, \psi_{n-1}\big(\omega^{n-1}, u_i^{n-2}(t), u_{i,n-1}(t)\big)\big) -$$

$$-\overline{S}_n\big(\omega^{n-1}, u_i^{n-2}(t), u_{i,n-1}(t)\big)\big];$$

$$H_{n-1}\big(\lambda_{n-1}, \omega^{n-2}, u_i^{n-2}(t)\big) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{n-1}} h_{n-1}\big(\lambda_{n-1}, \omega^{n-2}, \omega_{n-1}, u_i^{n-2}(t)\big) dp_{n-1};$$

$$\overline{S}_{n-1}\big(\omega^{n-2}, u_i^{n-2}(t)\big) =$$

$$= \sup_{\lambda_{n-1} \geq 0}\big[\big(\lambda_{n-1}, c_{n-1}(t, \omega^{n-2})\big) - H_{n-1}\big(\lambda_{n-1}, \omega^{n-2}, u_i^{n-2}(t)\big)\big];$$

. . . .

$$h_k(\lambda_k, \omega^k, u_i^{k-1}(t)) =$$

$$= \sup_{x_k \in X_k}\big[\big(\lambda_k, \psi_k\big(\omega^k, u_i^{k-1}(t), u_{ik}(t)\big)\big) - \overline{S}_{k+1}\big(\omega^k, u_i^k(t)\big)\big];$$

$$H_k\big(\lambda_k, \omega^{k-1}, u_i^{k-1}(t)\big) = \int\limits_{\Omega_k} h_k\big(\lambda_k, \omega^{k-1}, \omega_k, u_i^{k-1}(t)\big) dp_k;$$

$$\overline{S}_k\big(\omega^{k-1}, u_i^{k-1}(t)\big) = \sup_{\lambda_k \geq 0}\big[\big(\lambda_k, c_k(t, \omega^{k-1})\big) - H_k\big(\lambda_k, \omega^{k-1}, u_i^{k-1}(t)\big)\big];$$

. . . .

$$h_1(\lambda_1, \omega^1) =$$

$$= \sup_{u_{i1} \in U_{i1}}\big[\big(\lambda_1, \psi_1\big(\omega_1, u_{i1}(t)\big)\big) - \overline{S}_2\big(\omega_1, u_{i1}(t)\big)\big];$$

$$H_1\big(\lambda_1\big) = \int\limits_{\Omega_1} h_1\big(\lambda_1, \omega_1\big) dp_1;$$

$$\overline{S}_1 = \sup_{\lambda_1 \geq 0}\big[\big(\lambda_1, c_1(t)\big) - H_1\big(\lambda_1\big)\big];$$

Обозначим через $\overline{S}_n\big(c_n(t,\omega^{n-1})\big)$ замыкание функции $\breve{S}(c_n(t,\omega^{n-1}))$ по норме пространства C_n, т.е. $\overline{S}_n\big(c_n(t,\omega^{n-1})\big)$ есть наибольшая полунепрерывная снизу на C_n функция, не превосходящая $\breve{S}(c_n(t,\omega^{n-1}))$.

Теорема 4.5.1. [97]. $\overline{S}_1 = \overline{S}_n\big(c_n(t,\omega^{n-1})\big)$.

`Доказательство.` В случае $n = 1$ утверждение следует из [57]. Допустим, что теорема верна для $n = k-1$ и рассмотрим случай $n = k$.

Зафиксируем ω^{k-1}, $u_i^{k-1}(t)$ и рассмотрим задачу (4.4.8)-(4.4.9). Так как задача (4.4.6)-(4.4.7) одноэтапная, то $\overline{S}_k\big(\omega^{k-1}, u_i^{k-1}(t)\big)$ совпадает с $\overline{S}_k\big(\omega^{k-1}, u_i^{k-1}(t), c_k(t,\omega^{k-1})\big)$. Поэтому

$$h_{k-1}(\lambda_{k-1}, \omega^{k-1}, u_i^{k-2}(t)) =$$

$$= \sup_{u_{i,k-1}\in U_{i,k-1}} \Big[\big(\lambda_{k-1}, \psi_{k-1}\big(\omega^{k-1}, u_i^{k-2}(t), u_{i,k-1}(t)\big)\big) -$$
$$-\overline{S}_k\big(\omega^{k-1}, u_i^{k-1}(t)\big)\Big] =$$

$$= \sup_{u_{i,k-1}\in U_{i,k-1}} \Big[\big(\lambda_{k-1}, \psi_{k-1}\big(\omega^{k-1}, u_i^{k-2}(t), u_{i,k-1}(t)\big)\big) -$$
$$-\overline{S}_k\big(\omega^{k-1}, u_i^{k-1}(t), c_k(t,\omega^{k-1})\big)\Big],$$

т.е. значения $\overline{S}_{k-1}\big(\omega^{k-2}, u_i^{k-2}(t)\big)$, вычисленные для задач (4.4.4)-(4.4.5) и (4.4.8)-(4.4.9), совпадают.

Следовательно, для них совпадают и все $\overline{S}_i$, $i \le k-1$. По индуктивному предположению, справедливому для задачи (4.4.15)-(4.4.18), $\overline{S}_1$ равно значению замыкания функции, равной нижней грани функционала (4.4.15) задачи (4.4.15)-(4.4.18) в зависимости от правой части ограничения (4.4.16), в заданной точке $c_{k-1}(t,\omega^{k-2})$. Но, как видно из теоремы 4.4.1, эта функция совпадает с $\overline{S}\big(c_n(t,\omega^{n-1})\big)$.

`Теорема доказана.`

Теперь можем сформулировать рекуррентное решающее правило, которое здесь выступает как достаточное условие оптимальности.

Теорема 4.5.2. *Для того, чтобы задача принятия решений (4.4.11)-(4.4.14) имела решение* $u_i^n(t,\omega^n)$ *достаточно, чтобы существовали такие вектор-функции*

$$u_i^n(t,\omega^n) = (u_{i1}(t,\omega_1),\ldots,u_{in}(t,\omega^n)),$$

$$\lambda^n(\omega^{n-1}) = (\lambda_1,\lambda_2(\omega_1),\ldots,\lambda_n(\omega^{n-1})) \geq 0,$$

что удовлетворяются условия (4.4.12) (как равенства при $\lambda_{ij}(\omega^{i-1}) \neq 0$*) и*

$$h_k(\lambda_k,\omega^k,u_i^{k-1}(t,\omega^{k-1})) =$$

$$= \big(\lambda_k,\psi_k\big(\omega^k,u_i^k(t,\omega^k)\big)\big) - \overline{S}_{k+1}\big(\omega^k,u_i^k(t)\big), \tag{4.5.1}$$

где $\overline{S}_{n+1}\big(\omega^n,u_i^n(t)\big) = \psi_0\big(\omega^0,u_i^0(t)\big)$*, а остальные* $\overline{S}_k$ *определяются по выше описанному рекуррентному правилу.*

`Доказательство.` Имеем

$$\int\limits_{\Omega_n} \psi_0\big(\omega^n,u_i^n(t,\omega^n)\big)dp^n = \int\limits_{\Omega_n} \overline{S}_{n+1}\big(\omega^n,u_i^n(t,\omega^n)\big)dp_n =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_n} h_n\big(\lambda_n(\omega^{n-1}),\omega^n,u_i^{n-1}(t,\omega^{n-1})\big)dp_n +$$

$$+\int\limits_{\Omega_n} \big(\lambda_n(\omega^{n-1}),\psi_n(\omega^n,u_i^n(t,\omega^n))\big)dp_n =$$

$$= -H_n\big(\lambda_n(\omega^{n-1}),\omega^{n-1},u_i^{n-1}(t,\omega^{n-1})\big) + \big(\lambda_n(\omega^{n-1}),c_n(t,\omega^{n-1})\big) \leq$$

$$\leq \overline{S}_n\big(\omega^{n-1},u_i^{n-1}(t,\omega^{n-1})\big).$$

Поэтому

$$\int\limits_{\Omega_{n-1}\times\Omega_n} \psi_0\big(\omega^n,u_i^n(t,\omega^n)\big)dp^n \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega_{n-1}} \overline{S}_{n-1}\big(\omega^{n-1}, u_i^{n-1}(t,\omega^{n-1})\big)dp_{n-1} =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_{n-1}} h_{n-1}\big(\lambda_{n-1}(\omega^{n-2}), \omega^{n-1}, u_i^{n-2}(t,\omega^{n-2})\big)dp_{n-1} +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_{n-1}} \big(\lambda_{n-1}(\omega^{n-2}), \psi_{n-1}(\omega^{n-1}, u_i^{n-1}(t,\omega^{n-1}))\big)dp_{n-1} =$$

$$= -H_{n-1}\big(\lambda_{n-1}(\omega^{n-2}), \omega^{n-2}, u_i^{n-2}(t,\omega^{n-2})\big) +$$

$$+\big(\lambda_{n-1}(\omega^{n-2}), c_{n-1}(t,\omega^{n-2})\big) \leq \overline{S}_{n-1}\big(\omega^{n-2}, u_i^{n-2}(t,\omega^{n-2})\big);$$

. . . .

$$\int\limits_{\Omega_k\times\Omega_n} \psi_0\big(\omega^n, u_i^n(t,\omega^n)\big)dp^n \leq \int\limits_{\Omega_k} \overline{S}_{k+1}\big(\omega^{k-1}, u_i^{k-1}(t,\omega^{k-1})\big)dp_k =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_k} h_k\big(\lambda_k(\omega^{k-1}), \omega^k, u_i^{k-1}(t,\omega^{k-1})\big)dp_k +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_k} \big(\lambda_k(\omega^{k-1}), \psi_k(\omega^k, u_i^k(t,\omega^k))\big)dp_k =$$

$$= -H_k\big(\lambda_k(\omega^{k-1}), \omega^{k-1}, u_i^{k-1}(t,\omega^{k-1})\big) + \big(\lambda_k(\omega^{k-1}), c_k(t,\omega^{k-1})\big) \leq$$

$$\leq \overline{S}_k\big(\omega^{k-1}, u_i^{k-1}(t,\omega^{k-1})\big);$$

. . . .

$$\int\limits_{\Omega^n} \psi_0\big(\omega^n, u_i^n(t,\omega^n)\big)dp^n \leq \int_{\Omega_1} \overline{S}_2\big(\omega_1, u_{i1}(t,\omega_1)\big)dp_1 =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_1} h_1\big(\lambda_1, \omega_1\big)dp_1 + \big(\lambda_1, c_1(t)\big) \leq \overline{S}_1 \leq \breve{S}(c^n(t,\omega^{n-1})).$$

Но, с другой стороны,

$$\int\limits_{\Omega^n} \psi_0\big(\omega^n, u_i^n(t,\omega^n)\big)dp^n \geq \breve{S}(c^n(t,\omega^{n-1})).$$

Итак,

$$\int\limits_{\Omega^n} \psi_0\big(\omega^n, u_i^n(t,\omega^n)\big)dp^n = \breve{S}(c^n(t,\omega^{n-1})),$$

т.е. $u_i^n(t, \omega^n)$ — решение задачи (4.4.11)-(4.4.14).

Теорема доказана.

4.6 Λ-задача

Для ряда многоэтапных моделей принятия решений в условиях неполной информации, представляющие собой соотношения, которые связывают компоненты решения с реализацией случайной величины ω и некоторый векторный параметр λ, могут быть получены решающие правила. В некоторых отдельных случаях постановок таких задач вектор λ — план двойственной задачи — оказывается решением некоторой относительно простой задачи выпуклого программирования. Будем называть эти задачи Λ-*задачами*.

При достаточно общих предположениях относительно структуры модели можно указать конструктивные пути построения и анализа Λ-задачи для вычисления апостериорных решающих правил многоэтапных стохастических задач принятия решений.

Пусть U_i — область определения аргумента u_i, а F - область значений функции $f(u_i(t), \omega)$. Введем следующие определения:

Определение 4.6.1. [95]. *Функция $f(u_i(t), \omega)$ на $U_i \times \Omega$ квазивогнута в U_i, если при любом $u_i \in U_i$ $(i = \overline{1, n})$, и любом вещественном c множество $\{u_i \mid f(u_i(t), \omega) \geq c\}$ выпукло.*

Определение 4.6.2. [95]. *Функция $f(u_i(t), \omega)$ на $U_i \times \Omega$ квазивыпукла в Ω, если при любом $u_i \in U_i$ $(i = \overline{1, n})$, и любом вещественном c множество $\{u_i \mid f(u_i(t), \omega) \leq c\}$ выпукло.*

Определение 4.6.3. [95].*Функция на $f(u_i(t), \omega)$ на $U_i \times \Omega$ $(i = \overline{1, n})$ квазивогнуто-выпукла, если она квазивогнута в U_i, и квазивыпукла в Ω.*

Согласно этим определениям, мы можем сказать, что каждая вогнутая функция квазивогнута, выпуклая — квазивыпукла, а вогнуто-выпуклая — квазивогнуто-выпуклая.

Определение 4.6.4. *Будем называть подмножество* $\left[u_i, f(u_i(t), \omega)\right]$ *множества* $U_i \times F$ *графиком функции (отображения)* $f(u_i(t))$.

Пусть L — множество предельных точек всех последовательностей образов в графике отображения, соответствующих пути $u_i \to u_i^0$, а $F\big(u_i^0(t)\big)$ — множество образов точки u_i^0.

Определение 4.6.5. [96].*Функция* $f(u_i(t))$ *полунепрерывна сверху в* u_i^0, *если* $L \subset F\big(u_i^0(t)\big)$, *и полунепрерывна снизу в* u_i^0, *если* $F\big(u_i^0(t)\big) \subset L$. *Если* $f(u_i(t))$ *полунепрерывна сверху и снизу,* $F\big(u_i^0(t)\big) = L$, *и функция непрерывна в* u_i^0. *Функция полунепрерывна сверху (снизу) на множестве* U_i, *если это свойство имеет место для всех* $u_i \in U_i$.

Определение 4.6.6. [96].*Функция* $f(u_i(t), \omega)$ *на* $U_i \times \Omega$ *является полунепрерывной сверху – полунепрерывной снизу, если* $f(u_i(t), \omega)$ *полунепрерывной сверху по* u_i *для каждого* $\omega \in \Omega$, *и полунепрерывной снизу по* ω *для каждого* $u_i \in Ui$.

Теорема 4.6.1. «О минимаксе» [97]. *Пусть* U_i $i = 1, 2, \ldots, n$ *и* Ω *— выпуклые множества, одно из которых компактно, а* $f(u_i(t), \omega)$ *— функция на* $U_i \times \Omega$ *квазивогнуто-выпуклая и полунепрерывная сверху – полунепрерывная снизу. Тогда*

$$\sup_{u_i \in Ui} \inf_{\omega \in \Omega} f(u_i(t), \omega) = \inf_{\omega \in \Omega} \sup_{u_i \in Ui} f(u_i(t), \omega). \qquad (4.6.1)$$

Теорема 4.6.2. [97]. *Пусть* $X(Y)$ *выпукло и компактно,* $Y(X)$ *— произвольно выпуклое множество, а* $f(x, y)$ *— вогнуто-выпуклая функция на* $X \times Y$. *Если* $f(x, y)$ *полунепрерывна сверху по* x *для каждого* $y \in Y$ *(полунепрерывная снизу по* y *для каждого*

$x \in X$), то имеет место (4.6.1).

Лемма 4.6.1. [95]. *Пусть существует функция $u_i^*(t,\omega) \in U_i(\omega)$, являющаяся $\forall^\omega$ решением задачи*

$$\sup_{u_i(t,\omega)\in U_i(\omega)} f(u_i(t,\omega),\omega) = f(u_i^*(t,\omega),\omega). \tag{4.6.2}$$

Тогда

$$M \sup_{u_i(t,\omega)\in U_i(\omega)} f(u_i(t,\omega),\omega) = \sup_{u_i(t,\omega)\in U_i} Mf(u_i(t,\omega),\omega) \tag{4.6.3}$$

или

$$\int\limits_{\Omega} \sup_{u_i(t,\omega)\in U_i(\omega)} f(u_i(t,\omega),\omega)dp = \sup_{u_i(t,\omega)\in U_i} \int\limits_{\Omega} f(u_i(t,\omega),\omega)dp. \tag{4.6.4}$$

Доказательство. С одной стороны, имеем

$$\int\limits_{\Omega} f(u_i^*(t,\omega),\omega)dp = \int\limits_{\Omega} \sup_{u_i(t,\omega)\in U_i(\omega)} f(u_i(t,\omega),\omega)dp \geq$$

$$\geq \sup_{u_i(t,\omega)\in U_i} \int\limits_{\Omega} f(u_i(t,\omega),\omega)dp; \tag{4.6.5}$$

с другой стороны,

$$\sup_{u_i(t,\omega)\in U_i} \int\limits_{\Omega} f(u_i(t,\omega),\omega)dp \geq \int\limits_{\Omega} f(u_i(t,\omega),\omega)dp,\ \forall u_i(t,\omega) \in U_i(\omega),$$

тогда справедливо и неравенство

$$\sup_{u_i(t,\omega)\in U_i} \int\limits_{\Omega} f(u_i(t,\omega),\omega)dp \geq \int\limits_{\Omega} f(u_i^*(t,\omega),\omega)dp. \tag{4.6.6}$$

Сравнивая (4.6.5) и (4.6.6), получаем

$$\int\limits_{\Omega} \sup_{u_i(t,\omega)\in U_i(\omega)} f(u_i(t,\omega),\omega)dp = \sup_{u_i(t,\omega)\in U_i} \int\limits_{\Omega} f(u_i(t,\omega),\omega)dp. \tag{4.6.6$'$}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим многоэтапную задачу принятия решения в условиях неполной информации (4.4.1)-(4.4.5):

$$M\psi_0(\omega^n, y_i^n(t)) \to \inf; \tag{4.4.1$''$}$$

$$M\{\psi_k(\omega^k, u_i^k(t)) \mid \omega^{k-1}\} =$$

$$= M\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\{u_{ij}(t,\omega^k) \mid \omega^{k-1}\}\right\} \le c_k(t,\omega^{k-1}),$$

$$u_{ij}(t,\omega) \in U_{ij}(\omega), j = \overline{1,n}; \qquad (4.4.2'')$$

$$y_i(t+1,\omega^{k-1}) - y_i(t,\omega^{k-1}) =$$

$$= S_i(t,\omega^{k-1})u_i(t,\omega^{k-1}) + d_i(t,\omega^{k-1}); \qquad (4.4.3'')$$

$$y_i(t+1,\omega^{k-1}) \ge y_i(t,\omega^{k-1}),\ y_i(1,\omega^{k-1}) > 0; \qquad (4.4.4'')$$

$$S_i(t,\omega^{k-1}) \ge 0,\ c_k(t,\omega^{k-1}) > 0,\ u_i(t,\omega^{k-1}) \ge 0,$$

$$i = \overline{1,n},\ \omega^k \in \Omega^k = \times_{i=1}^{k}\Omega_i,\ t \in [1,T]. \qquad (4.4.5'')$$

Введем рекуррентным образом функцию $\phi_0^{(k)}(\omega^n, u_i^{n-k}, \lambda^{n-k=1,n})$:

$$\phi_0^{(k+1)}(\omega^n, u_i^{n-k-1}(t), \lambda^{n-k,n}) = \big(\lambda_{n-k}(\omega^{n-k-1}), c_{n-k}(\omega^{n-k-1})\big) -$$

$$- \sup_{u_{i,k-n}(t)\in U_{i,kn-k}} \Big[\big(\lambda_{n-k}(\omega^{n-k-1}), \phi_{n-k}(\omega^{n-k}, u_i^{n-k}(t))\big) -$$

$$-\phi_0^{(k)}(\omega^n, u_i^{n-k}(t), \lambda^{n-k+1,n})\Big],\ k = \overline{0, n-1},$$

где

$$\lambda^{k,n} = \big(\lambda_k(\omega^{k-1}), \lambda_{k+1}(\omega^k), \ldots, \lambda_n(\omega^{n-1})\big),$$

$$\phi_0^{(0)}(\omega^n, u_i^n(t)) = \phi_0(\omega^n, u_i^n(t)).$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.6.2. [97] *Пусть функция $\psi(u_i(t,\omega),\omega)$ выпукла по $\omega \in \Omega$, $\forall u_i(t,\omega) \in U_i(\omega)$ и вогнута по $u_i(t,\omega) \in U_i(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$, и существуют функции*

$$\varphi(u_i(t)) = \inf_{\omega\in\Omega} \psi(u_i(t,\omega),\omega),$$

$$f(\omega) = \sup_{u_i(t,\omega)\in U_i(\omega)} \psi(u_i(t,\omega),\omega).$$

Тогда $\varphi(u_i(t,\omega))$ вогнута по u_i на U_i, а $f(\omega)$ выпукла по ω на Ω.

Теорема 4.6.3. *Пусть целевая функция многоэтапной стохастической задачи принятия решений* $\psi_0(\omega^n, u_i^n(t))$, $i=\overline{1,n}$, $t \in [1,T]$, *квазивыпукла (выпукла) по* $u_i^n(t) \in U_i^n$, $\forall \omega^n$, *а компоненты ограничений многоэтапной задачи принятия решений — вектор-функции* $\psi_k(\omega^k, u_i^k(t))$, $k=\overline{1,n}$, $t \in [1,T]$, *квазивогнуты (вогнуты) по* $u_i^k(t) \in U_i^k$, $\forall \omega^k$. *Тогда* $\phi_0^{(k)}(\omega^n, u_i^{n-k}(t), \lambda^{n-k+1,n})$, $k=\overline{1,n}$, $t \in [1,T]$ *квазивыпуклы (выпуклы) по* $u_i^{n-k}(t) \in U_i^{n-k}$, $\forall \omega^n$, $\forall \lambda^{n-k+1,n} \geq 0$ *и квазивогнуты (вогнуты) по* $\lambda^{n-k+1,n} \geq 0$, $\forall \omega^n$, $\forall u_i^{n-k}(t) \in U_i^{n-k}$.

Доказательство выпуклости и вогнутости функций

$$\phi_0^{(k)}(\omega^n, u_i^{n-k}(t), \lambda^{n-k+1,n}),$$

удовлетворяющих условиям этой теоремы, следует из леммы. Квазивыпуклость и квазивогнутость этих функций следует из определений 4.6.1, 4.6.2.

Лемма 4.6.3. *Если целевая функция* $\psi_0(\omega^n, u_i^n(t))$, $i=\overline{1,n}$, $t \in [1,T]$, *задачи принятия решений в условиях неполной информации выпукла по* $u_i^n(t)$, $\forall \omega^n$, *а функции условных ограничений* $\psi_k(\omega^k, u_i^k(t))$, $k=\overline{1,n}$, $t \in [1,T]$ *вогнуты по* $u_i^k(t), \forall \omega^k$, *то функции*

$$\phi_0^{(1)}(\omega^n, u_i^{n-1}(t), \lambda_n),\ \phi_0^{(2)}(\omega^n, u_i^{n-2}(t), \lambda^{n-1,n}), \ldots$$
$$\ldots, \phi_0^{(k)}(\omega^n, u_i^{n-k}(t), \lambda^{n-k+1,n}),\ k=\overline{0,n}$$

непрерывны по соответствующим переменным.

Доказательство этой леммы вытекает из доказательства теоремы Дебре [7].

Перейдем к построению Λ-задачи для стохастической модели принятия решений $(4.4.1'')-(4.4.5'')$. Будем предполагать, что функции $\psi_0(\omega^n, u_i^n(t))$ и $\psi_k(\omega^k, u_i^k(t))$, $k=\overline{1,n}$, $t \in [1,T]$ удовлетворяют требованиям теоремы 4.6.3. В соответствии с леммой 4.6.1 и теоремами 4.6.1 и 4.6.2 мы можем записать рекуррентные апостериорные решающие правила в следующем виде:

$$\overline{S}_n(\omega^{n-1}, u_i^{n-1}(t)) =$$

$$= \sup_{\lambda_n \geq 0} M_{\omega_n|\omega^{n-1}} \Big\{ (\lambda_n, c_n(t)) - \sup_{u_{in}(t) \in U_{in}} \big[(\lambda_n, \phi_n) - \phi_0 \big] \Big\} =$$

$$= M_{\omega_n|\omega^{n-1}} \phi_0^{(1)}(\omega^n, u_i^{n-1}(t), \lambda_n),$$

$$\overline{S}_{n-1}(\omega^{n-2}, u_i^{n-2}(t)) = \sup_{\lambda_{n-1} \geq 0} M_{\omega_{n-1}|\omega^{n-2}} \Big\{ (\lambda_{n-1}, c_{n-1}(t)) -$$

$$- \sup_{u_{i,n-1}(t) \in U_{i,n-1}} \big[\lambda_{n-1}, \phi_{n-1} - M_\omega \sup_{\lambda_n \geq 0} \phi_0^{(1)} \big] \Big\} =$$

$$= \sup_{\lambda_{n-1} \geq 0} M_{\omega^{n-1,n}} \Big\{ (\lambda_{n-1}, c_{n-1}(t)) -$$

$$- \sup_{u_{i,n-1}(t) \in U_{i,n-1}} \inf_{\lambda_n \geq 0} \big[(\lambda_{n-1}, \phi_{n-1}) - \phi_0^{(1)} \big] \Big\} =$$

$$= \sup_{\lambda^{n-1,n} \geq 0} M_{\omega^{n-1,n}} \Big\{ (\lambda_{n-1}, c_{n-1}(t)) -$$

$$- \sup_{u_{i,n-1}(t) \in U_{i,n-1}} \big[(\lambda_{n-1}, \phi_{n-1}) - \phi_0^{(1)} \big] \Big\} =$$

$$= \sup_{\lambda^{n-1,n} \geq 0} M_{\omega^{n-1,n}} \phi_0^{(2)}(\omega^n, u_i^{n-2}(t), \lambda^{n-1,n}).$$

Аналогичным образом получаем

$$\overline{S}_k = \sup_{\lambda^{k,n} \geq 0} M_{\omega^{k,n}} \Big\{ (\lambda_k, c_k(t)) -$$

$$- \sup_{u_{ik}(t) \in U_{ik}} \big[(\lambda_k, \phi_k) - \phi_0^{(n-k)}(\omega^n, u_i^k(t), \lambda^{k+1,n}) \big] \Big\} =$$

$$= \sup_{\lambda^{k,n} \geq 0} M_{\omega^{k,n}} \phi_0^{(n-k+1)}(\omega^n, u_i^{k-1}(t), \lambda^{k,n}).$$

Полагаем $k = 1$, получаем

$$\overline{S}_1 = \sup_{\lambda^n \geq 0} M_{\omega^n} \phi_0^{(n)}(\omega^n, \lambda^n).$$

Сформулируем Λ-задачу для многоэтапной стохастической модели принятия решений (4.4.1$''$)-(4.4.5$''$).

Теорема 4.6.4. *При выполнении принятых предположений относительно функций $\psi_0(\omega^n, u_i^n(t))$ и $\psi_k(\omega^k, u_i^k(t))$, которые определяют условия многоэтапной стохастической модели принятия решений (4.4.1″)-(4.4.5″), двойственная к ней (Λ-задача) может быть представлена в виде*

$$\max_{\lambda^n \geq 0} M_{\omega^n} \phi_0^{(n)}(\omega^n, \lambda^n(\omega^{n-1})). \tag{4.6.7}$$

Условия теоремы 4.6.4 гарантируют вогнутость функций $\phi_0^{(n)}(\omega^n, \lambda^n)$ по $\lambda^n \geq 0 \ \ \forall \omega^n$.

Рассмотрим случай, когда целевой функционал

$$Q(\lambda^n) = M_{\omega^n} \psi_0^{(n)}(\omega^n, \lambda^n(\omega^{n-1}))$$

задачи (4.6.7) может быть представлен в виде

$$\widetilde{Q}(\lambda^n) = M_{\omega^n} \widetilde{\psi}_0^{(n)}(\lambda_{n+1}(\omega^n), \lambda^n(\omega^{n-1})), \tag{4.6.8}$$

причем $\widetilde{\psi}_0^{(n)}$ — вогнутая дифференцируемая функция относительно $\lambda^n(\omega^{n-1})$ и компонент известной вектор-функции $\lambda_{n+1}(\omega^n)$.

Рассмотрим следующую конечномерную задачу выпуклого программирования

$$\max_{\mu^n \geq 0} \widetilde{\psi}_0^{(n)}(\overline{\lambda_{n+1}}, \mu^n), \tag{4.6.9}$$

где $\overline{\lambda_{n+1}} = M\lambda_{n+1}(\omega^n)$; $\mu^n = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Пусть вектор μ^{*n} — решение задачи (4.6.9). Пусть функционал $\widetilde{\psi}_0^{(n)}$ удовлетворяет следующему условию:

$$M\big(\nabla_{\lambda_{n+1}} \widetilde{\psi}_0^{(n)}(\lambda_{n+1}(\omega^n), \mu^{*n}), \lambda_{n+1}(\omega^n)\big) =$$

$$= M\nabla_{\lambda_{n+1}} \widetilde{\psi}_0^{(n)}(\lambda_{n+1}(\omega^n), \mu^{*n}) M\lambda_{n+1}(\omega^n),$$

или, что то же самое,

$$M_{\omega^n}\big(\nabla_{\lambda_{n+1}} \widetilde{\psi}_0^{(n)}(\lambda_{n+1}(\omega^n), \mu^{*n}), \lambda_{n+1}(\omega^n) - \overline{\lambda_{n+1}(\omega^n)}\big) = 0. \tag{4.6.10}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.6.5. *При принятых допущениях относительно структуры целевого функционала* $\psi_0^{(n)}$ *решение конечномерной выпуклой задачи принятия решений (4.6.9), которое представлено детерминированным вектором* $\mu^{*n} = \{\mu_i^{*n}\}, \quad i = \overline{1,n}$, *является решением* Λ*-задачи.*

Доказательство. Неравенство Иенсена для вогнутой функции $\widetilde{\psi}_0^{(n)}$ можно записать в виде:

$$\widetilde{Q}(\lambda^n) = M\widetilde{\psi}_0^{(n)}(\lambda_{n+1}(\omega^n), \lambda^n(\omega^{n-1})) \leq$$

$$\leq \widetilde{\psi}_0^{(n)}(M\lambda_{n+1}(\omega^n), M\lambda^n(\omega^{n-1})) \leq \widetilde{\psi}_0^{(n)}(\overline{\lambda_{n+1}}, \overline{\lambda^n}). \qquad (4.6.11)$$

Учитывая, что μ_i^{*n} — решение конечномерной задачи (4.6.9), получаем для $\lambda^n \geq 0$

$$\widetilde{Q}(\lambda^n) \leq \widetilde{\psi}_0^{(n)}(\overline{\lambda_{n+1}}, \overline{\lambda^n}) \leq \widetilde{\psi}_0(\overline{\lambda_{n+1}}, \mu^{*n}). \qquad (4.6.12)$$

Таким образом, решение конечномерной задачи (4.6.9) определяет верхнюю грань целевого функционала Λ-задачи.

Покажем, что при допущении (4.6.10) вектор μ^{*n} дает точную верхнюю грань функционала $\widetilde{Q}(\lambda^n)$ при $\lambda^n \geq 0$ и, следовательно, является одним из оптимальных планов Λ-задачи.

Действительно, для дифференцируемой вогнутой функции $\widetilde{\psi}_0^{(n)}(\lambda_{n+1}(\omega^n), \mu^{*n})$ при всех ω^n справедливо неравенство

$$\widetilde{\psi}_0^{(n)}(\overline{\lambda_{n+1}}(\omega^n), \mu^{*n}) - \widetilde{\psi}_0^{(n)}(\lambda_{n+1}(\omega^n), \mu^{*n}) \leq$$

$$\leq \left(\nabla_{\lambda_{n+1}}\widetilde{\psi}_0^{(n)}(\lambda_{n+1}(\omega^n), \mu^{*n}), \overline{\lambda_{n+1}} - \lambda_{n+1}(\omega^n)\right).$$

Вычислим математическое ожидание обеих частей неравенства. Учитывая (4.6.10), получаем

$$\widetilde{\psi}_0^{(n)}(\overline{\lambda_{n+1}}(\omega^n), \mu^{*n}) \leq M\widetilde{\psi}_0^{(n)}(\lambda_{n+1}(\omega^n), \mu^{*n}) = \widetilde{Q}(\mu^{*n}). \qquad (4.6.13)$$

Сопоставляя (4.6.13) и (4.6.12), приходим к выводу, что

$$\sup_{\lambda \geq 0} \widetilde{Q}(\lambda^n) = \sup_{\lambda^n \geq 0} M\widetilde{\psi}_0^{(n)}(\lambda_{n+1}(\omega^n), \lambda^n(\omega^{n-1})) =$$
$$= \widetilde{\psi}_0^{(n)}(\lambda_{n+1}, \mu^{*n}).$$

Таким образом, при принятых допущениях существует детерминированный вектор $\mu^{*n} = \{\mu_i^{*n}\}$, являющийся решением Λ-задачи и определяющий апостериорные решающие правила исходной многоэтапной стохастической задачи принятия решений.

Теорема доказана.

Детерминированный оптимальный план не всегда является единственным решением Λ-задачи. При принятых допущениях все оптимальные планы представляют собой наборы функций $\lambda^n(\omega^{n-1}) \geq 0$, удовлетворяющих уравнению

$$M\widetilde{\psi}_0^{(n)}(\lambda_{n+1}(\omega^n), \lambda^n(\omega^{n-1})) = \widetilde{\psi}_0^{(n)}(\overline{\lambda_{n+1}}, \mu^{*n}). \tag{4.6.14}$$

Построим Λ-задачу для многоэтапной задачи распределения ресурсов с принципом выбора классического утилитаризма.

$$\psi_0^{(1)}(\omega^n, y^{n-1}(t), \lambda_n) =$$
$$= -\lambda_n c_n(t) + \inf_{u_{i,n}(t)} \sum_{i=1}^{n} \lambda_n A_{ni}(t) u_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i} \right),$$

где A_{ij} — матрица ограничений, описывающая, например эффективность технологических способов производства, тогда

$$u_{i,n}(t, \omega^n) = \frac{\lambda_n c_n(t) - \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i} \right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_n A_{ni}}.$$

В соответствии с рекуррентными формулами получаем

$$u_{i,1}(t, \omega_1) = M_{\omega^{2,n}} \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_j(\omega^{j-1}) A_{j1}(\omega^j) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i} \right) \right].$$

Подставляя значение $u_{i,1}(t,\omega_1)$ в выражение для $\psi_0^{(n)}(\omega^n,\lambda_n)$, получаем необходимое выражение для построения Λ-задачи:

$$\psi_0^{(n)}(\omega^n,\lambda_n) = -\sum_{j=1}^{n}\Big[\lambda_j c_j(t)+$$

$$+\sum_{i=n-j+1}^{n}\lambda_i A_{i,n-j+1} + \sum_{k=n-j+1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{y}_{k,i}-y_{k,i}(t)}{\overline{y}_{k,i}}\right)\Big].$$

Заметим, что условия задачи (4.4.1′)-(4.4.5′) дают нам выпуклость функции $Q(\lambda^n) = -M_{\omega^n}\psi_0^{(n)}(\omega^n,\lambda^n)$. Матричные и векторные функции этой задачи дифференцируемы равномерно. Это позволяет нам решить Λ-задачу, например, методом покоординатного спуска. Также данная Λ-задача может быть сведена к решению последовательности задач выпуклого параметрического программирования.

4.7 Априорные решающие правила в многоэтапных задачах стохастического программирования

В предыдущем разделе было установлено, что для качественного анализа построения апостериорных решающих правил многоэтапных стохастических задач могут быть использованы общие принципы теории двойственности в функциональных пространствах. Дело с разработкой априорных решающих правил обстоит значительно сложнее. В настоящее время нет сколько-нибудь законченных математических исследований, которые могли бы быть положены в основу конструирования априорных решающих правил. В настоящем разделе рассматривается состояние вопроса и намечаются подходы к построению априорных решающих правил многоэтапных стохастических задач.

Вначале рассмотрим отдельные модели многоэтапных задач стохастического программирования, для которых удается построить оптимальные априорные решающие правила.

Пусть имеем линейную многоэтапную стохастическую задачу с условными вероятностными ограничениями

$$E\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j(\omega^{j-1})x_j\right\} \to \max, \tag{4.7.1}$$

$$\begin{cases} P\big\{A_{11}x_1 \le b_1(\omega^1)\big\} \ge \alpha_1 \\ P\big\{A_{21}(\omega^1)x_1 + A_{22}(\omega^1)x_2 \le b_2(\omega^2) \mid \omega^1\big\} \ge \alpha_2(\omega^1), \qquad (4.7.2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P\big\{A_{n1}(\omega^{n-1})x_1 + A_{n2}(\omega^{n-1})x_2 + \ldots + A_{nn}(\omega^{n-1})x_n \le \\ \le b_n(\omega^n) \mid\omega^{n-1}\big\} \ge \alpha_n(\omega^{n-1}),\ x_j = x_j(\omega^{j-1}) \ge 0, j = \overline{1,n} \quad (4.7.3) \end{cases}$$

где c_j и x_j — векторы размерности n_j; b_i и α_i — векторы размерности m_i; составляющие α_i принадлежат отрезку $[0,1]$; A_{ij} — матрицы размера $m_i \times n_j$; оператор P применяется построчно.

Задача (4.7.1)-(4.7.3) эквивалентна задаче

$$E\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j(\omega^{j-1})x_j\right\} \to \max, \tag{4.7.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\omega^{i-1})x_j \le F_i^{-1}(1-\alpha_i(\omega^{i-1})),\ i = \overline{1,n}, \tag{4.7.5}$$

$$x_j(\omega^{j-1}) \ge 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{4.7.6}$$

где $\widetilde{F}_i(z) = P\{b_i(\omega^i) < z \mid \omega^{i-1}\}$ — условная функция распределения компонент вектора b_i при фиксированном ω^{i-1};
а $\widetilde{F}_i^{-1}(t) = \sup\{y \mid \widetilde{F}_i(y) < t\}$ — оба последних равенства покомпонентные.

При некоторых допущениях о характеристиках параметров условий задачи (4.7.1)-(4.7.3) удается получить явные выражения для ее априорных решающих правил.

Модель № 1 характеризуется следующими допущениями:

1. $c_j = c_j(\omega^{j-1})$ — векторы с неположительными компонентами.

2. $A_{ij} = A_{ij}(\omega^{i-1}),\ i \neq j$ — матрицы с неположительными элементами.

3. $A_{ii} = A_{ii}(\omega^{i-1})$ — диагональные матрицы с отрицательными элементами на диагонали.

4. Составляющие $\tilde{F}_i^{-1}(\bullet)$ ограничены снизу $\forall\omega^{i-1}$, т.е.

$$\inf_{\omega^{i-1}} \widetilde{F}_i^{-1}(1-\alpha_i(\omega^{i-1})) > -\infty,\ i = \overline{1,n}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.7.1.[200] *При допущениях 1 – 4 оптимальные априорные решающие правила задачи (4.7.1) - (4.7.3) имеют вид*

$$x_1^* = -A_{11}^{-1}\left[\widetilde{F}_1^{-1}(1-\alpha_1)\right]_{(-)}, \tag{4.7.7}$$

$$x_i^*(\omega^{i-1}) = -A_{ii}^{-1}(\omega^{i-1})\Big[\widetilde{F}_1^{-1}(1-\alpha_1(\omega^{i-1}))-$$
$$-\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}(\omega^{i-1})x_j^*\Big]_{(-)},\ i = \overline{1,n}, \tag{4.7.8}$$

где $[a]_{(-)} = \max(0,-a)$ *(максимум покомпонентный).*

Допущение 3 может быть ослаблено и заменено следующим.

3′. Матрицы $A_{ii}(\omega^{i-1})$ — прямоугольные, ранг A_{ii} равен числу ее строк; элементы матрицы A_{ii} и псевдообратной A_{ii}^+ неположительны и, кроме того, выполняются соотношения

$$\tilde{c}_i(\omega^{i-1})\left(I - A_{ii}^+(\omega^{i-1})A_{ii}(\omega^{i-1})\right) = 0 \tag{4.7.9}$$

для всех ω^{i-1} (I — единичная матрица).

Если заменить допущения 3 на допущения 3′, то в оптимальных решающих правилах задачи (4.7.1)-(4.7.3) следует заменить обратные матрицы A_{ii}^{-1} на псевдообратные A_{ii}^+. Из условий (4.7.9) следует, что целевой функционал задачи n-го этапа не изменится, если положить $\omega = 0$.

Модель №2 характеризуется следующими допущениями:

1. $A_{ij} = A_{ij}(\omega^{i-1}),\ i \neq j$ — матрицы с неположительными элементами.
2. $A_{ii} = A_{ii}(\omega^{i-1}),\ i = \overline{1,n}$ — диагональные матрицы с положительными элементами на диагонали.
3. $\inf_{\omega^{i-1}} \tilde{F}_i^{-1}(1 - \alpha_i(\omega^{i-1})) \geq 0,\ i = \overline{1,n}$.

В принятых допущениях область определения задачи k-го этапа не пуста при произвольном наборе x^{k-1}, отсюда, задача k-го этапа не индуцирует дополнительных ограничений для задач предшествующих этапов. Модель № 2 можно описать многоэтапной стохастической задачей. Введем обозначения

$$c_n^{(+)}(\omega^{k-1}) = \max\{0, c_k(\omega^{k-1})\},$$

$$\widetilde{c}_{n-k}(\omega^{n-k-1}) = c_{n-k}(\omega^{n-k-1}) -$$

$$- \sum_{i=0}^{k-1} E_{\omega^{n-i+1,n-k}|\omega^{n-k-1}} \left\{ c_{n-i}^{(+)}(\omega^{n-i-1}) A_{n-i,n-i}^{-1} A_{n-i,n-k} \right\};$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

При $k = 0$, $\widetilde{c}_n(\omega^{n-1}) = c_n(\omega^{n-1})$; $\widetilde{I}_{n-k}^{(+)}(\omega^{n-k-1})$ — диагональная матрица, диагональные элементы которой равны единице, если соответствующие составляющие $\widetilde{c}_{n-k}(\omega^{n-k-1})$ положительны, и нулю в противном случае.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.7.2. *При допущениях 1 - 3 оптимальные априорные решающие правила задачи (4.7.1)-(4.7.3) имеют вид*

$$x_{n-k}^* = x_{n-k}^*(\omega^{n-k-1}) = \widetilde{I}_{n-k}^{(+)}(\omega^{n-k-1}) A_{n-k,n-k}^{-1}(\omega^{n-k-1}) \times$$

$$\times \left[\widetilde{F}_{n-k}^{-1}(\bar{1} - \alpha_{n-k}(\omega^{n-k-1})) - \sum_{j=1}^{n-k-1} A_{n-k+1,j}(\omega^{n-k-1}) x_j^*(\omega^{j-1}) \right],$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (4.7.10)$$

Доказательство утверждения приводится в работе [200].

Можно отказаться от допущения 2 о невырожденности A_{ii} и заменить его следующим менее жестким требованием.

2′. Матрицы $A_{ii}(\omega^{i-1})$ — прямоугольные; ранг A_{ii} равен числу ее строк; элементы матрицы A_{ii} и псевдообратной матрицы A_{ii}^+ неотрицательны и, кроме того, для всех ω^{i-1}:
$\widetilde{c}_i(\omega^{i-1})\left(I - A_{ii}^+ A_{ii}\right) = 0.$

При этом допущении выражения для оптимальных решающих правил (4.7.10) сохраняются, если заменить в них обратные матрицы A_{ii}^{-1} на псевдообратные A_{ii}^+.

Схемы построения решающих правил для многоэтапных стохастических моделей №1 и №2 не связаны с линейностью соответствующих задач и могут быть распространены на некоторые частные многоэтапные нелинейные стохастические модели с условными вероятностными ограничениями.

Пусть имеем задачу

$$E \sum_{j=1}^{n} \psi_{0j}(\omega^{j-1}, x_j) \to \max, \qquad (4.7.11)$$

$$P\left\{ \sum_{j=1}^{k} \psi_{kj}(\omega^{k-1}, x_j) \le b_k(\omega^k) \mid \omega^{k-1} \right\} \ge \alpha_k(\omega^{k-1}), \qquad (4.7.12)$$

$$x_k = x_k(\omega^{k-1}) \ge 0,\ k = \overline{1, n} \qquad (4.7.13)$$

и пусть выполняются следующие требования.

1. $\psi_{0j}(\omega^{j-1}, x_j),\ j = \overline{1,n}$ — монотонно невозрастающий функционал по x_j; $\psi_{0j}(\omega^{j-1}, 0) = 0,\ \forall \omega^{j-1}$.

2. $\psi_{ij}(\omega^{i-1}, x_j),\ i \neq j$ — монотонно возрастающие по x_j вектор-функции; $\psi_{ij}(\omega^{i-1}, 0) = 0,\ \forall \omega^{i-1},\ i, j = \overline{1,n},\ j \neq i$.

3. $\psi_{ii}(\omega^{i-1}, x_i),\ i = \overline{1,n}$ — монотонно убывающие по x_i вектор-функции, допускающие существование обратных вектор-функций $\psi_{ii}^{-1}(\omega^{i-1}, y)$

$$\psi_{ii}^{-1}(\omega^{i-1}, y) = \inf_x \{x \mid \psi_{ii}(\omega^{i-1}, x) = y\},$$

$$\psi_{ii}(\omega^{i-1}, 0),\ \forall \omega^{i-1},\ i = \overline{1,n}.$$

4. Составляющие вектор-функций $\widetilde{F}_i^{-1}(\bullet)$ ограничены снизу. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.7.3. [203] *При допущениях 1- 4 оптимальные априорные решающие правила задачи (4.7.11)-(4.7.13) имеют вид*

$$x_{12}^* = \psi_{11}^{-1} \left\{ -\left[\widetilde{F}_1^{-1}(\bar{1} - \alpha_1) \right]_{(-)} \right\}, \tag{4.7.14}$$

$$x_i^* = x_i^*(\omega^{i-1}) = \psi_{ii}^{-1} \Bigg\{ \omega^{i-1}, -\Big[\widetilde{F}_i^{-1}(1 - \alpha_i(\omega^{i-1})) -$$

$$- \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{ij}(\omega^{i-1}, x_j^*) \Big]_{(-)} \Bigg\},\ i = 2, \ldots, n. \tag{4.7.15}$$

Теперь рассмотрим частный класс многоэтапных задач стохастического программирования, в которых на каждом этапе индуцируются дополнительные ограничения

$$E \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j(\omega^{j-1}) x_j \right\} \to \max, \tag{4.7.16}$$

$$
\begin{cases}
P\big\{A_1x_1 \le b_1(\omega^1)\big\} \ge \alpha_1, \\
P\big\{-A_1x_1 + A_2x_2 \le b_2(\omega^2) \mid \omega^1\big\} \ge \alpha_2(\omega^1), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
P\big\{-A_{n-1}x_{n-1} + A_nx_n \le b_n(\omega^n) \mid \omega^{n-1}\big\} \ge \alpha_n(\omega^{n-1}), \\
A_nx_n \ge 0.
\end{cases} \tag{4.7.17}
$$

Здесь оператор P применяется покомпонентно. Сделаем следующие предположения.

1. Ранг матрицы $A_i,\ i = \overline{1,n}$ равен числу ее строк.
2. $c_n(\omega^{n-1})A_n^+ < 0,\ \ c_n(\omega^{n-1})(I - A_n^+A_n) = 0,\ \ \forall\omega^{n-1}$.
3. $\kappa_{n-1}(\omega^{n-2}) = \inf_{\omega^{n-1}} \widetilde{F}^{-1}(\bar{1} - \alpha_n(\omega^{n-1})) > -\infty, \forall\omega^{n-2}$.
4. Фиксированные ограничения отдельных этапов непротиворечивы.

Введем обозначения

$$
\widetilde{c}_{n-1}(\omega^{n-2}) = c_{n-1}(\omega^{n-2});
$$

$$
\widetilde{c}_i(\omega^{i-1}) = c_i(\omega^{i-1}) + E_{\omega^{i,n-1} \mid \omega^{i-1}}\left[\widetilde{c}_{i+1}(\omega^i)\right]_{(+)} A_i,
$$

$$
i = \overline{1, n-2},
$$

$$
[a]_{(+)} = \max(0, a);
$$

$I_{1i}(\omega^{i-1})$ — диагональная матрица с элементами $\left[\widetilde{c}(\omega^{i-1})\right]_{(+)}$ на диагонали; $I_{2i} = I - I_{1i},\ \ i = \overline{1, n-1}$;

$$
\mu_{n-1}(\omega^{n-2}) = -\kappa_{n-1}(\omega^{n-2}) = -\inf_{\omega_{n-1}} \widetilde{F}^{-1}(\bar{1} - \alpha_n(\omega^{n-1}));
$$

$$
\mu_i(\omega^{i-1}) = -\inf_{\omega_i}\left[\widetilde{F}_{i+1}^{-1}(\bar{1} - \alpha_{i+1}(\omega^i)) - \mu_{i+1}(\omega^i)\right],
$$

$$
i = \overline{1, n-2}.
$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 4.7.4. [203]

а) Для того, чтобы задача (4.7.16)-(4.7.17) при допущениях 1 - 4 была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы
$\widetilde{c}_i(\omega^{i-1}) \times (I - A_i^+ A_i) = 0, \ \ \forall \omega^{i-1}, \ \ i = \overline{1, n},$

$$\widetilde{F}_1^{-1} - \mu_1 \geq 0.$$

б) Оптимальные априорные решающие правила разрешимой задачи вида (4.7.16)-(4.7.17) при допущениях 1 - 4 имеют вид

$$x_n^*(\omega^{i-1}) = 0,$$

$$x_i^*(\omega^{i-1}) = I_{2i}(\omega^{i-1})\mu_i(\omega^{i-1}) +$$

$$+ I_{1i}(\omega^{i-1})\Big[\widetilde{F}_i^{-1}(\bar{1} - \alpha_i(\omega^{i-1})) + A_{i-1}x_{i-1}^*(\omega^{i-2})\Big], \qquad (4.7.18)$$

$$i = \overline{1, n-1}.$$

Оптимальное решающее правило вида (4.7.18) не единственное. Общий вид оптимальных решающих априорных правил задачи (4.7.16)-(4.7.17) можно получить, добавив к правым частям равенств (4.7.18) для i-го этапа выражение вида $(I - A_i^+ A_i)y(\omega^{i-1})$, где $y(\omega^{i-1})$ — произвольный случайный вектор. Можно построить априорные решающие правила задачи (4.7.16)-(4.7.17) и отказавшись от допущения 2. При этом $x_n^*(\omega^{n-1})$ окажется, вообще говоря, отличным от нуля; выражение (4.7.18) для $x_i^*(\omega^{i-1}), \ i = \overline{1, n-1}$ сохранится, изменятся только выражения для $\widetilde{c}_i(\omega^{i-1})$.

Схемы построения априорных решающих правил, изложенные выше, существенно использовали особенности структуры специальных классов многоэтапных задач стохастического программирования. Ниже рассматриваются два общих подхода к построению априорных решающих правил. Решение многоэтапной стохастической задачи общего, вида в априорных решающих правилах сводится к анализу более простой структуры (например, одноэтапной задачи с апостериорными решающими правилами или двухэтапной задачи), по оптимальному плану которой восстанавливается решение исходной задачи.

Рассмотрим многоэтапную задачу стохастического программирования

$$E_{\omega^n}\varphi_0(\omega^n, x^n) \to \sup, \tag{4.7.19}$$

$$E_{\omega_k}\left\{\varphi_k(\omega^k, x^k) \mid \omega^{k-1}\right\} \geq b_k(\omega^{k-1}), \tag{4.7.20}$$

$$x^k \in G_k,\ k = 1, \ldots, n. \tag{4.7.21}$$

Пусть L_i и W_i — классы измеримых функций, отображающих соответственно $\Omega = \Omega^n$ и Ω^{i-1} в R^{n_i} (n_i — размерность плана x_i, i-го этапа), а $\Phi_i = \{\psi : L_i \to W_i\}$. Рассмотрим произвольный набор $\psi_i \in \Phi_i$ и приведем в соответствие многоэтапной стохастической задаче (4.7.19) - (4.7.21) с априорными решающими правилами двухэтапную задачу с тем же целевым функционалом (4.7.19) и с теми же ограничениями первого этапа, что и в (4.7.19) - (4.7.21) и с ограничениями второго этапа вида

$$\begin{cases} E_{\omega^k \mid \omega^{k-1}}\varphi_k(\omega^k, \psi^k(x^k)) \geq b_k(\omega^{k-1}), \\ x_k \in G_k^0,\ k = 2, \ldots, n, \\ E_{\omega^n}\left\{\varphi_0(\omega^n, \psi^n(x^n)) - \varphi_0(\omega^n, x^n)\right\} \geq 0, \end{cases} \tag{4.7.22}$$

где по определению $\psi^k(x^k) = \{x_1, \psi_2(x_2), \ldots, \psi_k(x_k)\},\ \ k = \overline{1, n}$, G_k^0 — проекция G_k на координатную гиперплоскость, определяемую составляющими вектора x_k. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.7.5.[203] *Пусть* $x_{1*} = const,\ \ x_{i*} = x_{i*}(\omega^n),\ i = \overline{2, n}$ — *оптимальный план двухэтапной задачи, тогда*

$$x_1^* = x_{1*},\ x_i^* = \psi_i(x_{i*}),\ i = \overline{2, n} \tag{4.7.23}$$

оптимальные априорные решающие правила исходной задачи (4.7.19)-(4.7.21).

Роль двухэтапной задачи из теоремы 4.7.5, «эквивалентной» исходной многоэтапной, могут играть и другие, порождаемые задачей (4.7.19)-(4.7.21) стохастические модели относительно простой структуры, для которых разработаны методы построения решающих правил; для них могут быть сформулированы аналоги теоремы 4.7.5.

Другой подход к построению решающих правил многоэтапных стохастических задач вытекает из намеченной в работе [264] связи между задачами стохастического программирования и лексикографической оптимизации.

Лексикографическая оптимизация представляет собой частную схему векторной оптимизации, при которой предпочтение отдается компонентам вектора с меньшими номерами. Принято говорить,что в k-мерном евклидовом пространстве R^k введено лексикографическое упорядочение $(R^k, \overset{\lambda}{\geq})$ и фиксируют это записью $y \overset{\lambda}{\geq} y'$, если для любой пары элементов y и y' из R^k для всех $i \leq k$, таких, что $y_i \leq y'_i$, существует $j < i$, для которого $y_j > y'_j$. Задача лексикографической оптимизациии записывается в виде

$$L^* = \text{л.} \max_{R_k} \{u(x) \mid x \in Q\}, \qquad (4.7.24)$$

где $u(x) = \{u_i(x)\}$ — k-мерная вектор-функция.

В работе [264] показано, что множество Q^* решений задачи (4.7.24), если оно не пусто, определяется следующей рекуррентной процедурой

$$\begin{cases} Q_0 = Q, \\ Q_i = \sup^{-1}\{u_i(x) \mid x \in Q_{i-1}\}, i = \overline{1, k}, \\ Q^* = Q_k. \end{cases} \qquad (4.7.25)$$

В работе [264] процедура (4.7.25) принята в качестве определения лексикографической оптимизации.

Свяжем с i-м ограничением k-го этапа задачи (4.7.19)-(4.7.21) множество

$$G_{ki}(\omega^{k-1}, x^k) = \big\{x^k \mid E_{\omega^k|\omega^{k-1}}\psi_{ki}(\omega^k, x^k) \ge b_{ki}(\omega^{k-1}),$$

$$x_s \in G_s,\ s = 1, \ldots, k\big\}. \tag{4.7.26}$$

Пусть $\kappa_k(\omega^{k-1}, x^k)$ — вектор, i-я компонента которого представляет собой характеристическую функцию множества G_{ki}, и пусть $u_k(x^k) = E_{\omega^{k-1}}\kappa_k(\omega^{k-1}, x^k)$. Упорядочим вектор-функции u_k по этапам, а внутри этапов — по априорной важности ограничений. Введем вектор-функцию $u(x^n) = (u_1(x^1), \ldots, u_n(x^n), u_{n+1}(x^n))^{\mathrm{T}}$ и рассмотрим задачу лексикографической оптимизации

$$\text{л.} \max_{x_k \in U_n} u(x^n), \tag{4.7.27}$$

где U_n — пространство измеримых функций на Ω^{k-1}.

Если задача (4.7.19)-(4.7.21) имеет решение, то и задача (4.7.27) имеет решение, оптимальное в смысле (4.7.19)-(4.7.21). Однако из разрешимости задачи (4.7.27) не следует, вообще говоря, что исходная задача имеет решение. Разрешимость задачи (4.7.19)-(4.7.21) вытекает из разрешимости задачи (4.7.27) только в том случае, когда на лексикографическом максимуме все компоненты, кроме последней, равны единице. Другая лексикографическая интерпретация задачи (4.7.19)-(4.7.21) может быть получена, если требовать выполнения условий (4.7.20) не для всех, а почти для всех реализаций ω^{k-1}. Введем $n+1$-мерную вектор-функцию $u(x^n, y^n) = \{u_k\}$, составляющие которой определяются соотношениями

$$u_k(x^k, y^k) = -\|E_{\omega^k|\omega^{k-1}}\varphi_k(\omega^k, x^k) - b_k(\omega^{k-1}) - y_k(\omega^{k-1})\|, \tag{4.7.28}$$

$$k = \overline{1, n},$$

$$u_{n+1}(x^n) = E_{\omega^n} \varphi_0(\omega^n, x^n). \qquad (4.7.29)$$

Здесь $\|a_k(\omega^{k-1})\|$ обозначаем гильбертову норму пространства функций $a_k(\omega^{k-1})$. При других определениях нормы $||a(\omega)\|$ соответствующим образом меняется лексикографическая интерпретация многоэтапной стохастической задачи.

Поставим в соответствии с задачей (4.7.19) - (4.7.21) задачу лексикографической оптимизации

$$\text{л.}\max u(x^n, y^n),$$

$$x_k \in G_k,\ y_k \geq 0. \qquad (4.7.30)$$

Если задача (4.7.19) - (4.7.21), в которой условие (4.7.20) выполняются почти для всех ω, разрешима, то разрешима и задача (4.7.30), и ее решение определяет оптимальные априорные решающие правила исходной задачи.

Рассмотрим задачу лексикографической оптимизации

$$\begin{cases} u(x) \to \text{л.}\max, \\ \quad x \in Q, \end{cases} \qquad (4.7.31)$$

где $u(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}^{\mathrm{T}},\ Q$ — произвольное множество. Определим на декартовом произведении $Q \times Q$ функцию

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k sign(u_k(x) - u_k(y)), \qquad (4.7.32)$$

где $\{\alpha_k\}$ — произвольный набор параметров, для которого

$$\alpha_n > 0,\ \alpha_k > \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i,\ k = 1, \ldots, n-1. \qquad (4.7.33)$$

В качестве $\{\alpha_k\}$ может быть выбрана, например, последовательность $\alpha_k = \frac{1}{2^{k-1}},\ k = \overline{1, n}$. Причем

$$u(x, y) = -u(y, x). \qquad (4.7.34)$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.7.6.[203] *Для того, чтобы точка $x^* \in Q$ была решением задачи (4.7.31) необходимо и достаточно, чтобы*

$$u(x, x^*) \le 0, \ \forall x \in Q. \tag{4.7.35}$$

Следствие 4.7.1. *Пусть x^* – решение задачи (4.7.31), тогда $u(x, x^*) = 0$ в том и только в том случае, если $x \in Q$ также является лексикографическим оптимумом задачи (4.7.31).*

Следствие 4.7.2. *Если $u(x, y) \le 0$, то $x \overset{\lambda}{\le} y$.*

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.7.7.[203] *Задача (4.7.31) разрешима в том и только в том случае, если*

$$\max_{x \in Q} \min_{y \in Q} u(x, y) = 0. \tag{4.7.36}$$

Теорема 4.7.8. *Задача (4.7.31) разрешима в том и только в том случае, если*

$$\min_{y \in Q} \max_{x \in Q} u(x, y) = 0. \tag{4.7.37}$$

Теорема 4.7.9. *Равенство $\min_{y \in Q} \max_{x \in Q} u(x, y) = 0$ справедливо тогда и только тогда, когда функция $u(x, y)$ имеет в $Q \times Q$ седловую точку.*

Последнее утверждение позволяет использовать известные методы вычисления минимакса для построения решающих правил задач стохастического программирования.

4.8 Общая постановка задачи принятия решения в условиях неполной информации с априорными решающими правилами

В процессе управления обычно представляется возможность последовательно наблюдать реализации случайных параметров условий задачи каждый раз, если это окажется целесообразным в соответствии с вновь накопленной информацией, корректировать решение. Предварительный план и последовательные корректировки должны, конечно, помимо содержательных ограничений, учитывать априорные характеристики случайных параметров условий на каждом этапе. Последовательность поступления информации и порядок выбора и корректирования решения определяется информационной структурой задачи — набором исходных данных, накопленных на предшествующих этапах, от которого может зависеть решение на текущем этапе.

Если решение предшествует наблюдению, то оптимальный план стохастической задачи определяется статистическими характеристиками или известной выборкой возможных значений параметров условий задачи. Решения будем вычислять в чистых стратегиях с учетом априорной информации — некоторых характеристик распределения или выборок возможных значений случайных параметров условий.

Таким образом, будем рассматривать многоэтапную задачу принятия решений в условиях неполной информации с априорными решающими правилами.

Общая постановка:

$$M_{\omega^n}\psi_0(\omega^n, y_i^n(t)) \to \inf; \qquad (4.8.1)$$

$$M_{\omega_k}\left\{\psi_k(\omega^k, u_i^k(t)) \mid \omega^{k-1}\right\} \le c_k(t, \omega^{k-1}); \qquad (4.8.2)$$

$$y_i(t,\omega^{k-1}) = y_i(t-1,\omega^{k-1}) + S_i(t,\omega^{k-1})u_i(t,\omega^{k-1}) + d_i(t,\omega^{k-1}); \tag{4.8.3}$$

$$y_i(t,\omega^{k-1}) \geq y_i(t-1,\omega^{k-1}),\ y_i(1,\omega^{k-1}) > 0; \tag{4.8.4}$$

$$u_i(t,\omega^{k-1}) \geq 0,\ S_i(t,\omega^{k-1}) \geq 0,\ c_k(t,\omega^{k-1}) > 0,$$

$$u_{i,k} \in G_k^0,\ \omega^k \in \Omega^k = \times_{i=1}^k \Omega_i,\ k = \overline{1,n},\ i = \overline{1,n},\ t \in [1,T]. \tag{4.8.5}$$

Если использовать в качестве критерия оптимальности принцип выбора пропорционального развития, то задачу (4.8.1) - (4.8.5) можно записать в следующем виде

$$M_{\omega^n}\left\{u_i(t,\omega^n) - \frac{\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t,\omega^n)}{S_i(t,\omega^n)}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t,\omega^n)}{S_i(t,\omega^n)}\right)}\right\} \to \inf; \tag{4.8.1$'$}$$

$$M_{\omega_k}\left\{\psi_k(\omega^k, u_i^k(t)) \mid \omega^{k-1}\right\} \leq c_k(t,\omega^{k-1}); \tag{4.8.2$'$}$$

$$y_i(t,\omega^{k-1}) = y_i(t-1,\omega^{k-1}) + S_i(t,\omega^{k-1})u_i(t,\omega^{k-1}) + d_i(t,\omega^{k-1}); \tag{4.8.3$'$}$$

$$y_i(t,\omega^{k-1}) \geq y_i(t-1,\omega^{k-1}),\ y_i(1,\omega^{k-1}) > 0; \tag{4.8.4$'$}$$

$$u_i(t,\omega^{k-1}) \geq 0,\ S_i(t,\omega^{k-1}) \geq 0,\ c_k(t,\omega^{k-1}) > 0,$$

$$u_{i,k} \in G_k^0,\ \omega^k \in \Omega^k = \times_{i=1}^k \Omega_i,\ k = \overline{1,n},\ i = \overline{1,n},\ t \in [1,T]. \tag{4.8.5$'$}$$

Обозначим нижнюю грань показателя качества решения данной задачи принятия решения через $\breve{S}(c^n(\omega^{n-1}))$, т.е.

$$\breve{S}(c^n(\omega^{n-1})) = \sup_k c(t,\omega^{k-1}).$$

Пусть решение на i-м этапе принимается после реализации случайных параметров условий на предыдущем $(i-1)$-м этапе, тогда решающие правила имеют вид:

$$u_i(t) = u_i(t,\omega^{i-1}),\ i = \overline{1,n}.$$

Задача (4.8.1)-(4.8.4) — многоэтапная задача стохастического программирования с условными вероятностными ограничениями и с априорными решающими правилами.

Для пояснения постановки задачи опишем вспомогательные формальные понятия.

Пусть

$\omega_i \in \Omega_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$, где Ω_i — некоторые множества — пространства элементарных событий ω_i на i-м этапе; $\Omega_0 = \{\omega_0\}$;

$\omega^i \in \Omega^i = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_i$;

$\omega^i = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i)$ — вектор в пространстве размерности i;

$\omega^n \in \Omega^n = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$; $\omega^n = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ — последовательность случайных событий.

Пространство случайных событий Ω^n обозначим через

$$\Omega(\Omega^n = \Omega).$$

Пусть на Ω задана вероятностная мера P.

Определим меру P^k на Ω^k следующим образом: если элементарное событие $A \subset \Omega^k$, тогда $P^k(A) = P(A \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \times \ldots \Omega_n)$.

Введем условную вероятностную меру P^k на Ω^k:

$$P_k\left(A \mid \omega^{k-1} \in B\right) = \frac{P^k(A \times B)}{P^k(\Omega_k \times B)} \text{ для любого } A \subset \Omega_k, \;\; B \subset \Omega^{k-1};$$

Σ — σ-алгебра случайных событий на Ω.

Таким образом, мы определили вероятностное пространство (Ω, Σ, P).

Рассмотрим последовательность множеств $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ произвольной структуры, $y_k \in Y_k, \;\; k = 0, 1, \ldots, n$;

$$Y_0 = \{y_0(t)\};$$

$$Y^k = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_k, \;\; y^k = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_k(t));$$

$$Y^n \equiv Y.$$

Пусть для каждого $\omega^k \in \Omega^k$ и $y_i^k(t) \in Y^k,\ k = 1, 2, \ldots, n$ задана вектор-функция $\psi_k(\omega^k, y_i^k(t))$ размерности m_k;

на множестве Y для каждого $\omega \in \Omega$ функционал $\psi_0(\omega^n, y_i^n(t))$;

$G_k^0 = G_k^0(\omega^k)$ — некоторые случайные множества;

$c_k(t, \omega^{k-1})$ — m_k-мерные случайные величины — ограниченные измеримые вектор-функции от ω^{k-1};

$c^k(t, \omega^{k-1})$ — $\sum_{i=1}^n$ — m_i-мерная вектор-функция;

$c^k(t, \omega^{k-1}) \in B_k,\ \ B_k$ — некоторое банахово пространство;

$M_{\omega_k}\left\{u_i(t, \omega^k) \mid \omega^{k-1}\right\}$ — условное математическое ожидание $u_i(t, \omega^k)$ в предположении, что известна реализация ω^{k-1}.

Сформулируем задачу i-го этапа.

Рассмотрим множество, отвечающее области определения задачи i-го этапа для задачи (4.8.1) - (4.8.5) при фиксированных ω^{i-1} и u^{i-1}:

$$K_i = \Big\{ y_i \in G_i^0 \mid \exists \left[u_{i,i+1} \in G_{i+1}^0, \ldots, u_{i,n} \in G_n^0 \right],$$

$$M_{\omega_i}\left[\psi_i(\omega^i, u_i^i(t)) \mid \omega^{i-1}\right] \le c_i(t, \omega^{i-1}),$$

$$M_{\omega_{i+1}}\left[\psi_i(\omega^{i+s}, y^i, u_{i,i+1}(t), \ldots, u_{i,i+s}(t)) \, |\omega^{i+s-1}\right] \le c_{i+s}(t, \omega^{i+s-1}),$$

$$\forall \omega_{i+s-1}, \ldots, \omega_{n-1},\ s = 1, 2, \ldots, n-i \Big\}, \qquad (4.8.6)$$

$$y_i^i(t, \omega^{i-1}) = y_i^i(t-1, \omega^{i-1}) + S_i^i(t, \omega^{i-1}) u_i^i(t) + d_i^i(t, \omega^{i-1}); \qquad (4.8.7)$$

$$y_i(t, \omega^{k-1}) \ge y_i(t-1, \omega^{k-1}),\ y_i(1, \omega^{k-1}) > 0;$$

$$u_i(t, \omega^{k-1}) \ge 0,\ S_i(t, \omega^{k-1}) \ge 0,\ c_{i+s}(t, \omega^{i+s-1}) > 0,$$

$$u_{i,k} \in G_k^0,\ \omega^k \in \Omega^k = \times_{i=1}^k \Omega_i,\ k = \overline{1, n},\ i = \overline{1, n},\ t \in [1, T]. \qquad (4.8.8)$$

Сформулируем необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (4.8.1)-(4.8.5).

Теорема 4.8.1. *Если целевая функция задачи (4.8.1)-(4.8.5) ограничена снизу, то для разрешимости задачи (4.8.1)-(4.8.5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $K_1 \neq \emptyset$.*

Действительно, если $K_1 \neq \emptyset$, то выполняется

$$K_i \neq \emptyset,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Запишем целевую функцию $Q_i(y_{i,i}(t))$ задачи i-го этапа.

$$Q_i(y_{i,i}(t)) = M_{\omega^n|\omega^{i-1}}\psi_0\big(\omega^n, y_i^{i-1}(t), y_{i,i}(t, \omega^{i-1}),$$

$$y^*_{i,i+1}(t, \omega^i), \ldots, y^*_{i,k}(t, \omega^{n-1})\big),$$

где ω^{i-1} — набор случайных параметров, реализованный на этапах, предшествующих этапу i;

$y^{i-1}(t)$ — набор принятых решений;

$y_i(t, \omega^{i-1})$ — решение на этапе i;

$y^*_{i,i+1}(t), \ldots, y^*_{i,k}(t)$ — оптимальное решение на этапах, следующих за i-м;

$y^*_{i,k}(t) = y^*_{i,k}(t, \omega^{k-1}),\ \ k = \overline{i+1, n}.$

Определение оптимального решающего правила на i-м этапе многоэтапной стохастической задачи сводится, таким образом, к решению задачи математического программирования:

$$\min_{y_{i,i}(t)\in K} Q_i(y_{i,i}(t)). \tag{4.8.9}$$

При сепарабельной целевой функции

$$\psi_0(\omega^n, y_i^n(t)) = \sum_{j=1}^{n} \psi_{0j}(\omega^j, y_i^j(t)) \tag{4.8.10}$$

вычисление $Q_i(y_{i,i}(t))$ упрощается.

Пусть

$$Q^*_i(\omega^{i-1}, y_{i,i}(t)) =$$

$$= M_{\omega^n|\omega^{i-1}}\psi_0(\omega^n, y_i^{i-1}(t), y_{i,i}(t,\omega^{i-1}), y^*_{i,i+1}(t,\omega^i), \ldots, y^*_{i,k}(t,\omega^{n-1})).$$

При сепарабельной целевой функции оптимальное решающее правило задачи (4.8.1)-(4.8.5) удовлетворяет на каждом этапе $i = 1, 2, \ldots, n-1$ следующему функциональному уравнению Беллмана:

$$Q_i^*(\omega^{i-1}, y_i^{i-1}(t)) =$$
$$= \min_{y_{i,i}(t)\in K_i} M_{\omega^i|\omega^{i-1}}\big\{\psi_{0i}(\omega^i, y_i^i(t)) + Q^*_{i+1}(\omega^i, y_i^i(t))\big\},\ i = \overline{1, n-1}, \tag{4.8.11}$$

при $i = n$

$$Q_i^*(\omega^{n-1}, y_i^{n-1}(t)) = \min_{y_{i,n}(t)\in K_n} M_{\omega^i|\omega^{i-1}}\big\{\psi_{0i}(\omega^n, y_i^n(t))\big\}, \tag{4.8.12}$$

из (4.8.10) - (4.8.12) следует, что

$$Q_1^*(\omega_0, y_{i,0}(t)) = \min M\psi_0(\omega^n, y_i^n(t)) = \min M\left\{\sum_{j=1}^n \psi_{0j}(\omega^j, y_i^j(t))\right\} \tag{4.8.13}$$

при условиях (4.8.2)-(4.8.5).

Таким образом, задача (4.8.1)-(4.8.5) в предположении (4.8.10) эквивалентна задаче (4.8.11)-(4.8.13).

Целевая функция i-го этапа имеет в этом случае вид:

$$Q_i^*(y_i^{i-1}(t)) = \min_{y_{i,i}(t)\in K_i} M_{\omega^i|\omega^{i-1}}\big\{\psi_{0i}(\omega^i, y_i^i(t)) + Q^*_{i+1}(\omega^i, y_i^i(t))\big\}. \tag{4.8.14}$$

4.9 Многоэтапная задача принятия решений с вероятностными ограничениями (M-модель)

Пусть компоненты вектор-функции $\psi_k(\omega^k, y_i^k(t))$ представляют собой условные характеристические функции полупространств, определяемых неравенствами

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} A_{kij}(\omega^{i-1})u_{kj}(t) \le c_i(t,\omega^i),\ c_i(t,\omega^i) > 0$$

при условии, что реализовано ω^{i-1}.

$$\psi_0(\omega^n, y_i^n(t)) = F(y_1^j(t,\omega^{j-1}), y_2^j(t,\omega^{j-1}), \ldots, y_n^j(t,\omega^{j-1})).$$

Пусть

$$\widetilde{F}_i^{-1}(z) = P(c(t) < z \mid \omega^{i-1}) \tag{4.9.1}$$

— условная функция распределения компонент вектора $c(t)$ при фиксированном ω^{i-1}, а

$$\widetilde{F}_i^{-1}(\zeta) = \sup\left\{x \mid \widetilde{F}_i(x) \le \zeta\right\}. \tag{4.9.2}$$

Тогда многоэтапная задача принятия решений с условными вероятностными ограничениями и априорными решающими правилами может быть записана в виде

$$M\left\{F(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))\right\} \to \min; \tag{4.9.3}$$

$$P_i^1\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} A_{kij}(\omega^{i-1})u_{kj}(t) \le c_i(t,\omega^i) \mid \omega^{i-1}\right\} \ge \alpha_i^1(\omega^{i-1}),$$

$$0,5 < \alpha_i^1(\omega^{i-1}) < 1; \tag{4.9.4}$$

$$P_i^2\left\{y_i(t) = y_i(t-1) + S_i(t)u_i(t) + d_i(t)\right\} \ge \alpha_i^2(\omega^{i-1}),$$

$$0,5 < \alpha_i^2(\omega^{i-1}) < 1; \tag{4.9.5}$$

$$u_j(t) = u_j(t,\omega^{j-1}) \ge 0,\ y_i(t) \ge y_i(t-1),\ y_i(1) > 0; \tag{4.9.6}$$

$$S_i(t) \ge 0,\ c_i(t,\omega^i) > 0,\ i,j = \overline{1,n},\ \omega^i \in \Omega^i = \times_{k=1}^{i}\Omega_k,\ t \in [1,T]. \tag{4.9.7}$$

Мы предполагаем, что случайным является вектор ограничений $c(t)$. Задача (4.9.3)-(4.9.7) эквивалентна задаче

$$M\left\{F(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))\right\} \to \min; \tag{4.9.8}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} A_{kij}u_{kj}(t) \le \widetilde{F}_i^{-1}(1-\alpha_i^1(\omega^{i-1})),\ i=\overline{1,n}; \qquad (4.9.9)$$

$$\{y_i(t) = y_i(t-1) + S_i(t)u_i(t) + d_i(t)\} \le F_i^{-1}(1-\alpha_i^2(\omega^{i-1})); \qquad (4.9.10)$$

$$u_j(t) = u_j(t,\omega^{j-1}) \ge 0,\ y_i(t) \ge y_i(t-1),\ y_i(1) > 0; \qquad (4.9.11)$$

$$S_i(t) \ge 0,\ i,j=\overline{1,n},\ t\in[1,T]. \qquad (4.9.12)$$

В этом случае функция $Q_i(\omega^{i-1}, y_i^{i-1}(t))$ будет иметь следующий вид

$$Q_i(\omega^{i-1}, y_i^{i-1}(t)) = \min_{y_{i,i}(t)\in K_i} M_{\omega_i|\omega^{i-1}}\Big\{F(y_{1,i}(t), y_{2,i}(t),\dots,y_{n,i}(t)) +$$

$$+\sum_i\sum_t Q_{i+1}(\omega^i, y_i^i(t))\Big\},\ i=\overline{1,n-1}; \qquad (4.9.13)$$

при $i=n$

$$Q_n(\omega^{n-1}, y_i^{n-1}(t)) = \min_{y_{i,k}(t)\in K_n} M_{\omega_n|\omega^{n-1}}\Big\{F(y_{1,n}(t), y_{2,n}(t),\dots,y_{n,n}(t))\Big\}. \qquad (4.9.14)$$

Таким образом, целевая функция задачи i-го этапа в нашем случае имеет вид

$$Q_i(y_{i,i}(t)) =$$

$$= M_{\omega_i|\omega^{i-1}}\Big\{F(y_{1,i}(t), y_{2,i}(t),\dots,y_{n,i}(t)) + \sum_i\sum_t Q_{i+1}(\omega^i, y_i^i(t))\Big\}.$$

В результате имеем задачу минимизировать

$$Q_i(y_{i,i}(t)) =$$

$$= M_{\omega_i|\omega^{i-1}}\Big\{F(y_{1,i}(t), y_{2,i}(t),\dots,y_{n,i}(t)) + \sum_i\sum_t Q_{i+1}(\omega^i, y_i^i(t))\Big\} \qquad (4.9.15)$$

при условиях

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} A_{kij}u_{kj}(t) \le \widetilde{F}_i^{-1}(1-\alpha_i^1(\omega^{i-1})),\ i=\overline{1,n}; \qquad (4.9.16)$$

$$\{y_i(t) = y_i(t-1) + S_i(t)u_i(t) + d_i(t)\} \le F_i^{-1}(1-\alpha_i^2(\omega^{i-1})); \qquad (4.9.17)$$

$$u_j(t) = u_j(t, \omega^{j-1}) \geq 0,\ y_i(t) \geq y_i(t-1),\ y_i(1) > 0; \tag{4.9.18}$$

$$S_i(t) \geq 0,\ i, j = \overline{1, n},\ t \in [1, T]. \tag{4.9.19}$$

Сформулируем задачу принятия решений распределения ресурсов с априорными решающими правилами и условными вероятностными ограничениями для модели с правилом выбора пропорционального развития.

$$M\left\{ u_i(t, \omega^n) - \frac{\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t,\omega^n)}{S_i(t,\omega^n)}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t,\omega^n)}{S_i(t,\omega^n)}\right)} \right\} \to \min;$$

$$P_i^1\left\{ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} A_{kij}(\omega^{i-1}) u_{kj}(t) \leq c_i(t, \omega^i) \mid \omega^{i-1} \right\} \geq \alpha_i^1(\omega^{i-1}),$$

$$0,5 < \alpha_i^1(\omega^{i-1}) < 1;$$

$$P_i^2\left\{ y_i(t) = y_i(t-1) + S_i(t) u_i(t) + d_i(t) \right\} \geq \alpha_i^2(\omega^{i-1}),$$

$$0,5 < \alpha_i^2(\omega^{i-1}) < 1;$$

$$u_j(t) = u_j(t, \omega^{j-1}) \geq 0,\ y_i(t) \geq y_i(t-1),\ y_i(1) > 0;$$

$$S_i(t) \geq 0,\ c_i(t, \omega^i) > 0,\ i, j = \overline{1, n},\ \omega^i \in \Omega^i = \times_{k=1}^{i} \Omega_k,\ t \in [1, T].$$

Эта задача эквивалентна следующей задаче

$$M\left\{ u_i(t, \omega^n) - \frac{\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t,\omega^n)}{S_i(t,\omega^n)}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t,\omega^n)}{S_i(t,\omega^n)}\right)} \right\} \to \min;$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} A_{kij} u_{kj}(t) \leq \widetilde{F}_i^{-1}(1 - \alpha_i^1(\omega^{i-1})),\ i = \overline{1, n};$$

$$\{y_i(t) = y_i(t-1) + S_i(t) u_i(t) + d_i(t)\} \leq \widetilde{F}_i^{-1}(1 - \alpha_i^2(\omega^{i-1}));$$

$$u_j(t) = u_j(t, \omega^{j-1}) \geq 0,\ y_i(t) \geq y_i(t-1),\ y_i(1) > 0;$$

$$S_i(t) \geq 0,\ i, j = \overline{1, n},\ t \in [1, T].$$

Запишем целевую функцию задачи i-го этапа.

$$Q_i(y_{i,i}(t)) =$$

$$= M_{\omega_i|\omega^{i-1}} \left\{ u_{i,i}(t,\omega^n) - \frac{\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t,\omega^n)}{S_i(t,\omega^n)}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t,\omega^n)}{S_i(t,\omega^n)}\right)} + \sum_i \sum_t Q_{i+1}(\omega^i, y_i^i(t)) \right\}.$$

В результате эта задача принятия решения пропорционального распределения ресурсов будет иметь вид

$$Q_i(y_{i,i}(t)) = M_{\omega_i|\omega^{i-1}} \Bigg\{ u_{i,i}(t,\omega^n) - \frac{\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t,\omega^n)}{S_i(t,\omega^n)}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t,\omega^n)}{S_i(t,\omega^n)}\right)} +$$

$$+ \sum_i \sum_t Q_{i+1}(\omega^i, y_i^i(t)) \Bigg\} \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{i} A_{ij} u_j(t) \le \widetilde{F}_i^{-1}(1 - \alpha_i^1(\omega^{i-1})),\ i = \overline{1,n};$$

$$\{y_i(t) = y_i(t-1) + S_i(t) u_i(t) + d_i(t)\} \le \widetilde{F}_i^{-1}(1 - \alpha_i^2(\omega^{i-1}));$$

$$u_j(t) = u_j(t, \omega^{j-1}) \ge 0,\ y_i(t) \ge y_i(t-1),\ y_i(1) > 0;$$

$$S_i(t) \ge 0,\ i,j = \overline{1,n},\ t \in [1,T].$$

Для общего вида задачи принятия решений распределения ресурсов с вероятностными ограничениями (4.9.8)-(4.9.12) справедлива следующая теорема.

Теорема 4.9.1. *Целевая функция $Q_i(y_{i,i}(t))$ i-го этапа многоэтапной задачи принятия решений распределения ресурсов (4.9.8)-(4.9.12) с условными вероятностными ограничениями является выпуклой вверх функцией на множестве K_i допустимых решающих правил.*

`Доказательство.` Будем доказывать по индукции.

При $i=n$ $\;Q_n(y_{i,n}(t))=M_{\omega_n|\omega^{n-1}}\Big\{F(y_{1,n}(t),y_{2,n}(t),...,y_{n,n}(t))\Big\}$ — линейная, а следовательно, выпуклая вверх функция.

Пусть $Q_i(y_{i,i}(t))$ — выпуклая вверх функция на множестве K_i.

Докажем, что $Q_{i-1}(y_{i,i-1}(t))$ — выпукла вверх на множестве K_i.

Из (4.9.14) имеем

$$Q_i(\omega^{i-1},y_i^{i-1})=\min_{y_{i,i}(t)\in K_i}M_{\omega_i|\omega^{i-1}}\Big\{F(y_1^{i-1}(t),y_2^{i-1}(t),\ldots,y_n^{i-1}(t))+$$

$$+\sum_i\sum_t Q_{i+1}(\omega^i,y_i^i(t))\Big\},\ i=\overline{1,n-1},\ t\in[1,T].$$

Рассмотрим $y_i'(t)\in K_{i-1},\ \ y_i''(t)\in K_{i-1}$.

Пусть

$$(y_i^{i-1}(t))'=(y_i^{i-2}(t),y_{i,i-1}(t));\ (y_i^{i-1}(t))''=(y_i^{i-2}(t),y_{i,i-1}(t)).$$

Обозначим через значения $\widetilde{y}'_{i,i}(t),\ \widetilde{y}''_{i,i}(t)$, на которых достигаются $Q_i(\omega^{i-1},(y_i^{i-1}(t))')$ и $Q_i(\omega^{i-1},(y_i^{i-1}(t))'')$ соответственно.

По предположению $Q_i(y_{i,i}(t))$ — выпукло вверх на K_i.

Покажем, что отсюда следует выпуклость вверх $Q_i(\omega^{i-1},y_i^{i-1}(t))$ на K_{i-1}.

Действительно, $\widetilde{y}'_{i,i}(t)\in K_i$ и $\widetilde{y}''_{i,i}(t)\in K_i$. Это значит, что существуют $x'_{i,i+1}(t),x'_{i,i+2}(t),\ldots,x'_{i,n}(t)$ и $x''_{i,i+1}(t),x''_{i,i+2}(t),\ldots,x''_{i,n}(t)$ такие, что система ограничений, определяющая K_i, удовлетворяется при $y_{i,i}(t)=\widetilde{y}'_{i,i}(t),\ \ y_{i,i-1}(t)=y'_{i,i-1}(t)$ и $x_{i,j}(t)=x'_{i,j}(t)$,
$i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{i+1,n}$, и также при $y_{i,i}(t)=\widetilde{y}''_{i,i}(t),\ \ y_{i,i-1}(t)=y''_{i,i-1}(t)$, и $x_{i,j}(t)=x''_{i,j}(t),\ \ i=\overline{1,n},\ j=\overline{i+1,n}$.

Следовательно, для $\forall\lambda\in[0,1]$ система ограничений, определяющая K_i, удовлетворяется при

$$y_{i,i}(t)=\lambda\widetilde{y}'_{i,i-1}+(1-\lambda)\widetilde{y}''_{i,i}(t),$$

$$y_{i,i-1}(t)=\lambda\widetilde{y}'_{i,i-1}+(1-\lambda)\widetilde{y}''_{i,i-1}(t),$$

$$x_{i,j}(t) = \lambda x'_{i,j}(t) + (1-\lambda)x''_{i,j}(t),$$
$$j = \overline{i+1, n}.$$

В силу выпуклости вверх $Q_i(y_{i,i}(t))$ на K_i имеем

$$Q_i(\lambda \widetilde{y}'_{i,i-1}(t) + (1-\lambda)\widetilde{y}''_{i,i}(t)) \geq \lambda Q_i(\widetilde{y}'_{i,i-1}(t)) + (1-\lambda)Q_i(\widetilde{y}''_{i,i}(t)). \tag{4.9.20}$$

По определению $\widetilde{y}'_{i,i}(t)$ и $\widetilde{y}''_{i,i}(t)$

$$Q_i(\widetilde{y}'_{i,i}(t)) = Q_i(\omega^{i-1}, (y_i^{i-1}(t))'),\ Q_i(\widetilde{y}''_{i,i}(t)) = Q_i(\omega^{i-1}, (y_i^{i-1}(t))''). \tag{4.9.21}$$

Кроме того,

$$Q_i(\omega^{i-1}, \lambda(y_i^{i-1}(t))' + (1-\lambda)(y_i^{i-1}(t))'') = Q_i(\lambda\widetilde{y}'_{i,i}(t) + (1-\lambda)\widetilde{y}''_{i,i}(t)). \tag{4.9.22}$$

Из формул (4.9.20), (4.9.21), (4.9.22) следует, что

$$Q_i(\omega^{i-1}, \lambda(y_i^{i-1}(t))' + (1-\lambda)(y_i^{i-1}(t))'') \geq$$
$$\geq \lambda Q_i(\omega^{i-1}, (y_i^{i-1}(t))') + (1-\lambda)Q_i(\omega^{i-1}, (y_i^{i-1}(t))'').$$

Это означает, что $Q_i(\omega^{i-1}, y_i^{i-1}(t))$ выпукла вверх на K_i.

Но тогда и

$$Q_{i-1}(y_{i,i-1}(t)) =$$
$$= M_{\omega_{i-1}|\omega^{i-2}}\Big\{F(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) + \sum_i \sum_t Q_i(\omega^{i-1}, y_i^{i-1}(t))\Big\}$$

также выпукла вверх на K_i.

Теорема доказана.

Теорема 4.9.2. *Если векторы $c_i(t)$ и $u_{i,i}(t)$ статистически независимы от $c_{i-1}(t)$ и $u_{i,i-1}(t)$ соответственно и α_i — фиксированные векторы, то среди оптимальных решающих правил многоэтапной задачи принятия решений с условными вероятностными ограничениями имеются правила нулевого порядка, т.е. задача (4.9.15)-(4.9.19) имеет решение в детерминированных векторах.*

Доказательство. Пусть $z^n(t-1, \omega^{n-1})$ — оптимальное решающее правило, а $\overline{z}_i$ — математическое ожидание $z_i(t-1, \omega^{i-1})$,
$i = \overline{1, n}$. Составляющие вектора $\overline{z}_i = Mz_i(t-1, \omega^{i-1})$ — детерминированные величины.

Покажем, что в условиях теоремы $\overline{z}_i \in K$.

Действительно, $z_i(t-1, \omega^{i-1})$ — решающее правило i-го этапа. Это означает, что существуют $x_{i,j}(\omega^{j-1})$, $\ j = \overline{i+1, n}$, такие, что верно ограничение

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji} u_i(t) \le \widetilde{F}^{-1}_{c^{k-1}}(\overline{1} - \alpha_k),\ k = \overline{1, n}. \tag{4.9.23}$$

По условию теоремы $\widetilde{F}^{-1}_{c^{k-1}}(\overline{1} - \alpha_k) = \widetilde{F}^{-1}_{c^{k}}(\overline{1} - \alpha_k)$ — детерминированный вектор (здесь F_{c^k} — вектор-функция распределения составляющих c_k).

Взяв математическое ожидание от обеих частей неравенства (4.9.23) приходим к выводу, что $\overline{z}_i \in K$, т.е. $\overline{z}_i$ является допустимым решающим правилом.

Теорема доказана.

Используя выше изложенную теорию найдем детерминированный эквивалент и оптимальное решающее правило для задачи принятия решения по распределению ресурсов с принципом выбора пропорционального развития

$$M\left\{ u_i(t, \omega^n) - \frac{\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{S_i(t)}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{S_i(t)}\right)} \right\} \to \min;$$

$$P_i^1 \left\{ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} A_{kij}(\omega^{i-1}) u_{kj}(t) \le c_i(t, \omega^i) \mid \omega^{i-1} \right\} \ge \alpha_i^1(\omega^{i-1}),$$

$$0,5 < \alpha_i^1(\omega^{i-1}) < 1;$$

$$P_i^2\left\{y_i(t,\omega^{i-1})=y_i(t-1,\omega^{i-1})+S_i(t,\omega^{i-1})u_i(t)+d_i(t,\omega^{i-1})\right\}\geq$$

$$\geq\alpha_i^2(\omega^{i-1}),\ 0,5<\alpha_i^2(\omega^{i-1})<1;$$

$$u_j(t)=u_j(t,\omega^{j-1})\geq 0,\ y_i(t)\geq y_i(t-1),\ y_i(1)>0;$$

$$S_i(t)\geq 0,\ c_i(t,\omega^i)>0,\ i,j=\overline{1,n},\ \omega^i\in\Omega^i=\times_{k=1}^{i}\Omega_k.$$

Эта задача эквивалентна следующей:

$$M\left\{u_i(t,\omega^n)-\frac{\left(\frac{\overline{y}_i-y_i(t)}{S_i(t)}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{y}_i-y_i(t)}{S_i(t)}\right)}\right\}\to\min;$$

$$M\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}A_{kij}(\omega^{i-1})u_{kj}(t)\right\}\leq\widetilde{c}_i(t);$$

$$(\widetilde{y}_i(t)=\widetilde{y}_i(t-1)+\widetilde{S}_i(t)u_i(t)+\widetilde{d}_i(t))=\widetilde{\Delta}_i(t);$$

$$u_i(t)\geq 0,\ y_i(t)\geq y_i(t-1),\ y_i(1)>0;$$

$$S_i(t)\geq 0,\ i,j=\overline{1,n},\ t\in[1,T],$$

где

$$\widetilde{c}_i(t)=\inf_{\omega^{i-1}}\widetilde{F}_i^{-1}(\bar{1}-\alpha_i^1(\omega^{i-1})),$$

$$\widetilde{\Delta}_i(t)=\inf_{\omega^{i-1}}\widetilde{F}_i^{-1}(\bar{1}-\alpha_i^2(\omega^{i-1})),\ i=\overline{1,n}.$$

Здесь операция inf покомпонентная.

Обозначим через D блочно-диагональную матрицу, составленную из векторов $u(t)$, векторов-строк $g_i(t)$, которые соответствуют ограничениям в новых переменных.

Пусть вектор $\Lambda^*=(\lambda_0^*,\lambda_1^*,\ldots,\lambda_N^*)$ ($\lambda_0^*=1,\ N$ — число ограничений) — решение выпуклой детерминированной задачи

$$\min_{\Lambda\geq 0}\left\{\sum_{r=1}^{N}\lambda_r\widetilde{c}_r+\sum_{q=0}^{N}MD^{-1}g_q\lambda_q\right\},$$

$\lambda_0^*=1$.

Оптимальное решающее правило эквивалентной к исходной задаче можно записать следующим образом

$$u_i^* = D^{-1} \sum_{r=0}^{N} \lambda_r^* g_r, \ \ \lambda_0^* = 1.$$

Это оптимальное решающее правило определяет оптимальные решающие правила исходной многоэтапной задачи принятия решений в условиях неопределенности.

4.10 Многоэтапная задача принятия решений с вероятностным функционалом (P-модель)

Как уже говорилось, в ряде прикладных задач более естественной целевой функцией является вероятность того, что значение целевой функции не будет превышать некоторой заданной величины с заданной вероятностью α_0. Содержательный смысл подобного качества решения в условиях неполной информации определяется стремлением оптимизировать вероятность достижения или превышения целевой функцией параметров управления (объемов производства или суммарного выигрыша от вкладываемых ресурсов) заданного фиксированного уровня, характеризующего требуемую эффективность многоэтапной операции принятия решений.

Рассмотрим следующую многоэтапную задачу принятия решений распределения ресурсов.

$$k \to \max; \tag{4.10.1}$$

$$P\left(\{F(y_1(t,\omega^n), y_2(t,\omega^n), \ldots, y_n(t,\omega^n))\} \le k\right) = \alpha_0, \ 0,5 < \alpha_0 < 1; \tag{4.10.2}$$

$$P_i^1 \left\{ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} A_{kij}(\omega^{i-1}) u_{kj}(t) \le c_i(t,\omega^i) \mid \omega^{i-1} \right\} \ge \alpha_i^1(\omega^{i-1}), \tag{4.10.3}$$

$$0,5 < \alpha_i^1(\omega^{i-1}) < 1;$$

$$P_i^2\left\{y_i(t) = y_i(t-1) + S_i(t)u_i(t) + d_i(t)\right\} \geq \alpha_i^2(\omega^{i-1}), \qquad (4.10.4)$$

$$0,5 < \alpha_i^2(\omega^{i-1}) < 1;$$

$$u_j(t) = u_j(t, \omega^{j-1}) \geq 0,\ y_i(t) \geq y_i(t-1),\ y_i(1) > 0; \qquad (4.10.5)$$

$$S_i(t) \geq 0,\ c_i(t, \omega^i) > 0,\ i, j = \overline{1, n},\ \omega^i \in \Omega^i = \times_{k=1}^{i}\Omega_k,\ t \in [1, T]. \qquad (4.10.6)$$

В такой постановке задачи в общем случае порог k также может зависеть от набора реализаций случайных параметров ω.

Пусть вектор коэффициентов линейной формы целевой функции n-го этапа нормально распределен с математическим ожиданием $\mu(\omega^{n-1})$ и детерминированной корреляционной матрицей V. Пусть он имеет совместное нормальное распределение, то при фиксированном наборе реализаций этих коэффициентов, условное математическое ожидание вектора коэффициентов линейной формы целевого функционала представляет собой линейную комбинацию составляющих векторы коэффициентов линейной формы.

На последнем n-м этапе имеем

$$P\left\{F(y_1(t, \omega^j), \ldots, y_n(t, \omega^j)) \leq k \mid \omega^{n-1}\right\} =$$

$$= P\Big\{F(y_1(t, \omega^n), \ldots, y_n(t, \omega^n)) \leq$$

$$\leq k - \Big[F(y_1(t, \omega^j), \ldots, y_n(t, \omega^j))\Big] \ \mid \omega^{n-1}\Big\}.$$

В соответствии с принятыми допущениями имеем

$$P\left\{F(y_1(t, \omega^j), \ldots, y_n(t, \omega^j)) \leq k \mid \omega^{n-1}\right\} =$$

$$= \Phi\left[\frac{k - P\left\{F(y_1(t, \omega^j), \ldots, y_n(t, \omega^j)) \leq k \mid \omega^{n-2}\right\} - \mu(\omega^{n-1})u_{i,n}(t)}{(u_{i,n}^T(t) V u_{i,n}(t))^{1/2}}\right], \qquad (4.10.7)$$

где $\Phi(\xi)$ — функция распределения нормального закона $N(0, 1)$.

Учитывая (4.10.7), получаем

$$Q_n(\omega^{n-1}, y_i^{n-1}(t)) = \min_{y_{i,n}(t)\in K_n}\Big[\Phi^{-1}(\alpha_0)(u_{i,n}^T(t)Vu_{i,n}(t))^{1/2} +$$

$$+P\left\{(F(y_1(t,\omega^j),\ldots,y_n(t,\omega^j)) \mid \omega^{n-1})\right\} + \mu u_{i,n}(t)\Big].$$

При $\alpha_0 \geq 0,5$ целевая функция n-го этапа выпукла относительно $y_{i,n-1}(t)$.

Таким образом, при принятых допущениях априорные решающие правила задачи (4.10.1)-(4.10.6) могут быть вычислены с помощью методов выпуклого программирования.

Анализ стохастической модели, отвечающей массовой проблеме, позволяет разделить процесс выбора решения на два этапа. На первом трудоемком предварительном этапе структура задачи и априорная статистическая информация используются для вычисления решающего правила: формулы, таблицы или инструкции, устанавливающие зависимость решения от реализованных значений параметров условий задачи. На втором нетрудоемком оперативном этапе решающее правило и текущая реализация условий, отвечающих исследуемой индивидуальной задаче, применяются для вычисления оптимального плана.

Для решения стохастических задач принятия решений при нестационарной оптимизации используются известные алгоритмы выпуклого программирования. Например, метод стохастических квазиградиентов с проектированием, метод проекции стохастического градиента или метод стохастической линеаризации.

Многошаговые процедуры принятия решений, разработанные на основе алгоритмов нестационарной оптимизации, применимы в случае, когда возможно много (теоретически — бесконечно много) уточняющих наблюдений. С этой точки зрения их можно рассматривать как методы решения многоэтапных задач принятия решения в условиях неполной информации с большим числом слабо влияющих один на другой этапов принятия решений. Наиболее подходящей для применения подобных процедур будет следующая ситуация. Первоначальное решение принимается в условиях неопределенности, вызванной отсутствием информации. Для получения такой информации ставятся эксперименты. На основе результатов этих экспериментов необходимо найти наилучшее управление моделируемой системой и, если такая система изменяет свое состояние во времени, проводить соответствующие корректировки этого управления.

Применение прикладных многоэтапных моделей может дать хороший результат там, где при принятии исходного решения приходится учитывать влияние многочисленных случайных факторов и имеется возможность компенсировать влияние этих факторов за счет дополнительных мероприятий, не включаемых в исходный план: организация дополнительных перевозок продукции, маневра ресурсами, введение в действие дополнительных мощностей и т.д. С этой точки зрения многоэтапные задачи могут найти применение при планировании запасов, при определении выпуска продукции массового спроса, на объем потребления которой влияют трудно прогнозируемые факторы (например, мода), в сельском хозяйстве, а также при долгосрочном планировании развития и размещения производства.

4.11 Двойственность в многоэтапном стохастическом программировании

Для построения апостериорных решающих правил многоэтапных задач стохастического программирования можно использовать двойственные задачи (Λ-задачи) при достаточно общих предположениях относительно структуры исходной модели. В процессе построения двойственной задачи для многоэтапных моделей стохастического программирования приходится неоднократно пользоваться обобщениями теоремы о минимаксе. Джон фон Нейман доказал теорему о минимаксе

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$

для простейшего случая, когда $f(x, y)$ — билинейная функция на $X \times Y$, а X и Y — конечномерные симплексы. Вальд и другие авторы обобщили теорему фон Неймана для множеств X и Y, принадлежащим некоторым бесконечномерным пространствам. Кнезер, Фань Цзи, Берж и Никайдо распространили теорему о минимаксе для вогнуто-выпуклых функций, соответствующим образом полунепрерывных по x и y. Наиболее общие результаты в этом направлении получены Сайоном.

Введем следующие определения:

Определение 4.11.1. *Функция $f(x, y)$ на $X \times Y$ квазивогнута в X, если при любом $y \in Y$ и любом вещественном c множество $\{x \mid f(x, y) \geq c\}$ выпукло.*

Определение 4.11.2. *Функция $f(x, y)$ на $X \times Y$ квазивыпукла в Y, если при любом $x \in X$ и любом вещественном c множество $\{y \mid f(x, y) \leq c\}$ выпукло.*

Определение 4.11.3. *Функция $f(x, y)$ на $X \times Y$ квазивогнуто-*

выпукла, если она квазивогнута в X и квазивыпукла в Y.

Пусть X — область определения аргумента x, а F — область значений функции $f(x)$. Подмножество $[x, f(x)]$ множества $X \times F$ называется графиком функции (отображения) $f(x)$. Пусть L — множество предельных точек всех последовательностей образов в графике отображения, соответствующих пути $x \to x_0$, а $F(x_0)$ — множество образов точки x_0.

Определение 4.11.4. *Функция $f(x)$ полунепрерывна сверху в x_0, если $L \subset F(x_0)$, и полунепрерывна снизу в x_0, если $F(x_0) \subset L$. Если $f(x)$ полунепрерывна сверху и снизу, $F(x_0) = L$, и функция непрерывна в x_0. Функция полунепрерывна сверху (снизу) на множестве X, если это свойство имеет место для всех $x \in X$.*

Определение 4.11.5. *Функция $f(x, y)$ на $X \times Y$ является полунепрерывной сверху – полунепрерывной снизу, если $f(x, y)$ полунепрерывна сверху по x для каждого $y \in Y$ и полунепрерывна снизу по y для каждого $x \in X$.*

Приведем без доказательства следующие обобщения теоремы о минимаксе, принадлежащие Сайону [375] и Фань Цзи [145].

Теорема 4.11.1. [375] *Пусть X и Y — выпуклые множества, одно из которых компактно, а $f(x, y)$ — функция на $X \times Y$ квазивогнуто-выпуклая и полунепрерывная сверху, полунепрерывная снизу. Тогда выполняется*

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y). \qquad (4.11.1)$$

Теорема 4.11.2. [375] *Пусть X и Y — произвольные множества, а функция $f(x, y)$ вогнуто-выпуклая на $X \times Y$. Если для лю-*

бого

$$c < \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y) \ (c > \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y))$$

существует такое конечное подмножество $A \subset X$ ($B \supset Y$), что для любого $y \in Y$ ($x \in X$) найдется $x^* \in A$ ($y^* \in B$), удовлетворяющий неравенству $f(x^*, y) > c$ ($f(x, y^*) < c$), то имеет место соотношение (4.11.1).

Теорема 4.11.3.[145] *Пусть X (Y) компактно, Y (X) — произвольное множество, а $f(x, y)$ — вогнуто-выпуклая функция на $X \times Y$. Если $f(x, y)$ — полунепрерывная сверху по x для каждого $y \in Y$ (полунепрерывная снизу по y для каждого $x \in X$), то имеет место соотношение (4.11.1).*

Теорема 4.11.4.[145] *Пусть X и Y произвольные множества, а $f(x, y)$ — вещественная почти периодическая функция на $X \times Y$. Тогда равенство (4.11.1) имеет место тогда и только тогда, когда для произвольного $\varepsilon > 0$ и любых конечных множеств $A \subset X$ и $B \subset Y$ существуют такие $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$, что $f(a, y_0) - f(x_0, b) \le \varepsilon$ ($a \in A$, $b \in B$). В частности, если $f(x, y)$ вогнуто-выпукла, то (4.11.1) справедливо.*

В дальнейшем, при формировании Λ-задачи, будут использованы следующие утверждения.

Лемма 4.11.1.[145] *Пусть существует функция $x^*(\omega) \in X(\omega)$, являющаяся для каждого ω решением задачи*

$$\sup_{x(\omega)\in X(\omega)} f(\omega, x(\omega)) = f(\omega, x^*(\omega)).$$

Тогда имеет место соотношение

$$\int_\Omega \sup_{x(\omega)\in X(\omega)} f(\omega, x(\omega))dp = \sup_{x(\omega)\in X(\omega)} \int_\Omega f(\omega, x(\omega))dp.$$

Лемма 4.11.2.[145] *Пусть $f(x, y)$ квазивыпукла на Y и для каждого $y \in Y$ существует функция $\psi(y) = \sup_{x \in X} f(x, y)$. Тогда $\psi(y)$ квазивыпукла по y на Y.*

Перейдем к построению Λ-задачи, двойственной к следующей задаче многоэтапного стохастического программирования

$$\inf \int\limits_{\Omega} \psi_0(\omega^0, x^n) dp, \tag{4.11.2}$$

$$\int\limits_{\Omega} \psi_k(\omega^k, x^n) dp_{k-1}^k \geq b_k(\omega^{k-1}), \; k = 1, \ldots, n, \tag{4.11.3}$$

$$x_k \in G_k(\omega^k), \; k = 1, \ldots, n. \tag{4.11.4}$$

Обозначим $\lambda^{k,n} = \{\lambda_k(\omega^{k-1}), \ldots, \lambda_n(\omega^{n-1})\}$ и введем рекуррентным образом функции $\psi_0^{(k)}(\omega^n, x^{n-k}, \lambda^{n-k+1,n})$:

$$\psi_0^{(k+1)}(\omega, x^{n-k-1}, \lambda^{n-k,n}) =$$

$$= (\lambda_{n-k}, b_{n-k}) - \sup_{x_{n-k} \in G_{n-k}} \left[(\lambda_{n-k}, \psi_{n-k}) - \psi_0^{(k)} \right], \tag{4.11.5}$$

где $\psi_0^{(0)}(\omega^n, x^n) = \psi_0(\omega^n, x^n)$.

Теорема 4.11.5.[197] *Пусть функция $\psi_0(\omega^n, x^n)$, определяющая целевой функционал многоэтапной стохастической задачи (4.11.2)-(4.11.4), квазивыпукла по $x^n \in G^n$ при каждом $\omega^n \in \Omega$, а компоненты вектор-функции $\psi_k(\omega^k, x^k)$, $k = 1, \ldots, n$, определяющих ограничения многоэтапной задачи стохастического программирования, квазивогнуты по $x^k \in G^k$ при всех $\omega^k \in \Omega^k$. Тогда функции $\psi_0^{(k)}(\omega^n, x^{n-k}, \lambda^{n-k+1,n})$ $k = 1, \ldots, n$ квазивыпуклы по $x^{n-k} \in G^{n-k}$ для всех $\omega^n \in \Omega$ и $\lambda^{n-k+1,n} \geq 0$ и вогнуты по $\lambda^{n-k+1,n} \geq 0$ при любых $\omega^n \in \Omega$ и $x^{n-k} \in G^{n-k}$.*

Доказательство. Рассмотрим

$$\psi_0^{(1)}(\omega^n, x^{n-1}, \lambda_n) = (\lambda_n, b_n) - \sup_{x_n \in G_n} \left[(\lambda_n, \psi_n) - \psi_0 \right].$$

Из определения $\psi_0^{(1)}$ и леммы 4.11.2 следует утверждение теоремы для $k = 1$. При $k > 1$ утверждение легко доказывается по индукции.

Теорема доказана.

Теперь приведем основной результат.

Теорема 4.11.6.[197] *Пусть функции $\psi_0(\omega^n, x^n)$ и $\psi_k(\omega^k, x^k)$, определяющие условия многоэтапной задачи (4.11.2) - (4.11.4), удовлетворяют условиям теоремы 4.11.5, а соответствующие функционалы Лагранжа удовлетворяют какому-либо из обобщений теоремы фон Неймана. Тогда двойственная задача (Λ-задача) может быть представлена в виде*

$$\sup_{\lambda^n \geq 0} \int\limits_{\Omega} \psi_0^{(n)}(\omega^n, \lambda^n(\omega^{n-1}))dp. \tag{4.11.6}$$

Доказательство. В принятых обозначениях рекуррентные формулы могут быть в соответствии с леммой 4.11.1 и теоремами о минимаксе переписаны в виде

$$\overline{S}_n(\omega^{n-1}, x^{n-1}) = \sup_{\lambda^n \geq 0} \int\limits_{\Omega} \big\{(\lambda_n, b_n) - \sup_{x_n \in G_n} \big[(\lambda_n, \psi_n) - \psi_0\big]\big\} dp_{n-1}^n =$$

$$= \sup_{\lambda^n \geq 0} \int\limits_{\Omega_n} \psi_0^{(1)}(\omega^n, x^{n-1}, \lambda_n) dp_{n-1}^n,$$

$$\overline{S}_{n-1}(\omega^{n-2}, x^{n-2}) = \sup_{\lambda^{n-1} \geq 0} \int\limits_{\Omega_{n-1}} \big\{(\lambda_{n-1}, b_{n-1}) -$$

$$- \sup_{x_{n-1} \in G_{n-1}} \big[(\lambda_{n-1}, \psi_{n-1}) - \sup_{\lambda_n \geq 0} \int\limits_{\Omega_n} \psi_0^{(1)} dp_{n-1}^n\big]\big\} dp_{n-2}^{n-1} =$$

$$= \sup_{\lambda^{n-1,n} \geq 0} \int\limits_{\Omega^{n-1,n}} \big\{(\lambda_{n-1}, b_{n-1}) -$$

$$- \sup_{x_{n-1} \in G_{n-1}} \big[(\lambda_{n-1}, \psi_{n-1}) - \psi_0^{(1)}\big]\big\} dp_{n-2}^n =$$

$$= \sup_{\lambda^{n-1,n}\geq 0} \int\limits_{\Omega^{n-1,n}} \psi_0^{(2)}(\omega^n, x^{n-2}, \lambda^{n-1,n}) dp_{n-2}^n.$$

Аналогичным образом получаем

$$S_{n-k}(\omega^{n-k-1}, x^{n-k-1}) = \sup_{\lambda^{n-k,n}\geq 0} \int\limits_{\Omega^{n-k,n}} \{(\lambda_{n-k}, b_{n-k}) -$$

$$- \sup_{x_{n-k}\in G_{n-k}} \left[(\lambda_{n-k}, \psi_{n-k}) - \psi_0^{(k)}\right]\} dp_{n-k-1}^n =$$

$$= \sup_{\lambda^{n-k,n}\geq 0} \int\limits_{\Omega^{n-k,n}} \psi_0^{(k+1)}(\omega^n, x^{n-k}, \lambda^{n-k,n}) dp_{n-k-1}^n.$$

Полагая $k = n-1$, получаем

$$\overline{S}_1 = \sup_{\lambda^n\geq 0} \int\limits_{\Omega} \psi_0^{(n)}(\omega^n, \lambda^n(\omega^{n-1})) dp.$$

Следовательно, задача (4.11.6) является двойственной к задаче (4.11.2)-(4.11.4). Условия теоремы 4.11.5 гарантируют вогнутость $\psi_0^{(n)}(\omega^n, \lambda^n)$ по $\lambda^n \geq 0$ для всех $\omega^n \in \Omega$.

Теорема доказана.

Таким образом, если удастся решить на каждом этапе задачу вида

$$\sup_{x_{n-k}\in G_{n-k}} \int\limits_{\Omega^{n-k,n}} \left[(\lambda_{n-k}, \psi_{n-k}) - \psi_0^{(k)}\right] dp_{n-k+1}^n,\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{4.11.7}$$

(а эта задача в силу оговоренных свойств функций ψ_k и $\psi_0^{(k)}$ является задачей выпуклого программирования), то в соответствии с приведенными выше утверждениями получим выражения для решающих правил $x_k(\omega^k)$ задачи (4.11.2)-(4.11.4) в зависимости от ω^k, x^{k-1} и $E_{\omega^{k+1,n}}\lambda^{k,n}$, т.е. в виде

$$x_k = f_k(\omega^k, x^{k-1}, E_{\omega^{k+1,n}}\lambda^{k,n}), \tag{4.11.8}$$

где

$$E_{\omega^{k+1,n}}\lambda^{k,n} = \int\limits_{\Omega^{k+1,n}} \lambda^{k,n} dp_k^n.$$

Исключив x^k из выражения для $\psi_0^{(k)}$ и решив Λ-задачу (4.11.6), получим искомые выражения для решающих правил исходной задачи стохастического программирования подстановкой оптимальных значений $\lambda^n(\omega^{n-1})$ в (4.11.8).

Используем полученные результаты для построения двойственной задачи к многоэтапной задаче квадратичного стохастического программирования вида:

$$E_\omega \psi_0(\omega^n, x^n) = E_\omega \sum_{i=1}^{n} \left[x_i^T D_i(\omega^i) x_i + a_i(\omega^i)\right] \to \inf, \qquad (4.11.9)$$

$$E_{\omega^k}\left[\psi_k(\omega^k, x^k) \mid \omega^{k-1}\right] =$$

$$= E_{\omega^k}\left[\sum_{j=1}^{k} A_{kj}(\omega^k) x_j \mid \omega^{k-1}\right] \le b_k(\omega^{k-1}),\ k = \overline{1,n}. \qquad (4.11.10)$$

Здесь $D_i(\omega^i)$ почти при всех реализациях случайных параметров симметричная положительно-определенная матрица размера $n_i \times n_i$; $A_{kj}(\omega^k)$ — случайная матрица размера $m_k \times n_j$; $a_i(\omega^i)$ и $b_k(\omega^{k-1})$ — случайные векторы размерности n_i и m_k соответственно. Предположим, кроме того, что матрицы $D_i(\omega^i)$ и $A_{kj}(\omega^k)$ удовлетворяют требованиям, при которых все интегралы в (4.11.9) и (4.11.10) существуют. Функция $\psi_0(\omega^n, x^n)$ выпукла, а вектор-функции $\psi_k(\omega^k, x^k)$ линейны. Выполнены также условия теоремы 4.11.2. Следовательно, условия теоремы 4.11.6 соблюдены и можно построить для задачи (4.11.9)-(4.11.10) Λ-задачу.

Используя формулу (4.11.5), запишем выражение для $\psi_0^{(1)}(\omega^n, x^{n-1}, \lambda_n)$:

$$\psi_0^{(1)}(\omega^n, x^{n-1}, \lambda_n) = -\lambda_n b_n + \inf_{x_n} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_n A_{ni} x_i + x_i^T D_i x_i + a_i x_i) =$$

$$=-\lambda_n b_n+\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_n A_{ni}x_i+x_i^T D_i x_i+a_i x_i)+\inf_{x_n}(\lambda_n A_{nn}x_n+x_n^T D_n x_n+a_n x_n). \tag{4.11.11}$$

Безусловный минимум квадратичной формы в последнем члене выражения (4.11.11) достигается в точке x_n, в которой градиент равен нулю. Следовательно, имеем в соответствии с (4.11.7) и (4.11.8)

$$x_n(\omega^n)=-\frac{1}{2}D_n^{-1}(\omega^n)\left[\lambda_n(\omega^{n-1})A_{nn}(\omega^n)+a_n(\omega^n)\right]^T. \tag{4.11.12}$$

Подставляя значения $x_n(\omega^n)$ в (4.11.11), получим

$$\psi_0^{(1)}(\omega^n,x^{n-1},\lambda_n)=-\left[\lambda_n b_n+\frac{1}{4}(\lambda_n A_{nn}+a_n)D_n^{-1}(\lambda_n A_{nn}+a_n)^T\right]+$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_n A_{ni}x_i+x_i^T D_i x_i+a_i x_i).$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями (4.11.5) и выполняя преобразования, получим двойственную задачу к многоэтапной задаче стохастического программирования (4.11.2) - (4.11.4)

$$\sup_{\lambda^n\geq 0}E_{\omega^n}\psi_0^{(n)}(\omega^n,\lambda^n)=-\inf_{\lambda^n\geq 0}E_{\omega^n}\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda_j b_j+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\left(\sum_{i=n-j+1}\lambda_i A_{i,n-j+1}+a_{n-j+1}\right)D_{n-j+1}^{-1}\left(\sum_{i=n-j+1}\lambda_i A_{i,n-j+1}+a_{n-j+1}\right)^T\right]. \tag{4.11.13}$$

Пусть $\lambda^{*n}(\omega^{n-1})=\{\lambda_1^*,\lambda_2^*(\omega^1),\ldots,\lambda_1^*(\omega^{n-1})\}$ — решение задачи (4.11.13), тогда можно получить оптимальные решающие правила исходной многоэтапной задачи квадратичного стохастического программирования

$$x_k^*(\omega^k)=-\frac{1}{2}D_k^{-1}(\omega^k)E_{\omega^{k+1,n}}\left[\sum_{j=k}^{n}\lambda_j(\omega^{j-1})A_{jk}(\omega^j)+a_k(\omega^k)\right]^T. \tag{4.11.14}$$

Рассмотрим интересный частный случай, подсказанный Э.В.Цоем и исследованный в работе [204].

Пусть целевой функционал задачи (4.11.6) может быть представлен в виде

$$\widetilde{Q}(\lambda^n) = \int\limits_{\Omega} \widetilde{\psi}_0^{(n)}(\lambda_{n+1}(\omega^n), \lambda^n(\omega^{n-1}))dp$$

причем $\widetilde{\psi}_0^{(n)}$ — вогнутая дифференцируемая функция относительно составляющих $\lambda^n(\omega^{n-1})$ и компонент вектор-функции $\lambda_{n+1}(\omega^n)$. Рассмотрим конечномерную задачу вогнутого программирования

$$\sup_{\mu^n \geq 0} \widetilde{\psi}_0^{(n)}(\overline{\lambda}_{n+1}, \mu^n), \tag{4.11.15}$$

где $\overline{\lambda}_{n+1} = \int_{\Omega} \lambda_{n+1}(\omega^n)dp,\ \mu^n = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\},\ i = \overline{1, n}$ — m_i-мерные векторы. Пусть μ^n — решение задачи (4.11.15). Подчиним структуру функционала $\widetilde{\psi}_0^{(n)}$ дополнительному условию

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla_{\lambda_{n+1}} \widetilde{\psi}_0^{(n)}(\lambda_{n+1} \mid (\omega^n), \mu^n), \lambda_{n+1}(\omega^n) - \overline{\lambda}_{n+1})dp = 0. \tag{4.11.16}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.11.7.[204] *При принятых допущениях относительно структуры целевого функционала $\widetilde{\psi}_0^{(n)}$ детерминированный вектор μ^{*n} — решение конечномерной выпуклой задачи (4.11.15) — является решением задачи (4.11.5).*

Детерминированный оптимальный план в общем случае является не единственным решением задачи. Все оптимальные планы представляют собой (при сделанных допущениях) наборы функций $\lambda^n(\omega^{n-1}) \geq 0$, удовлетворяющие уравнению

$$E_{\omega^n} \widetilde{\psi}_0^{(n)}(\lambda_{n+1}(\omega^n), \lambda^n(\omega^{n-1})) = \widetilde{\psi}_0^{(n)}(\overline{\lambda}_{n+1}, \mu^n).$$

Апостериорные решающие правила k-го этапа $x_k = x_k(\omega^k)$ определяют оптимальный план этого этапа в зависимости от реализации параметров условий задачи до k-го этапа включительно. Однако оптимальные оценки условий k-го этапа $\lambda_k = \lambda_k(\omega^{k-1})$ зависят от реализации случайных исходных данных до $(k-1)$-го этапа включительно. Это значит, что для выбора решений, связанных с оценками условий, нет необходимости ждать получения текущей информации, а можно ограничиться информацией предшествующих этапов.

4.12 Примеры прикладных задач многоэтапного стохастического программирования

Многие задачи управления, планирования и проектирования в условиях риска и неопределенности описываются моделями многоэтапного стохастического программирования. Проблемы перспективного планирования развития хозяйственных систем и управления боевыми операциями, вопросы планирования экспериментов и регулирования движения космических объектов могут быть рассмотрены как многоэтапные стохастические задачи программирования со статистическими, вероятностными и жесткими ограничениями.

Примером многоэтапной задачи стохастического программирования с вероятностными ограничениями может служить задача планирования добычи, обработки и хранения нефти, исследованная в работах [71], [368]. Рассмотрим модель, следуя [203].

Пусть период планирования может быть разделен на N этапов. Введем следующие обозначения:

x_j — искомый объем добычи нефти на j-м этапе;

c_j — затраты на добычу тонны нефти на j-м этапе;

r_j — транспортные издержки на перевозку тонны нефти на j-м этапе;

y_j — запас добытой нефти к концу j-го этапа;

$\overline{y}_j = \frac{1}{2}(y_{j-1} + y_j)$ — средний запас нефти на j-м этапе;

q_j — затраты на хранение нефти на j-м этапе;

S_j — доход от продажи тонны нефти на j-м этапе;

b_j — спрос на нефть на j-м этапе.

Предположим, что известна функция распределения случайного спроса на добываемую нефть $b_j = b_j(\omega)$. Общие издержки, связанные с добычей, перевозкой и хранением нефти на j-м этапе выражаются соотношением

$$(c_j + r_j)x_j + q_j\overline{y}_j.$$

В качестве целевой функции естественно принять максимум математического ожидания прибыли за весь плановый период

$$E\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[S_j b_j - (c_j + r_j)x_j - q_j\overline{y}_j\right]\right\}.$$

Спрос на каждом этапе планирования ограничивает наличный запас нефти снизу заданной величиной $y_{\min}$, а $y_{\max}$ характеризует емкости для хранения запаса, тогда запас нефти к концу j-го периода равен

$$y_0 + \sum_{i=1}^{j} x_i - \sum_{i=1}^{j} b_i.$$

Поскольку предполагается, что к началу j-го этапа спрос на предыдущем $(j-1)$-м этапе уже известен, задачу планирования добычи, обработки и хранения нефти целесообразно ставить как многоэтапную задачу стохастического программирования с условными вероятностными ограничениями. При этом характерны два типа ограничений, обусловленные спросом на нефть

$$P\left\{y_0 + \sum_{i=1}^{j}(x_i - b_i) \geq y_{\min} \mid b_1, \ldots, b_{j-1}\right\} \geq \alpha_j^{(1)} \qquad (4.12.1)$$

и связанные с емкостями хранилищ

$$P\left\{y_0+\sum_{i=1}^{j}(x_i-b_i)\le y_{\max}\mid b_1,\dots,b_{j-1}\right\}\ge\alpha_j^{(2)}, \qquad (4.12.2)$$

где $\alpha_j^{(1)}$ и $\alpha_j^{(2)}$ предполагаются заданными.

Модель планирования добычи и хранения нефти, максимизирующая прибыль за плановый период во введенных терминах и обозначениях может быть представлена в виде

$$\max E\left\{\sum_{j=1}^{N}\left[S_jb_j-(c_j+r_j)x_j-q_j\overline{y}_j\right]\right\}, \qquad (4.12.3)$$

$$\begin{cases} P\left\{y_0+x_1-b_1\ge y_{\min}\right\}\ge\alpha_1^{(1)},\\ P\left\{y_0+x_1-b_1\le y_{\max}\right\}\ge\alpha_1^{(2)}, \end{cases} \qquad (4.12.4)$$

$$\begin{cases} P\left\{y_0+x_1+x_2-b_1-b_2\ge y_{\min}\mid b_1\right\}\ge\alpha_2^{(1)}(b_1),\\ P\left\{y_0+x_1+x_2-b_1-b_2\le y_{\max}\mid b_1\right\}\ge\alpha_2^{(2)}(b_1), \end{cases} \qquad (4.12.5)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{cases} P\left\{y_0+\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i-b_i)\ge y_{\min}\mid b_1,\dots,b_{N-1}\right\}\ge\alpha_N^{(1)}(b_1,\dots,b_{N-1})\\ P\left\{y_0+\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i-b_i)\le y_{\max}\mid b_1,\dots,b_{N-1}\right\}\ge\alpha_j^{(2)}(b_1,\dots,b_{N-1}) \end{cases} \qquad (4.12.6)$$

Таким образом, план определяется априорными решающими правилами многоэтапной задачи стохастического программирования с условными вероятностными ограничениями. В работе [368] представлена стохастическая модель оптимизации процесса переработки нефтепродуктов и приводится алгоритм решения задачи, основанный на методе случайного поиска [137].

Рассмотрим многоэтапную задачу стохастического программирования, детерминированный аналог приведенной ниже модели исследовался в работах [118], [340]. Сформулируем задачу планирования работы промышленного предприятия в условиях, когда некоторые параметры имеют случайный характер; стохастическая модель может применяться для отраслевого планирования, а возможно, и для планирования на более высоком уровне. Основные результаты, приведенные ниже, получены в работе [120].

Пусть A^k — матрица технологических способов производства размерности $m \times n$ в k-м плановом периоде;

b^k — m-мерный вектор спроса на продукцию, выпускаемую данным предприятием в k-м периоде;

c^k — n-мерный вектор издержек на использование технологических способов производства в k-й период;

x^k — множество возможных интенсивностей использования технологических способов производства в k-м периоде. Исходя из технических и экономических прогнозов, определяются A^k, b^k, c^k, x^k для периодов $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Статистический подход к решению задачи планирования производства на N периодов в детерминированном варианте описывается традиционной моделью программирования

$$\min(c^k, x^k), \tag{4.12.7}$$

$$A^k x^k = b^k, \;\; k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{4.12.8}$$

$$x^k \in X^k. \tag{4.12.9}$$

Специфика динамической модели планирования производства состоит в том, что учитываются продукты оставшиеся на складе, благодаря возникшей невязке, и которые могут быть использованы для реализации в следующие плановые периоды.

Введем вектор невязки y^{k+1} для k-го периода

$$y^1 = b^0 - A^0 x^0.$$

Пусть $y^1 \leq 0$, т.е. в связи с перепроизводством возникли запасы, тогда невязка в системе ограничений для второго этапа планирования имеет вид

$$y^2 = B^1 y^1 + b^1 - A^1 x^1,$$

где B^k — диагональная матрица размерности m. Ненулевые элементы b_{ii}^k матрицы B^k отражают какая часть продукта i-го вида, положенная на склад к началу k-го периода, останется годной для продажи к концу этого периода при $y_i^k \leq 0$ и какая часть спроса, не удовлетворенная в $(k-1)$-й период на продукт вида i, останется к k-му периоду. Если планировать работу промышленного предприятия так, чтобы для реализаций случайного параметра ω спрос был удовлетворен, т.е. наложить ограничения на невязку типа $y^k \leq 0$ (почти всюду), а издержки от хранения готовой продукции на складе в k-й период даны в виде m-мерного вектора q^k (вообще говоря, тоже случайного), то линейная многоэтапная стохастическая модель перспективного планирования производства примет вид

$$E\left(\sum_{k=0}^{N-1} c^k x^k\right) - E\left(\sum_{k=1}^{N} q^k y^k\right) \to \min, \tag{4.12.10}$$

$$y^{k+1} = B^k y^k - A_k x^k + b^k,\ k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{4.12.11}$$

$$y^k \leq 0 \text{ (почти для } \forall\omega \in \Omega), \tag{4.12.12}$$

$$D^k x^k = d^k,\ x^k \geq 0,\ k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{4.12.13}$$

Ограничения на интенсивности использования технологических способов производства задаются соотношениями (4.12.13). Принцип максимума, который может быть использован для решения детерминированных дискретных динамических задач, исследовался в работах [20], [214]. Стохастический случай рассматривался в работах [204],

[206], но при этом было получено только необходимое условие оптимальности решения.

В сложных ситуациях выбор решения, как правило, производится в условиях риска или неопределенности. Недостаток времени не позволяет откладывать решение до получения полной информации об условиях задачи. Однако последовательное накопление информации оставляет возможность со временем корректировать и постепенно совершенствовать решение. Рациональное предварительное решение, как и промежуточные корректировки, должны учитывать прогнозируемые значения статистических характеристик ещё не реализованных случайных параметров условий задачи. Формальными моделями анализа сложных динамических систем являются многоэтапные задачи стохастического программирования с безусловными или условными, стастистическими, вероятностными или жесткими ограничениями.

4.13 Многоэтапные модели принятия решений распределения ресурсов в условиях неполной информации. Предварительные результаты

Рассмотрим следующую модель принятия решения распределения ресурсов в условиях неполной информации

$$(MSP)\begin{cases} F(y(t,\omega^j)) = F(y_1(t,\omega^j), y_2(t,\omega^j), \ldots, y_n(t,\omega^j)) \to \inf, \\ P_1\Big\{\sum\limits_{j=1}^{i} A_{ij}(\omega^j)u_j(t) \le c_i(t,\omega^i) \mid \omega^{i-1}\Big\} \ge \alpha_i^1(\omega^{i-1}), \\ j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

$$P_2\Big\{y_i((t,\omega^i) \mid \omega^{i-1}) = y_i((t-1,\omega^i) \mid \omega^{i-1}) + S_i((t,\omega^i) \mid \omega^{i-1})u_i(t) +$$

$$+ d_i((t,\omega^i) \mid \omega^{i-1})\Big\} \ge \alpha_i^2(\omega^{i-1}),$$

$$y_i(t, \omega^i) \geq y_i(t-1, \omega^i), y_i(1, \omega^i) > 0,$$

$$u_i(t) \geq 0, S_i(t, \omega^i) \geq 0, c_i(t, \omega^i) > 0,$$

$$\omega^i \in \Omega_i = \mathop{\times}_{k=1}^{i} \Omega_k, i = \overline{1, n}, t \in [1, T].$$

Здесь Ω_i — некоторые пространства элементарных событий i-го этапа; $\omega^i = (\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^i)$– вектор в пространстве размерности i; символ $\times$ означает декартово произведение.

Пусть

$$\omega^\infty \in \Omega^\infty = \mathop{\times}_{k=1}^{\infty} \Omega_k;$$

$\omega^\infty = (\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^i, \ldots)$– последовательность случайных событий.

Обозначим пространство последовательностей Ω^∞ через Ω. Пусть на Ω задана вероятностная мера P.

Тогда определим меру P^k на Ω^k следующим образом:

$P^k(A) = (A \times \Omega_{k+1} \times \cdots \times \Omega_n \times \ldots)$ для любого $A \subset \Omega^k$. Далее, введем условную вероятностную меру P_k на Ω_k :

$$P_k(A \mid \omega^{k-1} \in C) = \frac{P_k(A \times C)}{P_k(\Omega_k \times C)}$$

для любых $A \subset \Omega_k; C \subset \Omega^{k-1}$.

Пусть $\Sigma - \sigma$ — алгебра случайных событий на Ω, тогда (Ω, Σ, P)– вероятностное пространство.

Если рассматривать задачу принятия решений распределения ресурсов в условиях неполной информации с принципом выбора равномерного развития направлений (объектов), то ее можно записать в следующем виде.

$$(MSP)\begin{cases} F(y(t)) = \Big\{ \big(\frac{\overline{y_i} - y_i(t,\omega^i)}{\overline{y_i}}\big) - \big(\frac{\overline{y_j} - y_j(t,\omega^j)}{\overline{y_j}}\big) \Big\} \to \inf, i \neq j \\ P_1 \Big\{ \sum\limits_{j=1}^{i} A_{ij}(\omega^{j-1}) u_j(t) \leq c_i(t,\omega^i) \mid \omega^{i-1} \Big\} \geq \alpha_i^1(\omega^{i-1}), \\ j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

$$P_2 \Big\{ y_i((t,\omega^i) \mid \omega^{i-1}) = y_i((t-1,\omega^i) \mid \omega^{i-1}) + S_i((t,\omega^i) \mid \omega^{i-1}) u_i(t) +$$

$$+ d_i((t,\omega^i) \mid \omega^{i-1}) \Big\} \geq \alpha_i^2(\omega^{i-1}),$$

$$y_i(t,\omega^i) \geq y_i(t-1,\omega^i), y_i(1,\omega^i) > 0,$$

$$u_i(t) \geq 0, S_i(t,\omega^i) \geq 0, c_i(t,\omega^i) > 0,$$

$$\omega^i \in \Omega_i = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{i} \Omega_k, i = \overline{1,n}, t \in [1,T].$$

Для полной формализации задачи MSP необходимо задать вид зависимости решений задачи i-го этапа $u_i(t)$ от случайных параметров [12]. Мы будем предполагать, что $u_i(t) = u_i(t,\omega^{i-1})$ для $i = \overline{1,\infty}$, т.е. рассматривать задачу в априорных решающих правилах. Покажем, что задача в апостериорных решающих правилах может быть сведена к задаче MSP.

Действительно, пусть $u_j(t) = u_j(t,\omega^j)$.

Рассмотрим задачу

$$(MSP')\begin{cases} F(y(t,\omega^{i-1})) = F(y_1(t,\omega^{i-1}), \ldots, y_n(t,\omega^{i-1})) \to \inf, i \neq j \\ P_1 \Big\{ \sum\limits_{j=1}^{i} A'_{ij}(\omega^{j-1}) u_j(t) \leq c_i(t,\omega^i) \mid \omega^{i-1} \Big\} \geq \alpha_i^1(\omega^{i-1}), \\ i = \overline{1,\infty}, \end{cases}$$

$$P_2 \Big\{ y_i((t,\omega^i) \mid \omega^{i-1}) = y_i((t-1,\omega^i) \mid \omega^{i-1}) + S_i((t,\omega^i) \mid \omega^{i-1}) u_i(t) +$$

$$+d_i((t,\omega^i) \mid \omega^{i-1})\Big\} \geq \alpha_i^2(\omega^{i-1}),$$

$$y_i(t,\omega^i) \geq y_i(t-1,\omega^i), y_i(1,\omega^i) > 0,$$

$$u_i(t) \geq 0, S_i(t,\omega^i) \geq 0, c_i(t,\omega^i) > 0,$$

$$\omega^i \in \Omega_i = \mathop{\times}_{k=1}^{\infty} \Omega_k, i = \overline{1,\infty}, t \in [1,T],$$

где

$$u_i(t) = \begin{cases} u_{i-1}(t,\omega^{i-1}) \text{ при } i \geq 2, \\ u_1(t,\omega^0) \text{ при } i = 1, \end{cases}$$

$$\overline{y_i'}(\omega^{i-1}) = \begin{cases} \overline{y'}_{i-1}(\omega^{i-1}) \text{ при } i \geq 2, \\ 0 \text{ при } i = 1, \end{cases}$$

$$A'_{ij}(\omega^{j-1}) = \begin{cases} A_{ij}(\omega^{j-2}) \text{ при } j \geq 2, \\ 0 \text{ при } j = 1, \end{cases}$$

а $u_1(t,\omega^0)-$ некоторая числовая константа. В этих условиях решение задачи MSP$'$, начиная с $j = 2$ будет давать решение исходной задачи в апостериорных решающих правилах [25].

Для модели принятия решения распределения ресурсов с принципом выбора равномерного развития направлений (объектов) задача i-го этапа может быть записана в виде

$$(MSP')\begin{cases} \Big\{\big(\frac{\overline{y_i}(\omega^{i-1})-y_i(t,\omega^{i-1})}{\overline{y_i}(\omega^{i-1})}\big) - \big(\frac{\overline{y_j}(\omega^{j-1})-y_j(t,\omega^{j-1})}{\overline{y_j}(\omega^{i-1})}\big)\Big\} \to \inf, \\ i \neq j \\ P_1\Big\{\sum\limits_{j=1}^{i} A'_{ij}(\omega^{j-1})u_j(t) \leq c_i(t,\omega^i) \mid \omega^{i-1}\Big\} \geq \alpha_i^1(\omega^{i-1}), \\ i = \overline{1,\infty}, \end{cases}$$

$$P_2\Big\{y_i((t,\omega^i) \mid \omega^{i-1}) = y_i((t-1,\omega^i) \mid \omega^{i-1}) + S_i((t,\omega^i) \mid \omega^{i-1})u_i(t) +$$

$$+d_i((t,\omega^i) \mid \omega^{i-1})\Big\} \geq \alpha_i^2(\omega^{i-1}),$$

$$y_i(t,\omega^i) \geq y_i(t-1,\omega^i), y_i(1,\omega^i) > 0,$$

$$u_i(t) \geq 0, S_i(t,\omega^i) \geq 0, c_i(t,\omega^i) > 0,$$

$$\omega^i \in \Omega_i = \mathop{\times}_{k=1}^{\infty} \Omega_k, i = \overline{1,\infty}, t \in [1,T].$$

Будем далее обозначать через

$$u^{\infty} = (u_1(t,\omega^0, u_2(t,\omega^1,\ldots,u_i(t,\omega^{i-1},\ldots)$$

бесконечную последовательность измеримых вектор-функций.

В качестве функционала F задачи MSP будем рассматривать формы вида

(MSP$-$M)

$MF(y(t,\omega^{i-1})) = MF(y_1(t,\omega^{i-1}), y_2(t,\omega^{i-1}), ..., y_n(t,\omega^{i-1}))$—M-задача.

(MSP$-$P)

$P\Big\{(F(y(t,\omega^{i-1})) = F(y_1(t,\omega^{i-1}), .., y_n(t,\omega^{i-1})) \geq k\Big\}$— P-задача.

Для модели принятия решения распределения ресурсов с принципом выбора равномерного развития направлений (объектов) целевые функционалы для M и P задач будут иметь вид

(MSP$-$M) $M\Big(\big(\frac{\overline{y_i}(\omega^i) - y_i(t,\omega^{i-1})}{\overline{y_i}(\omega^i)}\big) - \big(\frac{\overline{y_j}(\omega^j) - y_j(t,\omega^{j-1})}{\overline{y_j}(\omega^j)}\big)\Big)$ — M-задача.

(MSP$-$P) $P\Big\{\Big(\big(\frac{\overline{y_i}(\omega^i) - y_i(t,\omega^{i-1})}{\overline{y_i}(\omega^i)}\big) - \big(\frac{\overline{y_j}(\omega^j) - y_j(t,\omega^{j-1})}{\overline{y_j}(\omega^j)}\big)\Big) \geq k\Big\}$ — P-задача.

Для того, чтобы задача MSP была совместна, необходимо, чтобы для любого i множество

$$K_i(\omega^{i-1}, u_i^{i-1}(t)) = \Big\{u_i(t) \geq 0 \mid \exists u_{ik}(t) \geq 0, k = \overline{1,\infty},$$

$$P_{\omega_i}\Big[\sum_{j=1}^{i} A_{ij} u_j(t) \leq c_i(t,\omega^i) \mid \omega^{i-1}\Big] \geq \alpha_i(\omega^{i-1}), \ldots,$$

$$P_{\omega_{i+k}}\Big[\sum_{j=1}^{i} A_{i+k,j} u_j(t) + \sum_{j=i+1}^{i+k} A_{i+k,j} u_j(t) \leq c_{i+k}(t,\omega^{i+k}) \mid \omega^{i+k-1}\Big] \geq$$

$$\geq \alpha_{i+k}(\omega^{i+k-1}), \forall k = \overline{1,\infty}, \forall \omega_{i+1}, \ldots, \omega_n, \ldots\Big\}$$

было непусто при любых фиксированных ω^{i-1} и $u_i^{i-1}(t)$ (индуцированные ограничения). Если множество $K_1 \neq 0$, то и $K_i \neq 0$ для любого $i = \overline{1,\infty}$ [96].

Кроме этого, потребуем, чтобы функционал F был ограничен сверху [66].

Введем множества K^M и K^P

$$K^M = \Big\{ u^\infty = (u_1(t), \ldots, u_i(t), \ldots) \mid u_i(t) \geq 0, \forall i,$$

$$\int\limits_{\Omega^\infty} F(y_1(t,\omega^{i-1}), y_2(t,\omega^{i-1}), \ldots, y_n(t,\omega^{i-1})\, dp \text{ сходится} \Big\},$$

$$K^P = \Big\{ u^\infty = (u_1(t), \ldots, u_i(t), \ldots) \mid u_i(t) \geq 0, \forall i,$$

$$F(y_1(t,\omega^{i-1}), y_2(t,\omega^{i-1}), \ldots, y_n(t,\omega^{i-1})) \text{ сходится при } \forall \omega^\infty \in \Omega^\infty \Big\}. \tag{4.13.1}$$

В этом случае множеством планов задачи MSP-M будет множество $K_M = K_1 \cap K^M$, множеством планов задачи MSP-P — множество $K_P = K_1 \cup K^P$.

Обозначим через $\overline{K}^P$ множество

$$\overline{K}^P = \Big\{ u^\infty \mid u_i(t) \geq 0, \forall i, \text{ сходится равномерно по } \omega^\infty \Big\}. \quad (4.13.1)$$

Можно сказать, что $K^P \subset \overline{K}^P$. Из теоремы о почленном интегрировании [57] следует, что $\overline{K}^P \subset K^M$.

Таким образом, ограничения задачи MSP-P более сильные, чем у задачи MSP-M. Справедливо следующее утверждение

Лемма 4.13.1. $K_P \subset K_M$.

Пусть $K \equiv K_P$. Рассмотрим вопрос о представимости задачи MSP задачей

$$(N - MSP') \left\{ \begin{array}{l} F(y_1(t,\omega^i), y_2(t,\omega^i), \ldots, y_n(t,\omega^i)) \to \inf, \\ P_1 \Big\{ \sum\limits_{j=1}^{i} A_i'(\omega^{j-1}) u_j(t) \leq c_i(t,\omega^i) \mid \omega^{i-1} \Big\} \geq \alpha_i^1(\omega^{i-1}), \end{array} \right.$$

$$P_2\Big\{y_i((t,\omega^i)\mid\omega^{i-1})=y_i((t-1,\omega^i)\mid\omega^{i-1})+S_i((t,\omega^i)\mid\omega^{i-1})u_i(t)+$$

$$+d_i((t,\omega^i)\mid\omega^{i-1})\Big\}\geq\alpha_i^2(\omega^{i-1}),$$

$$y_i(t,\omega^i)\geq y_i(t-1,\omega^i), y_i(1,\omega^i)>0,$$

$$u_i(t)\geq 0, S_i(t,\omega^i)\geq 0, c_i(t,\omega^i)>0,$$

$$\omega^i\in\Omega_i=\mathop{\times}_{k=1}^{i}\Omega_k, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}, t\in[1,T].$$

Определение 4.13.1. *Будем называть задачу N-MSP ε-представлением задачи MSP, если решение задачи MSP при дополнительных ограничениях*

$$u_1(t)=u_1(t,\omega^0),$$

$$u_2(t)=u_2(t,\omega^1),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_n(t)=u_n(t,\omega^{n-1}),$$

обозначенное через $u^\infty(t)=(u_1(t),u_2(t),\dots u_n,u_{n+1},\dots)$ таково, что

$$|F(u^\infty(t))-F(\overline{u}^\infty(t))|<\varepsilon,$$

где $u^n(t)=(u_1(t),u_2(t),\dots u_n(t))-$ решение задачи N-MSP, а $\overline{u}^\infty(t)-$ решение исходной задачи MSP.

Если (4.13.1) сходится, то для любого ε и любого ω^∞ существует $N(\varepsilon,\omega^\infty)$ такое, что

$$\Big\|F(y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t))\Big\|<\varepsilon.$$

Если (4.13.1) сходится равномерно по ω^∞, то N не зависит от ω^∞ $(N=N(\varepsilon))$ и имеет место теорема:

Теорема 4.13.1. *Если $F(y_1(t,\omega^{i-1},y_2(t,\omega^{i-1}),\dots,y_n(t,\omega^{i-1}))$, $i=\overline{1,n}$ сходится равномерно по ω^∞ для $u_i(t)\in K$, то задача MSP* *на множестве K ε-представима n-этапной задачей N-MSP, где $N = N(\varepsilon)$ для $\forall\varepsilon$.*

Иначе говоря, смысл теоремы 4.13.1 состоит в том, что для любого ε существует такое число N, что решение задачи N-MSP, подставленное в задачу MSP, будет давать не более, чем ε - отклонение значения функционала от оптимального.

4.14 Существование полубесконечномерного эквивалента для модели MSP-M

Рассмотрим теперь полубесконечномерный эквивалент задачи i-го этапа модели MSP-M.

Обозначим функционал задачи MSP-M через

$$\varphi_0(u^\infty(t)) = M_{\omega^\infty}\Big\{F(y_1(t,\omega^{i-1}, y_2(t,\omega^{i-1}),\dots,y_n(t,\omega^{i-1}))\Big\}, i=\overline{1,n},$$

функционал задачи i-го этапа MSP-M-i через

$$\varphi_0(u_i(t);\theta_i=\overline{\overline{\theta}}_i)=M_{\omega^\infty}\Big(F(y_1(t,\omega^i, y_2(t,\omega^i),...,y_n(t,\omega^i))\,|\,\omega^{i-1}=\overline{\overline{\omega^{i-1}}};$$
$$u^{i-1}(t)=\overline{\overline{u^{i-1}}}(t); u^{i\infty}_{i+1}(t)=\overline{\overline{u^\infty_{i-1}}}(t)\Big),$$

где

$$u_k^\infty(t)=(u_k(t),\dots,u_n(t),u_{n+1}(t),\dots),\theta_i=(\omega^{i-1};u^{i-1}(t),u^\infty_{i+1}(t)),$$
$$\overline{\overline{\theta}}_i=(\overline{\overline{\omega^{i-1}}};\overline{\overline{u^{i-1}}}(t)\overline{\overline{u^\infty_{i+1}}}(t)).$$

Условия задачи i-го этапа имеют вид:

$$P_1\Big(A_{ij}u_j(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})\le c_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}},\omega_i)-\sum_{j=1}^{i-1}A_{ij}\overline{\overline{u_j}}(t)\Big)\ge$$
$$\ge\alpha_i^1(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}), \tag{4.14.1}$$
$$P_2\Big\{y_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})=y_i(t-1,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})+S_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})u_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})+$$
$$+d_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})\Big\}\ge\alpha_i^2(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}),$$

$$y_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq y_i(t-1, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}), y_i(1, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) > 0,$$

$$u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq 0, S_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq 0, c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \omega_i) > 0, t \in [1, T].$$

Пусть «$\vartheta \in \Theta_i \subset \Omega_i$.

Тогда рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \inf\limits_{u_i(t)} \varphi_i(u_i(t); \theta_i), \\ A_{ij} u_j(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \leq c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \vartheta_i) - \sum\limits_{j=1}^{i-1} A_{ij} \overline{\overline{u_j}}, \end{cases} \tag{4.14.2}$$

$$y_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) = y_i(t-1, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) + S_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) + d_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}),$$

$$y_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq y_i(t-1, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}), y_i(1, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) > 0,$$

$$u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq 0, S_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq 0, c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \vartheta_i) > 0, t \in [1, T],$$

$$\theta_i = (\overline{\overline{\omega^{i-1}}}; \overline{\overline{u^{i-1}}}(t); \overline{\overline{u_{i+1}^{\infty}}}(t)),$$

где знак $\overline{\overline{(\ )}}$ означает фиксированные параметры.

Пусть $Z_i(\alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))$ — множество подмножеств Ω_i, таких, что $\Theta_i \in Z_i(\alpha_i)$ равносильно $\Omega_i = \Theta_i \cup (\Omega_i \setminus \Theta_i)$, и $P_i(\Theta_i) = \alpha_i$, где P_i — введенная вероятностная мера на Ω_i.

Рассмотрим теперь задачу

$$\inf_{\Theta_i \in Z_i(\alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))} \varphi_i(u_i(t, \Theta_i); \theta_i), \tag{4.14.3}$$

где $u_i(t, \Theta_i)$– решение задачи (4.14.2).

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 4.14.1.

а) Если существует Θ_i — решение задачи принятия решений (4.14.3), то $u_i(t, \Theta_i)$ — решение задачи i-го этапа MSP-M-i;

б) Если существует $\widetilde{u}_i(t)$-решение задачи принятия решений i-го этапа, то выполняется

$$\varphi_i(\widetilde{u}_i(t, \theta_i) \geq \varphi_i(u_i(t, \theta_i)$$

при любом $\Theta_i \in Z_i(\alpha_i)$ и существует Θ_i — решение (4.14.2), причем

$$\varphi_i(\widetilde{u}_i(t,\theta_i) = \varphi_i(u_i(t,\theta_i).$$

Доказательство.

а) Доказательство от противного.

Пусть существует точка $u_i^*(t) \neq u_i(t,\theta_i)$, такая, что

$$P_i^1\Big\{A_{ij}u_j(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \leq c_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}},\omega_i) - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}\overline{\overline{u_j}}(t)\Big\} \geq$$

$$\geq \alpha_i^1(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}), \tag{4.14.4}$$

$$P_i^2\Big\{y_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) = y_i(t-1,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) + S_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})u_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) +$$

$$+d_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})\Big\} \geq \alpha_i^2(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}),$$

$$y_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq y_i(t-1,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}), y_i(1,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) > 0,$$

$$u_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq 0, S_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq 0, c_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}},\omega_i) > 0, t \in [1,T],$$

$$\varphi_i(u_i^*(t,\theta_i)) > \varphi_i(u_i(t,\Theta_i)). \tag{4.14.5}$$

Поскольку выполняется (4.14.4), то существует множество Θ^* такое, что для любого $\vartheta \in \Theta^*$

$$A_{ij}u_j(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \leq c_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}},\vartheta) - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}\overline{\overline{u_j}}(t),$$

$$y_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) = y_i(t-1,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) + S_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})u_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) + d_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}),$$

и мера $P_i(\Theta^*) = \alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}})$.

Из последнего получаем, что $u_i^*(t)$ — допустимый план задачи (4.14.3) при $\Theta = \Theta^* \in Z_i(\alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))$, следовательно,

$$\varphi_i(u_i^*(t,\theta_i)) \leq \varphi_i(u_i(t,\Theta_i)).$$

Из $P_i(\Theta^*) = \alpha_i$ следует, что

$$\varphi_i(u_i(t,\Theta_i)) \leq \inf_{\Theta_i \in Z_i(\alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))} \varphi_i(u_i(t,\Theta_i)) = \varphi_i(u_i(t,\Theta_i)).$$

Таким образом, получаем:

$$\varphi_i(u_i^*, \theta_i) \leq \varphi_i(u_i(t,\Theta_i), \theta_i),$$

что противоречит (4.14.4).

Следовательно, $u_i(t,\Theta_i)$ — решение задачи (4.14.3), такое, что

$$\varphi(u_i(t,\Theta_i)) = \varphi(\widetilde{u}_i(t)).$$

б) Допустим существование множества $\Theta^* \in Z_i(\alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))$, т.е.

$$\Theta^* \subseteq \Omega_i; P(\Theta^*) = \alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}).$$

Если предположить при этом

$$\varphi(\widetilde{u}_i(t)) < \varphi_i(u_i(t,\Theta^*)),$$

тогда $u_i^*(t,\Theta^*)$ по определению будет являться допустимым планом задачи MSP-M-i, улучшающим решение $\widetilde{u}_i(t)$, что противоречит условию теоремы.

Следовательно, при любом $\Theta \in Z_i(\alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))$.

$$\varphi(\widetilde{u}_i(t), \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) < \varphi_i(u_i(t,\Theta)). \tag{4.14.6}$$

Рассмотрим теперь множество Θ_i, такое, что для любого $\vartheta \in \Theta_i$ выполняется

$$A_{ij}\widetilde{u}_j(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \vartheta) \leq c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \vartheta) - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}\overline{\overline{u_j}}(t),$$

$$y_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) = y_i(t-1, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) + S_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}})u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) + d_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}),$$

$$y_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq y_i(t-1, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}), y_i(1, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) > 0,$$

$$u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq 0, S_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq 0, c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \omega_i) > 0, t \in [1,T].$$

Это множество существует в силу существования решения задачи (4.14.1), т.к. при этом

$$P_i^1\Big(A_{ij}\widetilde{u}_j(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \le c_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}},\omega_i) - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}\overline{\overline{u_j}}(t)\Big) \ge \alpha_i^1(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}),$$

$$P_i^2\Big\{y_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) = y_i(t-1,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) + S_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})u_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) +$$

$$+ d_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})\Big\} \ge \alpha_i^2(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}).$$

Тогда $\widetilde{u}_j(t)$ — допустимый план задачи (4.14.2) при $\vartheta_i \in \Theta_i$, и

$$\varphi(\widetilde{c}_i(t),\theta_i)) \le \varphi(u_i(t,\Theta_i)).$$

Но, так как $\Theta \in Z_i(\alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))$, то по (4.14.6) $\varphi(\widetilde{u}_i(t),\theta_i)) \ge \varphi(u_i(t,\Theta_i))$, и, следовательно, $\varphi(\widetilde{c}_i(t),\theta_i)) \ge \varphi(u_i(t,\Theta_i))$.

Теорема доказана.

Теперь мы можем записать полубесконечномерный эквивалент задачи MSP-M

$$(SIP-M)\begin{cases} \inf\limits_{\Theta^\infty}\min\limits_{u^\infty(t)} M_{\omega^\infty}\Big\{F(y_1(t,\omega^{i-1}), y_2(t,\omega^{i-1}),\ldots,y_n(t,\omega^{i-1}))\Big\}, \\ A_{ij}u_j(t,\vartheta^{i-1}) \le c_i(t,\vartheta^{i-1},\vartheta_i) - \sum\limits_{j=1}^{i-1} A_{ij}u_j(t,\vartheta^{j-1}), \\ y_i(t,\vartheta^{i-1}) = y_i(t-1,\vartheta^{i-1}) + S_i(t,\vartheta^{i-1})u_i(t,\vartheta^{i-1}) + d_i(t,\vartheta^{i-1}), \\ y_i(t,\vartheta^{i-1}) \ge y_i(t-1,\vartheta^{i-1}), y_i(1,\vartheta^{i-1}) > 0, \\ u_i(t,\vartheta^{i-1}) \ge 0, S_i(t,\vartheta^{i-1}) \ge 0, \\ c_i(t,\vartheta^{i-1},\vartheta_i) > 0, t \in [1,T], \\ \vartheta_i \in \Theta_i, \\ \vartheta^i \in \Theta^i = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{i} \Theta_k, \\ \Theta^\infty = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{\infty} \Theta_k, \\ \Theta \in Z_i(\alpha_i(\vartheta^{i=1})). \end{cases}$$

Для модели принятия решения распределения ресурсов с принципом выбора равномерного развития направлений (объектов) детерминированный полубесконечномерный эквивалент при данной постановке будет иметь вид

$$\begin{cases} \inf\limits_{\Theta^\infty} \min\limits_{u^\infty(t)} M_{\omega^\infty}\Big(\big(\frac{\overline{y_i}(\omega^i) - y_i(t,\omega^{i-1})}{\overline{y_i}(\omega^i)}\big) - \big(\frac{\overline{y_j}(\omega^j) - y_j(t,\omega^{j-1})}{\overline{y}_j}(\omega^j)\big)\Big), \\ A_{ij}u_j(t,\vartheta^{i-1}) \le c_i(t,\vartheta^{i-1},\vartheta_i) - \sum\limits_{j=1}^{i-1} A_{ij}u_j(t,\vartheta^{j-1}), \\ y_i(t,\vartheta^{i-1}) = y_i(t-1,\vartheta^{i-1}) + S_i(t,\vartheta^{i-1})u_i(t,\vartheta^{i-1}) + d_i(t,\vartheta^{i-1}), \\ y_i(t,\vartheta^{i-1}) \ge y_i(t-1,\vartheta^{i-1}), y_i(1,\vartheta^{i-1}) > 0, \\ u_i(t,\vartheta^{i-1}) \ge 0, c_i(t,\vartheta^{i-1},\vartheta_i) > 0, \\ S_i(t,\vartheta^{i-1}) \ge 0, t \in [1,T], \\ \vartheta_i \in \Theta_i, \\ \vartheta^i \in \Theta^i = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{i} \Theta_k, \\ \Theta^\infty = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{\infty} \Theta_k, \\ \Theta \in Z_i(\alpha_i(\vartheta^{i=1})). \end{cases}$$

Теорема 4.14.2. *Задача SIP-M является полубесконечномерным эквивалентом задачи MSP-M в смысле выполнения условий а) и б) теоремы 4.14.1.*

`Доказательство.` Действительно, пусть существует $\widetilde{u}_i(t) \ne u(t,\Theta^\infty)$, такое, что для любого i выполняются

$$A_{ij}u_j(t,\omega^{i-1}) \le c_i(t,\omega^{i-1},\omega_i) - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}u_j(t,\omega^{j-1}),$$

$$y_i(t,\omega^{i-1}) = y_i(t-1,\omega^{i-1}) + S_i(t,\omega^{i-1})u_i(t,\omega^{i-1}) + d_i(t,\omega^{i-1})$$

и

$$\Big\{F(\widetilde{y}_1(t,\omega^{i-1}), \widetilde{y}_2(t,\omega^{i-1}), \ldots, \widetilde{y}_n(t,\omega^{i-1}))\Big\} >$$
$$> \Big\{F(y_1(t,\omega^{i-1}), y_2(t,\omega^{i-1}), \ldots, y_n(t,\omega^{i-1}))\Big\},$$

где $\Theta^\infty = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{\infty} \Theta_k$.

Тогда существует такое $\widetilde{u}_i(t)$, что $\widetilde{u}_i \ne u(t,\Theta_i)$.

Из $P_{\omega^\infty} \neq 0$ и (4.14.4) следует, что для любого i справедливо неравенство $P(\Theta_i) \neq 0$.

Зафиксировав ϑ_k для $k \neq i$ внутри множества Θ_k, мы получаем одноэтапные задачи принятия решений в условиях неполной информации и полубесконечномерными задачами принятия решений с отличающимися решениями, что противоречит условиям теоремы 4.14.1.

(Условие б) доказывается по той же схеме.)

Что и требовалось доказать.

`Теорема доказана.`

Рассмотрим теперь MSP-M модель принятия решений при условии, что решение ищется в апостериорных решающих правилах, т.е. $u_i(t) = u_i(t, \omega^i)$ или $u_i(t) : \Omega^i \to R_{m_i}$.

При фиксированном $\overline{\overline{\omega^{i-1}}} \in \Omega^{i-1}$ мы получаем, что

$$u_i(t) \in F(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \in F_{m_i},$$

где F_{m_i} — семейство функционалов

$$f : \Omega^i \to R_{m_i}.$$

Для условий существования решения необходима по меньшей мере измеримость и существенная ограниченность функций $u_i(t)$ и $c(t)$.

В этих условиях для задачи i-го этапа $u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \omega_i)$ является точками в банаховом пространстве, и все скалярные произведения и отношения порядка, использованные при доказательстве теоремы 4.14.1, определены корректно.

4.15 Существование полубесконечномерного эквивалента для модели MSP-P

Рассмотрим теперь полубесконечномерный эквивалент задачи i-го этапа для модели MSP-P.

Функционал задачи MSP-P запишем следующим образом

$$\varphi_0(u^\infty(t)) = P_{\omega^\infty}\Big(\Big\{F(y_1(t,\omega^{i-1}), y_2(t,\omega^{i-1}),\ldots,y_n(t,\omega^{i-1}))\Big\} \geq k\Big).$$

Запишем функционал задачи i-го этапа MSP-P-i:

$$\varphi_i(u_i(t),\theta_i=\theta_i)=P_{\omega^\infty}\Big(\Big\{F(y_1(t,\omega^{i-1}), y_2(t,\omega^{i-1}),\ldots,y_n(t,\omega^{i-1}))\Big\} \geq$$

$$\geq k \mid \omega^{i-1} = \overline{\overline{\omega^{i-1}}}; u^{i-1}(t) = \overline{\overline{u^{i-1}}}(t); u^\infty_{i+1}(t) = \overline{\overline{u^\infty_{i+1}}}(t)\Big) \qquad (4.15.1)$$

при условиях (4.14.1).

Пусть $\vartheta_i \in \Theta_i \subseteq \Omega_i$.

Рассмотрим функционал (4.14.4) при ограничениях

$$u_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq 0. \qquad (4.15.2)$$

Тогда задаче (4.15.1)-(4.15.2) можно поставить в соответствие задачу следующего вида:

$$\min_{u^\infty(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})} \inf_{\Theta_i\subseteq\Omega_i} P_{\omega_i}(\Theta_i), \qquad (4.15.3)$$

$$\psi_i(t,\vartheta_i,u_i(t),\theta_i) = \Big\{\big\{F(y_1(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}), y_2(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}),\ldots,y_n(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))\big\}+$$

$$+\big\{F(y_1(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}},\vartheta_i), y_2(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}},\vartheta_i),\ldots,y_n(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}),\vartheta_i)\big\}+$$

$$+\big\{F(y_1(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}},\vartheta_i,\overline{\overline{\omega^\infty_{i+1}}}), y_2(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}},\vartheta_i,\overline{\overline{\omega^\infty_{i+1}}}),\ldots,y_n(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}},\vartheta_i,\overline{\overline{\omega^\infty_{i+1}}})\big\}\geq k\Big\}, \qquad (4.15.4)$$

$$y_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) = y_i(t-1,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})+S_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})u_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})+d_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}), \qquad (4.15.5)$$

$$y_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq y_i(t-1,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}), y_i(1,\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) > 0,$$

$$\vartheta_i \in \Theta_i, S_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq 0, u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq 0, i = \overline{1,n}, t \in [1, T]. \quad (4.15.6)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.15.1. *Задача (4.15.3)-(14.15.6) является полубесконечномерным эквивалентом многоэтапной задачи принятия решений (4.15.1)-(4.15.2).*

Доказательство. Будем производить доказательство методом от противного.

Покажем, что любое решение (4.15.1)-(4.15.2) является решением (4.15.3)-(14.15.6).

Пусть $\widetilde{u}_i(t)$ — решение задачи (4.15.1)-(4.15.2). Пусть существует $u_i(t)$ — решение задачи (4.15.3)-(14.15.6) и $u_i(t) \neq \widetilde{u}_i(t)$.

Тогда существует множество Θ_i, такое, что $\psi_i(\vartheta_i, u_i(t), \theta_i) \geq k$ для любого $\vartheta_i \in \Theta_i$.

$\widetilde{u}_i(t)$ является допустимым планом задачи (4.15.3)-(14.15.6) при

$$\widetilde{\Theta}_i = \Big\{ \vartheta_i \mid \psi_i(t, \vartheta_i, \widetilde{u}_i(t), \theta_i) \geq k \Big\}.$$

Поскольку $u_i(t), \Theta_i$ — решение задачи (4.15.3)-(14.15.6), то

$$P_i(\Theta_i) \neq P_i(\widetilde{\Theta}_i),$$

следовательно,

$$P_i \Big\{ \psi_i(t, \omega_i, u_i(t), \theta_i) \geq k \Big\} \neq P_i \Big\{ \psi_i(t, \omega_i, \widetilde{u}_i(t), \theta_i) \geq k \Big\},$$

т.е. $\widetilde{u}_i(t)$ не является решением (4.15.1)-(4.15.2).

Покажем, что любое решение (4.15.3)-(14.15.6) является решением (4.15.1)-(4.15.2).

Пусть $\widehat{u}_i(t)$ — решение (4.15.3)-(14.15.6), и существует $\widetilde{u}_i(t) \neq \widehat{u}_i(t)$ такое, что

$$P_i \Big\{ \psi_i(t, \omega_i, \widetilde{u}_i(t), \widehat{\theta}_i) \geq k \Big\} \geq P_i \Big\{ \psi_i(t, \omega_i, \widehat{u}_i(t), \widehat{\theta}_i) \geq k \Big\}. \quad (4.15.7)$$

Тогда запишем множества

$$\widetilde{\Theta}_i = \Big\{\vartheta_i \mid \psi_i(t, \Theta_i, \widetilde{u}_i(t), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\};$$

$$\widehat{\Theta}_i = \Big\{\vartheta_i \mid \psi_i(t, \Theta_i, \widehat{u}_i(t), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\}.$$

Из (4.15.7) следует, что существует $u_i(t) = \widetilde{u}_i(t)$, такой, что

$$P_i(\widetilde{\Theta}_i) \geq \inf_{\Theta_i \subseteq \Omega_i} \Big\{P(\Theta_i) \mid \psi_i(t, \Theta_i, \widehat{u}_i(t), \Theta_i) \geq k; \vartheta_i \in \Theta_i\Big\} = P_i(\widehat{\Theta}_i),$$

т.е. $\widetilde{u}_i(t), \widehat{\Theta}_i$, улучшает план $\widehat{u}_i(t), \widehat{\Theta}_i$, задачи (4.15.3)-(14.15.6).

`Теорема доказана.`

Рассмотрим теперь задачу (4.14.1)-(4.15.1).

Задача (4.15.3)-(14.15.6) при условиях (4.14.1) записывается, как

$$\min_{u_i(t,\overline{\overline{\omega^{i-1}}})} \inf_{\Theta_i \subset \Omega_i} P_{\omega_i}(\Theta_i), \tag{4.15.8}$$

$$\psi_i(t, \vartheta_i, u_i(t), \widehat{\theta}_i) \geq k, \tag{4.15.9}$$

$$A_{ij} u_j(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \leq c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i) - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} \overline{\overline{u_j}}(t), \tag{4.15.10}$$

$$y_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i) = y_i(t-1, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i) + S_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i) u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) +$$
$$+ d_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i), \tag{4.15.11}$$

$$\vartheta_i \in \Theta_i, q_i \in Q_i \subset \Omega_i, \tag{4.15.12}$$

$$y_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i) \geq y_i(t-1, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i), y_i(1, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i) > 0, \tag{4.15.13}$$

$$u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq 0, S_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i) \geq 0, c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i) > 0, \tag{4.15.14}$$

$$i = \overline{1, n}, t \in [1, T].$$

Введем теперь $Z_i(\alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))$ — множество подмножеств Ω_i, таких, что

$$Z_i(\alpha_i) = \Big\{Q_i \backslash \Omega_i = Q_i \cup (\Omega_i \backslash Q_i); P_i(Q_i) = \alpha_i\Big\},$$

где $P_i(^*) = P_{\omega_i}(^*| \ \widehat{\theta}_i)$ — введенная условная вероятностная мера на Ω_i.

Тогда поставим задачу минимизации следующего вида

$$\inf_{Q_i \in Z_i(\alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))} \varphi_i(\widehat{u}_i(t, Q_i); \widehat{\theta}_i), \tag{4.15.15}$$

где $\varphi_i(\widehat{u}_i(t, Q_i); \widehat{\theta}_i)$ — решение задачи (4.15.3)-(14.15.6) при $q_i \in Q_i$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.15.2.

а) Если существует $\widehat{Q}_i$ — решение задачи (4.15.15), то $\widehat{u}_i(t, \widehat{Q}_i)$ является решением задачи i-го этапа MSP-P-i;

б) Если существует $\widetilde{u}_i(t)$ — решение задачи i-го этапа, то выполняется $\varphi_i(\widetilde{u}_i(t); \widehat{\theta}_i) \geq \varphi_i(\widehat{u}_i(t, Q_i); \widehat{\theta}_i)$— при любом $Q_i \in Z_i(\alpha_i)$ и существует Q_i решение (4.15.8)-(4.15.14), причем $\varphi_i(\widetilde{u}_i(t); \widehat{\theta}_i) =$ $= \varphi_i(\widehat{u}_i(t, \widehat{Q}_i); \widehat{\theta}_i)$.

`Доказательство.` Докажем первое утверждение теоремы методом от противного.

Пусть существует $u_i^*(t) \neq \widehat{u}_i(t, \widehat{Q}_i)$, такая, что

$$P_i^1\Big(A_{ij}u_j(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \leq c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \omega_i) - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}\overline{\overline{u_j}}(t)\Big) \geq \alpha_i^1(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}), \tag{4.15.16}$$

$$P_i^2\Big\{y_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) = y_i(t-1, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) + S_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}})u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) +$$

$$+ d_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \geq \alpha_i^2(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}),$$

$$P_i\Big\{\psi_i(t, \omega_i, u_i^*(t), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\} > P_i\Big\{\psi_i(t, \omega_i, \widehat{u}_i(t, \widehat{Q}_i), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\}. \tag{4.15.17}$$

Поскольку выполняется (4.15.16), то существует множество Q^* такое, что для любого $q \in Q^*$

$$A_{ij}u_j(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \leq c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i) - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}\overline{\overline{u_j}}(t),$$

$$y_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i) = y_i(t-1, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i) + S_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i)u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) +$$

$$+d_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i),$$

и мера $P_i(Q^*) = \alpha(\overline{\overline{\omega^{i-1}}})$.

Из последнего получаем, что $u_i^*(t)$ — допустимый план задачи (4.15.15) при $Q \equiv Q^* \in Z(\alpha(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))$, следовательно,

$$P_i\Big\{\psi_i(t, \omega_i, u_i^*(t), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\} \leq P_i\Big\{\psi_i(t, \omega_i, \widehat{u}_i(t, Q^*), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\}.$$

Из $P_i(Q^*) = \alpha_i$, следует, что

$$P_i\Big\{\psi_i(t, \omega_i, \widehat{u}_i(t, Q^*), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\} \leq$$

$$\leq \inf_{Q_i \in Z_i(\alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))} P_i\Big\{\psi_i(t, \omega_i, \widehat{u}_i(t, Q_i), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\} =$$

$$= P_i\Big\{\psi_i(t, \omega_i, \widehat{u}_i(t, \widehat{Q}_i), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\}.$$

Таким образом, получаем:

$$P_i\Big\{\psi_i(t, \omega_i, u_i^*(t), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\} \leq P_i\Big\{\psi_i(t, \omega_i, \widehat{u}_i(t, \widehat{Q}_i), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\},$$

что противоречит (4.15.17).

Следовательно, $\widehat{u}_i(t, \widehat{Q}_i))$ — решение задачи (4.15.15), такое, что

$$P_i\Big\{\psi_i(t, \omega_i, \widehat{u}_i(t, Q^*), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\} \leq P_i\Big\{\psi_i(t, \omega_i, \widetilde{u}_i(t), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\}.$$

Докажем утверждение б) нашей теоремы.

Допустим существование множества $Q^* \in Z_i(\alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))$, т.е. пусть выполняются условия

$$Q^* \subseteq \Omega_i, P_i(Q^*) = \alpha(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}).$$

Предположим, что при этом также справедливы неравенства

$$P_i\Big\{\psi_i(q_i, \widetilde{u}_i(t), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\} < P_i\Big\{\psi_i(q_i, \widehat{u}_i(t, Q^*), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\}.$$

Тогда $u_i(t, Q^*)$ — допустимый план задачи MSP-P-i (по определению), улучшающий решение $\widetilde{u}_i(t)$, что противоречит условию теоремы.

Следовательно, при любом $Q^* \in Z_i(\alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))$

$$P_i\Big\{\psi_i(q_i, \widehat{u}_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\} \geq P_i\Big\{\psi_i(q_i, \widehat{u}_i(t, Q), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\}. \tag{4.15.18}$$

Рассмотрим теперь множество $\widehat{Q}_i$, такое, что для любого $q \in \widehat{Q}_i$ выполняется

$$A_{ij}\widetilde{u}_j(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \leq c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i) - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}\overline{\overline{u_j}}(t),$$

$$y_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i) = y_i(t-1, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i) + S_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i)u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) +$$
$$+ d_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, q_i).$$

Это множество существует в силу существования решения задачи (4.14.1)-(4.15.1), т.к. при этом

$$P_i^1\Big(A_{ij}\widetilde{u}_j(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \leq c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \omega_i) - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}\overline{\overline{u_j}}(t)\Big) \geq \alpha_i^1(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}),$$

$$P_i^2\Big\{y_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) = y_i(t-1, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) + S_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}})u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) +$$
$$+ d_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}})\Big\}\alpha_i^1(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}).$$

Тогда $\widetilde{u}_i(t)$ — допустимый план задачи (4.15.8)-(4.15.14) при $q_i \in \widehat{Q}_i$, и

$$P_i\Big\{\psi_i(q_i, \widetilde{u}_i(t), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\} \leq P_i\Big\{\psi_i(q_i, \widehat{u}_i(t, \widehat{Q}_i), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\}.$$

Но т.к. $\widehat{Q}_i \in Z_i(\alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))$, то по (4.15.18)

$$P_i\Big\{\psi_i(q_i, \widetilde{u}_i(t), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\} \leq P_i\Big\{\psi_i(q_i, \widehat{u}_i(t, \widehat{Q}_i), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\},$$

и следовательно,

$$P_i\Big\{\psi_i(q_i, \widetilde{u}_i(t), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\} = P_i\Big\{\psi_i(q_i, \widehat{u}_i(t, \widehat{Q}_i), \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\}.$$

Теорема доказана.

Запишем полубесконечномерную задачу принятия решения

$$\min_{q^\infty} \min_{u_i^\infty(t)} \inf_{\Theta^\infty \subset \Omega^\infty} P_{\omega^\infty}(\Theta^\infty),$$

$$\left\{F\Big(y_1(t,\vartheta^{i-1}), y_2(t,\vartheta^{i-1}), \dots y_n(t,\vartheta^{i-1})\Big)\right\} \geq k,$$

$$A_{ij}u_j(t,q^{i-1}) \leq c_i(t,q^{i-1},q_i) - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}u_j(t,q^{i-1}),$$

$$u_i(t,q^{i-1}) \geq 0, y_i(t,\vartheta^{i-1}) > 0, c_i(t,q^{i-1},q_i) > 0, t \in [1,T],$$

$$\vartheta_i \in \Theta_i, \vartheta^i \in \Theta^i = \mathop{\times}_{k=1}^{i} \Theta_k, \Theta^\infty = \mathop{\times}_{k=1}^{\infty} \Theta_k,$$

$$\Theta_i \in \Omega_i,$$

$$q^i \in Q^i = \mathop{\times}_{k=1}^{i} Q_k, Q^\infty = \mathop{\times}_{k=1}^{\infty} Q_k, Q_i \in Z_i(\alpha_i(q^{i-1})).$$

Имеет место

Теорема 4.15.3. *Задача SIP-P является полубесконечномерным эквивалентом задачи MSP-P в смысле выполнения условий а) и б) теоремы 4.15.2.*

4.16 Единственность полубесконечномерного эквивалента для модели MSP-M

Рассмотрим теперь вопрос единственности полубесконечномерного эквивалента задачи i-го этапа MSP-M-i.

Докажем предварительно вспомогательное утверждение.

Лемма 4.16.1. *Пусть*

1) ω — непрерывная случайная величина, $\omega \in \Omega \subset R^n$, $u_i(t) \in U \subset R^m$.

2) Функция $\varphi(\omega, u_i(t))$ строго выпукла по ω, непрерывна по обоим аргументам и существенно ограничена на своей области определения.

3) На множестве $\Theta \subset \Omega$ $\varphi(\omega, u_0(t)) < 0$ для любого $\omega \in \Theta$ и некоторой точки $u_0(t) \in U$.

Тогда

$$\lim_{\rho\to+0} P\Big\{\omega \in \Theta \mid \varphi(\omega, u_0(t)) > -\rho\Big\} = P\Big\{\omega \in \Theta \mid \varphi(\omega, u_0(t)) = 0\Big\} = 0.$$

`Доказательство.` Первое равенство утверждения леммы следует непосредственно из непрерывности вероятностной меры P и того, что при $\rho_1 < \rho_2$.

$$P\Big\{\omega \in \Theta \mid \varphi(\omega, u_0(t)) > -\rho_1\Big\} \subseteq P\Big\{\omega \in \Theta \mid \varphi(\omega, u_0(t)) > -\rho_2\Big\}$$

и

$$\bigcap_{\rho>0} P\Big\{\omega \in \Theta \mid \varphi(\omega, u_0(t)) > -\rho\Big\} = P\Big\{\omega \in \Theta \mid \varphi(\omega, u_0(t)) = 0\Big\} = 0.$$

Докажем теперь, что

$$P\Big\{\omega \in \Theta \mid \varphi(\omega, u_0(t)) = 0\Big\} = P\Big\{\widetilde{\Theta}\Big\} = 0.$$

Действительно, пусть

$$P\Big\{\widetilde{\Theta}\Big\} > 0.$$

Тогда в силу того, что случайная величина ω непрерывна, существует множество $\widetilde{\Omega} \subset \Omega \subset R^m$ меры $\varphi(\omega, u_0(t)) = 0$, что противоречит строгой выпуклости функции φ.

`Лемма доказана.`

Следующая теорема дает условия единственности полубесконечномерного эквивалента задачи MSP-M-i.

Теорема 4.16.1. *Пусть*

1) Существует решение задачи MSP-M-i $\widetilde{u}_i(t)$.

2) ω_i — непрерывная случайная величина на множестве $\Omega_i \subset R^{n_i}$.

3) $u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \in U_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \subset R^{m_i}$.

4) Функция $c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \omega_i)$ *строго выпукла по* ω_i *непрерывна и ограничена на всей области определения.*

5) Точка $\widetilde{u}_i(t)$ *не является точкой локального максимума функции* $\varphi_i(u_i(t); \widehat{\theta}_i)$.

Тогда среди задач (4.14.1) для $\Theta_i \in Z_i(\alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))$ *существует единственный полубесконечномерный эквивалент задачи MSP-M-i с точностью до множества меры 0, т.е. если задачи (4.14.1) при* $\Theta = \Theta_i^1$ *и* $\Theta = \Theta_i^2$ *являются полубесконечномерными эквивалентами задачи MSP-M-i, то*

А) $P(\widehat{\Theta}_i^1 \backslash \widehat{\Theta}_i^2) = 0$;

Б) $P(\widehat{\Theta}_i^2 \backslash \widehat{\Theta}_i^1) = 0$.

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного.

Допустим, что $\exists\ \widehat{\Theta}_i^1$ при $\widehat{\Theta}_i^2$ такие, что задачи (4.14.2) при $\Theta = \widehat{\Theta}_i^1$ и $\Theta = \widehat{\Theta}_i^2$ (обозначим эти задачи через (4.14.2)-($\widehat{\Theta}_i^1$) и (4.14.2)-($\widehat{\Theta}_i^2$), соответственно) являются полубесконечномерными эквивалентами задачи MSP-M-i, и

$$P(\widehat{\Theta}_i^1 \cup \widehat{\Theta}_i^2) = \widehat{\alpha}_i > \alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}).$$

Тогда, по определению эквивалента $\widetilde{u}_i(t)$ будет являться решением задач (4.14.2)-($\widehat{\Theta}_i^1$) и (4.14.2)-($\widehat{\Theta}_i^2$).

При этом

$$A_{ij} u_j(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \leq c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \vartheta_i) - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} \overline{\overline{u}}_j(t),$$

при любом $\vartheta \in \widehat{\Theta}_i^1 \cup \widehat{\Theta}_i^2$.

Обозначим через

$$\eta_i(u_i(t)) = A_{ij}u_j(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) - c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \vartheta_i) + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}\overline{\overline{u}}_j(t).$$

Будем обозначать

$$p(\rho) = P\Big\{\vartheta \in \widehat{\Theta}_i^1 \cup \widehat{\Theta}_i^2 \mid \eta(\widetilde{u}_i(t)) > -\rho\Big\}$$

для $\rho > 0$.

По лемме 4.16.1 $\lim\limits_{\rho \to +0} p(\rho) = p(0) = 0$.

Следовательно, по разности $\Delta\widehat{\alpha}_i = \widehat{\alpha}_i - \alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}})$ можно найти такое $\rho_0 > 0$, что $p(\rho_0) < \Delta\widehat{\alpha}_i$.

Тогда

$$P\Big\{\vartheta \in \widehat{\Theta}_i^1 \cup \widehat{\Theta}_i^2 \mid \eta(\widetilde{u}_i(t)) \leq -\rho_0\Big\} = P\Big\{\vartheta \in \widehat{\Theta}_i^1 \cup \widehat{\Theta}_i^2 \mid \eta(\widetilde{u}_i(t)) \leq 0\Big\} -$$

$$-P\Big\{\vartheta \in \widehat{\Theta}_i^1 \cup \widehat{\Theta}_i^2 \mid \eta(\widetilde{u}_i(t)) \leq -\rho\Big\} = \widehat{\alpha}_i - p(\rho_0) \geq \widehat{\alpha}_i - \Delta\widehat{\alpha}_i = \alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}).$$

Таким образом, построено множество $\widehat{\Theta}_i^3$ меры $P(\widehat{\Theta}_i^3) \geq \alpha$, такое, что

$$A_{ij}u_j(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \leq c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \lambda\vartheta_i) - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}\overline{\overline{u}}_j(t) \leq -\rho_0$$

для любого $\vartheta_i \in \widehat{\Theta}_i^3$.

Пусть $\Delta u_i(t)$ принадлежит некоторой окрестности 0 в R^{m_i}. В силу непрерывности и ограниченности функции $c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \omega_i)$ функция $\eta(u_i(t))$ равномерно непрерывна и для $\varepsilon_i = -\rho_0/2$ существует $\delta_i > 0$ такое, что для любого $\vartheta_i \in \widehat{\Theta}_i^3$ и любого $\|\Delta u_i(t)\|$ выполнено $\eta(\widetilde{u}_i(t) + \Delta u_i(t)) \leq -\rho_0/2$.

Следовательно, по (4.15.16), для любого $\Delta u_i(t)$, меньшего по норме, чем δ_i $P\Big\{\vartheta \mid \eta_i(\widetilde{u}_i(t) + \Delta u_i(t)) \leq 0\Big\} \geq \alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}})$, т.е. план $\widetilde{u}_i(t) + \Delta u_i(t)$ является допустимым планом задачи MSP-M-i при любом $\|\Delta u_i(t)\|$.

По условию (4.15.1) для точки $\widetilde{u}_i(t)$ существует такое $\Delta u_i(t) \neq 0$, что для $\|\Delta u_i(t)\| \leq \widehat{\delta}_i$,

$$\varphi_i(\widetilde{u}_i(t), \widehat{\theta}_i) < \varphi_i(\widetilde{u}_i(t) + \Delta\widehat{u}_i(t), \widehat{\theta}_i).$$

Выберем $\|\Delta u_i(t)\| \leq \min(\widehat{\delta}_i, \delta_i)$. Тогда точка $\widetilde{u}_i(t) + \Delta\widehat{u}_i(t)$ является (по доказанному данной теоремы) допустимым планом для задачи MSP-M-i, а следовательно, $\widetilde{u}_i(t)$ — не является оптимальным планом MSP-M-i, что противоречит условию. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы.

`Теорема доказана.`

Теорема 4.16.2. *Пусть*

1) Существует решение задачи MSP-M-i $\widetilde{u}^{\infty}(t)$.

2) Для $\forall i$ ω_i *— непрерывная случайная величина на множестве* $\Omega_i \subset R^{n_i}$.

3) Для $\forall i$ $u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \in U_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \subset R^{m_i}$.

4) Для $\forall i$ *функции* $c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \omega_i)$ *строго выпуклы по* ω_i *непрерывны равномерно по* $\overline{\overline{\omega^{i-1}}}$ *и ограничены на всей области определения.*

5) Точка $\widetilde{u}^{\infty}(t)$ *не является точкой локального максимума функции* $\varphi_i(u^{\infty}(t))$.

Тогда среди задач SIP-M для семейства Θ^{∞} *существует единственный полубесконечномерный эквивалент задачи MSP-M с точностью до множества меры* 0.

Теорема 4.16.3. *Пусть*

1) Существует решение задачи (4.14.1)-(4.15.1) $\widetilde{u}_i(t)$.

2) ω_i *— непрерывная случайная величина на множестве* $\Omega_i \subset R^{n_i}$.

3) $u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \in U_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \subset R^{m_i}$.

4) Функция $c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \omega_i)$ *строго выпукла по* ω_i *непрерывна и огра-*

ничена на всей области определения.

5) Точка $\widetilde{u}^{\infty}(t)$ *не является точкой локального максимума функции*

$$P\Big\{\psi_i(\omega_i, u_i(t); \widehat{\theta}_i) \geq k\Big\}.$$

Тогда среди задач (4.14.8)-(4.15.14) для $Q_i \in Z_i(\alpha_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}))$ *существует единственный полубесконечномерный эквивалент задачи MSP-P-i с точностью до множества меры 0, т.е. если задачи (4.14.8)-(4.15.14) при* $Q = \widehat{Q}_i^1$ *и* $Q = \widehat{Q}_i^2$ *являются полубесконечномерными эквивалентами задачи MSP-M-i, то*

А)$P(\widehat{Q}_i^1 \backslash \widehat{Q}_i^2) = 0$*;*

Б)$P(\widehat{Q}_i^2 \backslash \widehat{Q}_i^1) = 0$.

Теорема 4.16.4. *Пусть*

1) Существует решение задачи MSP-P-i $\widetilde{u}^{\infty}(t)$.

2) Для $\forall i$ ω_i *— непрерывная случайная величина на множестве* $\Omega_i \subset R^{n_i}$.

3) Для $\forall i$ $u_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \in U_i(\overline{\overline{\omega^{i-1}}}) \subset R^{m_i}$.

4) Для $\forall i$ *функции* $c_i(t, \overline{\overline{\omega^{i-1}}}, \omega_i)$ *строго выпуклы по* ω_i *непрерывны равномерно по* $\overline{\overline{\omega^{i-1}}}$ *и ограничены на всей области определения.*

5) Точка $\widetilde{u}^{\infty}(t)$ *не является точкой локального максимума функции* $\varphi_i(u^{\infty}(t))$.

Тогда среди задач SIP-M для семейства Q^{∞} *существует единственный полубесконечномерный эквивалент задачи MSP-P с точностью до множества меры* 0.

Краткая библиография

Динамические вероятностные модели (в частности, многоэтапные задачи) занимают значительное место, среди моделей стохастического программирования. Формализация таких моделей и разработка соответствующих вычислительных процедур представляют значительные трудности; этим можно объяснить тот факт, что число содержательных работ этого направления стохастического программирования отностиельно невелико. Следует отметить работы А. Чарнса и М. Кирби [88], [90], [94], Айзнера, Каплана и Содена [122], Д. Б. Юдина [194], [195], [196], [197], [198], [199], Н. З. Шора, Д. Б. Юдина и Э. В. Цоя [200].

Для описания систем, в которых процессы перехода из одного случайного состояния в очередное представляются марковскими процессами, разрабатывается специальный раздел стохастического программирования — марковского программирования. Первые работы в этом направлении принадлежат П. Вулфу и Дж. Данцигу [444], А. Манну [281] и Ж. Михоку [287].

Классификация многоэтапных стохастических задач и качественный анализ задач с априорными и апостериорными решающими правилами сделана в работе Д. Б. Юдина [197]. Общий подход к построению решающих правил многоэтапных стохастических задач представлен в работе Ж. М. Лемари [264], где отмечается связь между задачами стохастического программирования и лексикографической оптимизации.

В многоэтапных стохастических задачах возникают специфические проблемы, связанные с изучением роли информации и памяти на отдельных этапах выбора решений. В работе К. Миясава [292] исследуются различные информационные структуры.

Конструктивные пути построения и анализа двойственной задачи для вычисления апостериорных решающих правил многоэтапных задач стохастического программирования намечены в работах А. Д. Юдина [198], [202].

Прикладные задачи управления научно-техническим прогрессом с использованием многоэтапных задач рассматривались Г. С. Поспеловым. Проблемы перспективного планирования [118], многостадийного проектирования, стохастического управления, управления воздушным движением [289], добычи, очистки и хранения нефти [71], [368] — эти и другие вопросы использовали аппарат многоэтапного стохастического программирования.

5 Игровой подход к задачам стохастического программирования

5.1 Игровая постановка задач стохастического программирования

В практических задачах стохастического программирования совместное распределение случайных параметров условий задачи не всегда удается полностью определить. Замена случайных параметров их средними значениями, если они известны, вычисление оптимальных планов полученных детерминированных задач не всегда оправданы, так как при усреднении параметров условий задачи может быть нарушена адекватность модели изучаемому явлению.

В таких случаях часто оказывается эффективной так называемая игровая постановка стохастической задачи. Субъект, принимающий решение и недостаточно осведомленный об обстановке, в которой ему приходится это делать, допускает наступление различных последствий в результате принятия каждого своего решения. На самом деле наступление тех или иных последствий зависит от некоторой неизвестной ему закономарности природы. Поэтому он может допустить, что истинная закономерность природы является для него наименее благоприятной. Это значит, что принимающий решение представляет себе дело так, как будто вместо объективной, но непознанной природы ему противостоит сознательный противник, стремящийся к ситуациям, наименее предпочтительным субъектом. В этом смысле к участникам конфликта можно причислить природу.

Таким образом, задачу стохастического программирования можно рассматривать как антагонистическую игру [188], [190], [446], в которой игроками являются: принимающий решение и природа. Функция платы определяется целевой функцией задачи и суммой штрафов за нарушение ограничений. Построение функции платы в том или ином виде отражает информацию, которой располагает управляющий. В игровой постановке функция платы определяет, будет ли задача стохастического программирования решаться в чистых или смешанных стратегиях; оптимальная стратегия управляющего определяет решение стохастической задачи. Игровой подход целесообразен для анализа задач стохастического программирования в условиях, когда совместное распределение случайных параметров задачи частично или полностью неизвестно.

Пусть задача стохастического программирования порождается следующей экстремальной задачей

$$\max(C, X). \tag{5.1.1}$$

$$AX \leq b, \tag{5.1.2}$$

$$X \geq 0, \tag{5.1.3}$$

где $A = (a_{ij}); b = (b_i); C = (c_j), X = (x_j), i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$.

Запись (5.1.1)-(5.1.3) вполне определенная при детерминированных значениях параметров условий задачи теряет определенность и требует дополнительных разъяснений, если элементы a_{ij} матрицы A, составляющие вектора ограничений b и компоненты c_j вектора коэффициентов линейной формы (или некоторые из них) — случайные величины. Для того, чтобы задача стохастического программирования была сформулирована, необходимо определить, что следует понимать под целевой функцией задачи, как следует истолковывать ограничения и в каких стратегиях (чистых или смешанных) следует вычислять решение задачи.

Пусть случайные величины — функции состояния природы $\omega \in \Omega$, где Ω — множество всевозможных состояний природы. Тогда стохастическая задача может быть, как это сделано в [190], рассмотрена как игра двух лиц с нулевой суммой в нормальной форме $G = (M, N, g)$. Первым игроком является принимающий решение, его стратегии — это векторы $X \geq 0$, принадлежащие соответствующим образом выбранному множеству $M \subset E_n^+$ (E_n^+ — неотрицательный ортант n-мерного евклидова пространства), второй игрок — природа, её стратегии — это наборы троек $(A(\omega), b(\omega), C(\omega))$. Множество Ω определяет множество N евклидова пространства размерности $(mn + m + n)$, соответствующее допустимой области изменения элементов $a_{ij}(\omega), b_i(\omega), c_j(\omega)$ условий задачи.

При каждом состоянии природы и выборе стратегии X первого игрока функция платы задается как сумма соответствующих значений линейной формы задачи и штрафа за нарушение ограничений

$$g[X, A(\omega), b(\omega), C(\omega)] = \sum_{j=1}^{n} c_j(\omega)x_j + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)\Big), \tag{5.1.4}$$

где $\varphi_i(Z), i = \overline{1, m}$ — непрерывные неубывающие функции, удовлетворяющие условию $\varphi_i(Z) = 0$, если $Z \leq 0$. На практике конкретный вид функций штрафа $\varphi_i(Z)$ определяется смысловым содержанием задачи. В терминах теории игр план исходной задачи интерпретируется как чистая стратегия первого игрока.

Если противники имеют конечное число чистых стратегий и существует такая пара чистых стратегий, для которой соответствующий ей элемент матрицы выигрышей является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке (т.е. существует седловая точка), то соответствующая чистая стратегия первого игрока будет решением исходной задачи.

В случае бесконечных игр, если противники имеют равномощные континууму множества чистых стратегий, а функция платы вогнуто-выпуклая и непрерывная, то игра имеет оптимальные чистые стратегии. Однако представление игры как игры на единичном квадрате не учитывает конкретных особенностей структуры множеств чистых стратегий и может привести к тому, что при этом многие свойства функции платы будут утрачены. При сохранении естественной структуры множеств стратегий существование оптимальной чистой стратегии не гарантируется, так как по [190] требуется, чтобы множество чистых стратегий первого игрока было подпространством некоторого линейного пространства в рассматриваемой задаче, пространство не является линейным, так как не выполняется одна из аксиом линейности (существование противоположного элемента).

Таким образом, рассмотренная выше игровая модель задачи стохастического программирования в подавляющем большинстве случаев не гарантирует существование решения исходной задачи в чистых стратегиях.

Существуют вполне осмысленные постановки экстремальных задач, например, задачи, связанные с повторяющимися ситуациями, о решении которых можно говорить только в том случае, если расширить область определения задачи и под допустимыми планами понимать не только детерминированные векторы, но и распределение векторов. Достижимый максимум при этом целевой функции может только увеличиться, а достижимый минимум — только уменьшиться.

При этом предполагается, что смешанные стратегии имеют смысл в содержательных терминах задачи.

Обозначим через S множество смешанных стратегий принимающего решение, т.е. множество распределений F_X вектора X, определенных на M, а через F — множество смешанных стратегий, т.е. множество совместных распределений F_{Abc} матрицы $A(\omega)$ и векторов $b(\omega)$ и $c(\omega)$, определенных на N.

В тех случаях, когда распределение части параметров известно, рассматриваются только такие смешанные стратегии, в которых распределение этих параметров совпадает с известным. Пусть они образуют множество $\widetilde{F} \subset F$. В принятых обозначениях игровая постановка задачи стохастического программирования может быть сформулирована следующим образом: требуется вычислить такие смешанные стратегии $F_X^* \in S$ и $F_{Abc}^* \in \widetilde{F}$, что

$$\max_{F_X \in S} \min_{F_{Abc} \in \widetilde{F}} \int\limits_{M \times N} g(\xi, \alpha, \beta, \gamma) dF_X(\xi) F_{Abc}(\alpha, \beta, \gamma) =$$

$$= \min_{F_{Abc} \in \widetilde{F}} \max_{F_X \in S} \int\limits_{M \times N} g(\xi, \alpha, \beta, \gamma) dF_X(\xi) F_{Abc}(\alpha, \beta, \gamma) =$$

$$= \int\limits_{M \times N} g(\xi, \alpha, \beta, \gamma) dF_X^*(\xi) F_{Abc}^*(\alpha, \beta, \gamma).$$

При достаточно общих условиях (компактность множеств M и N) существуют $F_X^* \in S$ и $F_{Abc} \in \widetilde{F}$, на которых достигается значение игры [188].

Если функция распределения F_{Abc} известна заранее (задача — в условиях риска), то множество $\widetilde{F}$ состоит из этого единственного элемента.

Если о совместном распределении F_{Abc} параметров условий задачи заранее ничего неизвестно (задача — в условиях неопределенности), то в этом случае $\widetilde{F} \equiv F$ представляет собой множество всевозможных распределений, определенных на N, и решение F_X^* стохастической задачи определяет смешанную стратегию.

Каждая конечная игра двух лиц с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях, а следовательно, исходная стохастическая задача имеет решающее распределение. Для бесконечной игры одного факта существования оптимальных смешанных стратегий для определения решений недостаточно, необходимо знать являются ли эти стратегии стратегиями конечного порядка.

В работе [188] показано, что если множество M — компактное, а множество N — выпуклое и компактное и функция платы $g\Big(X, A(\omega), b(\omega), C(\omega)\Big)$ непрерывна по своим переменным и выпукла по $\Big(A(\omega), b(\omega), C(\omega)\Big)$ (или вогнута по X), то первый игрок должен иметь оптимальную смешанную стратегию порядка не выше $[(mn+m+n)+1]$. Кроме того, если второй игрок имеет p-мерное множество Y оптимальных стратегий первого игрока (т.е. чистых стратегий), то первый игрок имеет оптимальные смешанные стратегии порядка не выше $[(mn+m+n)-p+1]$ вида:

$$F_X^* = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i I_{X^{(i)}}; (\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0),$$

где $k = [(mn+m+n)-p+1]$.

$I_{X^{(i)}}$ — смешанная стратегия первого порядка (т.е. чистая стратегия) первого игрока, с помощью которой $X^{(i)}$ выбирается с вероятностью 1; в то время как все смешанные стратегии первого порядка I_{A^*,b^*,C^*} при некоторой $(A^*, b^*, C^*) \in Y$ являются оптимальными для второго игрока. Так как функция платы имеет вид

$$g[X, A(\omega), b(\omega), C(\omega)] = \sum_{j=1}^{n} c_j(\omega)x_j + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \Big[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)\Big],$$

то её выпуклость или вогнутость определяется выбором функции штрафа.

Пусть совместное распределение F_{Abc} случайного вектора (A, b, C)

принадлежит множеству распределений F; определим для $X \in E_n^+$ и $F_X \in F$:

$$g(X, F) = E_F\Big\{ \sum_{j=1}^{n} c_j(\omega)x_j + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)\Big)\Big\},$$

где $\varphi_i(Z), i = \overline{1, m}$ — непрерывные неубывающие функции, удовлетворяющие условию $\varphi_i(Z) = 0$, если $Z \leq 0$. Если $g(X, F)$ определено и ограничено для всех $X \in E_n^+$, $F_X \in F$, то определяется игра двух лиц с нулевой суммой в нормальной форме $G = (E_n^+, F, g)$. Игра G соответствует исходной задаче стохастического программирования. Решение этой игры означает оптимальную чистую стратегию первого игрока в игре G. Если функции штрафа $\varphi_i(Z)$ — выпуклые, то условия существования значения этой игры определяются следующей теоремой.

Теорема 5.1.1. *[446] Пусть выполняется одно из следующих условий:*

а) множество F — выпуклое и компактное и c_j-тые равномерно (по $F_X \in F$) интегрируемы;

б) множество F^* — выпуклое и компактное и $E_F C$ — есть постоянный вектор для всех $F_X \in F$ (для $F_X \in F$, F^* соответствует маргинальному распределению вектора (A, b), полагаем $F^* = \{F^* : F_X \in F\}$). Пусть функции $\varphi_i(Z), i = \overline{1, m}$ — выпуклые и равномерно (по $F_X \in F$) интегрируемы для всех $X \in E_n^+$, тогда имеет место:

$$\sup_{X \in E_n^+} \min_{F_X \in F} g(X, F) = \min_{F_X \in F} \sup_{X \in E_n^+} g(X, F).$$

Для случая вогнутых функций штрафа эквивалентное утверждение приведено дальше.

Теорема 5.1.2. *Если множество F — выпуклое и компактное,*

c_j-тые равномерно (по $F_X \in F$) интегрируемы, а функции $\varphi_i(Z)$ — вогнутые и равномерно (по $F_X \in F$) интегрируемы для всех $X \in E_n^+$, тогда имеет место соотношение:

$$\inf_{X \in E_n^+} \max_{F_X \in F} \widetilde{g}(X, F) = \max_{F_X \in F} \inf_{X \in E_n^+} \widetilde{g}(X, F),$$

где

$$\widetilde{g}(X, F) = E_F \Big\{ \sum_{j=1}^{n} c_j(\omega) x_j + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j - b_i(\omega) \Big) \Big\},$$

что соответствует замене исходной задачи

$$\max(C, X),$$

$$AX \le b,$$

$$X \ge 0,$$

эквивалентной задачей

$$\min -(C, X),$$

$$AX \le b,$$

$$X \ge 0.$$

5.2 Частные случаи игры $G(E_n^+, F, g)$

Пусть $\varphi_i(Z)$ — линейные функции вида

$$\varphi_i(Z) = v_i Z^+, v_i > 0, i = \overline{1, m},$$

где $Z^+ = \frac{1}{2}\Big(|Z| + Z\Big)$.

Исследуем игру $G(E_n^+, F, g)$ для некоторых частных случаев задания множества F. Поскольку условия, налагаемые на случайные величины стохастических задач в основном носят естественный характер, в практических задачах случайные величины, как правило, имеют ограниченную область изменения возможных значений и обладают математическим ожиданием.

Рассмотрим некоторые частные случаи игры G и наметим пути её решения.

Пусть в игре G, соответствующей стохастической задаче, a_{ij}, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ — постоянные величины, $b_i, i = \overline{1,m}$ — независимые случайные переменные, такие что

$$E(b_i) = \beta_i, \beta_i^{'} \le b_i \le \beta_i^{''}, \beta_i^{'} < \beta_i^{''};$$

и пусть $c_j, j = \overline{1,n}$ — случайные переменные, у которых определены $E(c_j) = \gamma_j$ для $\forall F_X \in F$.

Обозначим через $\Delta\{I, J, K\}$ произвольное разбиение множества $\{1, 2, \ldots, m\}$ на три части, одна или две из которых могут быть пустыми.

Обозначим $\Delta\nu, \nu = \overline{1,M}$ такие их разбиения, для которых множества

$$\Big\{X \ge 0 : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge \beta_i^{''}, i \in I_\nu; \beta_i^{'} \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \beta_i^{''}, i \in J_\nu;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \beta_i^{'}, i \in K_\nu\Big\} \tag{5.2.1}$$

не пусты.

Пусть

$$\Psi(X) = \min_{F_X \in F} g(X, F). \tag{5.2.2}$$

Так как b_i — независимые случайные величины, то (5.2.2) можно преобразовать к виду

$$\Psi(X) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j - \sum_{i=1}^{m} v_i \max_{F_X \in F} E_{F_X}\Big\{\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\Big)^+\Big\},$$

где члены второй суммы могут быть оценены следующим образом

$$\max_{F_X \in F} E_{F_X}\Big\{\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\Big)^+\Big\} = \lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i^{'}\Big)^+ +$$

$$+(1-\lambda_i)\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i^{''}\Big)^+, \tag{5.2.3}$$

где $\lambda_i = \frac{\beta_i^{''}-\beta_i}{\beta_i^{''}-\beta_i^{'}}, 0 \leq \lambda_i \leq 1$.

Таким образом, имеем

$$\Psi(X) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j - \sum_{i=1}^{m} v_i\Big\{\lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i^{'}\Big)^+ +$$

$$+(1-\lambda_i)\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i^{''}\Big)^+\Big\}. \tag{5.2.4}$$

В соответствии с разбиением имеем:

для $i \in I_\nu$:

$$\lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i^{'}\Big)^+ + (1-\lambda_i)\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i^{''}\Big)^+ =$$

$$= \lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i^{'}\Big) + (1-\lambda_i)\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i^{''}\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - [\beta_i^{''} - \lambda_i(\beta_i^{''} - \beta_i^{'})] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\beta_i;$$

для $i \in J_\nu$:

$$\lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i^{'}\Big)^+ + (1-\lambda_i)\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i^{''}\Big)^+ =$$

$$= \lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i^{'}\Big).$$

для $i \in K_\nu$:

$$\lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i^{'}\Big)^+ + (1-\lambda_i)\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i^{''}\Big)^+ = 0,$$

что следует из условия $\beta_i^{'} < \beta_i^{''}$.

Запишем для призвольного разбиения ν $\psi(X)$:

$$\Psi(X) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j - \sum_{i \in I_\nu} v_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \beta_i \Big) - \sum_{i \in J_\nu} v_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \beta_i^{'} \Big)$$

или

$$\Psi(X) = -\Big(-\gamma_j + \sum_{i \in I_\nu} v_i a_{ij} + \sum_{i \in J_\nu} v_i \lambda_i a_{ij} \Big) x_j + \sum_{i \in I_\nu} v_i \beta_i + \sum_{i \in J_\nu} v_i \lambda_i \beta_i^{'}.$$

Введем обозначения

$$q_{\nu,j} = -\gamma_j + \sum_{i \in I_\nu} v_i a_{ij} + \sum_{i \in J_\nu} v_i \lambda_i a_{ij}; K_\nu = \sum_{i \in I_\nu} v_i \beta_i + \sum_{i \in J_\nu} v_i \lambda_i \beta_i^{'};$$

$$\nu = \overline{1, M}, j = \overline{1, n}, Q = (q_{\nu,j}), K = (K_\nu).$$

Если вместо допущения $E(b_i) = \beta_i$ имеет место $\overline{\beta}_i \leq E(b_i) \leq \overline{\overline{\beta}}_i$, $i = \overline{1, m}$, а все другие допущения сохраняются, то в определении λ_i и K_ν β_i заменяется на $\overline{\beta}_i$.

Пусть теперь в игре $G(a_{i1}, \ldots, a_{in}, b_i), i = \overline{1, m}$ взаимно не зависимые случайные векторы, такие что выполняется

$$\alpha_{ij}^{'} \leq a_{ij} \leq \alpha_{ij}^{''}, \alpha_{ij}^{'} < \alpha_{ij}^{''};$$

$$\beta_i^{'} \leq b_i \leq \beta_i^{''}, \beta_i^{'} < \beta_i^{''};$$

$$E(a_{ij}) = \alpha_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij}^{'} + \alpha_{ij}^{''}),$$

$$E(b_i) = \beta_i = \frac{1}{2}(\beta_i^{'} + \beta_i^{''});$$

$$i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n},$$

и пусть $c_j, j = \overline{1, n}$ — случайные переменные, что $E(c_j) = \gamma_j$. Пусть, кроме того, $\Delta_\nu = (I_\nu, J_\nu, K_\nu), \nu = \overline{1, n}$ все те разбиения $\{1, 2, \ldots, m\}$, для которых множества

$$\Big\{ X \geq 0 : \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{'} x_j \geq \beta_i^{''}, i \in I_\nu; \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{'} x_j \leq \beta_i^{''} \text{и} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{''} x_j \geq \beta_i^{'}, i \in J_\nu;$$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha''_{ij}x_j \le \beta'_i, i \in K_\nu\Big\}$$

не пусты.

Так же, как и в предыдущем случае для произвольного разбиения ν получим функцию $\Psi(X)$ и введем обозначения:

$$q_{\nu,j} = -\gamma_j + \sum_{i\in I_\nu} v_i\alpha_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i\in J_\nu} v_i\lambda_i\alpha''_{ij};$$

$$K_\nu = \sum_{i\in I_\nu} v_i\beta_i + \frac{1}{2}\sum_{i\in J_\nu} v_i\lambda_i\beta'_i; \nu = \overline{1, M}.$$

Пусть, наконец, в игре $G\ (A, b, c)$ — случайный вектор, такой что

$$\alpha'_{ij} \le a_{ij} \le \alpha''_{ij},$$

$$\beta'_i \le b_i \le \beta''_i,$$

$$\gamma'_i \le c_j \le \gamma''_i,$$

$$j = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}.$$

Пусть $\Delta = (I_\nu, J_\nu), \nu = \overline{1, n}$, то все разбиения $\{1, 2, \ldots, m\}$ для которых множества

$$\Big\{X \ge 0 : \sum_{j=1}^{n}\alpha''_{ij}x_j \ge \beta'_i, i \in I_\nu; \sum_{j=1}^{n}\alpha''_{ij}x_j \le \beta'_i, i \in J_\nu\Big\}$$

не пусты. Тогда аналогично предыдущим случаям для произвольного разбиения ν получим функцию $\Psi(X)$ и введем обозначения:

$$q_{\nu,j} = -\gamma_j + \sum_{i\in I_\nu} v_i\alpha''_{ij}, K_\nu = \sum_{i\in I_\nu} v_i\beta'_i; \nu = \overline{1, M}; j = \overline{1, n}.$$

Так как в приведенных частных случаях учитываются только те разбиения, для которых соответствующие множества не пусты, то $M \le 3^m$, $M' \le 2^m$, где m — число ограничений исходной задачи.

Для рассмотренных случаев выполняются соотношения [446]

$$\sup_{X\in E_n^+}\ \min_{F_X\in F} g(X, F) = \min_{F_X\in F}\ \sup_{X\in E_n^+} g(X, F)$$

и X — есть решение игры $G = (E_n^+, F, g)$, если и только если (X, Z_0) — есть решение задачи линейного программирования

$$\max Z,$$
$$QX + Ze \leq K, \tag{5.2.5}$$
$$X \geq 0,$$

где $e = (1, \ldots, 1)$.

В рассмотренных частных случаях игровое решение задачи стохастического линейного программирования равносильно решению детерминированной задачи линейного программирования, в общем случае, большей размерности, чем исходная стохастическая задача.

Пусть функции штрафа — выпуклые и имеют вид:

$$\varphi(Z) = f_i(Z^+), i = \overline{1, m},$$

где $Z^+ = \frac{1}{2}(|Z| + Z)$, и пусть для $\Psi(X) = \min\limits_{F_X \in F} g(X, F)$ имеем

$$\Psi(X) = \min_{F_X \in F} E_{F_X}\Big\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} f_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\Big)^+\Big\}.$$

Из условий независимости компонент вектора $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ следует независимость функций $f_i(Z^+)$, тогда имеем:

$$\Psi(X) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j - \sum_{i=1}^{m} \max_{F_X \in F} E_{F_X}\Big\{f_i\Big[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\Big]^+\Big\}.$$

Так как по условию $f_i(Z^+)$ — выпуклые функции, то имеет место следующее неравенство:

$$E_{F_X}\Big\{f_i\Big\} \geq f_i\Big\{E_{F_X}(Z^+)\Big\} \tag{5.2.6}$$

для каждого $F_X \in F$.

Учитывая соотношения (5.2.3), (5.2.6) и в силу неотрицательности значений функций $f_i(Z^+)$ имеем неравенство

$$\Psi(X) \leq \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j - \sum_{i=1}^{m} f_i \Big\{ \lambda_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i^{'} \Big)^+ + (1-\lambda_i) \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i^{''} \Big)^+ \Big\}$$

или с учетом разбиений можно представить в виде

$$\Psi(X) \leq \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j - \sum_{i \in I_\nu} f_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \beta_i \Big) - \sum_{i \in J_\nu} f_i \Big(\lambda_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \beta_i^{'} \Big) \Big). \tag{5.2.7}$$

Обозначим правую часть соотношения (5.2.7) через $\Phi_\nu(X)$. Функция $\Psi(X)$ вогнута на E_n^+ и вогнута на каждом множестве, определенном выражением (5.2.1); эти множества соответствуют разбиениям $\Delta_\nu, \nu = \overline{1, M}$ и сами образуют непересекающееся разбиение E_M^+, отсюда следует, что

$$\Psi(X) \leq \min_{1 \leq \nu \leq M} \Phi_\nu(X).$$

Тогда максимизация $\Psi(X)$ эквивалентна максимизации некоторой вогнутой функции $\Phi_0(Z)$ при условии $\Phi_0(Z) \leq \Psi(X)$, т.е. имеем

$$\Phi_0(Z) \leq \Phi_\nu(X).$$

Обозначим $\Phi_\nu(X) - \Phi_0(Z) = \Phi_\nu(X, Z)$.

В этом случае получим следующую детерминированную задачу выпуклого программирования

$$\max \Phi_0(Z), \tag{5.2.8}$$

$$\Phi_\nu(X, Z) \geq 0, \nu = \overline{1, M}, \tag{5.2.9}$$

$$X \in E_n^+. \tag{5.2.10}$$

Если (X^*, Z^*) — есть решение этой задачи, то X^* — есть решение игры $G = (E_n^+, F, g)$.

Из теории двойственности для задач выпуклого программирования следует, что для того, чтобы (X^*, Z^*) было решением задачи (5.2.8)-(5.2.10) достаточно, чтобы нашлись числа $U_1^*, U_2^*, \ldots, U_M^*$, удовлетворяющие условиям:

$$\Phi_\nu(X^*, Z^*) \geq 0,$$

$$U_\nu^* \Phi_\nu(X^*, Z^*) = 0,$$

$$U_\nu^* \geq 0,$$

$$L(X^*, Z^*, U^*) = \sup_X \Big[L(X, Z, U^*) = \Phi_0(Z) + \sum_{\nu=1}^{M} U_\nu^* \Phi_\nu(X, Z) \Big],$$

где L — функция Лагранжа.

При этом требования дифференцируемости на функции $\Phi_0(Z)$ и $\Phi_\nu(X, Z)$ не накладываются.

Во всех рассмотренных выше частных случаях определялась некоторая матрица Q. По этой матрице можно судить о том, существует ли конечная оптимальная чистая стратегия первого игрока в игре $G = (E_n^+, F, g)$.

Предположим, что такая стратегия существует, тогда задача (5.2.5) имеет конечное оптимальное решение и по теории двойственности можно построить задачу:

$$\min K^T U, \tag{5.2.11}$$

$$Q^T U \geq 0, \tag{5.2.12}$$

$$\sum_{\nu=1}^{M} U_\nu = 1, \tag{5.2.13}$$

$$U_\nu \geq 0. \tag{5.2.14}$$

В силу теории двойственности множество планов задачи (5.2.11)-(5.2.14) не пустое, но тогда из условий (5.2.12) и (5.2.14) следует, что в матрице Q нет строго отрицательного столбца (необходимое условие) и есть неотрицательная строка (достаточное условие). Для проверки достаточного условия нет необходимости строить матрицу Q по всем разбиениям, достаточно рассмотреть только одно:

$$\Delta_1 = (I_1, J_1, K_1) = \Big\{(1, 2, \ldots, m), \varnothing, \varnothing\Big\}.$$

Если соответствующее множество $X \geq 0$ не пустое и $q_{1j} \geq 0$ для $\forall j = \overline{1, n}$, тогда оптимальная чистая стратегия существует.

Реализация игрового подхода к задачам стохастического программирования включает несколько этапов:

I этап. Игровая постановка задачи, стохастического программирования.

Определяющим условием на этом этапе является имеющаяся информация о задаче стохастического программирования. По исходной информации определяются:

а)что понимать под решением задачи;

б)множества стратегий противников;

в)функции штрафа за нарушение условий задачи;

г)функция платы.

II этап. Анализ полученной игры.

На этом этапе рассматривается вопрос о существовании значения игры и о существовании оптимальных стратегий. На втором этапе в настоящей главе были рассмотрены следующие ситуации:

а)чистые стратегии против чистых;

б)смешанные стратегии против смешанных;

в)смешанные стратегии против чистых;

г)чистые стратегии против смешанных,

для конечных и бесконечных (с несчетным числом стратегий) игр.

Было показано, что переход к игре на единичном квадрате для получения ситуации: чистые стратегии против чистых, хотя и гарантирует существование решения игры в чистых стратегиях, но нарушает соответствие полученной игры исходной задаче.

Для ситуации: чистые стратегии против смешанных, показана эквивалентность выбора выпуклых и вогнутых функций штрафа для исходной задачи и сформулированы достаточные условия существования оптимальной чистой стратегии первого игрока для случая выпуклых функций штрафа.

III этап. Метод решения игры.

Для конечных игр в общем случае может быть использован симплекс метод и итеративный метод Брауна-Робинса. Если функция платы непрерывна, то метод Брауна-Робинса может быть применен и для решения бесконечных игр. Этот метод наиболее эффективен в случае игр с большим числом чистых стратегий, так как трудно использовать какой-либо другой метод вследствие необходимости выполнения большого объема вычислений.

Основным недостатком этого метода является малая скорость сходимости итеративного процесса, а разработанные к настоящему времени способы улучшения сходимости связаны с конкретными задачами. Применение этих способов в общем случае приводит к значительному усложнению процедуры решения, в результате чего теряется их эффективность.

По третьему этапу в настоящей главе были рассмотрены некоторые методы получения решения для бесконечной игры. Было показано, что в случае выпуклой функции штрафа бесконечную игру можно свести к детерминированной задаче выпуклого программирования.

Краткая библиография

Игровой подход к задачам стохастического программирования целесообразен в условиях частичной или полной неопределенности, когда статистические характеристики всех или некоторых параметров условий задачи заранее неизвестны. В работе [160] С. Фромовиц исследовал оптимальные смешанные стратегии детерминированной условной экстремальной задачи. В работах И. Жачковой [446], М. Иосифеску и Р. Теодореску [188], В. Н. Лебедева [262], Р. Теодореску [394], А. Чарнса, М. Кирби, В. Рэйк [92] рассматриваются игровые постановки линейных и выпуклых задач стохастического программирования и приводятся условия, гарантирующие существование оптимальных смешанных стратегий игры — решающих распределений исходной стохастической задачи.

В работах Д. Б. Юдина [197], [203] соответственно для априорных и апостериорных решающих правил рассматриваются достаточные условия, при которых оптимальное значение целевой функции на смешанных стратегиях — решающих распределениях — достигается также с помощью чистых стратегий — решающих правил.

6 Проблемы существования решения и его оптимальности в задачах стохастического программирования

6.1 Двойственные задачи стохастического линейного программирования

Для задач стохастического программирования очень важным является вопрос о необходимых и достаточных условиях оптимальности плана и вопрос его существования. Прежде всего рассмотрим некоторые свойства двойственных задач стохастического линейного программирования. Приведенный ниже результат доказан Тинтнером [402] и получил название «слабой теоремы двойственности». Пусть имеем задачу

$$\min_{X \in S(\omega)} Z = \min_{X \in S(\omega)} C(\omega)X,$$

где $S(\omega) = \Big\{X : A(\omega)X \le b(\omega), X \ge 0, \omega \in \Omega\Big\}$ со случайными параметрами, и её двойственную задачу, функционал которой обозначим через $g = b(\omega)^T Y$.

Пусть g_ω^l — значение этой функции при в $\omega \in \Omega$ в l-й экстремальной точке двойственной задачи. Имеет место следующая теорема.

Теорема 6.1.1. *Пусть для $\omega_0 \in \Omega$ точка $l_{\overline{k}}$ будет оптимальной экстремальной точкой и пусть $Z_{\omega_0}^{\overline{k}}$—соответствующее значение целевой функции. Обозначим через $W_{\omega_0}^{\overline{k}}$ область устойчивости этого решения. Тогда для любого $\omega \in W_{\omega_0}^{\overline{k}}$ существует такая экстремальная точка (скажем с номером $\overline{l}$) двойственной задачи, что выполняется равенство $g_\omega^{\overline{l}} = Z_{\overline{\omega}}^{\overline{k}}$ и существует такая окрестность $O(\overline{\omega})$ точки $\overline{\omega}$, что для любого $\omega \in O(\overline{\omega})$ имеет место соотношение*

$$g_\omega^{\overline{l}} = Z_\omega^{\overline{k}}.$$

`Доказательство.` В рассматриваемой точке ω прямая задача имеет решение, которое достигается в экстремальной точке $l_{\overline{k}}$. Следовательно, соответствующая двойственная задача тоже имеет решение. Пусть $l_{\overline{l}}$ является оптимальной экстремальной точкой двойственной задачи. В силу теоремы двойственности имеем равенство

$$Z_{\overline{\omega}}^{\overline{k}} = g_{\omega}^{\overline{l}}$$

.

Для того, чтобы доказать вторую часть теоремы, предположим противное, т.е. нет такой окрестности $O(\overline{\omega})$, в которой экстремальная точка $l_{\overline{l}}$ оптимальна, хотя она оптимальна в самой точке $\overline{\omega}$.

Прежде всего заметим, что для любого $\omega \in W_{\omega_0}^{\overline{k}}$ двойственная задача имеет решение, поскольку в этой же области имеет решение прямая задача. Рассмотрим произвольную окрестность $O(\overline{\omega}) \subset W_{\omega_0}^{\overline{k}}$ точки $\overline{\omega}$. В силу оптимальности экстремальной точки имеем неравенство

$$g_{\overline{\omega}}^{\overline{l}} - g_{\omega}^{l} > 0 \tag{6.1.1}$$

для любого $l = 1, 2, \ldots, L_{\overline{\omega}}$, где $L_{\overline{\omega}}$ — общее число экстремальных точек двойственной задачи. С другой стороны, в силу нашего предположения имеем

$$g_{\omega}^{\overline{l}} - g_{\omega}^{l} > 0 \tag{6.1.2}$$

для некоторых $\omega \in O(\overline{\omega})$ возможны два случая.

1. Число точек, в которых выполняется соотношение (6.1.2), конечно. Следовательно, эти точки можно пронумеровать:
$i = 1, 2, \ldots, p$. Обозначим через $\rho_i(\overline{\omega}, \omega_i)$ расстояние между точкой $\overline{\omega}$ и точкой ω_i и найдем $\rho = \min\limits_i \rho_i(\overline{\omega}, \omega_i)$. Тогда в качестве искомой окрестности, в которой выполняется равенство $Z_{\omega}^{\overline{k}} = g_{\omega}^{\overline{l}}$, можно принять множество $O(\overline{\omega}) = \left\{\omega : \rho(\overline{\omega}, \omega) \leq \frac{\rho}{2}\right\}$.

2. Число точек ω, удовлетворяющих неравенству (6.1.2), бесконечно (счетно или несчетно). Поскольку пространство Ω является топологическим пространством, существует фундаментальная система окрестностей точки $\overline{\omega}$. Обозначим окрестности этой системы через $O_n(\overline{\omega})$. В каждой окрестности $O_n(\overline{\omega})$ содержится хотя бы одна точка ω_i, удовлетворяющая условиям (6.1.2). Рассмотрим
$D_n(\overline{\omega}) = O_n(\overline{\omega}) - O_{n+1}(\overline{\omega})$. Существуют две возможности:

а) число окрестностей $D_n(\overline{\omega})$, содержащих точки ω_i, конечно; тогда существует такое число N, что для всех $n > N$ $O_n(\overline{\omega})$ содержит бесконечно много точек ω_i; из этих точек можно построить последовательность ω_{i_n}, сходящуюся к точке $\overline{\omega}$, т.е. $\omega_{i_n} \underset{n\to\infty}{\to} \overline{\omega}$. Отсюда получим в силу непрерывности функции g^l_ω от ω $g^l_{\omega_{i_n}} \underset{n\to\infty}{\to} g^l_{\overline{\omega}}$, следовательно, $g^{\bar{l}}_{\omega_{i_n}} - g^l_{\omega_{i_n}} \underset{n\to\infty}{\to} g^{\bar{l}}_{\overline{\omega}} - g^l_{\overline{\omega}}$ по предположению все члены последовательности меньше нуля, в то время как в силу соотношения (6.1.1) её предел больше нуля. Это противоречие доказывает теорему для данного случая;

б) число окрестностей $D_n(\overline{\omega})$, содержащих точки ω_i, бесконечно; снова можно определить такую последовательность точек ω_{i_n}, которая сходится к $\overline{\omega}$, доказательство завершается аналогично предыдущему случаю.

Теорема доказана.

В предыдущих главах рассматривались двойственные задачи для различных моделей задач стохастического линейного программирования и в отдельных случаях были сформулированы аналитические. Критерии оптимальности решений. Ниже приведены некоторые результаты исследований по вопросам существования и оптимальности, решений в задачах общего вида.

6.2 Оптимальность и существование решения в задачах стохастического программирования

Вопросы существования плана и его оптимальности для задач стохастического программирования нашли выражение в исследованиях Хансона [176]. Рассмотрим некоторые результаты, полученные в указанной работе.

Пусть вектор $Y \in \mathbf{Y} \in Em$ имеет скалярное распределение $\Psi(Y)$, которое является непрерывным и дважды дифференцируемым. Пусть $X \in \mathbf{X} \in En$ — некоторый вектор, минимизирующий математическое ожидание скалярной функции $\Phi(X, Y)$ при двух типах ограничений:

1) математическое ожидание функции $g(X, Y)$ является неотрицательным, где $g \in E_r$;

2) функция $h(X, Y)$ является неотрицательной для $h \in E_s$.

Оба вида ограничений важны с точки зрения практического применения, например, первые можно рассматривать как долговременные договорные требования, когда допускаются отклонения, которые, однако, в совокупности нельзя нарушать; вторые ограничения могут отражать некоторые физические ограничения системы, которые нельзя нарушать вообще.

Сформулируем следующую задачу

$$\min_X \int_Y \Phi(X, Y)\Psi(Y)dY \tag{6.2.1}$$

при условиях

$$\int_Y g(X, Y)\Psi(Y)dY, h(X, Y) \geq 0, X \in \mathbf{X} \in En,$$

где Φ, g, h — непрерывные дважды дифференцируемые функции, заданные на $S = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

Для такой постановки задачи в работе [176] сформулированы теоремы о необходимых и достаточных условиях оптимальности вектора X и теорема двойственности.

Приведем доказательство достаточности для оптимальности вектора. Причем, надо заметить, что условия, сформулированные в теореме, слишком сильные, что существенно сужает круг рассматриваемых задач.

Теорема 6.2.1. *Пусть определенная выше функция $\Phi(X, Y)$ является выпуклой по X; а $g(X, Y)$ и $h(X, Y)$, определенные выше, являются вогнутыми по X. Выполнение следующих условий является достаточным для того, чтобы X был минимизирующим вектором задачи (6.2.1):*

1) существует $\lambda \leq 0$;

2) существует $\mu(Y) \leq 0$;

3) $\Phi_X(X, Y)\Psi(Y) + \lambda g_X(X, Y)\Psi(Y) + \mu(Y)h_X(X, Y) = 0$;

4) $\lambda g(X, Y) = 0$;

5) $\mu(Y)h(X, Y) = 0$, где $\Phi_X = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial X_n}\right), g_X, h_X$ — матрицы соответствующих размерностей из частных производных, а $\lambda, \mu(Y)$ r-мерный вектор и s-мерная векторная функция, соответственно.

`Доказательство.` Пусть X^* и X — некоторые допустимые решения. Тогда, так как $\Phi(X, Y)$ выпукла по X непрерывна и дифференцируема, применим все условия (1)-(5) для X из теоремы, имеем:

$$\int\limits_Y \Phi(X^*, Y)\Psi(Y)dY \geq \int\limits_Y \Big(\Phi(X, Y) + (X^* - X)\Phi_X(X, Y)\Big)\Psi(Y)dY =$$

$$= \int\limits_Y \Big(\Phi(X, Y)\Psi(Y) - (X^* - X)[\lambda g_X(X, Y)\Psi(Y) + \mu(Y)h_X(X, Y)]\Big)dY,$$

что в силу выпуклости функций λg и μh не меньше

$$\int\limits_Y \Phi(X,Y)\Psi(Y)dY - \int\limits_Y \lambda\Big(g(X^*,Y) - g(X,Y)\Big)\Psi(Y)dY -$$

$$-\int\limits_Y \mu(Y)\Big(h(X^*,Y) - h(X,Y)\Big)dY = \int\limits_Y \Phi(X,Y)\Psi(Y)dY -$$

$$-\int\limits_Y \lambda g(X^*,Y)\Psi(Y)dY - \int\limits_Y \mu(Y)h(X^*,Y)dY \geq$$

$$\geq \int\limits_Y \Phi(X,Y)\Psi(Y)dY.$$

Последнее и означает, что X является оптимальным решением.

Теорема доказана.

Нижеприведенная теорема двойственности дает возможность установить нижние границы для значений целевой функции в задаче (6.2.1).

Теорема 6.2.2. *Если* $\Phi(X,Y), \Psi(Y), g(X,Y), h(X,Y)$ *являются функциями, определёнными в теореме 6.2.1, и если* $\overline{X}$ *является, оптимальным решением в прямой задаче (6.2.1), то* $\overline{X}$ *является также оптимальным решением и в двойственной задаче:*

$$\max_X \int\limits_Y \Big(\Phi(X,Y)\Psi(Y) + \lambda g(X,Y)\Psi(Y) + \mu(Y)h(X,Y)\Big)dY$$

при условиях

$$\int\limits_Y \Big(\Phi_X(X,Y)\Psi(Y) + \lambda g_X(X,Y)\Psi(Y) + \mu(Y)h_X(X,Y)\Big)dY = 0,$$

$$\lambda \leq 0, \mu(Y) \leq 0,$$

причем оптимальные $\overline{\lambda}$ *и* $\overline{\mu}(Y)$ *удовлетворяют условиям (1)-(5) из теоремы 6.2.1 и оптимальные значения целевых функций в обеих задачах равны между собой.*

Рассмотрим еще одну теорему существования, доказанную Стоддартом [7] и применимую для достаточно общей системы, из которой задача (6.2.1) получается как частный случай.

Рассмотрим вероятностное пространство (A, S, μ). Будем предполагать, что вероятностная мера μ является обычной относительно некоторой топологии на A. Пусть R — замкнутое множество в E_n и U — замкнутое выпуклое множество в E_m. Рассмотрим фиксированное измеримое отображение $r : A \to R$. Будем называть вещественную функцию $f(r, u)$ на $R \times U$ линейно ограниченной снизу в U, если выполняется неравенство

$$f(r(\omega), u(\omega)) \geq p(\omega) + ug(\omega)$$

для некоторой интегрируемой функции p и ограниченной интегрируемой функции g на A.

Рассмотрим некоторое число вещественных непрерывных функций $g_i(r, u)$, $ih_j(r, u)$ на $R \times U$, каждая из которых линейно ограничена снизу в U. Пусть Γ — класс всех интегрируемых отображений $u : A \to E_m$ таких, что выполняются

1) $u(\omega) \in U$ почти для каждого $\omega \in A$;

2) $\int\limits_A g_i(r(\omega), u(\omega))d\mu \leq 0$ для каждого i;

3) $h_j(r(\omega), u(\omega)) \leq 0$ почти для каждого $\omega \in A$ и всех j.

Пусть, кроме того, $\Phi(r, u)$ — некоторая вещественная непрерывная функция на $R \times U$, тогда будем говорить, что план $u_0 \in \Gamma$ является оптимальным для Φ в Γ, если $I(u) = \int\limits_A \Phi(r(\omega), u(\omega))d\mu$ имеет минимум в точке u_0, т.е. выполняется неравенство $I(u_0) \leq I(u)$ для всех $u \in \Gamma$.

Заметим, что имеем систему, эквивалентную системе Иенсона, если $A \subset E_n$, $r(\omega) = \omega$ и $\mu = \int \Psi d\lambda$, где Ψ — распределение вероятностей к мере Лебега λ на E_n.

Доказательство теоремы существования для непустого Γ строится в предположении замкнутости и компактности относительно слабой сходимости в $L_1 = L_1(A, S, \mu)$.

Полунепрерывность снизу функции $I(u)$ при этой сходимости является достаточной для существования оптимального плана в Γ.

Теорема 6.2.3. *Пусть* $\Phi(r, u)$ *— вещественная непрерывная функция на* $R \times U$ *линейно ограничена снизу и выпукла в* U*. Пусть* $\int\limits_A |u(\omega)| d\mu$ *ограничена на* Γ *и* ε *— абсолютно непрерывна на* Γ*. Тогда, если* $\Gamma \neq \oslash$,

$$I(u) = \int\limits_A \Phi(r(\omega), u(\omega)) d\mu$$

имеет минимум на Γ.

Ключевым условием в этой теореме является ограниченность и ε — абсолютная непрерывность $\int\limits_A |u(\omega)| d\mu$ на Γ.

В работе Стоддарта [382] приводятся две теоремы, обеспечивающие это требование при определенных условиях. Это имеет место, когда некоторая вещественная функция $\Psi(u)$ на U ограничена снизу и такова, что $\frac{\Psi(u)}{|u|} \to \infty$, как только $|u| \to \infty$ на U, и если $\int\limits_A \Psi(u) d\mu$ ограничена на Γ.

Доказывается также, что, если брать $g_i(r(\omega, u)) \geq \Psi(u)$, где $\Psi(u)$ имеет все предыдущие свойства теорема 6.2.3 верна и без предположения ключевого условия.

6.3 Исследования одной задачи стохастического программирования

Рассмотрим следующую экономическую задачу: пусть имеется некоторое производство продуктов с входными величинами $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и пусть оно достаточно гибко реагирует на такие случайные факторы, как спрос, погода, выход из строя оборудования или другие, т.е. имеем свои варианты планов производства в различных условиях, реализация которых носит случайный непрерывный характер. Требуется найти оптимальный набор значений входных величин X, минимизируя ожидаемое значение некоторой функции издержек при следующих ограничениях:

1) необходимо, чтобы средние долговременные договорные обязательства в целом (поставки сырья и производство продукции, прибыль и т.п.) были удовлетворены, хотя при этом допускаются нарушения в кратковременных требованиях;

2) необходимо соблюдать при каждой случайной реализации условий задачи общие физические ограничения системы, которых нельзя нарушать вообще.

Предполагается, что все функции, представленные в задаче, могут быть нелинейными. В этом случае получаем математическую постановку задачи Хансона [176]:

$$\begin{cases} \min\limits_X \int\limits_{\{Y\}} \Phi(X,Y)\Psi(Y)dY, \\ \int\limits_{\{Y\}} g(X,Y)\Psi(Y)dY \geq 0, \\ h(X,Y) \geq 0, \forall Y, \end{cases} \tag{6.3.1}$$

где предполагается, что $\Phi(X,Y)$ — некоторая скалярная функция от $X \in E^n$ и $Y \in E^m$, $g(X,Y)$ и $h(X,Y)$ — вектор-функции на E^r и E^s соответственно, $\Phi(X,Y)$ и компоненты $g(X,Y)$ и $h(X,Y)$, а также плотность распределения вероятностей $\Psi(Y)$ дважды непрерывно дифференцируемы на $S = \{X\} \times \{Y\} \subset E^n \times E^m$ по всем переменным.

В работе Хансона даются, как показано выше, необходимые и, в условиях выпуклости функции $\Phi(X,Y)$ и вогнутости компонент вектор-функций $g(X,Y)$ и $h(X,Y)$, по X также достаточные условия оптимальности вектора $\overline{X}$. Эти условия являются однако слишком сильными, поскольку в системе

$$\Phi_X(\overline{X},Y)\Psi(Y)+\overline{\lambda}g_X(\overline{X},Y)\Psi(Y)+\overline{\mu}(Y)h_X(\overline{X},Y)=0,\forall Y \quad (6.3.2)$$

каждое слагаемое зависит от вектора-параметра Y. Покажем, что, не умаляя общности, эти условия можно ослабить, исключая из некоторых слагаемых Y.

В силу свойств функций Φ, g и Ψ можно задачу (6.3.1) переписать в эквивалентном виде: найти вектор $\overline{X}$, который доставляет

$$\min_X F(X) \quad (6.3.3)$$

при условиях

$$G(X)\geq 0, \quad (6.3.4)$$

$$h(X,Y)\geq 0,\forall Y, \quad (6.3.5)$$

где функция $F(X)$ и вектор-функция $G(X)$, вычисленные по распределению $\{Y\}$, интегралы $\int\limits_{\{Y\}}\Phi(X,Y)\Psi(Y)dY$ и $\int\limits_{\{Y\}}g(X,Y)\Psi(Y)dY$ соответственно. $F(X), G(X)$ и $h(X,Y)$ также дважды непрерывно дифференцируемы. В этой задаче только вектор-функция h зависит от вектора-параметра Y. Для того, чтобы свести задачу (6.3.3)-(6.3.5) к параметрической задаче нелинейного программирования и вывести необходимые и достаточные условия оптимальности вектора $\overline{X}$, будем предполагать выполнение следующего условия: если $r+s>n$, то самое большее n компонент функций G и h могут обращаться в нуль в любой точке множества S. Те компоненты G_j $(j=\overline{1,J})$ и h_p $(p=\overline{1,P})$, которые обращаются в нуль в некоторой точке множества S таковы, что матрица

$$\Big[\frac{\partial G_1}{\partial x_i};\ldots;\frac{\partial G_J}{\partial x_i};\frac{\partial h_1}{\partial x_i};\ldots;\frac{\partial h_P}{\partial x_i}\Big]$$

имеет максимальный ранг. Докажем следующую лемму, с помощью которой будем выводить необходимые условия оптимальности вектора $\overline{X}$.

Лемма 6.3.1. *Пусть*

1. имеется область $g_r(X) \geq 0, r = \overline{1,M}$, где g_r — действительные функции, определенные на $\{X\} \subset E^n$;

2. $g_r(X)$ при любом r дважды непрерывно дифференцируемы на $\{X\} \subset E^n$;

3. существует такой вектор $\overline{X}$, что выполняется

$$g_r(\overline{X} = 0), r = \overline{1,m}; m < n, \qquad (*)$$

$$g_r(\overline{X} > 0), r = \overline{m+1,M}.$$

4. для m равенств вида (*) выполняется $J_{\overline{X}}(1,\ldots,m) \neq 0$, т.е. якобиан в точке $\overline{X}$ имеет максимальный ранг. Тогда для любого $i \in \overline{1,m}$ существует точка X^i такая, что выполняются $g_i(X^i) > 0$, а $g_r(X^i) = 0$ для любого $r = \overline{1,m}$, $r \neq i$ и $g_r(X^i) > 0$, $r = \overline{m+1,M}$.

Доказательство.

1. Поскольку функции g_r непрерывны, то для любого $r \in \overline{m+1,M}$ и любого $\varepsilon_r > 0$ существует вектор $\delta_{\varepsilon_r} > 0$ такой, что выполняются неравенства

$$\forall X \in |X - \overline{X}| < \delta_{\varepsilon_r}, |g_r(X) - g_r(\overline{X})| < \varepsilon_r.$$

Отсюда, т.к. $g_r(\overline{X}) > 0, \forall r = \overline{m+1,M}$, можно выбрать δ_{ε_r} таким, что выполняется для любого $X \in \delta_{\varepsilon_r}$-окрестности

$$0 < g_r(\overline{X}) - \varepsilon_r < g_r(X) < g_r(\overline{X}) + \varepsilon_r.$$

Если теперь выбрать $\min\limits_{r,l} \delta_{rl} = \delta_{r_0 l_0}$, где δ_{rl_0} l-я координата r-го вектора (все координаты строго больше нуля), и составить n-мерный вектор, координатами которого являются $\delta_{r_0 l_0}$, то для любого X из такой $\delta_{r_0 l_0}$-окрестности выполняется неравенство $g_r(X) > 0$ при любом $r = \overline{m+1, M}$. В дальнейшем проводятся все рассуждения только для векторов X из этой окрестности, которую обозначим через $\delta(\overline{X})$.

2. Рассмотрим $g_r(X), r = \overline{1, m}$ на $\delta(\overline{X})$. Зафиксируем теперь некоторый $i \in \overline{1, m}$ и рассмотрим систему из $m-1$ равенств $g_r(\overline{X}) = 0$ для любого $i \in \overline{1, m}$. Для удобства изложения пронумеруем функции так, что зафиксирован $i = m$. Из якобиана порядка m, пусть это для определенности первые m столбцов матрицы из частных производных, вычеркнем строку m и столбец, в котором стоит элемент $\frac{\partial g_m}{\partial X_l}$ такой, что алгебраическое дополнение к нему не равно нулю. Такой выбор возможен в силу невырожденности якобиана порядка m. Ненулевое алгебраическое дополнение к элементу $\frac{\partial g_m}{\partial x_m}$ есть якобиан $J_{\overline{X}}(1, \ldots, m-1)$ функций $g_r(X)$, $r = \overline{1, m-1}$. Поскольку в окрестности $\delta(\overline{X})$ функции $g_r(X)$ непрерывны, и $g_r(\overline{X}) = 0$,
$r = \overline{1, m-1}$ и $J_{\overline{X}}(1, \ldots, m-1)$ неособенная матрица, то существует по теореме о неявных функциях $\widehat{\varepsilon}(\widehat{\overline{X}})$-окрестность точки
$\widehat{\overline{X}} = (\overline{X_m}, \overline{X_{m+1}}, \ldots, \overline{X_n}) \subset E^{n-m+1}$, которая целиком содержится в $\delta(\widehat{\overline{X}})$ соответствующей размерности, что для любой точки
$\widehat{X} = (x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ из $\widehat{\varepsilon}(\widehat{\overline{X}})$ существуют однозначные и непрерывные функции $\varphi_1(\widehat{X}), \ldots, \varphi_{m-1}(\widehat{X})$, которые обладают свойствами:

а) $\overline{X}_r = \varphi_r(\widehat{\overline{X}}), r = \overline{1, m-1}$;

б) при любой $\widehat{X} \in \widehat{\varepsilon}(\widehat{\overline{X}})$ значение $X_r, r = \overline{1, m-1}$, вычисленное по формуле $X_r = \varphi_r(x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$, вместе с компонентами вектора

$\widehat{X}$ образуют вектор X, удовлетворяющий уравнениям $g_r(X) = 0$;

в) в $\widehat{\varepsilon}(\widehat{\overline{X}})$ функции $\varphi_r(\widehat{\overline{X}}), r = \overline{1, m-1}$ дифферинцируемы и при данных $l, l \in \overline{m, n}$ производные $\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_l}$ являются единственным решением системы линейных уравнений:

$$\sum_{r=1}^{m-1} \frac{\partial g^i}{\partial x_r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_l} = -\frac{\partial g^i}{\partial x_l}; i = \overline{1, m-1}. \qquad (**)$$

3. Покажем теперь, что для $g_r(X), r = \overline{1, m}$ существует такой X^m, что выполняется неравенство $g_m(X^m) > 0$, а для $r = \overline{1, m}$ все $g_r(X^m) = 0$. Предположим, что не существует такой X^m. Зафиксируем в окрестности $\widehat{\varepsilon}(\widehat{\overline{X}})$ все координаты

$$x_{m+1} = \overline{x}_{m+1}, x_{m+2} = \overline{x}_{m+2}, \ldots, x_n = \overline{x}_n.$$

Получим для координаты $x_m = \overline{x}_m$ окрестность $(x_m^{'}, x_m^{''})$, которая целиком содержится в окрестности $\widehat{\varepsilon}(\widehat{\overline{X}})$, для любого $x_m \in (x_m^{'}, x_m^{''})$ и фиксированных координат $\overline{x}_{m+1}, \ldots, \overline{x}_n$ получим

$$x_1 = \varphi_1(x_m, \overline{x}_{m+1}, \ldots, x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_m, \overline{x}_{m+1}, \ldots, \overline{x}_n)$$

$$g_i(X) = g_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}, x_m, \overline{x}_{m+1}, \overline{x}_n) = 0$$

таких, что $i = \overline{1, m-1}$. Если подставить эти координаты в $g_m(X)$, то по предположению для любого $x_m \in (x_m^{'}, x_m^{''})$ получим неравенство

$$g_m(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}, x_m, \overline{x}_{m+1}, \overline{x}_n) \leq 0.$$

Поскольку последние $n - m$ координат зафиксированы, все изменения функций φ_i зависят только от изменения координаты x_m. Следовательно, для любого $x_m \in (x_m^{'}, x_m^{''})$ имеет место $g_m \leq 0$, а в точке $\overline{X}$ выполняется $g_m(\overline{X}) = 0$, в этом случае полная производная по x_m в точке $\overline{X}$ должна равняться нулю, т.е. должно выполняться равенство

$$\frac{\partial g_m}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} + \frac{\partial g_m}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} + \cdots + \frac{\partial g_m}{\partial x_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x_m} = -\frac{\partial g_m}{\partial x_m}\bigg|_{X=\overline{X}} \qquad (***)$$

Если теперь сравнить соотношения $(**)$ с $(***)$, то имеем систему из m уравнений с $m-1$ неизвестными. Вектор $(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}; \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m}; \ldots; \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x_m})$ определяется единственным образом из системы $(**)$. Он удовлетворяет уравнению $(***)$ лишь в том случае, когда уравнение $(***)$ есть линейная комбинация уравнений из системы $(**)$. Поскольку коэффициенты образуют якобиан, следовательно, выполняется $J_{\overline{X}}(1, \ldots, m) = 0$, что противоречит условию. Следовательно, предположение неверно и существует X^m такой, что для $r = \overline{1, m}$ выполняется равенства $g_r(X^m) = 0$, а кроме того, имеем $g_m(X^m) > 0$. Поскольку функция g_m была получена путем перенумерации, то, следовательно, для любого $i = \overline{1, m}$ выполняется утверждение леммы.

Лемма доказана.

Приведенную выше лемму можно получить как прямое следствие из теоремы о неявных функциях, если ввести искусственную переменную.

Следующее утверждение дает необходимые условия существования решения в задаче Хансона.

Теорема 6.3.1. *Для того чтобы вектор $\overline{X}$ являлся решением задачи (6.3.1), необходимо, чтобы существовали r-мерный вектор $\lambda \leq 0$ и s-мерная вектор-функция $\mu(Y) \leq 0$ такие, что выполняются*

$$F_X(\overline{X}) + \lambda G_X(\overline{X}) + \mu(Y) h_X(\overline{X}, Y) =$$

$$= \frac{\partial F(\overline{X})}{\partial X} + \lambda \frac{\partial G(\overline{X})}{\partial X} + \mu(Y) \frac{\partial h(\overline{X}, Y)}{\partial X} = 0, \qquad (6.3.6)$$

$$\lambda G(\overline{X}) = 0, \qquad (6.3.7)$$

$$\mu(Y) h(\overline{X}, Y) = 0, \forall Y, \qquad (6.3.8)$$

где $F_X(\overline{X}) = \frac{\partial F(\overline{X})}{\partial X}$*—вектор и* $G_X(\overline{X}) = \frac{\partial G(\overline{X})}{\partial X}$*),*
$h_X(\overline{X}, Y) = \frac{\partial h(\overline{X}, Y)}{\partial X}$*—матрицы из частных производных, вычисленные в точке* $\overline{X}$*. Если в задаче (6.3.1) функция* $\Phi(X, Y)$ *выпукла, а компоненты* $g_j(X, Y)$ *и* $h_l(X, Y)$ $j = \overline{1, s}$ *вогнуты по* X*, то необходимые условия являются и достаточными.*

Доказательство. Необходимость. Будем рассматривать вместо задачи (6.3.1) эквивалентную ей задачу (6.3.3)-(6.3.5). Пусть $\overline{X}$ — оптимальное решение задачи (6.3.1), тогда оно оптимальное решение и задачи (6.3.3)-(6.3.5). На основе введения невязок будем применять теорию множителей Лагранжа, чтобы показать необходимость условий (6.3.6)-(6.3.8). Неположительность λ и $\mu(Y)$ будем выводить отдельно с помощью теоремы о разложении функции в ряд Тейлора.

Пусть $\xi = (\xi_1^2, \xi_2^2, \ldots, \xi_r^2)^T$ и $\eta(Y) = (\eta_1^2(Y), \ldots, \eta_r^2(Y))^T$ являются r-мерным вектором и s-мерной вектор-функцией такими, что выполняются равенства

$$G(X) - \xi = 0,$$

$$h(X, Y) - \eta(Y) = 0.$$

Составим функцию Лагранжа, имеем:

$$L(X, \lambda, \mu(Y), \xi, \nu(Y)) = F(X) + \lambda(G(X) - \xi) + \mu(Y)(h(X, Y) - \eta(Y)).$$

Точки экстремума целевой функции в задаче (6.3.3)-(6.3.5) находятся среди стационарных точек функции Лагранжа. Возьмем частные производные по всем переменным, которые в точке $\overline{X}$ должны обращаться в нуль. Имеем

$$\frac{\partial L}{X} = \frac{\partial F(\overline{X})}{\partial X} + \lambda\frac{\partial G(\overline{X})}{\partial X} + \mu(Y)\frac{\partial h(\overline{X}, Y)}{\partial X} = 0, \tag{6.3.9}$$

$$\frac{\partial L}{\lambda_i} = G_i(\overline{X}) - \xi_i^2 = 0, (*)\frac{\partial L}{\xi_i} = 2\lambda_i\xi_i = 0, i = \overline{1, r},$$

$$\frac{\partial L}{\mu_l(Y)} = h_l(\overline{X}, Y) - \eta_l^2(Y) = 0, (**)\frac{\partial L}{\eta_l(Y)} = 2\mu_l(Y)\eta_l(Y), l = \overline{1, s}.$$

Сравнивая уравнения $(*)$ и $(**)$ между собой, можно исключить переменные ξ_i и $\eta_l(Y)$. Получим условия $\lambda_i G_i(\overline{X})$ и $\mu_l(Y)h_l(\overline{X}, Y)$ или

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i G_i(\overline{X}) = \lambda G(\overline{X}) = 0,$$

$$\sum_{l=1}^{s}\mu_l(Y)h_l(\overline{X}, Y) = \mu(Y)h(\overline{X}, Y).$$

Последние два выражения и соотношение (6.3.9) представляют собой условия (6.3.6)-(6.3.8) из теоремы.

Покажем неположительность λ и $\mu(Y)$. Из условий $(*)$ и $(**)$ следует, что если $G_i(\overline{X}) > 0$, то соответствующий $\lambda_i = 0$ и аналогичным образом для $h_l(\overline{X}, Y)$. Если некоторая компонента векторов ограничений (6.3.4)-(6.3.5) обращается в точке $\overline{X}$ в нуль, то рассмотрим специфическое изменение вектора $\overline{X}$ к некоторой соседней допустимой точке X^*. Применим теорему Тейлора до первого порядка с остаточным членом более высокого порядка $\varepsilon(X^*, X) = \varepsilon$. Имеем

$$F(X^*) + \lambda G(X^*) + \mu(Y)h(X^*, Y) - (F(\overline{X}) + \lambda G(\overline{X}) + \mu(Y)h(\overline{X}, Y)) =$$

$$= (X^* - \overline{X})\Big(\frac{\partial F(\overline{X})}{\partial X} + \lambda\frac{\partial G(\overline{X})}{\partial X} + \mu(Y)\frac{\partial h(\overline{X}, Y)}{\partial X}\Big) + \varepsilon = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$F(X^*) - F(\overline{X}) = -\lambda G(X^*) - \lambda G(\overline{X}) - \mu(Y)h(X^*, Y) + \mu(Y)h(\overline{X}, Y) +$$

$$+\varepsilon = -\Big[\lambda G(X^*) + \mu(Y)h(X^*, Y) - \varepsilon\Big].$$

Возьмем теперь допустимое решение X^* достаточно близким к $\overline{X}$, чтобы, во-первых, ε не влиял на знак выражения в квадратных скобках и, во-вторых, все нулевые компоненты вектора ограничений (6.3.4), кроме i-й, и все нулевые компоненты вектора ограничений (6.3.5) не меняли своего значения. Такой выбор X^* возможен, т.к. условия в задаче (6.3.3)-(6.3.5) удовлетворяют предыдущей лемме. Тогда знак выражения соответствует знаку выражения, $\Big[F(X^*) - F(\overline{X})\Big]$ соответствует знаку выражения $\Big[\lambda_i G_i(X^*)\Big]$. Следовательно, если по выбору X^* $G_i(X^*) > 0$ и $\overline{X}$ доставляет минимум функционалу (6.3.3), т.е. имеем $F(X^*) - F(\overline{X}) \geq 0$, то должно быть $\lambda_i \leq 0$. Поскольку был взят любой индекс из нулевых компонент, то весь вектор $\lambda \leq 0$. Аналогично доказывается, что $\mu(Y) \leq 0$.

Достаточность. Пусть существуют $\lambda \leq 0$ и $mu(Y) \leq 0$ такие, что выполняются условия (6.3.6)-(6.3.8). Интегрирование непрерывной выпуклой по X функции $\Phi(X, Y)$ по области $\{Y\}$ дает выпуклую по X функцию $F(X)$. Тоже самое имеет место для вогнутости компонент вектор-функции $G(X)$. Отсюда имеем в соответствии со свойствами функций F, G и h, а также по выполнении условий (6.3.6)-(6.3.8) следующую систему соотношений:

$$F(X) \geq F(\overline{X}) + (X - \overline{X})\frac{\partial F(\overline{X})}{\partial X} = F(\overline{X}) - (X - \overline{X})\Big(\lambda\frac{\partial G(\overline{X})}{\partial X} +$$

$$+\mu(Y)\frac{\partial h(\overline{X}, Y)}{\partial X}\Big) \geq F(\overline{X}) - \lambda(G(X) - G(\overline{X})) - \mu(Y)(h(X, Y) -$$

$$-h(\overline{X}, Y)) = F(\overline{X}) - \lambda G(X) - \mu(Y)h(X, Y) \geq F(\overline{X}).$$

Сравнивая начало и конец системы соотношений, где X — любое допустимое решение, получаем, что $\overline{X}$ является точкой имнимума.

Следовательно, система уравнений (6.3.6)-(6.3.8) обеспечивает

$n + r + s$ специфических необходимых, и в случае выпуклого программирования, и достаточных условий для решения задачи (6.3.1) в терминах задачи (6.3.3)-(6.3.5). Число неизвестных компонент векторов X, λ и $\mu(Y)$ также равно $n+r+s$, причем неравенства $\lambda \leq 0$ и $\mu(Y) \leq 0$ при каждом Y превращают задачу (6.3.1) в типичную задачу нелинейного программирования. При этом первое и второе слагаемые из условий (6.3.6) уже не зависят от Y в противоположность к условиям в задаче Хансона.

Теорема доказана.

Однако остается трудность определения вектор-функции $\mu(Y)$. Дадим теорему, которая в условиях, сформулированных в задаче (6.3.1), является следствием оптимальности вектора $\overline{X}$ и новых полученных необходимых условий оптимальности.

Теорема 6.3.2. *Пусть в условиях задачи (6.3.1) $\overline{X}$ является оптимальным решением и пусть при некотором $Y = Y^*$ имеет место соотношение*

$$\frac{\partial F(\overline{X})}{\partial X} + \lambda \frac{\partial G(\overline{X})}{\partial X} = 0. \qquad (*)$$

Тогда $\mu(Y) = 0$ при любом Y.

Доказательство. Пусть $\overline{X}$ — оптимальное решение в задаче (6.3.1), тогда существуют $\lambda \leq 0$ и $\mu(Y) \leq 0$ такие, что выполняются необходимые условия (6.3.6)-(6.3.8). Поскольку система $(*)$ не зависит от Y, то должно выполняться соотношение

$$\mu(Y)\frac{\partial h(\overline{X}, Y)}{\partial X} \equiv 0, \forall Y.$$

Из необходимых условий (6.3.6)-(6.3.8) и неположительности $\mu(Y)$ следует, что если $h_i(\overline{X}, Y) > 0$, то $\mu_i(Y) = 0$, а если $h_i(\overline{X}, Y) = 0$, то $\mu_i(Y) \leq 0$. Если бы для последних i существовала при некотором Y хотя бы одна компонента $\mu_i(Y) < 0$, то это означало бы в соответствии с $(*)$, что линейная комбинация градиентов для функций $h_i(\overline{X}, Y)$, обращающихся на $\overline{X}$ в нуль, должна равняться нулю, т.е. что градиенты линейно независимы. Последнее противоречит условию. Следовательно, все $\mu_i(Y), i = \overline{1, s}$ тождественно равны нулю при любом Y.

Теорема доказана.

Заметим, что с помощью условий (6.3.6)-(6.3.8) можно сформулировать двойственную задачу. Можно показать, что в случае выпуклости $F(X)$ и вогнутости компонент $G(X)$ и $h(X, Y)$, получается теорема, эквивалентная теореме о седловой точке Куна-Таккера. Условие Слейтора при этом следует из леммы 6.3.1, т.к. для ненулевых компонент ограничений (6.3.4)-(6.3.5) существует окрестность точки $\overline{X}$, в которой эти компоненты остаются строго больше нуля, а для остальных компонент можно подобрать такую выпуклую комбинацию соответствующих точек X^i и леммы 6.3.1, что она является внутренней точкой для выпуклой области допустимости.

Однако такой подход для практического применения при решении задачи (6.3.1) приводит к вычислительным трудностям, кроме того, наложенные условия являются очень сильными.

Условия (6.3.6)-(6.3.8) дают в общем случае лишь стационарные точки, причем для каждой стационарной точки необходимо определить $\mu(Y)$ для всех $y \in Y$. Решение такой системы уравнений (6.3.6)-(6.3.8), зависящей от вектора Y, вызывает в общем случае большие трудности.

Кроме того, круг задач сужается, поскольку требуется, чтобы все функции были дважды непрерывно дифференцируемы по всем переменным.

6.4 Определение множества допустимых планов в задаче Хансона

Используя специфику ограничений вида (6.3.5) можно в некоторых случаях в задаче (6.3.1) устранить зависимость от параметра Y и определить множество допустимых перманентных планов Π. Тогда множество допустимых планов S задачи (6.3.1) представляет собой пересечение множества допустимых X из ограничений вида (6.3.4) с множеством перманентных планов Π из ограничений вида (6.3.5), т.е. имеем

$$S = \Pi \bigcap \{X : G(X) \geq 0\}.$$

Рассмотрим несколько специальных случаев, когда исходя из аналитичности функций $h_l(X, Y)$ или экономического смысла случайных величин можно найти множество Π для ограничений вида (6.3.5). Пусть имеем

$$\Pi = \Big\{X : X \in \bigcap \{h(X, Y) \geq 0\}\Big\} = \Big\{X : H(X) = \min_{Y \in \{Y\}} h(X, Y) \geq 0\Big\},$$

где $H(X)$ и $h(X, Y)$ — s-мерные вектор-функции. Если множество Π выпукло, а все $G_i(X)$ вогнуты, то и непустое пересечение S выпукло. Однако в общем случае Π не будет выпуклым, а компоненты $H(X)$ не будут непрерывными функциями по X. Будем предполагать во всех случаях, что множество допустимых планов S не пусто.

Пусть L — некоторое подмножество индексов, которое объединяет ограничения из (6.3.5) по некоторому общему свойству. Будем, в противоположность к ограничивающим условиям в задаче Хансона, только требовать, чтобы все $h_i(X, Y)$ были непрерывны для любого $i = \overline{1, s}$ и что всегда выполняется условие $X \geq 0$. Пусть $\Pi(L)$ — множество перманентных планов для ограничений с индексами $l \in L$, а $\Pi(\overline{L})$ — множество допустимых планов для остальных ограничений вида (6.3.5).

1. Пусть L такое множество, что для любого $l \in L$ имеет место $h^l(X,Y) = h_1^l(X)h_2^l(Y)$, т.е. $h^l(X,Y)$ можно представить как произведение двух аналитических функций. Тогда, если $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, имеем:

а) если для всех $l_1 \in L_1$ выполняется неравенство $h_2^{l_1}(Y) \geq 0$ при любом Y, то соответствующие ограничения $h^{l_1}(X,Y) \geq 0$ можно заменить ограничениями $h_1^{l_1}(X) \geq 0$;

б) если для всех $l_2 \in L_2$, выполняется неравенство $h_2^{l_2}(Y) \leq 0$ при любом Y, то соответствующие ограничения $h^{l_2}(X,Y) \geq 0$ можно заменить неравенствами $h_1^{l_2}(X) \leq 0$;

в) если для любого $l_3 \in L_3$ существуют Y_1, Y_2 такие, что выполняются неравенства $h_2^{l_3}(Y_1) > 0$ и $h_2^{l_3}(Y_2) < 0$, то множество допустимых планов определяется из условия $h_1^{l_3}(X) = 0$.

Таким образом, имеем

$$\Pi(L) = \Big\{X : X \in \bigcap_{\forall l_1 \in L_1} (h_1^{l_1}(X) \geq 0)\Big\} \bigcap$$

$$\bigcap \Big\{X : X \in \bigcap_{\forall l_2 \in L_2} (h_1^{l_2}(X) \leq 0)\Big\} \bigcap \Big\{X : X \in \bigcap_{\forall l_3 \in L_3} (h_1^{l_3}(X) = 0)\Big\}. \tag{6.4.1}$$

2. Пусть L такое множество, что для любого $l \in L$ имеем $h^l(X,Y) = h_1^l(X) + h_2^l(Y)$, т.е. $h^l(X,Y)$ можно представить как сумму двух аналитических функций. В этом случае соответствующие ограничения с индексами из (6.3.5) можно заменить условиями:

$$h_1^l(X) \geq -\min_{Y \in \{Y\}} h_2^l(Y), \forall l \in L,$$

$$\Pi(L) = \Big\{X : X \in \bigcap_{\forall l \in L} \{h_1^l(X) \geq -\min_{Y \in \{Y\}} h_2^l(Y)\Big\}. \tag{6.4.2}$$

3. Пусть L таково, что при любом $l \in L$ имеем линейные неравенства, т.е. $AX - b \geq 0$, где $(A - l \times n)$-мерная матрица и неко-

торые или все элементы матрицы A и вектора b случайны с конечным распределением, т.е. существуют оптимистические и пессимистические границы изменения значений. Эти случайные элементы образуют вектор Y. Если ввести A^- и b^+, где случайные элементы заменены своими пессимистическими и оптимистическими границами соответственно, то множество перманентных планов $\Pi(L)$ для группы ограничений L определяются следующим образом: $\Pi(L) = \{X : A^-X \geq b^+\}$, что следует из системы неравенств $A(\omega)X \underset{(**)}{\geq} A^-X \underset{(*)}{\geq} b^+ \underset{(**)}{\geq} b(\omega)$, где X, удовлетворяющий неравенству $(*)$, удовлетворяет и неравенству $(**)$.

4. Пусть L таково, что для любого $l \in L$ $h^l(X,Y)$ квадратичны по X, т.е. эти функции можно представить в виде:

$$h^l(X,Y) = X^T H_l X + p_l X - b_l; \forall l \in L,$$

где некоторые или все элементы матрицы H_l, вектора p_l и компонента $b_l, \forall l \in L$, являются случайными величинами с конечным распределением. Они определяют компоненты вектора Y. Тогда имеем для ограничений $l \in L$:

$$\Pi(L) = \Big\{X : X \in \bigcap_{\forall l \in L} \{\min_{Y \in \{Y\}} h_1^l(X) \geq 0\}\Big\} =$$

$$= \Big\{X : X \in \bigcap_{\forall l \in L} \{\min_{Y \in \{Y\}} (X^T H_l X + p_l X - b_l)\}\Big\} =$$

$$= \Big\{X : X \in \bigcap_{\forall l \in L} \{\min_{Y \in \{Y\}} (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^l x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} p_j^l x_j - b_l) \geq 0\}\Big\}, \quad (6.4.3)$$

поскольку функция во внутренних скобках зависит линейно от компонент вектора Y, то, следовательно, минимум достигается на границах допустимой области, причем выполняется неравенство

$x_i x_j \geq 0$ имеем:

$$\Pi(L) = \Big\{X : X \in \bigcap_{\forall l \in L} \{\min_{Y \in \{Y\}} (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{l-} x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} p_j^{l-} x_j - b_l^{+}) \geq 0\}\Big\}.$$

Иначе

$$\Pi(L) = \Big\{X : X \in \bigcap_{\forall l \in L} \{\min_{Y \in \{Y\}} (X^T H_l^{-} X + p_l^{-} X \geq b_l^{+})\}\Big\}. \qquad (6.4.4)$$

Если все H_l^{-} неположительно определенные матрицы, то непустое множество $\Pi(L)$ — выпукло.

5. Пусть L таково, что для любого $l \in L$ $h^l(X, Y)$ вогнута по X. Тогда непосредственно следует, что непустое множество $\Pi(L)$ выпукло, поскольку соотношение $h^l(X, Y) \geq 0$ выполняется при любом Y. Здесь задача заключается в нахождении границы, оганичивающей выпуклую область $\Pi(L)$. Если граница или часть ее существует, то она определяется из условия $h^l(X, Y) = 0$.

Заметим, что во всех случаях имеем соотношение
$\Pi = \Pi(L) \cap \Pi(\overline{L})$.

Если Π и впоследствии множество S состоят из некоторого числа несвязных множеств допустимых X, то следует задачу (6.3.1) разбить на подзадачи с той же целевой функцией (6.3.3), заданной на этих множествах $S_k (k = \overline{1, K})$. Минимум в задаче (6.3.1) найдется из соотношения $F(X) = \min\limits_{k \in \overline{1,K}} \min\limits_{S_k} F(X)$.

Вопросы существования решений и их оптимальности в задачах стохастического программирования рассматривались в предыдущих главах применительно к конкретным моделям задач.

Краткая библиография

Для задач стохастического программирования очень важным является вопрос о необходимых и достаточных условиях оптимальности плана и вопрос его еуществования. Некоторые свойства двойственных задач стохастического линейного программирования рассмотрены Тинтнером в работе [401], и на их основе доказана так называемая «слабая теорема двойственности».

Вопросы существования плана и его оптимальности для задач стохастического программирования нашли выражение в исследованиях Хансона [176]. Также в этой работе сформулированы теоремы о необходимых и достаточных условиях оптимальности, теорема двойственности и рассмотрена «задача Хансона».

В работе Стоддарта [382] приводятся теоремы, обеспечивающие необходимые требования для существования оптимального плана при определенных условиях.

7 Исследование проблем стохастической устойчивости задач принятия решений

Проблемы устойчивости решений в задачах принятия решений рассматриваются с различных точек зрения и исследуются с разных позиций. В работах по исследованию устойчивости решений [50, 71, 77, 78, 88] предметом наблюдений избирают условный экстремум как случайную точку, оптимальный базис как набор векторов или оптимальное значение целевой функции как случайную величину. В зависимости от этого вводятся совершенно различные понятия устойчивости. В ряде работ проблема устойчивости исследуется в плане стохастическом и параметрическом, а также в свете теории ошибок. В задачах принятия решений в условиях неполной информации вопрос об устойчивости решения приобретает особо важное значение, поскольку в этих задачах значения параметров случайны.

7.1 Существование областей устойчивости решения задач принятия решений в условиях неполной информации. Область допустимости

Введем понятие области допустимости. Рассмотрим фиксированную точку $\omega_0 \in \Omega$. Тогда задача принятия решений в условиях неполной информации превращается в детерминированную задачу:

$$\min_{u_i(t)\in S(\omega_0)} \Big\{ F(y_1(t,\omega_0), y_2(t,\omega_0), \ldots, y_n(t,\omega_0)) \Big\}; \tag{7.1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} u_j(t,\omega_0) \le c(t,\omega_0); \tag{7.1.2}$$

$$y_i(t,\omega_0) = y_i(t-1,\omega_0) + S_i(t,\omega_0) u_i(t,\omega_0) + d_i(t,\omega_0); \tag{7.1.3}$$

$$y_i(t,\omega_0) \ge y_i(t-1,\omega_0), y_i(1,\omega_0) > 0,$$

$$u_i(t,\omega_0) \ge 0, c(t,\omega_0) > 0, S_i(t,\omega_0) \ge 0, i = \overline{1,n}, t \in \overline{1,T}. \tag{7.1.4}$$

Обозначим через $l_k(k = 1, 2, \ldots, K_{\omega_0})$ экстремальные точки выпуклого множества $S(\omega_0)$, каждая из которых образуется пересечением n гиперплоскостей, где K_{ω_0} — общее число экстремальных точек при реализации $\omega_0 \in \Omega$ случайных параметров.

Определение 7.1.1. *Область $V_{\omega_0}^k \in \Omega$ называется областью допустимости точки l_k, если для любого $\omega \in V_{\omega_0}^k$ пересечение образующих эту точку гиперплоскостей определяет экстремальную точку соответствующего множества $S(\omega)$.*

7.2 Область оптимальности

Введем понятие области оптимальности. Пусть l_{k_0} — оптимальная экстремальная точка задачи (7.1.1)-(7.1.4), т.е. для любого $k \neq k_0$ имеет место $Z_{\omega_0}^k \geq Z_{\omega_0}^{k_0}$, где $Z_{\omega_0}^{k_0}$ — значение целевой функции задачи (7.1.1)-(7.1.4) в экстремальной точке l_k.

Определение 7.2.1. *Область $W_{\omega_0}^{k_0} \subset V_{\omega_0}^{k_0}$ называется областью оптимальности точки l_{k_0}, если для любого $\omega \in W_{\omega_0}^{k_0}$ выполняется $Z_\omega^k \geq Z_\omega^{k_0}$ $(k = 1, 2, \ldots, k_\omega; k \neq k_0)$.*

Теорема 7.2.1. *[59]. Функция Z_ω^k является непрерывной функцией от ω для любой экстремальной точки l_k.*

`Доказательство.` Значение функционала в экстремальной точке l_k выпуклого множества $S(\omega_0)$ при фиксированной реализации $\omega_0 \in \Omega$ равно

$$Z_{\omega_0}^k = F\Big(y_1^{0k}(t), y_2^{0k}(t), \ldots, y_n^{0k}(t)\Big).$$

Обозначим через $u_i^{0k}(t)$ — координаты экстремальной точки, $u_i^{0k}(t)$ — отличные от нуля величины $u_i^{0k}(t)$. Они определяются из соотношения $B^{0k}u^{0k}(t) - = c^0(t)$, где B^{0k} — соответствующая базисная матрица.

В силу невырожденности этой матрицы величины $u_j^{0k}(t)$ будут непрерывными функциями от a_{ij}^0 и $c_i^0(t)$, следовательно, $Z_{\omega_0}^k$ является непрерывной функцией от $\omega \in \Omega$.

Теорема доказана.

Покажем, что для любого $\omega \in \Omega$ существует область устойчивости W_{ω_0}, т.е. такая область, что для всех $\omega \in W_{\omega_0}$ соответствующая задача (7.1.1)-(7.1.4) имеет один и тот же оптимальный базис.

Теорема 7.2.2. *[59]. Пусть в точке $\omega_0 \in \Omega$ выполняется*

$$Z_{\omega_0}^k > Z_{\omega_0}^{k_0} (k = 1, 2, \dots, k_{\omega_0}; k \neq k_0).$$

Тогда существует такая окрестность $O(\omega_0)$ точки ω_0, что для всех $\omega \in O(\omega_0) \subset \Omega$ имеет место

$$Z_{\omega}^k > Z_{\omega}^{k_0} (k = 1, 2, \dots, k_{\omega}; k \neq k_0).$$

Доказательство. В точке $\omega_0 \in \Omega$ имеем

$$Z_{\omega_0}^k - Z_{\omega_0}^{k_0} > 0. \tag{7.2.1}$$

По теореме 7.2.1 функции $Z_{\omega_0}^k$ и $Z_{\omega_0}^{k_0}$ непрерывна по ω, следовательно, их разность тоже непрерывная функция. Из свойств непрерывных функций следует, что существует такая окрестность $\Omega(\omega_0)$, что для $\omega \in \Omega(\omega_0)$ сохраняется неравенство (7.2.1), т.е. $Z_{\omega}^k > Z_{\omega}^{k_0}$.

Теорема доказана.

7.3 ε-устойчивость решения по средним

Введем понятие ε-устойчивости решения для задач принятия решений в условиях неполной информации.

Определение 7.3.1. *Решение по средним задачи принятия решений в условиях неполной информации называется стохастически устойчивым по модулю ε (ε-устойчивым), если оптимальная* *экстремальная точка задачи по средним остается оптимальной при любой реализации ω случайных параметров, за исключением множества меры ε.*

Дадим еще одно определение.

Определение 7.3.2. *[59]. Гиперплоскости, пересечением которых образуется оптимальная точка решения по средним стохастической задачи принятия решений, назовем мечеными.*

Пусть все граничные гиперплоскости выпуклого множества $S(\overline{\omega})$ пронумерованы и пусть $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — номера меченых гиперплоскостей. Экстремальная точка, определяемая пересечением этих гиперплоскостей, перемещается в зависимости от реализаций вектора $c(t, \omega)$.

Множеством n-мерного евклидова пространства, внутри которого эта точка будет находиться с вероятностью, большей $\left(1 - \frac{1}{l^2}\right)^n$, является эллипсоид с центром в точке, соответствующей оптимальному решению по средним. Здесь l определяется из неравенства $\left(1 - \frac{1}{l^2}\right)^n > 1 - \varepsilon$. Оси этого эллипсоида рассеяния находятся следующим образом: в точке $\overline{\omega} \in \Omega$ рассматривается пересечение $n - 1$ гиперплоскости из данных n меченых, которое геометрически представляет собой прямую. На этой прямой откладывается в обе стороны от центра эллипсоида величина $\omega\sigma_{k_j}$, где k_j — номер той меченой гиперплоскости, которая не входит в данное пересечение, а σ_{k_j} — среднеквадратическое отклонение случайной величины, стоящей в правой части уравнения этой гиперплоскости. Из независимости компонент $c_i(t, \omega)$ и неравенства Чебышева следует:

$$p\Big\{\bigcap_i |c_i(t, \omega) - \overline{c}_i(t)| < l\sigma_i\Big\} =$$

$$= \prod_i p\Big\{|c_i(t,\omega) - \overline{c}_i(t)| < \sigma_i\Big\} > \prod_i \Big(1 - \frac{1}{l^2}\Big) = \Big(1 - \frac{1}{l^2}\Big)^n.$$

Величину l определим из неравенства

$$\Big(1 - \frac{1}{l^2}\Big)^n > 1 - \varepsilon,$$

где ε— достаточно малое число.

Определение 7.3.3. *Ограничение вида* $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}u_j(t) \le \overline{c}_i(t) - l\sigma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *назовем нижними ограничениями, а ограничения вида* $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}u_j(t) \le \overline{c}_i(t) + l\sigma_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ *— верхними ограничениями.*

Предположим, что пересечение нижних ограничений с положительным гипероктантом не пусто. Это означает, что для любой реализации вектора $c(t,\omega)$ (за исключением множества меры ε) существует хотя бы один допустимый план.

Используя введенные понятия, сформулируем без доказательства достаточное условие стохастической ε-устойчивости решения по средним.

Теорема 7.3.1. *[59]. Для того, чтобы решение по средним было ε-устойчивым, достаточно, чтобы эллипсоид рассеяния не пересекался с нижними ограничениями, кроме меченых.*

Для выпуклой задачи принятия решений в условиях неполной информации ε-устойчивость означает постоянство с вероятностью $1 - \varepsilon$ базиса меченых нормалей, по которому целевой вектор раскладывается с положительными коэффициентами.

Теорема 7.3.2. *[59]. Для того чтобы решение по средним*

$$u^*(t,\overline{\omega}) = (u_1^*(t,\overline{\omega}), u_2^*(t,\overline{\omega}), \ldots, u_k^*(t,\overline{\omega}), 0, \ldots, 0)$$

было ε-устойчивым, достаточно, чтобы $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \le \varepsilon d^2$,
где d — минимальное из расстояний от точки $\overline{\omega}$ до граничных

гиперплоскостей области устойчивости $W_{\overline{\omega}} \subset \Omega$.

`Доказательство.` Если $B_{\overline{\omega}}$ — $(n \times n)$-мерная базисная матрица, соответствующая решению по средним, то отличные от нуля компоненты $u_i^*(t, \overline{\omega})(i = 1, 2, \ldots, n)$ вектора и $u^*(t, \overline{\omega})$ определяются из соотношения

$$u^*(t, \overline{\omega}) = B_{\overline{\omega}}^{-1} c(t, \overline{\omega}),$$

где

$$c(t, \overline{\omega}) = (c_1(t, \overline{\omega}), c_2(t, \overline{\omega}), \ldots, c_n(t, \overline{\omega})).$$

Кроме того, внутри области устойчивости решения по средним координаты точки пересечения меченых гиперплоскостей $\overline{u}_i(t, \omega)$ определяются из того же соотношения

$$\overline{u}_i(t, \omega) = B_{\omega}^{-1} c(t, \omega). \tag{7.3.1}$$

Область устойчивости решения по средним $W_{\overline{\omega}}$ совпадает с областью допустимости этого решения в пространстве Ω.

С другой стороны, точка пересечения меченых гиперплоскостей $\overline{u}(t, \omega)$ перестает быть допустимой, если она лежит на гиперплоскостях вида $a_{ij}u_j(t) = c_i(t), (i > n)$ или вида $u_i(t) = 0, (i \leq n)$. В силу (7.3.1) это равносильно тому, что $c_i(t, \omega)$ удовлетворяет соотношениям

$$c_i(t, \omega)\Delta - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{v=1}^{n} (-1)^{v+1} B_{vi} c_v(t, \omega) = 0, i > n, \tag{7.3.2}$$

$$\sum_{v=1}^{k} (-1)^{i+j} B_{ij} c_i(t, \omega) = 0, i \leq n, \tag{7.3.3}$$

где Δ — определитель матрицы B.

Следовательно, область устойчивости $W_{\overline{\omega}}$ решения по средним определяется пересечением m гиперплоскостей вида (7.3.2)-(7.3.3) в m-мерном пространстве Ω. Если уравнения (7.3.2)-(7.3.3) нормированы и в них вместо $c_i(t,\omega)$ стоят величины $\overline{c}_i(t)$, то они дают расстояния от точки $\overline{\omega}$ пространства Ω от гиперплоскостей (7.3.2)-(7.3.3). Обозначим эти расстояния через $d_1, d_2, \ldots, d_n$ и определим $d = \min\limits_i d_i$. Тогда для ε-устойчивости решения по средним достаточно, чтобы имело место соотношение

$$p\Big\{|c(t,\omega) - \overline{c}(t)|^2 > d\Big\} \leq \varepsilon. \tag{7.3.4}$$

Покажем, что из $\sum\limits_{i=1}^{m} \sigma_i^2 \leq \varepsilon d^2$ следует выполнение соотношения (7.3.4). По неравенству Чебышева и свойствам математического ожидания получим

$$p\Big\{|c(t,\omega) - \overline{c}(t)|^2 > d\Big\} \geq \frac{E\Big(|c(t,\omega) - \overline{c}(t)|^2\Big)}{d^2} =$$

$$= \frac{E\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}(c_i(t,\omega) - \overline{c}_i(t))^2\Big)}{d^2} = \frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} E(c_i(t,\omega) - \overline{c}_i(t)\Big)^2}{d^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2} \sigma_i^2}{d^2} \leq \varepsilon.$$

Теорема доказана.

7.4 Плановая устойчивость задачи принятия решений в условиях неполной информации. Основные понятия плановой устойчивости

Дадим определение плановой устойчивости задачи принятия решений в условиях неполной информации.

Определение 7.4.1. *[59]. Пусть для всех $\omega \bmod \varepsilon$ множество оптимальных планов (ω) задачи принятия решений принадлежит δ-окрестности множества $(\overline{\omega})$, т.е. для любого $u_i^0(t,\omega)$ найдется $u_i^0(t,\overline{\omega})$ такое, что*

$$|u_i^0(t,\omega) - u_i^0(t,\overline{\omega})| < \delta.$$

В этом случае задачу принятия решений в условиях неполной информации назовем планово устойчивой с характеристиками ε, δ.

Пусть задача базисно устойчива по $\mathrm{mod}\ \varepsilon$ и имеет при $\omega = \overline{\omega}$ единственный оптимальный план. Тогда можно найти распределение оптимального плана $u^0(t,\omega)$=$(u_1^0(t,\omega, u_2^0(t,\omega),..., u_k^0(t,\omega), 0,..., 0)$ на множестве меры $1-\varepsilon$, а также распределение $|u^0(t,\omega)-u^0(t,\overline{\omega})|$.

По любому δ можно найти $\varepsilon_1 = p\Big\{|u^0(t,\omega) - u^0(t,\overline{\omega})| > \delta\Big\}$, и задача будет планово устойчива с характеристиками $\varepsilon + \varepsilon_1, \delta$.

7.5 Абсолютная плановая устойчивость

Обозначим через L экстремальные точки выпуклого множества $Z(\omega)$, каждая из которых образуется пересечением n гиперплоскостей.

В некоторых задачах стохастического программирования имеют место случаи, когда при изменении случайных параметров один и тот же план $u^0(t)$ является оптимальным. Это, например, имеет место, когда абсолютный минимум целевой функции задачи принадлежит некоторой совокупности областей допустимости $Z(\omega)$, но не принадлежит множеству перманентных планов Z^-. В таких случаях можно ставить задачу нахождения вероятности, с которой такой план остается оптимальным планом при всех реализациях $\omega \in \Omega$. Не ограничивая общности, будем исследовать здесь только случай, когда интересующий нас план принадлежит допустимой в среднем области $Z(\overline{\omega})$. Если абсолютный минимум принадлежит какой-нибудь другой допустимой области $Z(\omega)$, $u^0(t) \notin Z(\omega)$, то исследование можно провести аналогично. Будем предполагать, что пределы изменения случайных величин всегда конечны.

Такая постановка задачи имеет смысл лишь в некоторых случаях, например, когда имеем выпуклую задачу принятия решений со стохастическими ограничениями или когда необходимо найти точку экстремума стохастической линейной функции на детерминированном многограннике. Исследуем эти два случая.

Определение 7.5.1. *Задачу принятия решений при наличии неполной информации назовем абсолютно планово устойчивой с вероятностью α, если решение по средним является оптимальным решением задачи при всех реализациях ω с вероятностью α.*

Рассмотрим прямую и двойственную задачи стохастического программирования в обычных обозначениях, где условия задачи образуют ограниченные многогранные области при каждом $\omega \in \Omega$:

$$\min_{u \in Z(\omega)} F(y(t)); Z(\omega) = \{u : Au(t) \leq c(t, \omega), u \geq 0\}, \tag{7.5.1}$$

$$\max_{y \in Q(\omega)} \Phi(\omega); Q = \{u : yA \geq d, y \geq 0\}. \tag{7.5.2}$$

Поскольку экстремум линейной функции на ограниченном многограннике достигается в крайней точке, то вопрос о плановой устойчивости в смысле вышеприведенного определения можно ставить лишь в том случае, когда все $c_i(t)$ случайны и оптимальное в среднем решение образуется как раз теми гиперплоскостями, которые являются детерминированными, или когда имеем тривиальный случай $u^0(t) = 0$. Вероятность α, что план $u^0(t)$ остается оптимальным планом, определяется тогда с помощью множества тех реализаций ω, для которых $u^0(t)$ является допустимой точкой.

Иначе обстоит дело для двойственной задачи (7.5.2). Здесь многогранник области допустимых решений детерминирован, и оптимальная в среднем точка $u^0(t)$ перестает быть оптимальным планом тогда, когда целевой вектор при некоторой реализации выходит из положительного конуса, натянутого на нормали тех гиперплоскостей, которые образуют оптимальное в среднем решение. Из

[70] имеем, если при некоторых предположениях (единственность решения и т.д.) прямая задача (7.5.1) является базисно устойчивой mod ε, то является и базисно устойчивой с вероятностью $1-\varepsilon$ двойственная к ней задача (7.5.2). Поскольку многогранник решений в задаче (7.5.2) детерминирован и базисная устойчивость означает постоянство базисных гиперплоскостей для некоторого подмножества из множества всех реализаций ω, то базисная устойчивость задачи (7.5.2) эквивалентна абсолютной плановой устойчивости задачи (7.5.2). Следовательно, определяя область базисной устойчивости прямой задачи (7.5.1), мы одновременно определяем вероятность, с которой задача (7.5.2) является абсолютно планово устойчивой. Приведем возможный способ оценки, который позволяет определить, с какой вероятностью α задача (7.5.2) будет абсолютно планово устойчивой, а следовательно, и базисно устойчивой.

Зафиксируем все базисные в среднем ограничения, которые превращаются в точное равенство. Составим соответствующую базисную матрицу A_δ размера $n \times n$. Тогда вероятность, с которой задача будет абсолютно планово устойчивой, определяется теми реализациями, для которых выполняется $c = c_i(t, \omega)$. Пусть k_β — конус, натянутый на те нормали с неотрицательными коэффициентами $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \beta$, для которых соответствующие ограничения образуют базис, при этом для решения по средним выполняется равенство $\overline{b} = \overline{\beta} A_\delta$, где $\overline{b}_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, вероятность того, что $c(t, \omega) \in k_\beta$ есть вероятность того, что

$$\beta = c(t, \omega) A_\delta^{-1} = c(t, \omega) \overline{A} \geq 0,$$

где $\overline{A} = (\overline{a}_{ij}) = A_\delta^{-1}$ — обратная к A_δ матрица, т. е. имеем

$$\alpha = P\Big\{ \bigcap_{j=1}^{n} \{\overline{a}_{j1}c_1(t,\omega) + \overline{a}_{j2}c_2(t,\omega) + \dots + \overline{a}_{jn}c_n(t,\omega)\} \geq 0 \Big\}.$$

В практических задачах, как правило, можно определить границы изменения случайных величин $c(t,\omega)$ и эти границы конечны, тогда имеем:

$$\alpha = P\Big[\Big\{ \bigcap_{j=1}^{n} \{\overline{a}_{j1}c_1(t,\omega) + \overline{a}_{j2}c_2(t,\omega) + \dots + \overline{a}_{jn}c_n(t,\omega)\} \geq 0 \Big\},$$

$$c_i^-(t) \leq c_i(t,\omega) \leq c_i^+(t), \forall i = 1, 2, \dots, n\Big] = P\{c_i(t,\omega) \in D\},$$

где D — пересечение параллелепипеда $[c^-, c^+]$ с областью допустимости, образованной полупространствами.

Вопрос абсолютной плановой устойчивости приводит к определению области D. Если известна совместная функция распределения компонент вектора $c(t,\omega)$, то нахождение вероятности $P\{c(t,\omega) \in D\}$ в силу линейности всех ограничений сводится к сложному интегрированию по многогранной области совместной функции распределения случайных величин $c_i(t,\omega)$.

Пусть, например, случайные величины $c_i(t,\omega)$ взаимно независимы и все имеют равномерное распределение, тогда следует

$$\alpha = P(c(t,\omega) \in D) = \frac{\int\limits_D \dots \int dc_1 \dots dc_n}{\prod\limits_{i=1}^{n} \Big(c_i^+(t) - c_i^-(t)\Big)},$$

где область D определяется соотношением

$$D = \Big\{ c(t,\omega) : c(t,\omega) \in \{[c_i^-, c_i^+], c_i^- < c_i^+\} \bigcap_{i=1}^{n}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{\overline{a}_{j1}c_1(t,\omega) + \overline{a}_{j2}c_2(t,\omega) + \dots + \overline{a}_{jn}c_n(t,\omega) \geq 0\} \Big\}.$$

Рассмотрим теперь задачу при каждой реализации ω:

$$\min_{u_i(t)} F(y_1(t), y_1(t), \ldots, y_n(t));$$

$$A(\omega)u(t) \leq c(t,\omega);$$

$$u(t) \geq 0, c(t,\omega) > 0, y_i(1) > 0, y_i(t) \geq y_i(t-1), t \in [1,T],$$

где $F_i(y(t))$ выпуклая вниз функция, а условия задачи образуют случайный многогранник $Z(\omega)$. Требуется найти вероятность, с которой некоторая точка остается оптимальной при всех реализациях ω. Минимум выпуклой функции по допустимой области достигается либо в точке абсолютного минимума этой функции, если она существует и принадлежит некоторым допустимым областям $Z(\omega)$, либо на границе допустимой области.

Следовательно, можно ставить вопрос об абсолютной плановой устойчивости в смысле приведенного выше определения только исходя из точки абсолютного минимума выпуклой функции $F_i(y(t))$, т.к. в противном случае точка минимума в различных областях $Z(\omega)$, вообще говоря, будет меняться.

Поэтому пусть на $u^0(t) > 0$ функция $F_i(y(t))$ достигает абсолютного минимума, и рассмотрим случай, когда $u^0(t) > 0$ принадлежит допустимой в среднем области $Z(\omega)$. Пусть все параметры из разных ограничений задачи независимы друг от друга. Тогда необходимо вычислить, предполагая, что все параметры имеют непрерывное распределение:

$$\alpha = P\Big\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j^0(t) \leq c_i(t,\omega) \Big\} = P\Big\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{ g_i(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, c_i(t)) =$$

$$= c_i(t,\omega) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) u_j^0(t) \geq 0\} \Big\} = \prod_{i=1}^{n} P\{ g_i(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, c_i(t)) \geq 0\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \int\limits_{g_i \geq 0} (n+1) \int p_i(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, c_i(t)) da_{i1}, da_{i2}, \ldots, da_{in}, dc_i,$$

где $p_i(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, c_i(t))$ — совместная плотность распределения случайного вектора $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, c_i(t))$.

7.6 Функциональная устойчивость в стохастических задачах принятия решений

В ряде реальных задач конечным критерием устойчивости служат величины отклонений оптимального значения целевого функционала. Поэтому вводится понятие стохастической устойчивости выпуклой задачи принятия решений, в которой проблема устойчивости рассматривается с точки зрения функциональной устойчивости.

Определение 7.6.1. *Пусть при любом $\omega \bmod \varepsilon$ выполняется неравенство*

$$|F(y_1(t,\omega), y_2(t,\omega), \ldots, y_n(t,\omega))| < \delta,$$

тогда назовем задачу принятия решений в условиях неполной информации функциональноустойчивой с характеристиками ε, δ.

Если задача ε, δ-устойчива, то в силу непрерывности целевого функционала по совокупности аргументов можно подобрать δ такое, что задача будет функционально ε, δ-устойчива.

В различных прикладных задачах принятия решений случайные параметры имеют оптимистические и пессимистические границы изменения, то есть случайные величины имеют конечное распределение. В таких случаях при некоторых условиях мы можем определить область изменения целевой функции и локализовать множество оптимальных планов при всех реализациях $\omega \in \Omega$.

7.7 Устойчивость по i-му ограничению в стохастических задачах принятия решений. Плановая устойчивость по i-му ограничению

Запишем задачу принятия решений по распределению ресурсов с вероятностными ограничениями в следующем виде

$$F(y(u,t)) = F_\omega(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \to \inf; \tag{7.7.1}$$

$$Au(t) \leq c(t,\omega); \tag{7.7.2}$$

$$y_i(t) = y_i(t-1) + S_i(t,\omega)u_i(t) + d_i(t,\omega); \tag{7.7.3}$$

$$y_i(t) \geq y_i(t-1), y_i(1) > 0,$$

$$u_i(t) \geq 0, S_i(t,\omega) \geq 0, c(t,\omega) > 0, i = \overline{1,n}, t \in [1,T], \tag{7.7.4}$$

где

A — блочно-диагональная матрица условий задачи (7.7.1)-(7.7.4) (размерности $3n \times 3n$);

u — вектор переменных (размерности $3n$);

c — вектор ограничений (размерности $3n$).

Рассмотрим i-ю задачу параметрического программирования, полученную из задачи (7.7.1)-(7.7.4)

$$F_\omega(y(u^{0i},t)) = F_\omega(y_1^{0i}(t), y_2^{0i}(t), \ldots, y_n^{0i}(t)) \to \min, \tag{7.7.5}$$

$$\sum_{r=1}^{3n} a_{jr}u_r(t) = (Au(t))_j \leq c_j(t,\overline{\omega}), \tag{7.7.6}$$

$$\sum_{r=1}^{3n} a_{ir}u_r(t) = (Au(t))_i \leq c_i(t,\omega), \tag{7.7.7}$$

$$c_j(t,\overline{\omega}) > 0, c_i(t,\omega) > 0, y_j^{0i}(t) > 0, y_j^{0i}(t) \geq y_j^{0i}(t-1),$$

$$u_i(t) \geq 0, i,j = \overline{1,3n}, i \neq j, \omega \in \Omega, \tag{7.7.8}$$

здесь

$c_j(t,\overline{\omega})$ — среднее значение случайной величины $c_j(\omega)$,

$u_j^{0i}(t)(i,j=\overline{1,3n})$ — оптимальный план задачи (7.7.5)-(7.7.8) при реализации $c_i(t,\omega)$.

Введем следующие множества

$$S(\omega)=\Big\{u(t):(Au(t))_i\le c_i(t,\omega),u_i(t)\ge 0,i=\overline{1,3n}\Big\},$$

$$S^-(\omega)=\Big\{u(t):(Au(t))_i^-\le c_i^-(t,\omega),u_i(t)\ge 0,i=\overline{1,3n}\Big\},$$

$$S^+(\omega)=\Big\{u(t):(Au(t))_i^+\le c_i^+(t,\omega),u_i(t)\ge 0,i=\overline{1,3n}\Big\},$$

где в $A_i^+,c_i^+(t),A_i^-,c_i^-(t),i=\overline{1,3n}$ — случайные данные, представляющие реализации вектора $c(t,\omega)$, заменены своими оптимистическими и пессимистическими границами соответственно. Рассмотрим некоторый $3n$-мерный параллелепипед, построенный вокруг оптимального в среднем плана $u^0(t,\overline{\omega})$, задачи (7.7.1)-(7.7.4), т.е.

$$\Big[u^0(t,\overline{\omega})-\delta,u^0(t,\overline{\omega})+\delta\Big], \tag{7.7.9}$$

где δ — вектор, составляющие которого строго больше нуля, но которые могут быть разной величины.

Определение 7.7.1. *Будем говорить, что задача принятия решений (7.7.1)-(7.7.4) планово устойчива по i-му ограничению с характеристиками ε_i,δ, если выполняется соотношение*

$$P_i\Big\{u^{0i}(t,\omega)\in\Big[u^0(t,\overline{\omega})-\delta,u^0(t,\overline{\omega})+\delta\Big]\Big\}\ge 1-\varepsilon_i.$$

Предполагаем единственность решения задачи (7.7.5)-(7.7.8) при каждом i и любом ω.

Рассмотрим случай, когда параллелепипед пересекается только с теми ограничениями задачи (7.7.1)-(7.7.4), которые обращаются на оптимальном в среднем плане $u^0(t,\overline{\omega})$ в точное равенство. Вектор δ найдем следующим образом: возьмем минимальное расстояние d

из всех расстояний от точки $u^0(t,\overline{\omega})$ до гиперплоскостей, для которых выполняется неравенство $((Au^0(t,\overline{\omega}))_j < c_j(t,\overline{\omega})$, и построим параллелепипед с центром в точке $u^0(t,\overline{\omega})$ со сторонами длины $2\delta_j$, причем должно выполняться неравенство $\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{3n}\delta_j^2} < d$.

Пусть J_1 — множество всех тех индексов $i = \overline{1,3n}$, для которых ограничения при $c_i(t,\overline{\omega})$ задачи (7.7.1)-(7.7.4) превращаются на $u^0(t,\overline{\omega})$ в точное равенство, т.е. выполняется

$$\sum_{j\in J_1} a_{ij}u_j^0(t,\overline{\omega}) = c_i(t,\overline{\omega}),$$

а J_2 — множество остальных индексов, т.е.

$$\sum_{j\in J_2} a_{ij}u_j^0(t,\overline{\omega}) = c_i(t,\overline{\omega}).$$

В случае $i \in J_1$ будем решать задачу для λ_i, $0 \le \lambda_i \le 1$, исходя из $\overline{\lambda}_i$, для которого выполняется равенство

$$c_{\overline{\lambda}_i}(t) = c_i(t,\overline{\omega}) = (1-\overline{\lambda}_i)c_i^-(t) + \overline{\lambda}_i c_i^+(t),$$

а условие $((Au(t))_i = c_i(t,\omega)$ принимает вид

$$((Au(t))_i = (1-\lambda_i)c_i^-(t) + \lambda_i c_i^+(t) = c_{\lambda_i}(t).$$

Получаем непрерывную оптимальную вектор-функцию, которая зависит от λ_i.

Перемещая $c_i(t,\omega) = c_{\lambda_i}(t)$ из $c_i(t,\overline{\omega})$ в $c_i^-(t)$, найдем нижнюю границу изменения $c_i(t,\omega)$. В этом случае оптимальный план обязательно является элементом параллелепипеда (7.7.9). При этом возможны два случая:

1) какая-либо координата $u_j^{0i}(t,\omega)$ выходит из параллелепипеда (7.7.9), т.е. существует такое λ_i^1, что выполняется

$$Au^{0i}(t,\omega))_j \le c_j(t,\overline{\omega}), j = \overline{1,3n}, j \ne i,$$

$$Au^{0i}(t,\omega))_i = c_i(t,\omega) = (1-\lambda_i^1)c_i^-(t) + \lambda_i^1 c_i^+(t),$$

$$u^{0i}(t,\omega) \geq 0,$$

$$u_j^0(t,\overline{\omega}) - \delta_j \leq u_j^{0i}(t,\omega) \leq u_j^0(t,\overline{\omega}) + \delta_j, j = \overline{1,3n},$$

и существует хотя бы один $u_j^{0i}(t,\omega)$ такой, что либо $u_j^{0i}(t,\omega) = u_j^0(t,\overline{\omega}) + \delta_j$, либо $u_j^{0i}(t,\omega) = u_j^0(t,\overline{\omega}) - \delta_j$;

2) передвигаясь из точки $c_i(t,\overline{\omega})$ в точку $c_i^-(t)$, наткнемся на границу c_i^-, для которой $\lambda_i = 0$, а оптимальный план $u^{0-}(t)$ содержится еще в параллелепипеде (7.7.9).

Для того, чтобы найти верхнюю границу, будем перемещать $c_i(t,\omega)$ из $c_i(t,\overline{\omega})$ в $c_i^+(t)$.

Также возможны два случая:

1) какая-нибудь координата $u_j^{0i}(t,\omega)$ выходит из параллелепипеда (7.7.9), т.е. существует λ_i^2 такое, что выполняются соотношения, аналогичные ранее приведенному примеру для нижней границы;

2) при перемещении $c_i(t,\omega)$ придем к реализации $c_i^+(t)$, т.е. $\lambda_i^2 = 1$, и оптимальный план является элементом параллелепипеда (7.7.9).

Следовательно, изменяя $c_i(t,\omega)$, мы нашли нижнюю и верхнюю границы изменения значений случайной величины $c_i(t,\omega)$, между которыми оптимальный план задачи (7.7.5)-(7.7.8) обязательно является элементом параллелепипеда (7.7.9).

Для $i \in J_2$ справедливы соотношения

$$Au^0(t,\overline{\omega}))_j \leq c_j(t,\overline{\omega}),$$

$$Au^0(t,\overline{\omega}))_i < c_i^-(t).$$

При перемещении $c_i(t,\omega)$ из $c_i(t,\overline{\omega})$ в $c_i^-(t)$ i-я гиперплоскость отходит от линии уровня $F(y(u,t)) = F(y^0(u^0,t,\omega))$, ограничивающей выпуклую область и включающей все линии уровня, дающие меньшее значение функции $F(y(u,t))$, чем значение $F(y^0(u^0,t,\omega))$.

Следовательно, i-я гиперплоскость не пересекается с такими линиями уровня, и $u^0(t,\overline{\omega})$ является также оптимальным планом для всех λ_i, между значениями $c_i^-(t)$ и $c_i(t,\overline{\omega})$.

Если при $c_i^+(t)$ оптимальный план задачи (7.7.5)-(7.7.8) $u^{i+}(t)=u^0(t,\overline{\omega})$, то оптимальный в среднем план $u^0(t,\overline{\omega})$ является оптимальным планом при любой реализации $c_i(t,\omega)\in[c_i^-,c_i^+]$. Для нижней границы это доказано. Поскольку при перемещении $c_i(t,\omega)$ из $c_i(t,\overline{\omega})$ в $c_i^+(t)$ минимум целевой функции $F(y^0(u^0,t,\omega))$ может только увеличиваться, а мы имеем $F(y^0(u^0,t,\overline{\omega}))=F(y^{i+}(u^{i+},t,\omega))$, то отсюда следует, что $F(y^{0i}(u^{0i},t,\omega))\equiv F(y^0(u^0,t,\omega))$ при всех реализациях $c_i(t,\omega)$, а в силу единственности решения $u^{0i}(t)=u^{0i}(t,\overline{\omega})$ при любом $c_i(t,\omega)$.

Если оптимальный план $u^{i+}(t)\neq u^{i+}(t,\overline{\omega})$ при $c_i^+(t)$ не является элементом параллелепипеда (7.7.9), то из решения параметрической задачи мы найдем λ_i^2, для которого $u^{i+}(t)$ лежит на границе параллелепипеда.

Для каждого ограничения i, тем самым, найден интервал изменения случайных величин $c_i(t,\omega)$, в пределах которого оптимальный план задачи (7.7.5)-(7.7.8) обязательно будет элементом параллелепипеда устойчивости.

Теперь можно найти нижние границы вероятностей ε_i, с которыми задача планово устойчива по соответствующим ограничениям в понятиях случайных величин $c_i(t,\omega)$, т.е. имеем соотношение:

$$P_i=P_i\Big\{u^{0i}(t,\omega)\in\Big[u^0(t,\overline{\omega})-\delta,u^0(t,\overline{\omega})+\delta\Big]\Big\}\geq$$

$$\geq P_i\Big\{c_i(t,\omega)\in[c_i^1,c_i^2]\mid c_j(t,\omega)=c_j(t,\overline{\omega}),j=\overline{1,3n},j\neq i\Big\}=1-\varepsilon_i.$$

Здесь c_i^1 и c_i^2 определяются из следующих условий:

1) для $i \in J_1$:

$$c_i^1 = \begin{cases} c_i^-(t), \text{ если } u^{i-} \in [u^0(t,\overline{\omega}) - \delta, u^0(t,\overline{\omega}) + \delta], \\ (1-\lambda_i^1)c_i^-(t) + \lambda_i^1 c_i^+(t), \text{ если } u^{i-} \notin [u^0(t,\overline{\omega}) - \delta, u^0(t,\overline{\omega}) + \delta]; \end{cases}$$

$$c_i^2 = \begin{cases} c_i^+, \text{ если } u^{i+} \in [u^0(t,\overline{\omega}) - \delta, u^0(t,\overline{\omega}) + \delta], \\ (1-\lambda_i^2)c_i^-(t) + \lambda_i^2 c_i^+(t), \text{ если } u^{i+} \notin [u^0(t,\overline{\omega}) - \delta, u^0(t,\overline{\omega}) + \delta]; \end{cases}$$

2) для $i \in J_2$:

$c_i^1 = c_i^-(t)$,

$$c_i^2 = \begin{cases} c_i^+, \text{ если } u^{i+} \in [u^0(t,\overline{\omega}) - \delta, u^0(t,\overline{\omega}) + \delta], \\ (1-\lambda_i^2)c_i^-(t) + \lambda_i^2 c_i^+(t), \text{ если } u^{i+} \notin [u^0(t,\overline{\omega}) - \delta, u^0(t,\overline{\omega}) + \delta]. \end{cases}$$

7.8 Функциональная устойчивость по i-му ограничению

Аналогично описанному в предыдущем пункте 7.7 методу мы можем исследовать функциональную устойчивость по i-му ограничению. Вновь рассмотрим задачу распределения ресурсов в следующем виде

$$F(y(u,t)) = F_\omega(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \to \inf; \tag{7.8.1}$$

$$Au(t) \le c(t,\omega); \tag{7.8.2}$$

$$y_i(t) = y_i(t-1) + S_i(t,\omega)u_i(t) + d_i(t,\omega); \tag{7.8.3}$$

$$y_i(t) \ge y_i(t-1), y_i(1) > 0,$$

$$u_i(t) \ge 0, S_i(t,\omega) \ge 0, c(t,\omega) > 0, i = \overline{1,n}, t \in [1,T], \tag{7.8.4}$$

где

A — блочно-диагональная матрица условий задачи (7.8.1)-(7.8.4) (размерности $3n \times 3n$);

u — вектор переменных (размерности $3n$);

c — вектор ограничений (размерности $3n$).

Рассмотрим i-ю задачу параметрического программирования, полученную из задачи (7.8.1)-(7.8.4):

$$F_\omega(y(u^{0i},t)) = F_\omega(y_1^{0i}(t), y_2^{0i}(t), \ldots, y_n^{0i}(t)) \to \min, \tag{7.8.5}$$

$$\sum_{r=1}^{3n} a_{jr} u_r(t) = (Au(t))_j \leq c_j(t, \overline{\omega}), \tag{7.8.6}$$

$$\sum_{r=1}^{3n} a_{ir} u_r(t) = (Au(t))_i \leq c_i(t, \omega), \tag{7.8.7}$$

$$y_j^{0i}(t) > 0, y_j^{0i}(t) \geq y_j^{0i}(t-1), c_j(t, \overline{\omega}) > 0, c_i(t, \omega) > 0,$$

$$u_i(t) \geq 0, i, j = \overline{1, 3n}, i \neq j, \omega \in \Omega, \tag{7.8.8}$$

здесь

$c_j(t, \overline{\omega})$ — среднее значение случайной величины $c_j(\omega)$,

$u_j^{0i}(t)(i, j = \overline{1, 3n})$ — оптимальный план задачи (7.8.5)-(7.8.8) при реализации $c_i(t, \omega)$.

В задаче (7.8.5)-(7.8.8) будем рассматривать те значения $c_i(t, \omega)$, для которых имеет место следующее соотношение

$$|F(y_1^0(t,\overline{\omega}), y_2^0(t,\overline{\omega}),\ldots, y_n^0(t,\overline{\omega})) - F(y_1^{0i}(t,\omega), y_2^{0i}(t,\omega),\ldots, y_n^{0i}(t,\omega))| \leq \delta.$$

Определение 7.8.1. *Будем говорить, что задача принятия решений (7.8.1)-(7.8.4) функционально устойчива по i-му ограничению с характеристиками ε_i, δ (здесь δ — число), если выполняется соотношение*

$$P_i = P_i\Big\{|F(y_1^0(t,\overline{\omega}), y_2^0(t,\overline{\omega}), \ldots, y_n^0(t,\overline{\omega})) -$$

$$- F(y_1^{0i}(t,\omega), y_2^{0i}(t,\omega), \ldots, y_n^{0i}(t,\omega))| \leq \delta\Big\} \geq 1 - \varepsilon_i.$$

Чтобы найти вероятности P_i, мы должны решить параметрическую задачу принятия решений (7.8.5)-(7.8.8) для случайной величины $c_i(t,\omega)$. Найдем λ_i^1 и λ_i^2, которые определяют допустимую область изменения случайной величины $c_i(t,\omega)$ и обеспечивают функциональную устойчивость задачи (7.8.1)-(7.8.4). Будем искать интервал $[\lambda_i^1, \lambda_i^2]$ исходя из оптимальных решений $u^{i-}(t)$ и $u^{i+}(t)$, заменяя $c_i(t,\omega)$ в задаче (7.8.5)-(7.8.8) на $c_i^-(t)$ и $c_i^+(t)$ соответственно. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям, приведенным в предыдущем пункте.

7.9 Устойчивость по вероятностному параметру α

Рассмотрим задачу принятия решения распределения ресурсов следующего вида:

$$F(y(u,t)) = F_\omega(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \to \inf; \tag{7.9.1}$$

$$Au(t) \le c(t,\omega); \tag{7.9.2}$$

$$y_i(t) = y_i(t-1) + S_i(t,\omega)u_i(t) + d_i(t,\omega); \tag{7.9.3}$$

$$y_i(t) \ge y_i(t-1), y_i(1) > 0,$$

$$u_i(t) \ge 0, S_i(t,\omega) \ge 0, c(t,\omega) > 0, i = \overline{1,n}, t \in [1,T], \tag{7.9.4}$$

где

A — блочно-диагональная матрица условий задачи (7.9.1)-(7.9.4) (размерности $3n \times 3n$);

u — вектор переменных (размерности $3n$);

c — вектор ограничений (размерности $3n$).

Перепишем задачу (7.9.1)-(7.9.4) в виде

$$\varphi_0 = F(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \to \min,$$

$$P_1\Big\{g_1(u,t,\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j(t) - c_i(t,\omega) \le 0\Big\} \ge \alpha_1,\ 0,5 < \alpha_1 < 1,$$

$$P_2\{g_2(u,t,\omega) = b_i(t,\omega) - h_i(t,\omega)\} \ge \alpha_2,\ 0,5 < \alpha_2 < 1,$$

$$u_i(t) \geq 0, h_i(t,\omega) \geq 0, y_i(1) > 0, y_i(t) \geq y_i(t-1),$$

$$c_i(t,\omega) > 0, i = \overline{1,n}, t \in [1,T], \omega \in \Omega$$

или в общем виде

$$\varphi_0 = F(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \to \min, \tag{7.9.5}$$

$$P_k\{g_k(u,t,\omega)\} \geq \alpha_k,\ 0,5 < \alpha_k < 1, k = 1,2, \tag{7.9.6}$$

$$u_i(t) \geq 0, y_i(1) > 0, y_i(t) \geq y_i(t-1), i = \overline{1,n}, t \in [1,T], \omega \in \Omega. \tag{7.9.7}$$

Для любого $k = 1,2$ справедлива следующая теорема

Теорема 7.9.1. *Пусть задача (7.9.5)-(7.9.7) удовлетворяет условиям:*

1) функция $g(u,t,\omega)$ строго выпукла по ω, непрерывна по всем переменным;

2) $\Omega \in R^n$; ω — непрерывная случайная величина;

3) функция φ_0 непрерывна по u;

4) для каждого $\alpha \in [\alpha^1, \alpha^2]$, $(0,5 < \alpha^1 < \alpha^2 < 1)$ существует единственное решение задачи (7.9.5) - (7.9.7) и $u^*(t,\alpha)$;

5) для $\alpha = \alpha^1$ множество допустимых планов задачи (7.9.5)-(7.9.7) ограничено; тогда существует последовательность $\{\Delta\alpha_n\} \to +0$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} u^*(t, \alpha^2 - \Delta\alpha_n) = u^*(t,\alpha^2).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\lim_{\|\Delta u(t)\|\to 0}\Big[P(g(u+\Delta u,t,\omega) \leq 0) - P(g(u,t,\omega) \leq 0)\Big]$$

для фиксированного u.

$$P(g(u+\Delta u,t,\omega) \leq 0) = P(g(u+\Delta u,t,\omega) \leq 0, g(u,t,\omega) \leq 0) +$$

$$+P(g(u+\Delta u,t,\omega)\leq 0, g(u,t,\omega)>0).$$

Аналогично,

$$P(g(u,t,\omega)\leq 0)=P(g(u,t,\omega)\leq 0, g(u+\Delta u,t,\omega)\leq 0)+$$

$$+P(g(u,t,\omega)\leq 0, g(u+\Delta u,t,\omega)>0).$$

Тогда

$$P(g(u+\Delta u,t,\omega)\leq 0)-P(g(u,t,\omega)\leq 0)=$$

$$=P(g(u+\Delta u,t,\omega)\leq 0, g(u,t,\omega)>0)-P(g(u,t,\omega)\leq 0, g(u+\Delta u,t,\omega)>0).$$

Верно также

$$|P(g(u+\Delta u,t,\omega)\leq 0)-P(g(u,t,\omega)\leq 0)|\leq$$

$$\leq P(g(u+\Delta u,t,\omega)\leq 0, g(u,t,\omega)>0)+P(g(u,t,\omega)\leq 0, g(u+\Delta u,t,\omega)>0).$$

Из непрерывности функции $g(u,t,\omega)$ следует, что для некоторого ω_0 такого, что $g(u,t,\omega_0)>0$ при достаточно малых $\|\Delta u\|$ выполняется $g(u+\Delta u,t,\omega_0)>0$, тогда

$$\lim_{\|\Delta u(t)\|\to 0}\Big[P(g(u+\Delta u,t,\omega)\leq 0), g(u,t,\omega)>0\Big]\leq$$

$$\leq\lim_{\|\Delta u(t)\|\to 0}\Big[P(g(u+\Delta u,t,\omega)=0), g(u,t,\omega)>0\Big]\leq$$

$$\leq\lim_{\|\Delta u(t)\|\to 0}P(g(u+\Delta u,t,\omega)=0).$$

Допустим, что для некоторого $\Delta\widetilde{u}(t)$ выполняется соотношение $P(g(u+\Delta\widetilde{u},t,\omega)=0)>0$. В этом случае, из непрерывности случайной величины ω следует, что

$$V^n(\theta : g(u+\Delta\widetilde{u},t,\theta)=0)>0,$$

где V^n — объем в n-мерном пространстве R^n, а это противоречит строгой выпуклости функции $g(u,t,\omega)$.

Тогда $P(g(u+\Delta u,t,\omega)=0)=0$ для любого Δu, а поэтому

$$\lim_{\|\Delta u(t)\|\to 0}\Big[P(g(u+\Delta u,t,\omega)\le 0), g(u,t,\omega)>0\Big]\le$$
$$\le \lim_{\|\Delta u(t)\|\to 0} P(g(u+\Delta u,t,\omega)=0)=0.$$

По аналогии получаем

$$\lim_{\|\Delta u(t)\|\to 0}\Big[P(g(u+\Delta u,t,\omega)\le 0), g(u,t,\omega)>0\Big]\le$$
$$\le \lim_{\|\Delta u(t)\|\to 0} P(g(u,t,\omega)=0)=0.$$

Итак,

$$\lim_{\|\Delta u(t)\|\to 0}|P(g(u+\Delta u,t,\omega)\le 0)-P(g(u,t,\omega)\le 0)|\le$$
$$\le \lim_{\|\Delta u(t)\|\to 0} P(g(u+\Delta u,t,\omega)\le 0), g(u,t,\omega)>0)+$$
$$+\lim_{\|\Delta u(t)\|\to 0} P(g(u,t,\omega)\le 0, g(u+\Delta u,t,\omega)>0)\le 0+0=0.$$

Что и означает непрерывность функции $P(g(u,t,\omega)\le 0)$ по $u(t)$.

Построим функцию $u^*(t,\alpha^2-\Delta\alpha)$ оптимального решения задачи (7.9.5)-(7.9.7) от параметра α при $\Delta\alpha\in[0,5;\alpha^1-\alpha^2]$. В силу условия 4) теоремы такая функция существует и однозначна.

Так как множество допустимых планов задачи (7.9.5)-(7.9.7) ограничено при $\alpha=\alpha^1$, то для любого $u(t)$, такого, что $P(g(u,t,\omega)\le 0)\ge\alpha^1$, справедливо: $\|u(t)\|\le c(t)$, т.е. при любых $u(t)$ и $\alpha\in[\alpha^1,\alpha^2]$ таких, что $P(g(u,t,\omega)\le 0)\ge\alpha$ справедливо $\|u(t)\|\le c(t)$. Отсюда следует, что при любом $\Delta\alpha\in[0,5;\alpha^1-\alpha^2]$ выполняется $\|u^*(t,\alpha^2-\Delta\alpha)\|\le c(t)$.

А это и означает, что множество $u^*(t,\alpha^2-\Delta\alpha)$ ограничено для $\Delta\alpha\in[0,5;\alpha^1-\alpha^2]$, поэтому можно выбрать последовательность $\Delta\alpha_n\to 0$ такую, что существу $\lim\limits_{n\to\infty}u^*(t,\alpha^2-\Delta\alpha_n)=u(t)$.

Так как $P(g(u,t,\omega)\le 0)=\lim\limits_{n\to\infty}u^*(\alpha^2-\Delta\alpha_n)=\alpha^2$, то $u(t)$ — допустимый план задачи (7.9.1)-(7.9.3) при $\alpha=\alpha^2$, поэтому

$\varphi_0(u(t)) \leq \varphi_0(u^*(t,\alpha^2))$. С другой стороны,
$\varphi_0(u^*(t,\alpha-\Delta\alpha_n)) \geq \varphi_0(u^*(t,\alpha^2))$ при любом n, и функция φ_0 непрерывна по $u(t)$, следовательно, $\varphi_0(u(t)) \geq \varphi_0(u^*(t,\alpha^2))$.

Получаем $\varphi_0(u(t)) = \varphi_0(u^*(t,\alpha^2))$. В силу единственности решения задачи (7.9.1)-(7.9.3) при $\alpha = \alpha^2$ справедливо равенство
$u(t) = u^*(t,\alpha^2)$.

Таким образом, последовательность $\Delta\alpha_n \to 0$ удовлетворяет требованиям теоремы.

Теорема доказана.

7.10 Устойчивость по вероятностному распределению ω

Проведем исследование условий устойчивости решения задачи принятия решений по вероятностному распределению случайной величины ω. Для этого рассмотрим вновь следующую задачу принятия решений.

$$\varphi_0 = F(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \to \min, \tag{7.10.1}$$

$$P_k\{g_k(u,t,\omega) \leq 0\} \geq \alpha_k,\ 0,5 < \alpha_k < 1,\ k = 1,2, \tag{7.10.2}$$

$$u_i(t) \geq 0,\ y_i(1) > 0,\ y_i(t) \geq y_i(t-1),\ i = \overline{1,n},\ t \in [1,T],\ \omega \in \Omega. \tag{7.10.3}$$

Справедлива теорема для любого k.

Теорема 7.10.1. *Пусть задача (7.10.1)-(7.10.3) удовлетворяет следующим условиям:*

1) функция $g(u,t,\omega)$ строго выпукла по ω, непрерывна по всем переменным, $\omega \in R^n$, ω_n — последовательность непрерывных случайных величин, Ω — множество реализаций случайных величин ω_n, каждая случайная величина задает вероятностное пространство $(\Omega, F, P_{\omega_n})$, и существуют $G(u)$ и $G_n(u)$ — функции распре-

деления случайных величин ω *и* ω_n *соответственно, и некоторая последовательность чисел* $\{\varepsilon_n\}$ *такая, что* $\varepsilon_n > 0$, $\forall n$, $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ *такие, что* $\|G_n(u) - G(u)\| \le \varepsilon_n \|G(u)\|$ *для любого* $u(t)$*;*

2) множество реализаций случайных величин $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ *ограничено:* $V^n(\Omega) = c < +\infty$, *где* V^n *- объем в* n*-мерном пространстве;*

3) множество допустимых планов задачи (7.10.1)-(7.10.3) ограничено при некотором $0,5 < \alpha^1 < 1$*;*

4) существует решение задачи (7.10.1)-(7.10.3) при некотором $\alpha^0 > \alpha^1$ *(обозначим его* $u(t)$*) и решения задачи*

$$\min \varphi_0(u(t)), \qquad (7.10.4)$$

$$P_{\omega_n}\{g(u, t, \omega_n) \le 0\} \ge \alpha \qquad (7.10.5)$$

(обозначим $\widetilde{u}(t, \alpha)$*) для* $\alpha \in [\alpha^1, \alpha^0]$, *тогда существует последовательность* $\{\delta_n\}:\ \delta_n > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \delta_n > 0$ *такая, что* $\{\widetilde{u}(t, \alpha - \delta_n)\}$ *сходится к решению задачи (7.10.1)-(7.10.3) при* $\alpha = \alpha^0$.

`Доказательство.` Рассмотрим некоторую точку $u(t)$ — допустимый план задачи (7.10.1)-(7.10.3) при $\alpha = \alpha^0$. Из условий 1) и 2) теоремы следует, что:

$$|P_{\omega_n}\{f(u, t, \omega_n) \le 0\} - P_\omega\{g(u, t, \omega) \le 0\}| \le \varepsilon_n c(t).$$

Выберем в качестве δ_n такие числа, что $\delta_n > \varepsilon_n c(t)$; $\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Тогда начиная с некоторого n, будет $\delta_n < \alpha^0 - \alpha^1$ и существует решение $\widetilde{u}(t, \alpha^0 - \delta_n)$ задачи (7.10.4)-(7.10.5). То есть

$$P_{\omega_n}\{g(u, t, \omega_n) \le 0\} \ge P_\omega\{g(u, t, \omega) \le 0\} - \delta_n \ge \alpha^0 - \delta_n.$$

Это означает, что любой допустимый план задачи (7.10.1)-(7.10.3) при $\alpha = \alpha^0$ допустим для задачи (7.10.4)-(7.10.5). Это верно и для точки $u(t)$, значит,

$$\varphi_0(u(t)) \leq \varphi_0(\widetilde{u}(t, \alpha^0 - \delta_n)). \qquad (7.10.6)$$

Рассмотрим величину $P_\omega\left\{g(\widetilde{u}(\alpha^0 - \delta_n), t, \omega) \leq 0\right\}$. Согласно условиям 1) и 2) теоремы имеем

$$P_\omega\left\{g(\widetilde{u}(\alpha^0 - \delta_n), t, \omega) \leq 0\right\} \in \left[\alpha^0 - \delta_n - \varepsilon_n c(t), \alpha^0 - \delta_n + \varepsilon_n c(t)\right]. \qquad (7.10.7)$$

Значит, начиная с некоторого n, все точки $\left\{\widetilde{u}(\alpha^0 - \delta_n)\right\}$ допустимы для задачи (7.10.1)-(7.10.3) при $\alpha = \alpha^1$, и множество таких точек ограничено.

Выберем из последовательности $\left\{\widetilde{u}(t, \alpha^0 - \delta_n)\right\}$ сходящуюся последовательность $\left\{\widetilde{u}(t, \alpha^0 - \delta_{n_k})\right\}$ такую, что

$$\lim_{n_k \to +\infty} \left\{\widetilde{u}(t, \alpha^0 - \delta_{n_k})\right\} = u^*(t).$$

Будем считать полученные таким образом числа δ_{n_k} искомыми δ_n.

В силу непрерывности функции $P_\omega\left\{g(u^*, t, \omega) \leq 0\right\}$ по $u(t)$ и (7.10.7)

$$P_\omega\left\{g(u^*, t, \omega) \leq 0\right\} = \alpha^0,$$

т.е. точка $u^*(t)$ — допустимый план задачи (7.10.1)-(7.10.3) при $\alpha = \alpha^0$.

Из непрерывности функции φ_0 и (7.10.6) следует, что

$$\varphi_0(u(t)) \leq \varphi_0(u^*(t)),$$

т.е. точка $u^*(t)$ — решение задачи (7.10.1)-(7.10.3) при $\alpha = \alpha^0$.

Теорема доказана.

7.11 Устойчивость решений задач стохастического нелинейного программирования

В различных прикладных задачах стохастического программирования случайные параметры имеют оптимистические и пессимистические границы изменения, т.е. случайные величины распределены конечно (непрерывно или дискретно). В таких случаях можно при некоторых условиях определить область изменения целевой функции и локализовать множество оптимальных планов при всех реализациях $\omega \in \Omega$.

Пусть имеем задачу стохастического программирования, у которой целевая функция $f(x,\omega) = f(x)$ некоторая непрерывная детерминированная функция, а функции, определяющие условия задачи $g_i(x,\omega),\ \forall i = 1,2,\ldots,m$, квадратичны или линейны по x с неположительно определенными матрицами $H_i(\omega)$ при любой реализации $\omega \in \Omega$, т.е. имеем задачу вида

$$\begin{cases} \min_x f(x), \\ x^T H_i(\omega)x + p_i(\omega)x - b_i(\omega) \geq 0, \\ i = 1,2,\ldots,m,\ x \geq 0, \end{cases} \tag{7.11.1}$$

где все элементы матриц $H_i(\omega)$, векторов $p_i(\omega)$ и компоненты $b_i(\omega)$, $i = 1,2,\ldots,m$ могут быть случайными.

Введем следующие множества:

$$S(\omega) = \left\{x :\ x^T H_i(\omega)x + p_i(\omega)x \geq b_i(\omega),\ x \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,m\right\},$$

$$S^- = \left\{x :\ x^T H_i^- x + p_i^- x \geq b_i^+,\ x \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,m\right\},$$

$$S^+ = \left\{x :\ x^T H_i^+ x + p_i^+ x \geq b_i^-,\ x \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,m\right\},$$

где $H_i^+,\ p_i^+,\ b_i^+,\ H_i^-,\ p_i^-,\ b_i^+,\ i = 1,2,\ldots,m$ — случайные данные, представляющие реализации вектора ω, заменены своими оптимистическими и пессиместическими границами соответственно.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 7.11.1. *Если множество перманентных планов S^- не пусто, то для целевой функции задачи (7.11.1) имеет место соотношение:*

$$\min_{x \in S^+} f(x) \le \min_{x \in S(\omega)} f(x) \le \min_{x \in S^-} f(x). \qquad (7.11.2)$$

`Доказательство.` Достаточно показать,что $S^+ \supset S(\omega) \supset S^-$ откуда будет следовать, что минимум непрерывной функции по некоторому множеству меньше либо равен минимуму этой же функции по любой части этого множества. Если $x \in S^-$ следует, что для всех случайных реализаций ω и при $\forall i$ имеют место соотношения

$$x^T H_i^+ x + p_i^+ x \overset{(***)}{\ge} x^T H_i(\omega) x + p_i(\omega) x \overset{(**)}{\ge} x^T H_i^- x + p_i^- x \overset{(*)}{\ge}$$

$$\overset{(*)}{\ge} b_i^+ \overset{(**)}{\ge} b_i(\omega) \overset{(***)}{\ge} b_i^-, \ x \ge 0.$$

Отсюда следует, что любое допустимое решение из S^-, т.е. удовлетворяющее неравенству $(*)$, удовлетворяет и неравенству $(**)$, т.е. имеет место $S(\omega) \supset S^-$. Кроме того, любое допустимое решение из множества $S(\omega)$, т.е. удовлетворяющее $(**)$, удовлетворяет также $(***)$, т.е. имеем, что выполняется $S^+ \supset S(\omega)$. Окончательно,

$$S^+ \supset S(\omega) \supset S^-$$

и если $S^- \ne \emptyset$, то имеет смысл выражение (7.11.2) из условий теоремы.

`Теорема доказана.`

Для задачи на максимум может быть сформулирована симметричная теорема.

Следствие 7.11.1. *Пусть имеем задачу квадратичного программирования, т.е. пусть в задаче (7.11.1) $f(x) = f(x, \omega)$ — случай-*

ная квадратичная по x функция с неотрицательно определенной матрицей $H_0(\omega)$ при $\forall\omega$:

$$f(x,\omega) = x^T H_0(\omega)x + p_0(\omega)x + b_0(\omega),$$

где среди элементов H_0, p_0 и b_0 случайные составляющие с конечным распределением. Тогда выражение (7.11.2) из теоремы 7.11.1 примет вид:

$$f^-(x^-) = \min_{x\in S^+} f^-(x) \le \min_{x\in S(\omega)} f(x,\omega) \le \min_{x\in S^-} f^+(x) = f^+(x^+),$$

где x^- и x^+ — оптимальные планы по соответствующим множества S^+ и S^-, а $f^-(x)$ и $f^+(x)$ — целевые функции, в которых случайные данные заменены своими пессиместическими и оптимистическими границами соответственно.

Доказательство. В соответствии с утверждением теоремы (7.11.1) имеет место система взаимных вложений $S^+ \supset S(\omega) \supset S^-$. Если $x^0(\omega)$ оптимальное решение задачи (7.11.1) при реализации ω, то для любого ω выполняются соотношения:

$$f^-(x^-) = x^{-T} H_0^- x^- + p_0^- x^- + b_0^- \le f(x^0(\omega)) =$$

$$= x^{0T}(\omega) H_0(\omega) x^0(\omega) + p_0(\omega)x^0(\omega) + b_0(\omega) \le$$

$$\le x^{+T} H_0^+ x^+ + p_0^+ x^+ + b_0^+ = f^+(x^+),$$

откуда следует требуемой результат.

Теорема доказана.

Введем множество

$$\overset{>}{S}{}^- = \left\{x:\ x^T H_i^- x + p_i^- x > b_i^+,\ x > 0,\ i = 1,2,\ldots,m\right\}.$$

Теорема 7.11.2. *Пусть функции $g_i(x,\omega)$ в задаче (7.11.1) вогнуты или линейны, множество допустимых x: S^- не пусто, а множество S^+ ограничено. Если целевая функция задачи (7.11.1)* *вогнута и детерминирована, то для любого ω существует оптимальный план, который не принадлежит $\overset{>}{S}{}^{-}$, и множество всех таких оптимальных планов удовлетворяет условиям*

$$\{x^0(\omega)\}_{\forall\omega} \subset \Delta S = S^+ \setminus \overset{>}{S}{}^{-} .$$

`Доказательство.` Поскольку минимум вогнутой функции $f(x)$ на границе не больше минимума $f(x)$ внутри выпуклой области допустимых решений, то в силу непрерывности $f(x)$ и замкнутости и ограниченности области допустимых решений, при каждой реализации ω существует такая граничная точка $x^0(\omega)$, что выполняется

$$f(x^0(\omega)) \leq f(x(\omega)),\ \forall x(\omega) \in S(\omega).$$

Это означает, что при каждой реализации ω хотя бы одно из неравенств $g_i(x,\omega) \geq 0$ или $x_j \geq 0$ превращается в равенство, т.е. имеет место либо

$$x^{0T}(\omega)H_i(\omega)x^0(\omega) + p_i(\omega)x^0(\omega) = b_i(\omega)$$

для некоторого i_ω, либо $x_j^0(\omega) = 0$ для некоторого j_ω. Такой $x^0(\omega)$ не будет принадлежать $\overset{>}{S}{}^{-}$, поскольку множество $\overset{>}{S}{}^{-}$ не включает никаких x, которые превратили бы какое-либо ограничение задачи (7.11.1) в равенство. Однако $x^0(\omega) \in \overset{>}{S}{}^{+}$, т.к. S^+ включает все области допустимости при любой реализации ω, и, следовательно, выполняется

$$\{x^0(\omega)\}_{\forall\omega} \subset S^+ \setminus \overset{>}{S}{}^{-} .$$

`Теорема доказана.`

Если в теореме 7.11.2 целевая функция задачи (7.11.1) является выпуклой, а абсолютный минимум не принадлежит никакой области допустимости $S(\omega)$ при любом ω, то теорема 7.11.2 также имеет место. Доказательство ведется аналогично приведенному выше.

Теоремы 7.11.1 и 7.11.2 являются обобщением результатов работы [412], где рассматриваются только линейные функции в исходной задаче.

Следующее утверждение относится к частному случаю задачи стохастического программирования.

Теорема 7.11.3. *Если в задаче (7.11.1) все функции линейны по x и только вектор $b(\omega)$ имеет случайные, независимые и конечно, непрерывно распределенные составляющие, то множество оптимальных планов $\{x^0(\omega)\}_{\forall\omega}$ из теоремы 7.11.2 выпукло.*

`Доказательство.` Пусть $S(\omega)$ область допустимых планов задачи при реализации ω. Пусть $x^0(\omega_1)$ и $x^0(\omega_2)$ — оптимальные решения при любых двух реализациях ω_1 и ω_2, т.е. выполняется

$$f(x^0(\omega_1)) \leq f(x(\omega_1)) \; \forall x(\omega_1) \in S(\omega_1),$$

$$f(x^0(\omega_2)) \leq f(x(\omega_2)) \; \forall x(\omega_2) \in S(\omega_2).$$

Из $Ax^0(\omega_1) \geq b(\omega_1)$, $Ax^0(\omega_2) \geq b(\omega_2)$; $x^0(\omega_1) \geq 0$; $x^0(\omega_2) \geq 0$, следует для любого λ, $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$A(\lambda x^0(\omega_1) + (1-\lambda)x^0(\omega_2)) \geq \lambda b(\omega_1) + (1-\lambda)b(\omega_2),$$

$$x^0_\lambda = \lambda x^0(\omega_1) + (1-\lambda)x^0(\omega_2) \geq 0.$$

Вектор x^0_λ является возможной реализацией в силу независимости и непрерывного распределения случайных величин. Указанный вектор является и оптимальным, поскольку в силу линейности функций в задаче (7.11.1) градиенты целевой функции и нормали к гиперплоскостям ограничений постоянны, и оптимальная точка x^0_λ, при перемещении из $x^0(\omega_1)$ в $x^0(\omega_2)$ остается оптимальной, пока она допустима, а допустимость для вектора x_λ^0 доказана при любом λ, $0 \le \lambda \le 1$.

`Теорема доказана.`

Пусть в исходной задаче все функции квадратичны по x, причем с неположительно определенными матрицами $H_i(\omega)$, $i = \overline{1,m}$ и с неотрицательно определенной матрицей $H_0(\omega)$ при $\forall\omega$, т.е. имеем задачу квадратичного программирования для каждой реализации ω:

$$\min_x f(x,\omega) = \min_x (x^T H_0(\omega)x + p_0(\omega)x + b_0(\omega)) \tag{7.11.3}$$

при условиях

$$\begin{cases} x^T H_i(\omega)x + p_i(\omega)x \ge b_i(\omega),\ i = \overline{1,m}, \\ \qquad\qquad x \ge 0, \end{cases} \tag{7.11.4}$$

где элементы $H_i(\omega)$, $p_i(\omega)$ и $b_i(\omega)$, $i = 0,1,\ldots,m$ могут быть случайными величинами. Пусть $\overline{h}_{ej}^i$, $\overline{p}_j^i$ и $\overline{b}_i$ — математические ожидания, а σ_{ej}^i, σ_j^i и σ_i — дисперсии элементов соответственно $H_i(\omega)$, $p_i(\omega)$ и $b_i(\omega)$, $i = 0,1,\ldots,m$. Введем следующие множества и обозначения:

$$S(\omega) = \left\{x:\ x^T H_i(\omega)x + p_i(\omega)x \ge b_i(\omega),\ i = 1,2,\ldots,m,\ x \ge 0\right\},$$

$$S_\lambda^+ = \left\{x:\ x^T H_i^+ x + p_i^+ x \ge b_i^-,\ i = 1,2,\ldots,m,\ x \ge 0\right\},$$

$$S_\mu^- = \left\{x:\ x^T H_i^- x + p_i^- x \ge b_i^+,\ i = 1,2,\ldots,m,\ x \ge 0\right\},$$

$$\Delta_{\mu,\lambda} = \left\{x:\ x \in \left\{S_\lambda^+ \setminus \{x:\ x^T H_i^- x + p_i^- x \ge b_i^+,\ i = 1,2,\ldots,m,\ x \ge 0\}\right\}\right\},$$

$$f_{\lambda,\mu}^+ = \{\min_{x\in S_\mu^-} f_\lambda(x)\} = \min_{x\in S_\mu^-}(x^T H_0^+ x + p_0^+ x + b_0^+),$$

$$f_{\mu,\lambda}^- = \{\min_{x\in S_\lambda^+} f_\mu(x)\} = \min_{x\in S_\lambda^+}(x^T H_0^- x + p_0^- x + b_0^-),$$

где H_i^+, H_i^-, p_i^+, p_i^-, b_i^+, b_i^- определяются из следующих соотношений для любых $i = \overline{1,m}$ и $e,j = \overline{1,n}$:

$$H_i^- = (\overline{h}_{ej}^i - \mu\sigma_{ej}^i),\ H_i^+ = (\overline{h}_{ej}^i + \lambda\sigma_{ej}^i),$$

$$p_i^- = (\overline{p}_j^i - \mu\sigma_j^i), \quad p_i^+ = (\overline{p}_j^i + \lambda\sigma_j^i),$$

$$b_i^- = (\overline{b}_j - \mu\sigma_i), \quad b_i^+ = (\overline{b}_i + \lambda\sigma_i).$$

Предположим, что μ и λ строго больше нуля, $S_\mu^- \neq \Phi$, а абсолютный минимум в задаче (7.11.3)-(7.11.4) не принадлежит S_μ^- и для $S(\omega)$ рассматриваются все те ω, для которых существует хотя бы одно допустимое решение.

Теорема 7.11.4. *Вероятность того, что оптимальное значение целевой функции $f(x^0(\omega)) \in [f_{\mu,\lambda}^-, f_{\lambda,\mu}^+]$ и что оптимальный план задачи (7.11.3)-(7.11.4) $x^0(\omega)$ принадлежит области $\Delta_{\mu,\lambda}$, равняется по крайней мере*

$$P_{\mu,\lambda} = P\big\{\omega \mid H_i^- \leq H_i(\omega) \leq H_i^+;\ p_i^- \leq p_i(\omega) \leq p_i^+;$$

$$b_i^- \leq b_i(\omega) \leq b_i^+,\ \forall i = 0, 1, \ldots, m\big\}.$$

`Доказательство.` Достаточно доказать, что для события

$$\big\{\omega \mid H_i^- \leq H_i(\omega) \leq H_i^+;\ p_i^- \leq p_i(\omega) \leq p_i^+;$$

$$b_i^- \leq b_i(\omega) \leq b_i^+,\ \forall i = 0, 1, \ldots, m\big\} \qquad (*)$$

выполняется требование теоремы. Рассуждая аналогично тому, как это сделано в теореме 7.11.1, имеем $S_\lambda^+ \supset S(\omega) \supset S_\mu^-$ для всех ω из события $(*)$, а множество оптимальных планов для этих ω содержится в $\Delta_{\lambda,\mu}$. Тогда в соответствии со следствием из теоремы 7.11.1 имеем, что для всех ω из события $(*)$ выполняются требуемые соотношения для целевых функций:

$$f_{\mu,\lambda}^- = \min_{x \in S_\lambda^+} f_\mu(x) \leq \min_{x \in S(\omega), \omega \in (*)} f(x, \omega) \leq$$

$$\leq \min_{x \in S_\mu^-} f_\lambda(x) = f_{\lambda,\mu}^+.$$

Теперь легко показать, например, сдвинув небазисное ограничение, что в зависимости от вида целевой функции и функций ограничений могут существовать такие реализации, что оптимальный план $x^0(\omega) \in \Delta_{\lambda,\mu}$, и, соответственно,

$$f(x^0(\omega)) \in [f^-_{\mu,\lambda}, f^+_{\lambda,\mu}],$$

но что для таких реализаций ω не будет выполняться строгое требование события $(*)$. Отсюда следует, что $P_{\mu,\lambda}$ — есть нижняя граница для вероятности того, что оптимальный план $x^0(\omega) \in \Delta_{\lambda,\mu}$, а $f(x^0(\omega)) \in [f^-_{\mu,\lambda}, f^+_{\lambda,\mu}]$.

Теорема доказана.

Следует заметить, что если все элементы матриц $H_i(\omega)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ при любой реализации $\omega \in \Omega$ тождественно равны нулю, то имеем эквивалентную теорему для линейного случая [188].

Краткая библиография

Исследованию поведения оптимального плана как случайной точки посвящена работа М. Баббара [9], в которой изучается распределение оптимума в предположении постоянства оптимального базиса, в разложении оптимума отбрасываются члены второго порядка малости относительно случайных параметров задачи. В работе Г. Вагнера [424] отмечается ограниченность предположения о постоянстве оптимального базиса и оценки с точностью до первого порядка считаются недостаточными. Проблемы базисной устойчивости решений задач стохастического программирования получили наибольшее развитие в работах Н. И. Арбузовой и В. Л. Данилова [3], Н. И. Арбузовой [4], [5], [6], М. Куртиллота [102], К. Шетти [369], С. Барнетта [15] и других авторов. Работы последних трех указанных авторов объединяет общий подход к проблеме базисной устойчивости с точки зрения теории ошибок. В этих работах, как и в работе Н. И. Арбузовой [4], определяются максимальные отклонения параметров задачи вставляющие оптимальный базис неизменным. В работах Г. Тинтнера [401], И. Сенгупта, Г. Тинтнера и С. Миллхама [352], И. Сенгупта, Г. Тинтнера и Б. Моррисона [404], Г. Тинтнера, С. Миллхама и И. Сенгупта [402] содержатся качественные результаты по вопросам базисной устойчивости решений. В указанных работах, а также в работах Б. Беряну [31], [39], [40] исследуется проблема стохастической устойчивости оптимального значения задачи линейного программирования.

Примечательна работа А. Н. Тихонова, в которой указан естественный с экономической точки зрения путь исправления задачи, неустойчивой в смысле теории ошибок, чем намечен новый подход к исследованию задачи линейного программирования.

Заключение

Одним из важных разделов современной теории сложных систем является разработка количественных методов управления, планирования и проектирования в условиях риска и неопределенности. С единых позиций могут быть исследованы три группы математических методов: методы прогнозирования поведения сложных систем, методы управления в условиях риска и неопределенности (стохастическое программирование) и методы адаптации и обучения (стохастическая аппроксимация). В настоящем пособии были рассмотрены основные результаты, полученные в области стохастического программирования, а проблемы прогнозирования поведения сложных систем и методы адаптации и обучения не нашли отражения.

В периодической литературе последних десяти лет обсуждается большое число моделей планирования, управления и проектирования в условиях риска и неопределенности. В пособие наряду с общими методами анализа задач стохастического программирования включено определенное количество частных методов, каждый из которых эффективен для ограниченного круга приложений. Обзор работ по специальной задаче стохастического программирования — задаче фильтрации и прогноза и по итеративным методам стохастического программирования в пособие не включен.

Интересным, на наш взгляд, представляются попытки получения общего подхода к различным схемам стохастического программирования, которые предпринимались в работах И. Лемари [264], Д. Б. Юдина [199], [202] и Ю. М. Ермольева [132], [134].

Другое перспективное направление стохастического программирования основано на численных методах решения условных экстремальных задач в функциональных пространствах и теории двойственности бесконечномерного математического программирования. В работах по теории и методам стохастического программирования следует назвать работу С. И. Зуховицкого, Р. А. Поляка и М. Е. Примака [460] по численному решению задач выпуклого программирования в гильбертовых пространствах и работы Е. Г. Гольштейна [184] и А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова по двойственным задачам в функциональных пространствах.

В большинстве работ по стохастическому программированию условия задачи и целевая функция записываются в классических вероятностных понятиях и терминах. В тех случаях, когда целесообразно искать оптимальный план в виде случайного вектора, запись задачи в классических терминах становится необозримой и сложной для анализа. Именно это обстоятельство является одной из причин сравнительно ограниченных достижений в стохастическом программировании.

Известное продвижение в постановках задач стохастического программирования и в методах их решения можно получить, записывая стохастические задачи в терминах функциональных пространств и используя для их анализа по крайней мере те конструктивные бесконечномерные аналоги методов математического программирования, которые к настоящему времени разработаны.

Список литературы

[1] Абрамов Л. М., Бочкарева И. И., ‘О задаче стохастического программирования с вероятностными ограничениями’, в кн. *Оптимальное планирование*, вып. 16, стр. 3-9. Новосибирск (1970).

[2] Aitchison, J., ‘Statistical Problems of Treatment Allocation’, *Roy. Statist. Soc., Series A 133* (1970), 206-238.

[3] Арбузова Н. И., Данилов В.Л., ‘Об одной задаче стохастического линейного программирования и ее устойчивости’, *ДАН СССР*, том 162, № 1 (1965).

[4] Арбузова Н. И., ‘О стохастической устойчивости двойственных задач линейного программирования’, *Эконом. и мат. мет.,* том 2 (1966), стр. 558-562.

[5] Арбузова Н. И., ‘Взаимосвязь стохастической ε-устойчивости задач линейного и дробнолинейного программирования специального вида’, *Эконом. мат. мет.,* том 4 (1968), стр. 108-110.

[6] Арбузова Н. И., Вересков А. И., Николаева Н. Д., ‘Некоторые задачи стохастического программирования’, *Эконом. мат. мет.,* том 5 (1969), стр. 412-430.

[7] Avriel M. and Wilde D. J., ‘Stochastic Geometric Programming’, in *Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming*, (Princeton 1970), Princeton University Press, 73-91.

[8] Avriel M. and Williams A. C., ‘Complementary Geometric Programming’, *SIAM J. Appl. Math.,* Vol. 19 (1970), 125-141.

[9] Babbar M. M., 'Distributions of Solutions of a Set of Linear Equations with Application to Linear Programming', *J. Am. Statist. Assoc.,* Vol. 50 (1955), 854-869.

[10] Babbar M. M., Heady E., and Tintner G., 'Programming with Consideration of Variations in Input Coefficients', *J. Farm Econ.,* Vol. 37 (1955), 333.

[11] Balakrishnan A., 'Optimal Control Problems in Banach Spaces', *J. Soc. Industr. Appl. Math.,* A3, № 1 (1965), 152-180.

[12] Balinfty J. and Prekopa A., 'Simulation of Basis Stability in Stochastic Linear Programming', Presented at *SIGMAR Workshop on Stochastic Linear Programming*, Princeton 1965.

[13] Balinski M. L., 'An Algorithm for Finding All Vertices of Convex Polyhedral Sets', *SIAM J.,* Vol. 9 (1961), 72-88.

[14] Barlow R. E. and Proschan F., *Mathematical Theory of Reliability*, New York 1965, John Wiley.

[15] Barnett, S., 'Stability of the Solution to a Linear Programming Problem', *Operat. Res. Quart.,* Vol. 13 (1962), 219-228.

[16] Beale E. M. L., 'On Minimizing a Convex Function Subject to Linear Inequalities', *J. Roy. Statist. Soc.,* Series B17, № 2 (1955), 173-184.

[17] Beale E. M. L., 'On Quadratic Programming', *J. Naval Res. Logist. Quart.,* Vol. 6, № 3 (1959), 227-243.

[18] Beale E. M. L., 'The Use of Quadratic Programming in Stochastic Linear Programming', *Rand Corporation Report*, 2404-1, (1961).

[19] Bellman R., 'Decision Making in Face of Uncertainty', *J. Naval Res. Logist. Quart. 1* (1954), 230-232.

[20] Bellman R., 'Decision Making in Face of Uncertainty', II, *J. Naval Res. Logist. Ouart. 1* (1954), 327-332.

[21] Bechhofer R. E., Dunnett C. W. and Sodel M., ‘A Two-Sample Multiple Decision Procedure for Ranking Means of Normal Populations with a Common Unknown Variance’, *Biometrica*, Vol. 41 (1954), 170-176.

[22] Ben Israel A., ’On Some Problems of Mathematical Programming’, *Ph.D. Thesis in Engineering Science, Evanston 1961, Northwestern University.*

[23] Ben Israel A. and Charnes A., ’Constant Level Inventory Policies and Chance Constrained Programming Problems’, *Northwestern University*, Evanston 1961.

[24] Березнев В. А., ‘Об одной задаче стохастического программирования’, *Техническая кибернетика*, том 4 (1971).

[25] Беркович Е. М., ‘О двухэтапной задаче стохастического оптимального управления’. *Вест. Мос. универ.*, серия: мат. и мех., том 4 (1970), 9-17.

[26] Беркович Е. М., ‘Об аппроксимации двухэтапных стохастических задачах’, *жур. вычислит. мат. и мат. физ.*, том 11, № 5 (1971), 1150-1165.

[27] Беркович Е. М., ‘О существовании оптимальных решений для одного класса двухэтапных стохастических задач’, *Приближ. методы реш. задач опт. управ. и некот. некоррект. обрат. задач*, Труды вычислит. центра Мос. универ., Москва 1972.

[28] Беркович Е. М., ‘О численном решении одного класса задач стохастического птимального управления’, *Приближ. методы реш. задач опт. управ. и некот. некоррект. обрат. задач*, Труды вычислит. центра Мос. универ., Москва 1972.

[29] Bergthaller C., ‘A Quadratic Equivalent of the Minimum Risk Problem’, *Rev. Roumania Math. Pures Appl.*, Vol. 15 (1970), 17-23.

[30] Bereanu B., ‘Stochastic Transportation Problem: I, II. Random Costs’. *Comunieavile Acad. R.P.R.*, Vol. 13 (1963), 325-337.

[31] Bereanu B., ‘On Stochastic Linear Programming: I. Distribution Problems: a Single Random Variable’, *Rev. Math. Pures Appl.*, Vol. 8 (1963), 683-697.

[32] Bereanu B., ‘Distribution Problems and Minimum Risk Solutions in Stochastic Programming’, *Colog. Applic. Mathem. Econ.*, Budapest 1963. Academiai Kiado., 37-42.

[33] Bereanu B., ‘The Problem of the Distribution Function in Linear Programming and Minimum Risk Solution’, *Ph. D. University of Bucharest*, Bucharest 1963.

[34] Bereanu B., ‘Some Application of Stochastic Programming (Romanian)’, *Proc. Sci. Conf. in Statistics D.C.S.*, Bucharest 1963.

[35] Bereanu B., ‘Programme de risque minimal en programmation lineaire stochastique’, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, France 259 (1964), 981-983.

[36] Bereanu B., ‘A Property of Convex Piece-wise Linear Functions with Applications to Mathematical Programming’, *Unternehmensforsehung*, b 9 (1965), 112-119.

[37] Bereanu B., ‘On the Distribution of the Optimum in Stochastic Linear Programming’, *Analele Univ. Bucuresti Mathematics Mecanics*, Vol. 14 (1965), 41- 48.

[38] Bereanu B., ‘On Stochastic Linear Programming. II: Distribution Problems. Nonstochastic Technological Matrix’, *Rev. roumaine. math.pures at appl.*, Vol. 11 (1966), 713-725.

[39] Bereanu B., 'On Stochastic Linear Programming. The Laplace Transform ot the Distribution of the Optimum and Application'. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 15 (1966), 280-294.

[40] Bereanu B., 'Regions de decision et repartitions de l'optimum dous la programmation lineaire', *Compt. Rend. Seanc. Acad. Sci.*, Paris, Vol. 259 (1964), 1383-1386.

[41] Bereanu B., 'Renewal Processes and Some Stochastic Programming Problems in Economics', *SIAM. J. Appl. Math.*, Vol. 19, № 2 (1970), 308-322.

[42] Bereanu B. and Peeters G., 'A "Wait-and-See" Problem in Stochastic Linear Programming; an Experimental Computer Code', *Cah. Cent. Etud. Rech. Oper.*, Vol. 12, № 3 (1970), 133-148.

[43] Bickel S. H., 'Minimum Variance and Optimal Asymptotic Portfolios', *Management Sci.*, Vol. 16, № 3 (1969), 221-226.

[44] Blum T., 'Multidimensional Stochastic Approximation Methods', *Ann. Math. Statist.*, Vol. 25, № 4 (1954).

[45] Blum T., 'Approximation Methods which Converge with Probability One', *Ann. Math. Statist.*, Vol. 25, № 2 (1954).

[46] Blum T., 'A Note on Stochastic Approximation', *Proc. Am. Math. Soc.*, Vol. 9, № 3 (1958).

[47] Boot I. C. G., *Quadratic Programming*, Amsterdam 1964, North-Holland Publishing Company.

[48] Bode H. and Shannon C., 'A Simplified Derivation of Linear Least Square Smoothing and Prediction Theory', *Proc. IRE*, Vol. 38 (1950), 417-438.

[49] Borch K., 'The Theory of Risk', *J. Roy. Statist. Soc.*, Series B, Vol. 29 (1967), 432-467.

[50] Бочкарева И. И., 'Алгоритм решения одного класса задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями', *Опт. планир.*, том 16 (1970), 10-15.

[51] Boussard I. M., The Introduction of Risk into a Programming Model: Different Criteria and the Actual Behavior of Farmers', *Europ. Econ. Rev.*, Vol. 1, № 1 (1969), 92-121.

[52] Boyce W. E., 'Random Eigenvalue Problems', *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*, (ed. by A.T. Bharucha-Reid), New York 1968, Academic Press.

[53] Bracken I., 'Statistical Decision Analysis of a Linear Programming Problem with a Stochastic Objective Function', *The George Washington University, Serial T-183*, July, 1965.

[54] Bracken I. and Soland R. M., 'Statistical Decision Analysis of Stochastic Linear Programming Problems', *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol. 13 (1966), 205-226.

[55] Bracken I. and McCormik G. P., *Selected Applications of Nonlinear Programming*, New York 1968, John Wiley.

[56] Brans I. P., 'Programmes lineaires stochastiques', *Cah. Centre Etud. Recherche Operation.*, Vol. 6, № 1 (1964), 19-43.

[57] Brodeau F., 'Theoremes de maximum en theorie du controle stochastique', *Compt. Rend. Acad. Sci.*, Paris, 262 (1966), 1117-1120.

[58] Brooks S. H., 'A Discussion of Random Methods of Seeking Maxima', *J. Operation Res. Soc. Am.*, Vol. 6 (1958), 244-251.

[59] Bunke O., 'Einige Hilfsmittel zur Losung statistischer Probleme beider linearen und nicht linearen Optimierung', *Mon-ber deutsch Akad. Wiss.*, Berlin 1966, 699-703.

[60] Bunke O., 'Methoden der statistischen Optimierung', Vor. III, *Jahrestg. math. Ges., D.D.R.* (1966).

[61] Bunke O., 'Ein Verfahren der stochastischen Approximation', *Z. Angew. Math. Mech.*, b 46, № 8 (1966), 533-536.

[62] Bunke O., 'Uber die Giite der linearen und nicht linearen Optimierung bei geschatzten Parametern', *Operationsforschung und mathematische Statistik*, 9-18 (1966).

[63] Buhlmann H., *Mathematical Methods in Risk Theory*, New York 1970, Springer-Verlag.

[64] Burkholder D., 'On a Class of Stochastic Approximation Processes', *Ann. Math. Statist.*, Vol. 27, № 4 (1956).

[65] Candler W., 'Linear Programming with Stochastic Yields', *Ph.D. Thesis the Iowa State University*, Ames, Iowa, (1957).

[66] Carton D., 'Programmes lineaires stochastiques', *Bull. Direct. Etud. Rech. C* (1968), 43-60.

[67] Cass D., 'Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation', *Rev. Econ. Stud.*, Vol. 32 (1965), 223-240.

[68] Castaing Ch., 'Sur les multi-applications mesurables', *RIRO, I-re annal*, № 1 (1967), 91-126.

[69] Chang R., 'On a Stochastic Approximation Method', *Ann. Math. Stat.*, Vol. 25 (1954).

[70] Charnes A., Cooper W. W., and Symonds G. N., 'Cost Horizons and Certainty Equivalents: an Approach to Stochastic Programming of Heating Oil', *Management Sci.*, Vol. 4, № 3 (1958), 235-263.

[71] Charnes A., Cooper W. W. and Symonds G. N., 'Cost Horizons and Certainty Equivalents: Heating Oil', *Management Sci.*, Vol. 4, № 12 (1958).

[72] Charnes A., 'Stochastic Approximations to Optimal Decision Rules', *ONR Research NEMO*, № 11, Technological Institute Northwestern University, 1958.

[73] Charnes A., 'The Theory of Search: Optimum Distribution of Search Effort', *Management Sci.*, Vol. 5 (1958), 44-50.

[74] Charnes A. and Cooper W. W., 'Chance-Constrained Programming', *Management Sci.*, Vol. 6 (1959), 73-79.

[75] Charnes A., 'Deterministic Equivalents for Different Objectives in Chance Constrained Programming', *ONR Research NEMO*, № 37, Technological Institute, Northwestern University, 1960.

[76] Charnes A., Cooper W. W. and Thompson G. L., 'Constrained Generalized Medians and Linear Programming under Uncertainty', *Res. NEMO*, Vol. 6, № 9 (1961), Evanston North-western University.

[77] Charnes A. and Cooper W. W., 'Chance-Constraints and Normal Derivatives', *J. Am. Statist. Assoc.*, Vol. 57 (1962), 134-148.

[78] Charnes A. and Cooper W. W., 'Programming with Linear Fractional Functionals', *Naval Research Logistics Quarterly*, September-December, 1962.

[79] Charnes A., 'Systems Evaluation and Repricing Theorems', *Management Sci.*, Vol. 9, № 1 (1962), 33-49.

[80] Charnes A., Cooper W. W. and Kortanek K., 'Duality, Haor Programs and Finite Sequence Spaces', *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, Vol. 48, № 45 (1962), 783-786.

[81] Charnes A. and Cooper W. W., 'Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisficing under Chance-Constraints', *Operation Res.*, Vol. 11 (1963), 18-39.

[82] Charnes A., Cooper W. W. and Kortanek K., 'Duality in Semiinfinite Programs and Some Works of Haar and Caratheodory', *Management Sci.*, Vol. 9, № 2 (1963), 209-228.

[83] Charnes A., Cooper W. W. and Thompson G. L., 'Characterization by Chance-Constrained Programming', *Recent*

Advances in Mathematical Programming, Graves, Wolfe, 113-120, (1963).

[84] Charnes A., Cooper, W. W. and Thompson G. L., 'Critical Path Analysis Via Chance-Constrained and Stochastic Programming', *Operation Res.*, Vol. 12 (1964), 460-470.

[85] Charnes A. and Stedry A. C., 'Investigations in the Theory of Multiple-Budgeted Goals in Management Controls', *Mebran*, New York (1964), 186-204.

[86] Charnes A., Cooper W. W. and Thompson G. L., 'Constrained Generalized Medians and Hypermedians as Deterministic Equivalents for Two-Stage Linear Programs under Uncertainty', *Management Sci.*, Vol. 21, № 1 (1965), 83-112.

[87] Charnes A., Drese. I. and Miller M., 'Decision and Horizon Rules for Stochastic Planning Problems: a Linear Example', *Econometrica*, Vol. 34 (1966), 307-330.

[88] Charnes A. and Kirby M., 'Optimal Decision Rules for the E-Model of Chance-Constrained Programming', *Cah. Centre Etud. Recherch Operation.*, Vol. 8, № 1 (1966), 5-44.

[89] Charnes A., Kirby M. and Raik W., 'Chance-Constrained Generalized Networks', *Operation Res.*, Vol. 14 (1966), 1113-1120.

[90] Charnes A. and Kirby M., 'Some Special P-Models in Chance-Constrained Programming', *Management Sci.*, Vol. 14, № 3 (1967), 183-195.

[91] Charnes A., Kirby. M. and Raik W., 'Solution Theorems in Probabilistic Programming: a Linear Programming Approach', *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 20, № 3 (1967), 365-382.

[92] Charnes A., Kirby M. and Raik W., 'Chance-Constrained Games with Partially Controllable Strategies', *Operation Res.*, Vol. 16, № 1 (1968), 142-149.

[93] Charnes A., Littlechiled, Kirbly M. and Raik W., 'Chance-Constrained Model on Transport Prices and Scheduling under Competition', *Transportation Science* № 1, (1968).

[94] Charnes A. and Kirby M., 'Optimal Decision Rules for the Triangular E-Model of Chance-Constrained Programming', *Cah. Centre Etud. Rech. Operation.*, Vol. 11, № 4 (1969), 215-243.

[95] Chester L. B., 'Analysis on the Effect of Variance on Linear Programming Problems', *M.Sc. Thesis Air Force Institute of Technology, Air University, Wright-Patterson Air Force Base*, Ohio (1964).

[96] Чирба С.С., 'Об одной задаче стохастического программирования', *Вопросы эконом.-мат. моделирования*, стр. 299-316, Москва (1972).

[97] Чирба С. С., 'Некоторые вопросы пассивного стохастического линейного программирования', *Вопросы эконом.-мат. моделирования*, стр. 317-331, Москва (1972).

[98] Cohen A. S., 'Consorted Samples from Truncated Normal Distributions', *Biometrika*, Vol. 42 (1955), 516-518.

[99] Coleman W. H., 'On Quadratic Programming with Application to Stochastic Production Smoothing', *Master Thesis Lehigh University*, (1965).

[100] Conrath D. W., 'Organizational Decision Making Behaviour Under Varying Conditions of Uncertainty', *Management Sci.*, Ser. B13 (1967), B487-B500.

[101] Contini B., 'Stochastic Approach to Goal Programming', *Operation Res.*, Vol. 16 (1968), 576-586.

[102] Courtillot M., ‘On Varying All the Parameters in a Linear Programming Problem and Sequential Solution of a Linear Programming Problem’, *Operational Res.*, Vol. 10, № 4 (1962).

[103] Courtillot M., ‘Contribution a la theorie de la programmation lineaire et de la programmation stochastique’, *Theses Doct. Sci. math.*, Fac. Sci. Univ. Paris, p. 96, Paris (1963).

[104] Dantzig G. B., ‘Linear Programming under Uncertainty’, *Management Sci.*, Vol. 1, № 2 (1955), 197-206.

[105] Dantzig G. B., ‘Recent Advances in Linear Programming’, *Management Sci.*, Vol. 2, № 2 (1956), 131-144.

[106] Dantzig G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton (1963), Princeton University Press, 625.

[107] Dantzig G. B., ‘Large-Scale Systems and the Computer Revolution’, *Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming*, Princeton (1970), Princeton University, 51-72.

[108] Dantzig G. B. and Madansky A., ‘On the Solution of Two-Stage Linear Programs under Uncertainty’, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Vol. 1, 165-176. Berkeley (1961), University of California Press.

[109] Dempster M. A. H., ‘On Stochastic Programming 1, Static Linear Programming under Risk’, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 21, № 2 (1968), 304-343.

[110] Derman C., ‘Stochastic Approximation’, *Ann. Math. Statist.*, Vol. 27, № 4 (1956).

[111] Dinkelbach W., ‘On Non-Linear Fractional Programming’, *Management Sci*, Vol. 13, № 7 (1967), 492-497.

[112] Dragomirescu M. and Lidaroin C., 'Modele stochastiec peutru determinaer la structuri optime a productili agricole'. *Revista de Statistica.*, № 6 (1968).

[113] Driml M. and Nedoma J., 'Stochastic Approximations for Continuous Random Processes', *Trans. 2-nd Prague Conf* (1960), 145-158.

[114] Driml M. and Hans O., 'Continuous Stochastic Approximations', *Trans. 2-nd Prague Conf.* (1960), 113-122.

[115] Dupac V., 'Notes on Stochastic Approximation Method', *Czech. Math. J.*, № 1 (1958).

[116] Dupac V., 'A Dynamic Stochastic Approximation Method', *Ann. Math. Stat.*, Vol. 36 (1965), 1695-1702.

[117] Dvoretsky A.. 'On Stochastic Approximation', *Proceedings of the 3-rd Berkeley Symposium of Mathematical Statistics and Probability*, Vol. 1, (1956).

[118] Ефимов В. М., 'Стохастическая модель перспективного планирования', *Теор. опт. реш.*, Киев (1969).

[119] Ефимов В. М., 'Оптимальные оценки в условиях неопределенности', *Эконом. и мат. методы*, том 6, № 3 (1970).

[120] Ефимов В. М., 'Стохастические экономические модели', *Стохастич. эконом. модели*, Москва (1971).

[121] Edmundson H. P., 'Bounds on the Expectation of a Convex Function of a Random Variable', *The RAND Corporation*, Santa Monica, April, 882, (1957).

[122] Eisner M. J., Kaplan R. S. and Soden J. V., 'Admissible Rules for the E-Model of Chance-Constrained Programming', *Management Sci.*, № 17 (1971).

[123] El-Agizy M., ‘Programming under Uncertainty with Discrete Distribution Function’, *Operation Research Center, University of California, Berkeley Research Report, ORC-64-13*, (1964).

[124] El-Agizy M., ‘Dynamic Inventory’ Models on Stochastic Linear Programming’, *SIGMAR Workshop on Stochastic Linear Programming*, Princeton, December, (1965).

[125] El-Agizy M., ‘Two-Stage Programming under Uncertainty with Discrete Distribution Function’, *Operation Res.*, Vol. 15, № 1 (1967), 55-70.

[126] Elderton W. P., *Frequency Curves and Correlation*, Washington, D. C. (1953).

[127] Elmaghraby S. E., ‘An Approach to Linear Programming under Uncertainty’, *Operation Res.*, Vol. 7 (1959), 208-216.

[128] Elmaghraby S. E., *Programming under Uncertainty*, Ph.D. Thesis, Cornell Univ. (1958).

[129] Elmaghraby S. E., ‘Allocation under Uncertainty when the Demand has Continuous Distribution Function’, *Management Sci.*, Vol. 6, № 3 (1960).

[130] Еремин И. И., ‘О задачах последовательной оптимизации’, *Мат. методы в некот. задачах опт. планир.*, № 3 (1971), 60-74.

[131] Ермольев Ю. М., ‘Об одном методе решения задач стохастического программирования в смешанных стратегиях’, *Кибернетика*, № 6 (1969).

[132] Ермольев Ю. М., ‘Об одной общей задаче стохастического программирования’, *Кибернетика*, № 3 (1971), 47-50.

[133] Ермольев Ю. М., ’О методе обобщенных стохастических градиентов и стохастических квази-фейеровских последовательностях’, *Кибернетика*, № 2 (1969), 73-83.

[134] Ермольев Ю. М., *Стохастич. квазиград. методы и их применение*, Докт. дисс., Институт кибернетики АН УССР, Киев (1970).

[135] Ермольев Ю. М., 'О некоторых проблемах стохастического программирования', *Кибернетика*, № 1 (1971). 1-5.

[136] Ермольев Ю. М., Некрылова З. В., 'Метод стохастических градиентов и его применение', *Теор. опт. реш.*, Институт кибернетики АН УССР, Киев (1967).

[137] Ермольев Ю. М., Шор Н. З., 'Метод случайного поиска для двухэтапной задачи стохастического программирования и его обобщение', *Кибернетика*, № 1 (1968), 90-92.

[138] Evers W. H., 'A New Model for Stochastic Linear Programming', *Management Sci.*, Vol. 13, № 9 (1967).

[139] Evers W. H., 'Stochastic Programming', *Progress Report*, University of Michigan, № 5 (1965).

[140] Faber M. M., *Stochastisches Programmieren*, Phvsics-Verlag, Wurzburg-Wien (1970).

[141] Fabian V., 'Stochastic Approximation Method', *Czech Math. J.*, Vol. 10 (85), № 1 (1960), 123-159.

[142] Fabian V., 'A New One-Dimensional Stochastic Approximation Method for Finding a Local Minimum of a Function', *Trans. 3-d Prague Conf. Inf. Theory Stat. Decis. Funci. Random Process*, 85-105, (1960).

[143] Fabian V., 'Stochastic Approximation of Constrained Minima', *Trans. 4-th Prague Conf Inf. Theoryr Smt. Decis. Funct. Random Process*, 277-290, (1965).

[144] Fabian V., 'On Asymptotic Normality in Stochastic Approximation', *Michigan State University Statistical Laboratory Publications*, (1967).

[145] Фан Цзи, 'Системы линейных неравенств', *Лин. нерав. и смеж. вопр.*, Москва (1959), 214-262.

[146] Fishbum P. C., 'Analysis of Decisions with Incomplete Knowledge of Probability', *Operation Res.*, Vol. 13 (1965), 217-237.

[147] Ferguson A. R. and Dantzig G. B., 'The Allocation of Aircraft to Routes: an Example of Linear Programming under Uncertain Demand', *Management Sci.*, Vol. 3, № 1 (1965), 45-73.

[148] Fiacco A. V. and McCormic G. P., 'The Sequential Unconstrained Minimization Technique for Non-Linear Programming a Primal-Dual Method', *Management Sci.*, Vol. 10, № 2 (1964), 360-366.

[149] Fiacco A. V., 'Computational Algorithm for the Sequential Unconstrained Minimization Technique for Non-Linear Programming', *Management Sci.*, Vol. 10, № 4 (1964), 601-617.

[150] Fiacco A. V. and McCormick G. P., *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, New York (1968), John Wiley.

[151] Fisher R. A., *The Truncated Normal Distribution*, London (1931), British Association for the Advancement of Science, Mathematical Tables, Vol. 1.

[152] Fisher C. S., 'Linear Programming under Uncertainty in an L_∞ Space', *Center for Research in Management Science University of California*, Berkeley (1962), Technical Report, № 7.

[153] Fisher W., *Clustering and Aggregation in Economics*, Baltimore (1969), Johns Hopkins Press.

[154] Fortet R., 'Programmes lineaires stochastiques'. *Colloqu. Math. Econ.*, Budapest (1963), 99-119.

[155] Фридлянд А. Я., ‘Методы оптимального годового планирования добычи угля на уровне комбината с учетом вероятностного характера исходных данных’, *Автореф. дисс.*, Москва (1971).

[156] Freund R. I., 'The Introduction of Risk into a Programming Model', *Econometrica*, Vol. 24, № 3 (1956), 253-263.

[157] Fox K. A., Sengupta I. K. and Thorbecke E., *The Theory of Quantitative Economic Policy with Applications to Economic Growth and Stabilization*, Amsterdam and Chicago (1966), North-Holland Publishing and Land McNally.

[158] Fox K. A., Sengupta I. K. and Thorbecke E., *The Theory of Quantitative Economic Policy with Application to Economic Growth, Stabilization, and Planning*, Amsterdam (1972), North-Holland Publishing Company, revised 2nd ed.

[159] Fromm G. and Taubman P. I., *Policy Simulation with an Econometric Model*, Amsterdam (1968), North-Holland Publishing Company.

[160] Fromovitz S., ‘A Class of One-Period Inventory Models’. *Operation Res.*, Vol. 13 (1965), 779-799.

[161] Fromovitz S., ‘Nonlinear Programming with Randomization’, *Management Sci.*, Ser. A, Vol. 11 (1965), 831-846.

[162] Geoffrion A. M., ‘On the Relevance of the Vector Maximum Problem to Decision-Making Under Uncertainty and Risk’, *Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences*, Stanford University California (1964), Technical Report № 6, June.

[163] Geoffrion A. M., ‘A Parametric Programming Solution to the Vector Maximum Problem with Applications to Decisions under Uncertainty’, Ph.D., Stanford University, (1965), 152.

[164] Germansky B., ‘Notiz uber die Losung von Extremaufgaben mittels Iteration’, *Z. Angew. Math. Mech.*, b 14 (1933).

[165] Ghellinck G. de, 'Les problemes de decisions sequentielles', *Cah. Centre Etud. Recherch. Operation.*, Vol. 2 (1960), 161-179.

[166] Гладышев Е. Г., 'О стохастической аппроксимации', *Теор. вероят. и ее примен.*, том 10, № 2 (1965).

[167] Gnedenko B. V. and Kolmogorov A. N., *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Reading, Mass. (1968), Addison-Wesley.

[168] Горохович В. В., 'Проблемы векторной оптимизации', *Технич. кибер.*, № 6 (1972).

[169] Hadar I. and Russel W. R., 'Stochastic Dominance and Diversification', *J. Econ. Theor.*, Vol. 3 (1971), 288-305.

[170] Hadley G., *Non-Linear and Dynamic Programming*, Reading Mass. (1964), Addison-Wesley, 484.

[171] Hald A., *Statistical Theory with Engineering Applications*, New York (1952), John Wiley.

[172] Hanssman F., *Operations Research in Production and Inventory Control*, New York (1962), John Wiley.

[173] Ханзен Э. М., *Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления*, Москва (1968).

[174] Ханзен Э. М., 'О стохастических дифференциальных уравнениях для апостериорного распределения вероятностей в задачах адаптивной фильтрации и обнаружения сигналов', *Автоматика и телемеханика*, № 11 (1971), 86-93.

[175] Hans O. and Spacek A., 'Random Fixed Point Approximation by Differentiable Trajectories', *Trans. 2-nd Prague Conf. Inf. Theor. Stat. Decis. Funct. Random Proc.*, Czech. Acad. of Sciences, (1960).

[176] Hanson M. A., 'Stochastic Nonlinear Programming', *J. Austral. Math. Sec.*, Vol. 4 (1964), 334-353.

[177] Hanson M. A., ‘Errors and Stochastic Variations in Linear Programming’, *Austral. J. Statist.*, № 2 (1960), 41-46.

[178] Хасьминский Р. З., *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров*, Наука, Москва (1969).

[179] Heady E. C. and Candler W., ‘Nonlinear and Risk Programming: an Example with Stochastic Yields’, *Linear Programming Methods*, the Iowa State University Press (1958), 554-590.

[180] Hillier F. S., ‘Chance-Constrained Programming with Zero-One or Bounded Continuous Decision Variables’, *Management Sci.*, Vol. 14, № 1 (1967), 34-57.

[181] Hodges I. L. and Lehman E. L., ‘On Medians and Quasi-Medians’, *J. Am. Statist. Assoc.*, Vol. 62 (1967), 926-931.

[182] Гофмарк А. С., ‘Задачи стохастического программирования с вероятностными ограничениями, когда случайны коэффициенты матрицы “A” ’, *Науч. запис. Ташкент. инст. народ. хоз.*, № 34 (1970), 77-87.

[183] Гофмак А. С., ‘О задачах стохастического программирования со штрафными оценками при случайных коэффициентах матрицы “A” ’, *Науч. запис. Ташкент. инст. народ. хоз.*, № 34 (1970), 68-76.

[184] Гольфштейн Е. Г., Юдин Д. Б., *Новые направления в линейном программировании*, Москва (1966).

[185] Ijiri Y., *Management Goals and Accounting for Control*, Amsterdam (1965), North-Holland Publishing Company.

[186] Iensen I., ‘The Use of Mean Values in Stochastic Linear Programming’, *MBA Thesis*, University of Pennsylvania (1959).

[187] Iosifescu M. and Theodorescu R., 'On Stochastic Linear Programming', *Comun. Acad. R.C.R.*, 12 (1962), 299-302.

[188] Iosifescu M. and Theodorescu R., 'Linear Programming under Uncertainty', *Colloquium on Appl. of Math. to Economics*, Budapest (1965), 133-139.

[189] Iosifescu M. and Theodorescu R., 'Statistical Decisions and Linear Programming', *Compt. Rend. Acad. Bulgare. Sci.*, Vol. 17 (1964), 223-226.

[190] Iosifescu M. and Theodorescu R., 'Surla programmation lineaire', *Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences*, Vol. 256, № 253 (1963).

[191] Иоффе А., Юдин Д. Б., 'О некоторых задачах нелинейного стохастического программирования', *ДАН СССР*, том 186, № 1 (1969), 16-18.

[192] Иоффе А., Юдин Д. Б., 'О некоторых задачах нелинейного стохастического программирования', *Журнал вычислительной математики и математической физики*, том 10, № 1 (1970), 16-18.

[193] Юдин Д. Б., 'Об одном классе задач стохастического программирования', *ДАН СССР*, том 177, № 6 (1967).

[194] Юдин Д. Б., 'Новые подходы к стохастическому программированию', *Эконом. и мат. методы*, том 4, № 6 (1968).

[195] Юдин Д. Б., 'Двойственность в стохастическом программировании', *Эконом. и мат. методы*, том 5, № 2 (1969), 280-284.

[196] Юдин Д. Б., 'Стохастическое квадратичное программирование', *Известия АН СССР, Технич. кибер.*, № 3 (1969).

[197] Юдин Д. Б., 'Многоэтапные задачи стохастического программирования', *ДАН СССР*, том 210, № 3 (1973).

[198] Юдин Д. Б., ‘Методы построения решающих правил многоэтапных задач стохастического программирования’, *ДАН СССР*, том 210, № 4 (1973).

[199] Юдин Д. Б., Цой Э. В., ‘Многоэтапные задачи стохастического программирования с априорными решающими правилами’, *Эконом. и мат. методы*, том 9, № 5 (1973).

[200] Юдин Д. Б., Цой Э. В., ‘О слабом решении двухэтапных задач стохастического программирования’, *Эконом.-мат. моделир.*, Москва (1973).

[201] Юдин Д. Б., ‘Двойственность в многоэтапных задачах стохастического программирования’, *Известия АН СССР, Технич. кибер.*, № 6 (1973).

[202] Юдин Д. Б., *Математические методы управления в условиях неполной информации*, Москва (1974).

[203] Юдин Д. Б., *Задачи и методы стохастического программирования*, Москва (1979).

[204] Юдин Д. Б., ‘Двойственность в многоэтапных задачах стохастического программирования’, *Известия АН СССР, Технич. кибер.*, № 6 (1973).

[205] Юдин Д. Б., ‘Стохастическая вариантная модель разработки плана функционирования производственной фирмы’, *Эконом. и мат. методы*, том 10, № 6 (1974).

[206] Юдин А. Д., ‘Покоординатный спуск в задачах бесконечномерного программирования и его приложения’, *Известия АН СССР, Технич. кибер.*, № 1 (1974).

[207] Kall P., ‘Uber eine Anwendung endlicher Markov-Ketten in der linearen und nicht-linearen Programmierung’, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor und verw. Geb.*, b 3, № 2 (1964), 89-109.

[208] Kail P., 'Qualitative Aussagen zueinigen Problemen der stochastischen Programmierung', *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete*, b 6, № 2 (1966), 246-272.

[209] Kail P., 'Das zweistufige Problem der stochastischen linearen Programmierung', *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete*, b 8, № 2 (1967), 101-112.

[210] Kail P., 'Produktionsoptimierung mit Hilfe der stochastischen Programmierung', *lndustr. Organisation*, b 36, № 10 (1967).

[211] Kail P., 'Der gegenwartige Stand der stochastischen linearen Programmierung', *Unternehmensforschung*, 81-95, (1968).

[212] Kalman R. E., 'New Approach to the Linear Filtering and Prediction Problems', *J. Basic Engineering Trans. ASME*, Vol. 82, № 1 (1960).

[213] Kalman R. E. and Bucy R. S., 'New Results in Linear Filtering and Prediction Theory', *J. Basic Engineering Trans. ASME*, Vol. 83 (1961), 95-108.

[214] Kaplan R. S. and Soden I. V., 'On the Objective Function for the Sequential P-Model of Chance-Constrained Programming', *Operation Research*, Vol. 19, № 1 (1971), 105-114.

[215] Каплинский А. И., Пропой А. И., 'О стохастическом подходе к задаче нелинейного пограммирования', *Автомат. и телемех.*, № 3 (1970), 122-133.

[216] Каплинский А. И., Позняк А. С., Пропой А. И., 'Условия оптимальности для некоторых задач стохастического программирования', *Автомат. и телемех.*, № 8 (1971), 51-60.

[217] Каплинский А. И., Позняк А. С., Пропой А. И., 'О некоторых методах решения задач стохастического программирования', *Автомат. и телемех.*, № 10 (1971), 87-94.

[218] Кардаш В. А., Пряжинская В. Г., 'О стохастике задач планирования орошаемого земледелия', *Опт. планир.*, Новосибирск (1966), 51-56.

[219] Кардаш В. А., Пряжинская В. Г., 'Планирование действующих оросительных систем', *Опт. планир.*, Новосибирск (1966), 57-80.

[220] Karreman H., 'A Stochastic Model for Programming the Supply of a Strategic Material', in R. L. Graves and P. Wolfe (eds.), *Recent Advances in Mathematical Programming*, 223-237, (1963).

[221] Kataoka S., 'On Stochastic Programming. I: Stochastic Programming and its Application to Production Horizon Problem', *Hitotsubashi Journal Arts Science*, № 2 (1962), 23-25.

[222] Kataoka S., 'On Stochastic Programming. II: A Preliminary Study of a Stochastic Programming Model', *Hitotsubashi Journal Arts Science*, № 2 (1962), 36-44.

[223] Kataoka S., 'On Stochastic Programming. III: A Stochastic Programming Model', *Hitotsubashi Journal Arts Science*, № 2 (1962), 44-55.

[224] Kataoka S., 'A Stochastic Programming Model', *Econometrica*, Vol. 31 (1963), 181-196.

[225] Kataoka S., 'On Stochastic Programming. IV: A Note on a Generalized Stochastic Programming Model', *Hitotsubashi Journal Arts Science*, № 3 (1963), 35-40.

[226] Kelly Ir. I. E., 'The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs', *J. Soc. Industr. Appl. Math.*, Vol. 8, № 4 (1960), 703-712.

[227] Keri G., 'On the Two-Stage Programming under Uncertainty', *Studia Sci. Math. Hunger.*, № 5 (1970), 37-40.

[228] Kendall M. G. and Stuart A., *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 1, New York (1961), Hafner Publishing Company.

[229] Kendrick D. and Taylor L., 'Numerical Solution of Nonlinear Planning Models', *Econometrica*, Vol. 38 (1970), 453-467.

[230] Kesten M., 'Accelerated Stochastic Approximation', *Ann. Math. Statist.*, Vol. 29, № 1 (1958).

[231] Киссина Л М., 'Об многошаговой экспериментальной задаче', *Моделир. эконом. проц.*, Москва (1971), 325-334.

[232] Kiefer E. and Wolfowitz I., 'Stochastic Estimation of the Maximum of a Regression Function', *Ann. Math. Statist.*, Vol. 23, № 3 (1952), 462-466.

[233] Kimball A. W. and Leach E., 'Approximate Linearization of the Incomplete Beta-Function', *Biometrika*, Vol. 46 (1959), 214-218.

[234] King W. R., 'A Stochastic Personnel Assignment Model', *Operation Res.*, Vol. 13, № 1 (1965), 67-81.

[235] Kirby M. I. L., 'Generalized Inverses and Chance-Constrained Programming', *Ph.D. Northwest. Univ. Dissert. Abstracts*, Vol. 26, № 6, 256 (1965).

[236] Kirby M. I. L., 'The Current State of Chance-Constrained Programming', *Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming*, Princeton (1970), Princeton University Press, 93-111.

[237] Kohler D. and Wets R., 'Programming under Uncertainty: an Experimental Code for the "Complete" Problem', *Boeing Document D1-82-0391*, Boeing Scientific Research Laboratories, Seattle, Washington (1964).

[238] Колбин В. В., Сыроежин И. М., 'Возможности применения деловых игр в экономике на примере игры "Реформа"', *Прим. мат. в эконом.*, вып. 5, Ленинград (1969).

[239] Колбин В. В., Стохастическое программирование', *Теор. вероят., мат. стат., теор. кибер.*, Мсоква (1968), 5-68.

[240] Колбин В. В., Сыроежин И. М., 'Анализ деловой игры с применением ЭВМ', *Эконом. и мат. методы*, АН СССР, том 5, вып. 1 (1969).

[241] Колбин В. В., Танская В. Н., 'Некоторые задачи стохастического линейного программирования и алгоритмы их решения', *Моделир. эконом. проц.*, Москва (1971), 391-401.

[242] Колбин В. В., 'Исследование абсолютной плановой устойчивости решения задач стохастического программирования', *Материалы 2-го Всесоюз. симпоз. 'Проб. системотех.'*, том 2 (1972), 96-102.

[243] Колбин В. В., 'О возможности оценки оптимального плана в экономико-математических моделях со случайными параметрами', *Труды Ленинград. инженер.-эконом. инст. им. П. Тольятти*, вып. 107 (1975).

[244] Колбин В. В., 'Исследование условий существования и оптимальности решений в задачах стохастического нелинейного программирования (СНЛП)', *Труды Ленинград. инженер.-эконом. инст. им. П. Тольятти*, вып. 105 (1975).

[245] Колбин В. В., Бониц Л. К., 'Геометрия задач стохастического программирования с нелинейными целевыми функциями', *Труды обѣед. 'Ленэлектромаш'*, том 4 (1969).

[246] Колбин В. В., *Stochastic Programming*, D. Reidel Publ. Comp. (1977).

[247] Колмагоров А. Н., *Основы теории вероятностей*, М.-Л., ОНТИ, (1936).

[248] Колмагоров А. Н., 'Интегрирование и экстраполирование случайных последовательностей', *Известия АН СССР, сер. мат.*, том 5, № 1 (1941).

[249] Kornai I., *Mathematical Planning of Structural Decisions*, Amsterdam (1967), North-Holland Publishing Company.

[250] Kornai I. and Liptak Th., 'Two-Level Planning', *Econometrics*, Vol. 33 (1965), 141-169.

[251] Kortanek K. O. and Soden I., 'On the Charnes-Kirby Optimality Theorem for the Conditional Chance-Constrained E-Model', *Cah. Centre Etud. Rech. Operat.*, Vol. 9, № 2 (1967), 87-98.

[252] Касулина Т. П., 'О стохастической аппроксимации для случайных процессов с непрерывным временем', *Теор. вер. и ее прим.*, том 16, № 4 (1971), 688-695.

[253] Krelle W., 'Linear Programming under Uncertainty', *Conf VI Congr. Intemat. Instit. Mang. Sci.*, Paris (1959).

[254] Krelle W., 'Linear Programming under Uncertainty', *Proc. Manag. Sci., VI Meeting*, London, Pergamon Press, Vol. 1 (1960), 289-294.

[255] Krelle, W., 'Optimale Entscheidung bei Unsicherheit', *Industr. Organisation*, Vol. 30 (1961), 515-526.

[256] Kuhn H. W. and Tucker A. W., 'Non-Linear Programming', *Proc. Second Berkeley Symp. on Math., Stat. and Prob.*, Univ. California Press, (1951).

[257] Kushner H. I., *Stochastic Stability and Control*, New York (1967), Academic Press.

[258] Kushner, H. I., 'Filtering for Linear Distributed Parameter Systems', *SIAM Journal of Control*, Vol. 8, № 3 (1970).

[259] Kushner H. I., 'On the Stochastic Maximum Principle: Fixed Time of Control', *RIAS Report*, (1963).

[260] Лавриненко Е. П., 'Применение стохастического программирования к задаче управления воздушным движением', *Технич. кибер.*, Киев, том 16 (1970), 50-56.

[261] Лавриненко Е. П., 'Об одной задаче стохастического программирования', *Кибер. и вычис. тех.*, Рес. межведом. сбор., том 8 (1971), pp. 68-71.

[262] Лебедев В. Н., 'Вогнуто-выпуклые задачи стохастического программирования в условиях неопределенности', *Известия АН СССР, Тех. кибер.*, № 1 (1969), 9-15.

[263] Левитин Е. С., Поляк Б. Т., 'Методы минимизации при наличии ограничений', *Жур. вычис. мат. и мат. физ.*, том 6, № 5 (1966), 787-823.

[264] Lemarie J. M., 'Prevision et decision en programmation lineaire stochastique', *These*, Grenoble (1967).

[265] Lieu B. T., 'On a Problem of Convexity and its Application to Nonlinear Stochastic Programming', *J. Math. Anal. Applic.*, Vol. 8, № 2 (1964), 177-187.

[266] Lieu B. T., 'A Study of Some Inequalities for Nonlinear Stochastic Programming', *Nonlinear Programmmg*, I. Abadie (ed.), North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1967), 251-258.

[267] Lindley D. W., *Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian View-point*, Part 2, Cambridge (1965), Cambridge University Press.

[268] Логинов Н. В., 'Методы стохастической аппроксимации', *Автомат. и телемех.*, № 4 (1966), 185-204.

[269] Lonseth A. T., 'Systems of Linear Equations with Coefficients Subject to Errors', *Ann. Math. Statist.*, № 13 (1942).

[270] Ляпунов А. А., 'О волне аддитивных вектор-функциях', *Известия АН СССР*, сер. мат., том 4, № 6 (1940), 465-478.

[271] Madansky A., 'Bounds of the Expectation of a Convex Function of a Multivariate Random Variable', *Ann. Math. Statist.*, Vol. 30, № 3 (1959), 743-746.

[272] Madansky, A., 'Some Results and Problems in Stochastic Linear Programming', *RAND Corporation*, (1959), 1596.

[273] Madansky, A., 'Inequalities for Stochastic Linear Programming Problems', *Management Sci.*, Vol. 6, № 2 (1960), 197-204.

[274] Madansky A., 'Use of the "Expected Value Solution" in Linear Programming under Uncertainty', *Actes 2 Congr. Internat. Rech. Operat.*, Aix-en-Provence (1960).

[275] Madansky A., 'Methods of Solution of Linear Programs under Uncertainty', *Operation Res.*, Vol. 10, № 4 (1962), 463-471.

[276] Madansky A., 'Dual Variables in Two-stage Linear Programming under Uncertainty', *J. Math. Anal. Applic.*, Vol. 6, № 1 (1963), 98-108.

[277] Madansky A., 'Linear Programming under Uncertainty', *Recent Advances in Math. Programming*, R. L. Graves and P. Wolfe (eds.), McGraw-Hill, New York (1963), 103-110.

[278] Mandelbrot B., 'The Variation of Certain Speculative Prices', *J. Business*, Vol. 36 (1963), 394-419.

[279] Mangasarian, O. L., 'Nonlinear Programming Problems with Stochastic Objective Functions', *Management Sci.*, Vol. 10 (1964), 353-359.

[280] Mangasarian O. L. and Rosen I. B., 'Inequalities for Stochastic Nonlinear Programming Problems', *Operation Res.*, Vol. 12, № 1 (1964), 143-154.

[281] Manne A. S., 'Linear Programming and Sequential Decisions', *Management Sci.*, Vol. 6, № 3 (1960), 259-267.

[282] Manne A. S., *Investments for Capacity Expansion*, Cambridge, Mass. MIT Press (1966).

[283] Maritz I. S., *Empirical Bayes Methods*, London (1970), Methuen.

[284] Markowitz H. M., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*, New York (1959), John Wiley.

[285] Merrile W. C., 'Alternative Programming Models Involving Uncertainty', *J. Farm Econ.*, Vol. 47, № 8 (1965).

[286] Mihoc G., 'Unele precizari in legatura cu aplicarea programarii lineare', *Revista de Statistica*, Vol. 12 (1969), 13-18.

[287] Mihoc G. and Nadejde Ileana, *Programarea mathematica. Programarea stochastica*, Editura stiintifica, Bucuresti (1967), 407.

[288] Mikes D. R., 'Stochastic Programming Model for Production Smoothing', *Master Theses*, Lehigh University (1965).

[289] Milder W. and Wollnar 'Stochastic Programming Models for Scheduling Airlift Operations', *Nav. Res. Log. Quart.*, Vol. 16, № 3 (1969).

[290] Miller B. L. and Wagner H. M., 'Chance-Constrained Programming with Joint Probability Constraints', *Operation Res.*, Vol. 13, № 6 (1965), 930-945.

[291] Milde. P.. 'Zu einigen Problemstellungen der stochastischen linearen Optimierung', *Wiss. Z. Hochsch. Arch, und Bauw, Weimar*, 18 (1971), 73-75.

[292] Miyasawa K., 'Information Structures in Stochastic Programming Problems', *Management Sci.*, Vol. 14, № 5 (1968), 275-291.

[293] Morey R. C., 'Some Stochastic Properties of a Compound-Renewal Damage Model', *Operations Res.*, Vol. 14, № 5 (1966), 902-908.

[294] Moreau J. J., 'Fanctions convexes en dualite', *Faculte des Science de Montepellier*, Sem. de Math., (1962).

[295] Morozan T., 'Sur l'approximation stochastique', *Compt. Rend. Acad. Sci.*, Paris, ser. A. 264 (1967). 633-635.

[296] Muller O., 'Lineare Optimierung unter Unsicherheit', *Operations Research-Verfahren*, Bd. 2. hrsg. von R. Henn, Meisenheim am Glau, (1967), 299-306.

[297] Murphy R. B., 'Reliability', Chapter 4 in *Proceedings of First Symposium on Engineering Applications of Random Function Theory and Probability*, ed. by Bogdanoff and F. Kozin, New York, (1963)

[298] Murphy R. E. Jr., *Adaptive Processes in Economic Systems*, New York (1965), Academic Press.

[299] Murty Katta G., 'Linear Programming under Uncertainty: a Basic Property of the Optimal Solution', *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 10 (1968), 284-288.

[300] Naslund B., *Decisions under Risk.* Stockholm (1967), Stockholm School of Economics.

[301] Naslund B. and Whinston A. W., 'A Model for Multi-Period Decision Making under Uncertainty', *Management Sci.*, Vol. 8, № 1 (1962), 184-200.

[302] Naslund B. and Whinston A. W., 'A Variational Approach to Stochastic Programming', *Research Report*, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Institute of Technology and Cowles Commission, Yale University, Connecticut (1964).

[303] Naylor T. H., Werts K. and Wannacott T., 'Some Methods for Evaluation the Effects of Economic Policies Using Simulation Experiments', *Rev. Internat. Statist. Inst.*, Vol. 36 (1968), 184-200.

[304] Невельсон Т. Б., 'О некоторых свойствах непрерывных процедур стохастической аппроксимации', *Теор. вер. и ее прим.*, том 17 (1972), 310-319.

[305] Невельсон Т. Б., Хасьминский Р. З., 'Непрерывные процедуры стохастической аппроксимации', *Проб. перед. инф.*, том 7, № 2 (1971), 58-69.

[306] Neudecker H. and van de Panne C., 'Note on the Asymptotic Standard Errors of Latent Roots of Econometric Equation Systems', *Rev. Internat. Statist. Inst.*, Vol. 34, № 1 (1966), 43-47.

[307] Noether G. E., *Elements of Nonparametric Statistics*, New York (1967), John Wiley.

[308] Oleson G. K. and Sengupta I. K., 'A Linearized Method of Geometric Programming', *Mimeographed paper*, autliors, (1972).

[309] Osaki S. and Mine H., 'Linear Programming Algorithms for Semi-Markovien Decision Processes', *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 22 (1968), 356-381.

[310] Panne C. van de, 'Optimal Strategy Decisions for Dynamic Linear Decision Rules in Feedback Form', *Econometrica*, Vol. 33 (1965), 307-320.

[311] Panne C. van de and Popp W., 'Minimum-Cost Cattle Feed under Probabilistic Protein Constraints', *Management Sci.*, Vol. 9 (1963), 405-430.

[312] Parikh S. C., 'Equivalent Stochastic Linear Programs', *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 18, № 1 (1970), 1-5.

[313] Pascual L. D. and Ben-Israel A., 'Constrained Maximization of Polynomials by Geometric Programming', *J. Opt. Theor. Applic.*, Vol. 5, № 2 (1970), 73-80.

[314] Passy U., 'Nonlinear Assignment Problems Treated by Geometric Programming', *Operation Res.*, Vol. 19, № 7 (1971), 1675-1690.

[315] Passy U. and Wilde, D. I., 'Generalized Polynomial Optimization', *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 15 (1967), 1344-1356.

[316] Penrose R., 'A Generalized Inverse for Matrices', *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, Vol. 51, № 3 (1955), 406-413.

[317] Первозванская Т. Н., 'Линейное стохастическое программирование', *Труды Ленинград. инженер.-эконом. инст.*, том 53 (1965), 142-146.

[318] Petersen E. R., 'Periodic Markov Programming', *CORS Journal*, (1969), 39-44.

[319] Phillips A. W., 'Stabilization Policy in a Closed Economy', *Economic J.*, Vol. 69 (1954), 290-323.

[320] Pillai R. C. and Ramachandran, K. V., 'On the Distribution of the Ratio of the i-th Observation in an Ordered Sample from a Normal Population to an Independent Estimate of the Standard Deviation', *Ann. Math. Statist.*, Vol. 25 (1954), 565-572.

[321] Пирогов С. А., 'Вероятности сложных событий и линейное прграммирование', *Теор. вер. и ее прим.*, том 13 (1968), 344-348.

[322] Поляк Б. Т., 'Минимизация негладких функционалов', *Жур. вычислит. мат. и мат. физ.*, том 9, № 3 (1969), 509-521.

[323] Popp W., 'Simulationstechnik bei Lagerplanung mit Stochastischer Nachfrage', *Unternehmens-forschung*, Bd 7, № 1 (1963), 65-74.

[324] Prekopa A., 'On the Probability Distribution of the Optimum of a Random Linear Program', *SIAM J. Control*, Vol. 4 (1966), 211-222.

[325] Prekopa A., 'On Probabilistic Constrained Programming', in *Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming*, Princeton (1970), Princeton University Press, 113-138.

[326] Примак М. Е., 'Вычислительные методы решения некоторых задач теории аппроксимации', *Авт. реф. дис.*, Воронеж. ун. (1966).

[327] Райк Э., 'Неравенства в задачах стохастического программирования', *Известия АН СССР*, том 19, № 3 (1970), 292-298.

[328] Райк Э., 'Сравнение решений в различных постановках задач стохастического программирования', *Известия АН СССР*, том 19, № 4 (1970), 469-472.

[329] Райк Э., 'О функции квантиля в стохастическом нелинейном программировании', *Известия АН СССР*, том 20, № 2 (1971), 227-231.

[330] Raike W. M., 'Dissection Methods for Solutions in Chance-constrained Programming Problems under Discrete Distributions', *Management Sci.*, Vol. 16 (1970), 709-715.

[331] Radner R., 'The Linear Team: an Example of Linear Programming under Uncertainty', *Proc. 2 Sympos. Linear Programm*, Vol. 1 (1955), 381-396.

[332] Radner R., 'The Application of Linear Programming to Team Decision Problems', *Management Sci.*, Vol. 5, № 2 (1959), 143-150.

[333] Растригин Л. А., 'Статистические методы поисковой оптимизации', *Теор. и прим. случ. поиска*, Рига (1969).

[334] Reiter S., 'Surrogates for Uncertain Decision Problems: Minimal Information for Decision Making', *Econometrica*, Vol. 25, № 2 (1957), 339-345.

[335] Resch M., 'Chance-constrained Programming of the Machine Loading Problem with Stochastic Processing Times', *Management Sci.*, Vol. 17, № 1 (1970), 48-65.

[336] Ritter K., 'Duality for Nonlinear Programming in a Banach Space', *SIAM*, Vol. 15, № 2 (1967), 294-302.

[337] Robbins H. and Pitman E. I. G., 'Application of the Method of Mixtures to Quadratic Forms in Normal Deviates', *Ann. Math. Statist.*, Vol. 20 (1949), 552-560.

[338] Roberts P. D. and Ben-Israel A., 'A Suboptimization Method for Interval Linear Programming: a New Method for Linear Programming', *Linear Algebra Appl.*, Vol. 3, № 3 (1970), 383-405.

[339] Robbins H. and Monro S., 'A Stochastic Approximation Method', *Ann. Math. Statist.*, Vol. 22, № 3 (1951), 400-407.

[340] Роговский Е. А., 'Многоэтапная многопродуктовая стохастическая модель перспективного планирования', *Исслед. по мат. экон. и смеж. воп.*, Москва (1971), 99-119.

[341] Rockafellar R. T., 'Duality and Stability in Extremum Problems Involving Convex Functions', *Pac. J. Math.*, Vol. 21 (1967).

[342] Рубинштейн Я. С., 'Сопоставление случайного поиска и стохастической аппроксимации', *Теор. и прм. случ. поиска*, Рига (1969).

[343] Rosenblatt J. R.. 'Confidence Limits for the Reliability of Complex Systems', in *Statistical Theory of Reliability*, M. Zelen (ed.), Madison (1963), University of Wisconsin Press.

[344] Sachan R. S., ‘Stochastic Programming Problems under Risk and Uncertainty’, *Coh. Cent. Etud. Rech. Oper*, Vol. 12, № 4 (1970), 211-232.

[345] Sacrison D., ‘A Continuous Kiefer-Wolfowitz Procedure for Random Processes’, *Ann. Math. Stat.*, Vol. 35, № 2 (1964), 590-599.

[346] Sacs J., ‘Asymptotic Distribution of Stochastic Approximation Procedures’, *Ann. Math. Stat.*, Vol. 29, № 2 (1958), 373-405.

[347] Samuelson P. A., ‘Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming’, *Rev. Econ. Statist.*, Vol. 57, № 3 (1969), 239-246.

[348] Scheeweis H., ‘A General Scheme for Stochastic Programming’, *Statistische Hefte*, Vol. 9 (1962).

[349] Schmaltz J., ‘Stochastic Programming Using “cumulate” Demand Distributions’, *SIGMAP Workshop on Stochastic Linear Programming*, Princeton (1965).

[350] Schmaltz J., ‘Mixing Diets under Demand Uncertainty’, *Ph.D. Thesis*, University of Chicago, (1965).

[351] Scheffe H., *The Analysis of Variance*, New York (1959), John Wiley.

[352] Sengupta J. K., Tintner, G. and Millham C., ‘On Some Theorems in Stochastic Linear Programming with Applications’, *Management Sci.*, Vol. 10 (1963), 143-159.

[353] Sengupta J. K., ‘On the Stability of Truncated Solutions under Stochastic Linear Programming’, *Econometrica*, Vol. 34, № 1 (1966), 77-104.

[354] Sengupta J. K., ‘Econometric Models of Risk Programming’, *Indian Economic Journal, Econometric Annual*, Vol. 15 (1968), 423-441.

[355] Sengupta J. R., 'Distribution Problems in Stochastic and Chance-constrained Programming', in *Economic Models, Estimation and Risk Programming*, New York (1969), Springer-Verlag, 391-424.

[356] Sengupta J. R., 'Safety-First Rules under Chance-Constrained Linear Programming', *Operation Res.*, Vol. 17 (1969), 112-132.

[357] Sengupta J. R., 'Optimal Stabilization Policy with a Quadratic Criterion Function', *Rev. Econ. Stud.*, Vol. 37 (1970), 127-145.

[358] Sengupta J. R., 'A Generalization of Some Distribution Aspects of Chance-Constrained Linear Programming', *International Economic Review*, Vol. 11, № 2 (1970), 287-304.

[359] Sengupta J. R., 'On the Active Approach of a Stochastic Linear Programming', *Metrica*, Vol. 15 (1970), 59-70.

[360] Sengupta J. R., 'Economics of Decomposition and Divisionalization under Transfer Pricing', *Z. fiir die gesamte Staatswissenschaft*, Vol. 127 (1971), 50-71.

[361] Sengupta J. R. and Fox K. A., *Economic Analysis and Operations Research: Optimization Techniques in Quantitative Economic Models*, Amsterdam (1969), North-Holland Publishing Company.

[362] Sengupta J. R. and Gruver G., 'Linear Reliability Analysis in Programming with Chance-Constraints', *Swedish Journal of Economics*, (1969), 221-246.

[363] Sengupta J. R. and Portillo-Campbell J. H., 'A Fractile Approach to Linear Programming under Risk', *Management Sci. Theor. Ser.*, Vol. 16 (1970), 298-308.

[364] Sengupta J. R. and Tintner G., 'A Review of Stochastic Linear Programming', *Review of International Statistical Institute*, Vol. 39 (1971), 197-223.

[365] Sengupta J. R., *Stochastic Programming: Methods and Applications*, Amsterdam (1972), North-Holland Publishing Company.

[366] Серебровский А. Н., Туниев А. Д., 'Оценка числа реализаций случайной величины в зависимости от точности решения стохастической задачи линейного программирования', *Мат. методы исслед. и опт. сист.*, том 5, Киев (1970), 40-47.

[367] Шахиди А. А., 'Модели и решения некоторых задач стохастического программирования', *АН Тадж. ССР*, 2, № 3 (1968).

[368] Щепакин М. В., 'Многоэтапные стохастические задачи на максимум', *Мат. методы исслед. сист. и моделир.*, № 4 (1970), 3-5.

[369] Shetty C. M., 'A Solution to the Transportation Problem with Non-Linear Costs', *Operation Res.*, Vol. 7, № 5 (1959), 571-580.

[370] Simon H. A., 'Dynamic Programming under Uncertainty with a Quadratic Criterion Function', *Econometrica*, Vol. 24 (1956), 74-81.

[371] Simon H. A., 'Theories of Decision-Making in Economics and Behavioral Science', *Am. Econ. Rev.*, Vol. 49, № 3 (1959), 253-283.

[372] Sinha S. M., 'Stochastic Programming', *Ph.D. Dissert. Abstr.*, Berkeley University, California, Vol. 24, № 3, (1963).

[373] Sinha S. M., 'Stochastic Programming', *Operations Research Center, University of California*, Berkeley (1963), ORC 63-22, August.

[374] Sinha S. M., 'Programming with Standard Errors in the Constraints and the Objective', *Recent Advances Math. Progr.*, New York (1963).

[375] Sion M., ‘On General Minimax Theorems’, *Pacific Math.*, 8, № 1 (1958).

[376] Солдатов В. Е., ‘Об одной задаче линейного программирования со случайными ограничениями’, *Сибир. мат. жур.*, том 6, № 3 (1965), 705-710.

[377] Солдатов В. Е., ‘Об одной задаче линейного программирования со случайными данными’, *Мат. модели и методы опт. план.*, Новосибирск (1966), 54-64.

[378] Солдатов В. Е., ‘О некоторых задачах стохастического программирования’, *Инс. мат. Сиб. отд. АН СССР*, 78-89, (1966).

[379] Screedharan V. R. and Wein H. H., ‘A Stochastic Multi-Stage Multi-Product Invest. Model’, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 15, № 2 (1967).

[380] Starr M. K. and Miller D. W., *Inventory Control: Theory and Practice*, Englewood Cliffs, N.Y. Prentice Hall, (1962).

[381] Steindl I., *Random Processes and the Growth of Firms*, New York (1962), Hafner Publishing Company.

[382] Stoddart A. W. I., ‘An Existence Theorem for Optimal Stochastic Programming’, *J. Austral. Math. Soc.*, Vol. 8, № 1 (1968), 114-118.

[383] Stone B. K., *Risk, Return and Equilibrium: A General Single-Period Theory of Asset Selection and Capital-market Equilibrium*, Cambridge, Mass. (1970), MIT Press.

[384] Symonds G., ‘Stochastic Scheduling by the Horizon Method’, *Management Sci.*, Vol. 8, № 2 (1962), 138-167.

[385] Symonds G., ‘Deterministic Solutions for a Class of Chance-Constrained Programming Problems’, *Operation Res.*, Vol. 15, № 3 (1967), 495-512.

[386] Symonds G., 'Stochastic Programming', *SIGMAP Workshop on Stochastic Linear Programming*, Princeton (1965).

[387] Symonds G., 'Stochastic Scheduling Part I: Stochastic Programming for a Single Period', *Technical Memo.*, № 22, Operations Research Group Case Institute of Technology, Cleveland, Ohio (1964).

[388] Symonds G., 'Stochastic Scheduling Part II: the Location of Planning Horizons', *Technical Memo.*, № 26, Operations Research Group Case Institute of Technology, Cleveland, Ohio (1964).

[389] Symonds G., 'Stochastic Scheduling Part III: Optimization Procedures', *Technical Memo.*, № 27, Operations Research Group Case Institute of Technology, Cleveland, Ohio (1965).

[390] Symonds G., Doulliez P., Steinmutz C. and Chidambarm T. S., 'Stochastic Scheduling Part IV: Solution Methods for Stochastic Programming Problems', *Technical Memo.*, № 39, Operations Research Group Case Institute of Technology, Cleveland, Ohio (1965).

[391] Szwarc W., 'The Transportation Problem with Stochastic Demand', *Management Sci.*, Vol. 11, № 1 (1964), 33-50.

[392] Theil H., 'A Note on Certainty Equivalence in Dynamic Programming', *Econometrica*, Vol. 25 (1957), 346-349.

[393] Theil H., 'Some Reflection on Static Programming under Uncertainty', *Weltwirtschaftliches Archiv*, b 87 (1961), 124-128.

[394] Theodorescu R., 'Minimax Solutions of Random Convex Programs', *Rendiconti*, Vol. XLVI (1969), 689-692.

[395] Thompson G., Cooper W. and Charnes A., 'Characterization by Chance-Constrained Programming in Recent Advances', *Math.*

Progr., New York-San Francisco-Toronto-London (1963), 113-120.

[396] Тинн К. А., Тнугу Е. Х., 'Нелинейное прогрммирование со случайными ограничениями', *Кибернетика*, № 1, (1968), 54-62.

[397] Tintner G., 'A Stochastic Linear Programming with Applications to Agricultural Economics', in *Proceedings of Second Symposium in Linear Programming*, Vol. 1, Washington D.C. (1965), National Bureau of Standards, 197-228.

[398] Tintner G., 'A Note on Stochastic Linear Programming', *Econometrica*, Vol. 28, № 2 (1960), 490-495.

[399] Tintner G., 'The Use of Stochastic Linear Programming in Planning', *Indian Econom. Rev.*, Vol. 5, № 2 (1960), 159-167.

[400] Tintner G., 'Game Theory, Linear Programming and Input-Output Analysis', *Z. Nationalokon.*, Vol. 17, № 1 (1957), 1-38.

[401] Tintner G., 'On Some Theorems of Stochastic Linear Programming with Applications', *Management Sci.*, Vol. 10, № 1 (1963), 143-159.

[402] Tintner G., Millham C. and Sengupta J. K., 'A Weak Duality Theorem for Stochastic Linear Programming', *Unternehmensforschung*, Vol. 7, № 1 (1963), 1-8.

[403] Tintner G., Sengupta J. K. and Rao V. Y., 'An Application of Stochastic Linear Programming to Development Planning', *Metroeconomica*, Vol. 14, № 1-3 (1962), 25-41.

[404] Tintner G., Sengupta J. K. and Morrison B., 'Stochastic Linear Programming with Application to Planning in India', *Mimeogr.*, (1962).

[405] Tintner G. and Sengupta J. K., 'Stochastic Linear Programming and its Application to Economic Planning', in *On Political*

Economy and Econometrics, Warsaw (1964), PWN Scientific Publishers.

[406] Tintner G., Sengupta J. K., Morrison B. and Millham C., 'Some Theorems in Stochastic Linear Programming', *Research Note*, University of Southern California, Los Angeles, California (1964).

[407] Tintner G. and Narayanan R., 'A Multi-dimensional Stochastic Process for the Explanation of Economic Development', *Metrica*, Vol. 11, № 2 (1966), 85-90.

[408] Tintner G., Salwa C. and Farghali A., 'The Application of Stochastic Programming to the UAR First Five Year Plan', *Hyklos*, Vol. 20 (1967), 749-758.

[409] Tornqvist L., 'Some New Principles for Solving Linear Programming Problems', *Bulletin del'Institut International de Statistique*, Vol. 36 (1957), 197-227.

[410] Туниев А. Д., 'Об одном классе задач стохастического линейного программирования', *Труды симпоз. 'Вопр. точн. и эффект. выч. алг.'*, № 4, Kiev (1969).

[411] Vajda S., 'Inequalities for Stochastic Linear Programming', *Bull. J. Internal. Statist. Inst.*, Vol. 36, № 3 (1958), 357-363.

[412] Vajda S., 'Stochastic Linear Programming', Ch. II, in *Mathematical Programming*, Addison-Wesley, Reading Mass., London (1961), 206-217.

[413] Vajda S., *Probabilistic Programming*, New York (1972), Academic Press.

[414] Van den Bogaard P. J. M., 'On the Static Theory of Certainty Equivalence', *International Center for Management Science*, Rotterdam (1960), Report 6010.

[415] Van Moeseke P., 'Truncated Minimax-Maximin Approach to Linear Programming under Risk', *Econometrica*, Vol. 31 (1963).

[416] Van Moeseke P., 'Dynamic Risk Programming with Learning Adjustment', *Unternehmens forschung*, Vol. 7, № 4 (1964), 145-150.

[417] Van Moeseke P., 'Stochastic Linear Programming', *Yale University Economic Essays*, Vol. 4, № 2 (1964).

[418] Van Moeseke P. and Tintner G., 'Base Duality Theorem for Stochastic and Parametric Linear Programming', *Unternehmungs forschung*, Vol. 8, № 2 (1964), 75-79.

[419] Van Slyke R., 'Mathematical Programming and Optimal Control', *PH.D. Dissert. Abstr.*, Vol. 26, № 2 (1965), 1075.

[420] Van Slyke R. and Wets R. J. B., 'Programming under Uncertainty and Stochastic Optimal Control', *J. SIAM Control.*, Vol. 4 (1966), 179-193.

[421] Вересков А. И., 'Об одной задаче оптимального планирования в условиях неопределенности', *Экон. и мат. методы*, том 4, В. 5 (1968), 783-791.

[422] Верковский В. С., 'Оптимальное перераспределение водных ресурсов', *Экон. и мат. методы*, том 3 (1972), 128-171.

[423] Votaw D. F., 'Programming under Conditions of Uncertainty', *Proceedings of the 2nd Symposium of Linear Programming*, National Bureau of Standards, Washington D.C. (1965), Vol. 1, 187-195.

[424] Wagner H. M., 'On the Distributions of Solutions in Linear Programming Problems', *J. Am. Statist. Assoc.*, Vol. 53, № 288 (1958), 161-163.

[425] Вазан М. Т., *Стохастическая аппроксимация*, Москва (1972), МИР.

[426] Вайсброд Э. М., Юдин Д. Б., ‘Стохастическая аппроксимация для многоэкстремальных задач в гильбертовом пространстве’, *ДАН СССР*, том 181, № 5 (1968).

[427] Вайсброд Э. М., Юдин Д. Б., ‘Многоэкстремальная стохастическая аппроксимация’, *Технич. кибер.*, № 5 (1968).

[428] Walkup D. W. and Wets R. I. B., ‘Stochastic Programs with Recourse’, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 15, № 5 (1967), 1299-1314.

[429] Walkup D. W. and Wets R. I. B., ‘Stochastic Programs with Recourse: Special Forms’, in *Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming*, Princeton (1970), Princeton University Press, 139-161.

[430] Walsh J. E., ‘Approximate Distribution of Extremes for Nonsample Cases’, *J. Am. Statist. Assoc.*, Vol. 59 (1964), 429-436.

[431] Waltz F. M., ‘An Engineering Approach: Hierarchiae Optimization Criteria’, *IEEE Transactions Automatic Control*, Vol. AC-12 (1967), 179-180.

[432] Wessels J., ‘Stochastic Programming’, *Statistica Neerlandica*, Vol. 21, № 1 (1967), 39-53.

[433] Wets R. I. B., ‘Programming under Uncertainty: The Complete Problem’, *Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, Vol. 4, № 4 (1966), 316-339.

[434] Wets R. I. B., ‘Programming under Uncertainty: The Equivalent Convex Program’, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 14, № 1 (1966), 89-105.

[435] Wets R. I. B., ‘Programming under Uncertainty: The Solution Set’, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 14, № 5 (1966), 1143-1151.

[436] Wets R. I. B. and Witzgall C., 'Algorithms for Frames and Linearity Spaces of Cones', *Journal Research National Bureau Standards*, B 71, № 1 (1967), 1-7.

[437] Wets R. I. B., 'Stochastic Programs with Recourse: a Basic Theorem for Multistage Problems', *Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, Vol. 21, № 3 (1972), 201-206.

[438] Williams A. C., 'A Stochastic Transportation Problem', *Operation Res.*, Vol. 11, № 5 (1963), 759-770.

[439] Williams A. C., 'On Stochastic Linear Programming', *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 13, № 4 (1965), 927-940.

[440] Williams A. C., 'Approximation Formulas for Stochastic Linear Programming', *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 14, № 4 (1966), 668-677.

[441] Williams A. C., 'Nonlinear Activity Analysis and Duality', in *Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming*, Princeton (1970), Princeton University Press, 163-177.

[442] Wilson R., 'On Programming under Uncertainty', *Operation Res.*, Vol. 14, № 4 (1966), 652-657.

[443] Wolfe P., 'The Simplex Method for Quadratic Programming', *Econometrica*, Vol. 27, № 3 (1959), 282-298.

[444] Wolfe P. and Dantzig G. B., 'Linear Programming in Markov Chains', *Operation Res.*, Vol. 10, № 5 (1962).

[445] Wonham W. M., 'Optimal Stochastic Control', in *Stochastic Problems in Control: A Symposium of the American Automatic Control Council*, New York (1968), American Society of Mechanical Engineers.

[446] Zackova J., 'On Minimax Solutions of Stochastic Linear Programming Problems', *Casopis pro pestovani matem.*, Vol. 91, № 4 (1966), 423-429.

[447] Zackova J., 'Stochasticke linearni programovani', *Eckonomicke-matematickv obzor*, Vol. 3, № 3 (1967), 273-297.

[448] Zackova J., 'A Note on Deterministic Equivalents to Stochastic Linear Programming Problems', *Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, Bd 14 (1969), 264-268.

[449] Zangwill W. I., *Nonlinear Programming: A Unified Approach*, Englewood Cliffs (1969), Prentice Hall.

[450] Жуленев С. В., 'Задача со случайными ограничениями и нормальная модель', *Экон. и мат. методы*, том 6, № 5 (1970), 757-764.

[451] Жуленев С. В., 'Нормальная модель для задач со случайными ограничениями. Равномерное распределение', *Моделир. экон. проц.*, Москва (1971), 403-414.

[452] Zelen M. (ed.), *Statistical Theory of Reliability*, Madison (1963), University of Wisconsin Press.

[453] Zellmer G., 'Uber Losungsmethoden in der stochastischer linearen Optimierungsprobleme', *Wiss. Zeitschrift der HfO*, № 2 (1968), 163-169.

[454] Zellmer G., 'Zu Sensibilitatsuntersuchungen in der stochastischen linearen Optimierung', *Wiss. Zeitschrift der Hochschulefur Okonomie*, Berlin, № 4 (1968), 495-502.

[455] Zellmer G., "Uber Problemstellungen in der stochastischen linearen Optimierung', *Mathematic und Wiztsehaft*, Bd 6 (1968).

[456] Ziemba, W. T., 'Computational Algorithms for Convex Stochastic Programs with Simple Recourse', *Operation Res.*, Vol. 11 (1970), 414-431.

[457] Ziemba W. T., 'Duality Relations, Certainty Equivalents and Bounds for Convex Stochastic Programs with Simple Recourse', *Can. Cent. Etud. Rech. Oper.*, Vol. 13, № 2 (1971), 85-97.

[458] Ziemba W. T., 'Transforming Stochastic Dynamic Programming Problems into Non-Linear Programs', *Management Sci.*, Vol. 17, № 7 (1971), 450-462.

[459] Zoutendijc G., *Methods of Feasible Directions*, Amsterdam (1960), Elsevier Publishing Company.

[460] Зуховский С. И., Поляк Р. А., Примак М. Е., 'Численные методы решения задач выпуклого программирования', *ДАН СССР*, том 163, № 2 (1965).

Дополнительный список литературы

[1] Judin D. B., ‘Multi-Stage planning problems under Risk and Uncertainty’, *Tech. Cybernetics*, № 6 (1972).

[2] Колбин В. В., ’On a Stochastic Programming Problem’, *Management an Information*, Vladivostok, U.S.S.R. Academy of Sciences, Vol. 16 (1976).

[3] Колбин В. В., ’Stochastic Programming’, *D. Reidel Publ. Comp.*, (1976).

[4] Колбин В. В., ’Planning and functional Solutions stability at the i-th Constraint in the Stochastic Programming Problem’, *Management an Information*, Vladivostok, U.S.S.R. Academy of Sciences, Vol. 16 (1976).

[5] Anderson E. J. ’A Review of Duality Theory for Linear Programming over Topological Vector Spaces’, *J. Math. Anal, and Appl.*, (1983), № 2, 280-392.

[6] Anderson E. J., Lewis A. S. ‘An Extension of the Simplex Algorithm for Semi-infinite Linear Programming’, *Math. Prog.*, (1989), 44A, № 3, 247-269.

[7] Anderson E. J., Philpot A. ’Infinite Programming’, Berlin, Heildelberg, N. Y, (1984).

[8] Arrow K. J., Gurwitz L., Uzawa H. ’Investigations of Linear and Nonlinear programming’, M.: IL, (1962), 334.

[9] Asic M.D., Kovacevic-Vujcic V. V. ’An Interior semi-infinite Programming Method’, *J. Opt. Theor. and Appl.*, (1988), 59, № 3, 353-367.

[10] Astafiev N.N. ’Infinite-diminsional Programming Problem (Approximation, Duality Gap, Finite Models) *27 Int. Wiss. Koll. Ilmenau*, (1982), № 5, 23-24.

[11] Astafiev N. N. 'Infinite Lp Problems with a Duality Gap', *USSR Ac. of Sc.*, (1984), 275, № 5, 1033-1036.

[12] Astafiev N.N. 'Approximation of Semiproper Infinite-dimensional Lp Problems. Approximation Methods for Semiproper MP Problems', Sverdlovsk, (1984), 26-33.

[13] Astafiev N.N. 'To Regularization of semi-infinite-dimensional LP Problems', *30 Int. Wiss. Koll. Ilmenau*, (1985), 3-6.

[14] Astafiev N.N. 'Quasifinite Infinite-dimensional LP Problems. Parametric Optimization and Approximation Methods for Improper MP Problems', Sverdlovsk, (1985), 54-62.

[15] Bakhovets E. B., Tsitritsky O. E. 'On the Lagrange Method in Vector Optimization Problems', *Comp. and Appl. Math.* Kiev, (1984), № 54, 82-86.

[16] Bell, Bradley 'Global Convergence of a Semi-infinite Optimization Method', *Appl. Math, and Opt.*, (1990), 21, № 1, 69-88.

[17] Ben-Tal A., Teboulle M., Zowe I. 'Second Order Necessary Oprimality Conditions for Semi-infinite Programming Problems. Semi-infinite Programming, Berlin, Heidelberg, New York, (1980), 17-30.

[18] Blankenship J.W., Falik J.E. 'Infinitely Constrained Optimization Problems', *JOTA*, (1976), 19, 261-281.

[19] Blatt H. P. 'Characterization of Strong Unicity of semi-infinite Optimization by Chain of References', *Parametr. Optimiz. and Approxim.*, 301-318.

[20] Bobilev N.A. 'On the Gradient Method in Infinite-demensionsl Optimization Problems', *Automat. and Telemech.*, (1985), № 12, 34-42.

[21] Boltiansky V. G. 'Separanility of Cones in Linear Topological Space. Dynamics of Nonhomo-geneous Systems', M., (1984), 68-76.

[22] Boltiansky V. G. 'Marquee Theory as a Means of Solving Extremal Problems', M.: VNII of Systems research, (1985), 6.

[23] Boltiabsky V.G. 'Marquee Method in Systems Research', *Appl. Prob. of Macrosystem Control*, M., (1986), 36-43.

[24] Boltiansky V. G. 'Marquees in Topological Vector Spaces', *VNM of Systems Research*, (1986), № 19, 4-12.

[25] Borwein J. M. 'Direct Theorems in Semi-infinite Convex Programming', *Math. Program.*, (1981), 21, № 3, 301-318.

[26] Borwein J.M. 'Semi-infinite Programming Duality: how special is it? Semi-infinite Programming and Applications, New York, (1983), 10-36.

[27] Buie R. N., Abragam J. 'Postoptimality Sensitivity Analysis in Abstract Spaces with Applications to Contimuous-time Programming Problems', *JOTA*, (1985), 45, № 3, 347-373.

[28] Burev D. D. 'Analysis and Synthesis for Adaptive Control Systems in Semi-infinitive Nonlinear Programming Problems', *Techn. Misl.*, (1983), № 6, 7-13; (1984), № 1, 15-20.

[29] Burev D.D. 'New Semi-infinitive Optimization Problems. Statement and Algorithms', *Techn. Misl.*, (1985), 22, № 2,15-20.

[30] Burev D.D. 'Upward Convergence to a Solution for a Unique Nonlinear Semi-infinitive Programming Problem', *Techn. Misl*, (1985), 22, № 4,15-18.

[31] Charnes A., Cooper W.W., Kortanek K.O. 'Duality, Haar Preograms and Finite Sequence Spaces', *Proc. Nat. Acad. Sci.*, USA, (1962), 48, № 5, 783-786.

[32] Charnes A., Cooper W. W., Kortanek K.O. 'On Representations of Semi-infinite Programs which have no Duality Gaps', *Management Science*, (1965), 12, 113-121.

[33] Charnes A., Gribik P. R., Kortanek K. O. 'Separably-infinite Programming', *ZOR*, (1980), A 24, № 1, 33-45.

[34] Conn A. R., Gould N. I. M. 'An Exact Penalty Function for Semi-infinite Programming', *Math. Program.*, (1987), 37, № 1, 19-40.

[35] Coope I.D., Watson G.A. 'A Projected Langrangian Algorithm for Semi-inginite Programming', *Math. Program.*, (1985), 32, № 3, 337-356.

[36] Curtian R. F., Pritchard A. J. 'Infinite-dimensional Linear Systems Theory', Berlin, (1978).

[37] Dantzig G.B. 'Programming in a linear Structure', *Comptroller*, Washington, (1948).

[38] Darkhovsky B. S., Levitin E.S. 'Necessary and Sufficient Auadratic Optimality Conditions for Semi-infinite MP Problems', *Proc. Moscow math. Soc.*, (1985), № 48, 163-210.

[39] Duffin R. D. 'Infinite Programs. Linear Inequalities and Associated Problems', M.: IL, (1959), 263-276.

[40] Duffin R. J., Karlovitz L.A. 'An Infinite Linear Protam with a Duality Gap', *Management Science*, (1965), 12, 122-134.

[41] Duffin R.J., Jeroslav R.G., Karlovitz L.A. 'Duality in Semi-infinite Linear Programming', *Semi-infinite Programming and Applications*, Berlin, Heidelberg, New York, (1983), 50-62.

[42] Elzinga J., Moore T.G. 'A Central Gutting Plane Algorithm for the Convex Protrammirig Problem', *Math. Program.*, (1975), V. 8, 134-145.

[43] Endelmann B. 'Modifizirte Lagrangefunktionale und Dualitat fur nichtkonvexe Optimierungs-probleme in abstrakten Raumen', *Wiss. Z. TH Leipzig*, (1983), 7, № 6, 365-374.

[44] Faibusovich L. E. 'The Wolfe Algorithm for a Class of Infinite Programming Problems', *USSR Ac. of Sc., Tech. Cybernetics*, USSR Ac. of Sc., № 3 (1982), 25-35.

[45] Faibusovich L. E. 'Coordinateless Representation of Simplex Method Kybernetika', Kiev, № 2 (1983), 78-81.

[46] Faibusovich L. E. 'The Dual Simplex Method: an infinite-dimensional case. Kybernetika', Kiev, № 1 (1984), 81-84.

[47] Ferris M.C., Philpott A.B. 'An Interior Point Algorithm for Semi-infinite Linear Programming', *Math. Program.*, (1989), 43A, № 3, 257-276.

[48] Fiaccl A.V., Kortanek K.O. 'Semi-infinite Programming and Applications', Berlin, Heidelberg, New York: Springer, (1983), 322.

[49] Fiacco A., McKormic G. 'Nonlinear Programming', M.: Mir, (1972).

[50] Frank M., Wolfe P. 'An Algorithm for Quadratic Programming', *NRLQ*, (1956), 3, № 1-2.

[51] Georgibiani D.A., Zhuzhinashvili A.Sh. 'Stability in Infinite-dimensional MP Problems', *30. Int. Wiss. Koll. Ilmenau*, (1985). Hf. 4, 55-56.

[52] Gerstewitz Ch. 'Dualitat bei nichtkonvexen Vektoroptimierungsproblemen in Math.', (1983) № 50/1, 75-81.

[53] Gerstewitz Ch., Iwaniw E. 'Dualitat fiir nichtconvexe Vektoroptimierungs probleme', *Wiss. Z. TH Ilmenau*, (1985), 31, № 2, 61-81.

[54] Gfrerer H., Guldat J., Wacker Hi. and Zulehner W. 'Globalization of Locally convergent Algorithms for Nonlinear Optimization Problems with Constraints', *Semi-infinite Programming and Applications*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer, (1983), 128-137.

[55] Glashoff K. Duality 'Theory of Semi-infinite Programming', *Semi-infinite Programming*, Berlin, Heidelberg, New York: Sptinger, (1979), 1-16.

[56] Glashoff K., Gustafson S. 'A Linear Optimization and Approximation', Berlin, Heidelberg, New York: Springer, (1983).

[57] Goberna M. A., Jornet V. 'Geometric Fundamentals of the Simplex Method in Semi-infinite Programming', *OR. Spectrum*, (1988), № 3, 145-152.

[58] Goberna M. A., Lopez M. A. 'Reduction and Discrete Approximation in Linear Semi-infinite Programming Optimization', (1987), 18, № 5, 643-658.

[59] Goberna M. A., Lopez M.A. 'The Optimal Value Function in Semi-Infinite programming', *JOTA*, (1988), № 3.

[60] Goberna M. A., Pastor J. 'Conditiones suficientes para la existencia de solucion optimaen un Programe semiinfinito', *Trab. estatist. y invest, oper.*, (1983), 34, 3-20, № 1.

[61] Golden R. 'Zur Stanilitat separabel-infiniter linearer Optimierungs probleme', *Oper. Res.*, Berlin, (1970), 66-82.

[62] Golstein E. G. 'Dual Convex Programming Problems', *Econ. and Math. Methods.* (1965), 1, № 3.

[63] Golstein E. G. 'Dual Problems of Convex and Convex-fractional Programming in Function Spaces', *Math. Prof. Investigations.*, M.. Nauka, (1968), 10—108.

[64] Gribik P. R. 'A Central-cutting-plane Algorithm for SIP Problems', *Semi-infinite Programming*, Berlin, (1979), 66-82.

[65] Gurwitz L. 'Programming in Linear Spaces. Investigations in Linear and Nonlinear Programming', M.: IL, (1962), 65-115.

[66] Gustafson S. A. 'On the Computational Solution of a Class of Generalized Moment Problems', *SIAM J. Numer. Anal.*, (1970), 7, 343-357.

[67] Gustafson S. A., Kortanek K.O. 'Numerical Solution of a Class of Semi-uinfinite Problems', *NRLQ*, (1973), V. 20, 477-504.

[68] Gustafson S. A. 'A General Three-phase Algorithm for Nonlinear Semi-infinite Programming', *Operational Research*, Amsterdam, (1981), 495-508.

[69] Gustafson S.A., Kortanek K.O. 'Semi-infinite Programming and Applications', *Math. Program.*, Berlin, (1983), 132-157.

[70] Gustafson S. A. 'Investigating Semi-infinite Programs Using Penalty Functions and Lagrangian Methods', *J. Austral. Math. Soc.*, (1986), B 28, № 2, 158-159.

[71] Gwinner J. 'Results of Farkas type Numer. Funct. Anal, and Optim' (1987), 9, № 5-6, 471— 520.

[72] Hettich R., 'Gramlich, G. A Note on the Implementation of a Method for Quadratic Semiinfinite Programming' *Math. Prog.*, (1990), 46, № 2, 249-254.

[73] Hettich R., Jongen H. Th. 'Semi-infinite Programming: Conditions of Optimality and Applications', *Optimization Techniques*, part 2. Berlin, (1978), 1-11.

[74] Hettich R. 'Semi-infinite Programming', Berlin, (1979), 178.

[75] Hettich R., Honstede W. 'On Quadratically Convergent Metnod for Semi-infinite Programming', *Semi-infinite Programming*, Berlin, Hedelberg, New York, (1979), 97-111

[76] Hettich R. A. 'Comparison of Some Numerical Methods for Semi-infinite Programming', *Semi-infinite Programming*, Berlin, (1979), 112-125.

[77] Hettich R., Zencke H. 'Numerische Methoden der Approximation und semi-infinite Oprimierung', *Stuttgart: Teubner*, (1982).

[78] Hettich R. 'A Review of Numerical Methods for Semi-infinite Optimization', *Semi-infinite Programming and Applications*, Berlin, (1983), 158-178.

[79] Hettich R. 'An Implementation of a Discretization Method for Semi-infinite Programming', *Math. Program.*, (1986), 34, 354-361.

[80] Himelblau D. 'Applied Nonlinear Programming', M.: Mir, (1975), 534.

[81] Hoffman K.H., Klostermeir A. A. 'Semi-infinite Linear Programming Procedure and Application to Approximation Problems in Optimal Control', *Approximation Theory. II*, New York, San Francisco, LondonL Grow-Hill, (1976), 379-389.

[82] Honstede W. 'An Approximation Method for Semi-infinite Problems Semi-infinite Programming', Berlin, Heidelberg, New York, (1979), 195-216.

[83] Hurwiez L. 'The Minkowski-Farkas. Lemma for Bounded Linear Transformations in Banach Spaces', *Cowles Commiss. Papers. Math.*, (1952), № 415, 416.

[84] Ibieiugba M. A. 'The Role of the Multipliers in the Multiplier Method' *JOYA*, (1985), 47, № 2, 195-216.

[85] Itskovich I. A. 'Infinite-dimensional Economic and Mathematical Models, Math. Analysis of Regional Production System Models, Novosibirsk, (1984), 119-131.

[86] Jahn J. 'Dualitat der Vektoroptimierung mit Anwendung in der vektoriellen Approximation', *27 Int, Wiss. Koll.*, Ilmenau, (1982), № 5, 7-9.

[87] 'Duality in Vector Optimizatio', *Math. Program.*, (1983), 25, № 3, 343-353.

[88] Jeakumar V. 'Nonlinear Alternative Theorems and Nondifferentianble Programming', *ZOR*, (1984), A28, № 5, 175-187.

[89] Jeroslow R. G. 'Uniform Duality in Semi-infinite Convex Optimization', *Math. Program.*, (1983), 27, № 2, 144-154.

[90] Joffe I.D., Tikhomirov B.M. 'Theory of Extremal Problems', M.: Nauka, (1974), 192.

[91] Jongen H.Th., Wetterling W., Zwier G. 'On Sufficient Conditions for Local Optimality in Semi-infinite Programming Optimization', (1987), 18, № 2, 165-178.

[92] Kantorovich L. V. 'Mathematical Methods of Production Organization an Planning', L.: LGU Press, (1939).

[93] Kaplan A., Tikhachke R. 'Adaptive Solution Methods for Ill-defined Semi-infinite-dimansional Convex Optimization Problems', USSR. Ac. of Sc., (1992), 322, № 3, 460-464.

[94] Karney D.F. 'A Duality Theorem for Semi-infinite Convex Programs and Their Finite Sub-programs', *Math. Prog.*, (1983), 27, 75-82.

[95] Karney D. F. 'Clark's Theorem for Semi-infinite Convex Programs', *Advances in Appl. Math.*, (1981), 2, 7-12.

[96] Karney D. F. 'Duality Gaps in Semi-infinite Linear Programming — and Approximation Problem', *Math. Program.*, (1981), 20. № 2, 129-143.

[97] Karney D.F. 'In a Semi-infinite Program only a Countable Subset of the Constraints is Essential', *J. Approxim. Theory*, (1985), 44, № 1, 69-72.

[98] Kawasaki H. 'An envelope — like effect of Infinitely Many Inequality Constraints on Second- order Necessary Confitions for Minimization Problems', *Math. Programming*, (1988), 41, № 1, 73-96.

[99] Kelley J.E. 'The Gutting Plane Method for Solving Convex Programs', *J.SIAM*, (1960), 8, 4.

[100] Kenderov P. S. 'Most of the Optimization Problems have a Unique Solution', *Parametr. Optimiz. and Approxim.*, (1985), 203-216.

[101] Klee V. A. 'Note on Convex Cones and Constraint Qualifications in Infinite-dimensional Vector Spaces', *JOTA*, (1982), V 37, № 2, 277-284.

[102] Kolbin V. V. 'Investigation of Infinite-dimensional Programming Problems', *Problems of Mechanics and Control Processes*, L.: LGU Press. (1984), № 7. 184-189.

[103] Kolbin V. V. 'Investigation of Infinite-dimensional Programming Problems', *Problems of Informatics*, Ukrainian Ac. of Sc., V 1, Kiev, (1990), 116-121.

[104] Kornstaed H. I. 'Necessary Conditions of Higher Order for Semi-infinite Programming', *Semi-infinite Programming*, Berlin, (1979), 31-50.

[105] Kortanek K. 0., Stroiwas H. M. 'On Extreme Points of Bounded Sets of Generalized Finite Sequence Spaces', *ZOR*, (1983), A27, № 5. 145-147.

[106] Kretschmer K.S. 'Programmes in Paired Spaces', *Canad. J. Math.*, (1961), 13, № 2, 221-230.

[107] Kuhn H.W., Tucker A.W. 'Nonlinear Programming', *Proc. Second Berkley Symp. Math. Statist, and Probability*, Berkley and Los Angeles: Univ. California Press, (1951), 481-492.

[108] Laban M.M. 'On Some Numerical Properties of Infinite-dimensional Symplex. Numer. Meth. and Approxim.', *Theory Ni*, (1984), 7-12.

[109] Levin V. L. 'Extremum Conditions in Infinite-dimensional Linear Problems with Operator Constraints', *Math. Program. Investigation.*, M.: Nauka, (1986), 159-197.

[110] Lopez M.A., Vercher E. 'Optimality Conditions for Nondifferentiable Convex Semi-infinite Programming', *Math. Program.*, (1983), 307-319.

[111] Nebeling V. 'Uber eine schnittmethode zur Losung konvexer quadratischer semi-infiniter Optimierungsaufgaben', *30 Int. Wiss. Koll. Ilmenau*, (1985), № 4, 91-93.

[112] Niirnberger G. 'Unicity in Semi-infinite Optimization', *Parametr. Optimiz, and Approxim.*, (1985), 231-247.

[113] Niirnberger G. 'Global Unicity in Semi-infinite Optimization', *Numer. Funct. and Optim.*, (1985), 8, № 1-2, 173-191.

[114] Pinsker A.G. 'A Linear Programming Problem in Compact Metric Spaces', *Optimization*, Novosibirsk, (1985), № 35, (52), 24-27.

[115] Polak E., Tits A. L. 'A Recursive Quadratic Convergent Algorithm for Semi-infinite Problems', *Semi-infinite Programming and Applications*, Berlin, (1983).

[116] Polak E., Mayne D. Q., Stimler D. M. 'Control System Design via Semi-infinite Optimization: a Review', *Proc. IEEE*, (1984), 72, № 12, 1777-1794.

[117] Polak E., Wardy Y. Y. 'A Study of Minimization Sequences.' *SIAM J. Contr. and Optim.*, (1984), № 4, 599-609.

[118] Price C. J., Coope I. D. 'An Exact Penalty Function Algorithm for Semi-infinite Programmes', *BIT*, (1990), 30, № 4, 723-734.

[119] Roleff K. 'A Stable Multiple exchange Algorithm for Linear SIP', *Semi-infinitive Programming*, Berlin, (1979), 83-96.

[120] Rosen J. 'The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming', *J. SIAM*, (1960), 8, 181-217.

[121] Rubinstein G. Sh. 'Duality in Nathenatical Programming and Some Issues of Convex Analysis', *Progress in Math. Sc.* (1970), V 25, № 5, 171-198.

[122] Shapiro A. 'Second Order Derivatives of extremal-value functions and Optimality Conditions for Semi-infinite Programs', *Math. Oper. Res.*, (1985), 10, № 2, 207-219.

[123] Stolp D. 'Zum von Tucker bei linearen Optimalproblemen in halbgeordneten Vektor aumen Optimization', (1984), 15, № 4, 531-544.

[124] Sturm N. 'Semi-infinite Optimierung. Fachverlag fur Revisions — und treugandfragen Schawar- zenbek', (1978).

[125] Thamelt W. 'Uber Losbarkeitseigenschaften homogener linearer Ungleichungen in halbgeord- neten Raumen Optimization', (1976), 7, 281-294.

[126] Thamelt W. 'Zum Satz von Tucker in halbgeordneten Vektorraumen', *Wiss. Z. TH Leuna-Merseburg*, (1980), 22, № 1, 107-114.

[127] Thamelt W., Stolp, D. 'Einige Bemerkungen zum Satz von Tucker', *Wiss. Z. TH Liena-Merseburg*, (1981), 23, № 2, 294-302.

[128] Thamelt W. 'Infinite-dimensional LP Problems, Duality, Approximation, and their Relation to the Theory of Games', L.: LQU Press, (1966).

[129] Thamelt W. 'Duality of Infinite-dimensional LP Problems and some Related Issues', *Kybernetika*, Kiev, (1969), № 4, 80-87.

[130] Tichatschke R., Lohse Th. 'Eine verallgemeinerte Schnittmethode fur konvexe semi-infinite Optimierungsaufgaben', *Wiss. Z. TH Karl-Marx-Stadt*, (1982), 24, № 3, 332-338.

[131] Tichatschke R. 'Uber Schnittmethoden fur konvexe semi-infinite Optimierungsaufgaben semi- narber', *Humboldt Univ., Berlin. Sek. Math.*, (1983), № 50/2, 339-350.

[132] Tichatschke R., Nebeling V. A 'Cutting-plane Method for Quadratic Semi-infinite Programming Problems', *Optimization*, (1988), A 19, № 6, 803-817.

[133] Timokhin S. G., Shapkin A. V. 'Multiple Specification of Matrices of Conditions for LP Problems', *VINITI*, (1980).

[134] Timokhin S.G., Shapkin A.V. 'On the LP Problem with Inadequately Defined Data. Economic and Mathematical Methods', (1981), V 17, № 5, 955-963.

[135] Todorov M. I. 'Generic Exastence and uniqueness of the Solution to Linear Semi-infinite Optimization problems', Proc., Bulgarian Ac. of Sc., (1985), 38, № 8, 989-991.

[136] Todorov M. I. 'Generic Existence of the Solution to Linear Semi-infinite Optimization Problems', *Numer. Funct. Anal, and Optim.*, 8, № 5-6. 541-556.

[137] Todorov M. I. 'Generic uniqueness of Saddle Points in the Linear Semi-infinite Optimization', *Proc. Bulgarian Ac. of Sc.*, (1986), 39, № 4, 27-29.

[138] Tran Q. Ch. 'Duality in Vector Optimization. Pt. 1. Abstract Duality Scheme', *Kybernetika*, (1984), 20, № 4, 304-313.

[139] Tran Q. Ch. 'Duality in Vector Optimization. Pt. 2. Vector Quasiconcave Programming', *Kybernetika*, (1984), 20, № 5, 386-404.

[140] Tran Q. Ch. 'Duality and Optimality Conditions in Abstract Concave Maximization', *Kybernetika*, (1985), 21, № 2, 108-117.

[141] Tretiakov A. A. 'The Necessary Kuhn-Tucker Conditions for Optimization in Hilbert Space', *Collected Works of MGU Computation Center*, (1983), № 39, 190-196.

[142] Trolctzch F. 'On Lagrange Multipoier Rules and Their Applications to Nonlinear Control Problems in Function Spaces', *Seminarber. Humboldt Univ. Berlin Sekt, Math.*, (1984), № 64, 121-129.

[143] Uzawa H. 'The Kuhn-Tucker Theorem of Convex Programming', M.: IL, (1962), 57-64.

[144] Valyi I. 'Approximate solutions of Vector Optimization Problem', *Math. Res.*, (1985), 27, n 1, 246-250.

[145] Watson G.A. 'Globally Convergent Methods for Semi-infinite Programming', *Nordisk Tid-sknaft for Informationsbehandling (BIT)*, (1981), 21. 36-373.

[146] Watson G.A. 'Numerical Experiments with Globally Convergent Methods for Semi-infinite Programming Problems', *Semi-infinite Programming and Applications*, (1983), 190-205.

[147] Weber R. 'Entscheidungsprobleme bei Unsicherheit und mehrfacher Zielsetzung', *Math. Syst. Econ.*, (1982), № 80, VIII, 172.

[148] Weber R. 'Entscheidungsprobleme bei Unsicherheit und mehrfacher Zielsetzung Ein Absatz mit Hilfe der semi-infiniten

linearen', *Vektoroptimierung Konigstein: Verl. Anton Hoim, Meisen- hiem*, (1982), VIII, 172.

[149] Weber R. 'Decision Making under Uncertainty: a Semi-infinite programming Approachl Eur.', *J. Oper. Res.*, (1985), 19, № 1, 104-113.

[150] Wolfe Ph. 'A Duality Theorem for Nonlinear Programming'.

[151] Yeremin I.I., Astafiev N.N. 'Introduction to the Theory of Linear and Convex programming', M.: Nauka, (1976), 170.

[152] Yeremin I.I., Vatolin A. A. 'Duality for Improper Infinite-dimensional Problems of Linear and Convex Programming. Approximation Methods for improper MP Problems', Sverdlovsk, (1984), 3-20.

[153] Yeremin I.I., Vatolin A. A. 'Duality for Improper MP Problems', Sverdlovsk: Math, and Mech. Institute, (1985), 50.

[154] Zaboieva O.A., Thimokhin S.G., Shapkin A.V. 'On the Search of Guaranteed Optimal Solutions to Large-scale SIP Problems', *J. Comp. Math, and Math. Physics*, (1985), 25, № 1, 45-52.

[155] Zontendeik G. 'Feasible Direction Methods', M.: IL, (1963).

[156] Zukhovitsky S. I., Poliak R. A., Primak N.E. 'The Solution Algorithm for Convex Programming Problems', *Proc. of USSR Ac. of Sc.*, (1963), 153, № 5.

[157] 'Automated Management Systems for Municipal Economy', Kiev, Budivelnik, (1978), 143.

[158] Andronov A. A., Pontriagin L.S. '"Structurally Stable" Systems', *USSR Ac. of Sc. Reports*, (1937), V. 14, 5, 521-523.

[159] Buslenko N.P., Kovalenko I. N. 'Lectures on the Theory of Complex Systems', *Soviet Radio*, (1973), 352.

[160] Dantzig G. B. 'Linear Programming and Extensions', *Princeton University Press.*, (1963), 625.

[161] Gill F., Murrey W. 'Numerical Methods for Optimization Conditions', M.: Mir, (1977), 290.

[162] Himmelblau D. 'Applied Nonlinear Programming', M.: Mir, (1976), 526.

[163] Ivakhnenko A. G. 'Heuristic Self-organization systems in Technique Cybernetics', Kiev, Teknika (1971), 165.

[164] Judin D.B., Golstein E.G. 'Linear Programming. Theory and Finite Methods', M., *Fiz-matgiz*, (1963), 524.

[165] Karr W., Houv W. 'Quantitative Methods of Decision Making in Economy and Management', M., *Mir*, (1966), 127.

[166] Likhtenstein V. E. 'Discrete Programming Models', M., *Nauka*, (1971), 240.

[167] Minaev Y.N. 'Stability of Optimal Solutions in Convex MP Problems. Automated Plant Management Systems', Kiev, *IC of Ukranian Ac. of Sc.*, (1977), 73-84.

[168] Minaev Y. N., Vilinskaia V. M., Iliashenko V. A. 'Relianility of Optimal solutions in automated Management Systems for Construction and Building', M., *CBNTI of the USSR Minpromstroy*, (1977), 90.

[169] Minaev Y. N. (Ed.) 'Stability of Economic and Mathematical Models of Optimization', Moscow, *Statistika*, (1980).

[170] Mikhalevich V. S. 'Computational Methods for Selection of Optimal Design Works', Kiev, *Naukova Dumka*, (1977), 132.

[171] Orlovsky S. A. 'Inadequately defined Games', *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, (1976), V. 16, № 6, 1427-1435.

[172] Rastrigin L. A., Ripa K. K. 'Theory of Automatic Random Search', Riga, *Zinatne*, (1973), 342.

[173] Sergienko I. V. 'The Method of Vector of Descent and Its Application to the Solution of Combinatorial Extremal Problems', *Control Systems and Machines*, (1976), № 3, 27-31.

[174] Smekhov B.M., Urinson Y. M. 'Optimization Methods for the National Economic Plan', M., *Ekonomika*, (1976), 127.

[175] Tabak T., Kuo W. 'Mathematical Programming and Optimal Control', M., *Nauka*, (1977), 215.

[176] Tikhonov A.N., Arsenin A. A. 'Methods of Solving III-defined Problems', M., *Nauka*, (1977), 192.

[177] Zade L. 'Linguistic Variables and their Applications to Approximate Decision Making', M., (1976), 165.

[178] Kantorovich L.V., Akilov G.P. 'Functional Analysis', M., *Nauka*, (1977).

[179] Kantorovich L.V., Wulikh V.Z., Pinsker A.G. 'Functional Analysis in Partially Ordered Spaces', M.-L., *Gostekhizdat*, (1950).

[180] Kolbin V. V. 'Compactum-continuous Function Spaces', "Control Problems" Transactions', *St. Petersburg University Press*, (1992), 86-99.

[181] Kolbin V. V. 'The Generalized Parametric Programming Problem. "Control Problems" Transactions', *St. Petersburg University Press*, (1992), 99-108.

[182] Tintner G., 'On Some Theorems of Stochastic Linear Programming with Applications', *Management Sci. 10*, (1963), 143-159.

[183] Sengupta J. K., Tintner G., and Millham C., 'On Some Theorems in Stochastic Linear Programming with Applications', *Management Sci. 10*, (1963), 143-159.

[184] Boltiansky V.G. 'Marquee Method in Topological Vector Spaces', *USSR Ac. of Sc.*, (1986), 289, № 5, 1036-1039.

[185] Lozanovsky G. Y. 'On the Functions of Linear Structure Elements', *Mathematical Transactions in Higher Schools*, (1973), № 1, 45-54.

[186] Luxemburg W. A.J., Zaanen A. C. 'Riesz Spaces', VI, Amsterdam, (1971).

[187] Nakano H., 'Linear Lattices', Detroit, (1966).

[188] Wulikh V. Z. 'A Bundle in Linear Partially Ordered Spaces and Its Application to the Operations Thery', *Mathematical Transactions*, 22 (64), (1948), № 1, 27-78.

[189] Joroen M. van Oostrum, M. van Houdenhoven, J. L. Hurink, E. W. Hans, G. Wullink, G. Kazemier 'A master surgical scheduling approach for cyclic scheduling in operating room departments', (2006), *Springer*

[190] Belien J., Demeulemeester E., 'Building cycling master surgery schedules with leveled resulting bed occupancy', (2005)

[191] Bisschop J., Blake J. T., Donald J., 'Mount sinai hospital uses integer programming to allocate operating room time', (2002), 63-67

[192] Brucker P., Drexl A., Mohring R., Neumann K., Pesch E., 'Resourse-constrained project scheduling', *Eur J Oper Res*, 3-41

[193] Carter M., 'Diagnosis: mismanagement of resources', *Oper Res Manage Sci Today*, (2002), 26-32

[194] Gerhak Y., Gupta D., Henig M., 'Reservation planning for elective surgery under uncertain demand for emergency surgery', *Manage Sci 42*, 321-334

[195] Glouberman S., Mintzberg H., 'Managing the care of health and the cure of disease Part 1', *Health Care Manage Rev 26*, 56-69

[196] Goldratt E. M., 'Critical chain', *The North River Press*, (1997)

[197] Guuinet A., Chaabane S., 'Operating theatre planning', *Int J Prod Econ 85*, 69-81, (2003)

[198] Hans E. W., Wullink G., van Houdenhoven M., Kazemir G., 'Robust surgery loading', *Eur J Oper Res*, (2006)

[199] Jebali A., Hadj Alouane A. B., Ladet P., 'Operating room scheduling', *Int J Prod Econ 99*, 52-62 (2006)

[200] Kim S., Horowitz I., 'Scheduling hospital services: the efficacy of elective-surgery quotas', *Omega 30*, 335-346, (2002)

[201] Lamiri M., Xie X., Dolgui A., Grimaud F., 'A stochastic model for operating room planning with elective and emergency surgery demands', *Conference Proceedings ORAHS*, (2005)

[202] McManus M. L., Long M. C., Copper A., Mandell J., Berwick D. M., Pagano M., Litvak E., 'Variability in surgical caseload and access to intensive care services', *Anesthesiology 98*, (2003), 1491-1496

[203] Neumann K., Zimmermann J., 'Procedures for resource leveling and net present value problems in project scheduling with general temporal and resource constraints', *Eur J Oper Res 127*, 425-443, (2000)

[204] Ogulata S. N., Erol R., 'A hierarchical multiple criteria mathematical programming approach for scheduling general surgery operators in large hospitals', *J Med Syst 27*, 259-270, (2003)

[205] Ozkaraham I., 'Allocation of surgeries to operating rooms by goal programming', *J Med Syst 24*, 339-378, (2000)

[206] Pinedo M., 'Planning and scheduling in manufacturing and services', *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering*, (2005)

[207] Vissers J. M. H., Adan I. J. B. F., Bekkers J. A., 'Patient mix optimisation in cardiothoracis surgery planning: a case study.', *IMA J Manage Math 16*, 281-304, (2005)

[208] Weissman C., 'The enhanced postoperative care system', *J Clin Anesth 17*, 314-322, (2005)

[209] Nicholas G. Hall, Marc E. Posner, 'Sensitivity analysis for scheduling problems', *J of Scheduling 7*, 49-83, (2004)

[210] Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B., 'Network flows: theory, algorithms and applications', (1993)

[211] Anderson D. R., Sweeney D. J., Williams T. A., 'Contemporary Management Science With Spreadsheets', (1999)

[212] Ball M. O., Taverna R., 'Sensivity analysis for the matching problem and its use in solving matching problems with a single side constraint', *Ann Oper Res 4*, 25-56, (1985)

[213] Bazaraa M. S., Jarvis J. J., Sherali H. D., 'Linear Programming and Network Flows', (1990)

[214] Camm J. D., Burwell T. H., 'Sensitivity analysis in linear programming models with common inputs', *Dcision Sci 22*, 512-518, (1991)

[215] Chakravarti N., Wagelmans A. P. M., 'Calculation of Stability Radii for Combinatorial Optimization Problems', *Oper Res Lett 23*, 1-7, (1998)

[216] Daniels R. L., Kouvelis P., 'Robust scheduling to hedge against processing time uncertainty in single-stage production', *Manage Sci 41*, 363-376, (1995)

[217] Federgruen A., Tzur M., 'Minimal forecast horizons and a new planning procedure for the general dynamic lot sizing model: nervousness revisited', *Oper Res 42*, 456-468, (1994)

[218] Greenberg H. J., 'An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer programming and combinatorial optimization', 97-148, (1998)

[219] He Y., Kellerer H., Kotov V., 'Linear compound algorithms for the partitioning problem', *Nav Res Logist 47*, 593-601, (2000)

[220] James R. J. W., Buchanan J. T., 'Robustness of single machine scheduling problems to earliness and tardiness penalty arrors', *Ann Oper Res 76*, 219-232, (1998)

[221] Kouvelis P., Daniels R. L., Vairaktarakis G., 'Robust Scheduling of a Two-Machine Flow Shop with Uncertain Processing Times', *IIE Transactions 32*, 421-432, (2000)

[222] Mahadev N. V. R., Pekec A., Roberts F. S., 'On the meaningfulness of optimal solutions to scheduling problems', *Oper Res 46*, 120-134, (1998)

[223] Seeger A., 'Subgradients of optimal-value functions in dynamic programming: The case of convex systems without optimal paths', *Math Oper Res 21*, 555-575, (1996)

[224] Sotskov Y. N., Wagelmans A. P. M., Werner F., 'On the calculation of the stability radius of an optimal or an approximate schedule', *Ann Oper Res 83*, 213-252, (1998)

[225] van Hoesel C. P. M., Wagelmans A., 'On the complexity of postoptimality analysis of 0/1 programs', *Discrete Appl Math 91*, 251-263, (1999)

[226] Wendell R. E., 'Sebsitivity analysis revisited and extended', *Decision Sci 23*, 1127-1142, (1992)

Вячеслав Викторович КОЛБИН

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание второе, стереотипное

Зав. редакцией литературы по информационным технологиям и системам связи *О. Е. Гайнутдинова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 14.03.21.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 60×90 $^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 25,00. Тираж 30 экз.

Заказ № 318-21.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.