Линейная алгебра Лекция 3. Продвинутая линейная алгебра

Денис Волк

Senior Data Scientist @ KPMG

- Математик, кандидат наук, МГУ
- Специальность: динамические системы и случайные процессы
- Работал в университетах Триеста, Рима, Стокгольма
- Автор 14 научных статей в международных журналах

Денис Волк

Senior Data Scientist @ KPMG

Линейная алгебра.

Лекция 3: продвинутая линейная алгебра

1. Какие бывают матрицы
2. Собственные векторы и собственные значения матриц
3. Как их находить
4. Свойства собственных векторов и собственных значений
5. Матричные разложения
6. Спектральное разложение, PCA
7. Сингулярное разложение
8. Низкоранговые приближения

Какие бывают матрицы?

Типы матриц

По внешнему виду:

- квадратные
- прямоугольные
- матрицы-строки, матрицы-столбцы
- единичные
- диагональные
- симметричные
- ортогональные

Типы матриц

По смыслу:

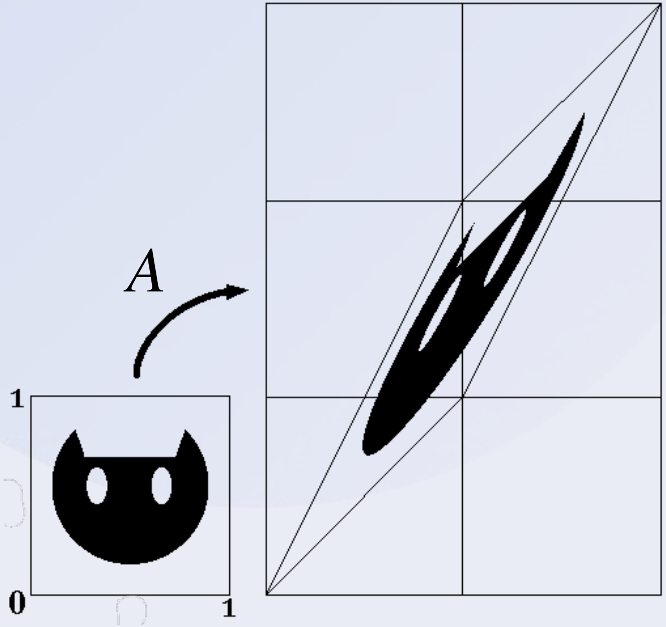
- много векторов, упакованных в одну таблицу
- линейное преобразование
- матрица ковариации случайной величины

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix}$$

Матрица размера **m** x **n**

Собственные векторы и собственные значения

Собственные векторы и собственные значения



Пример:

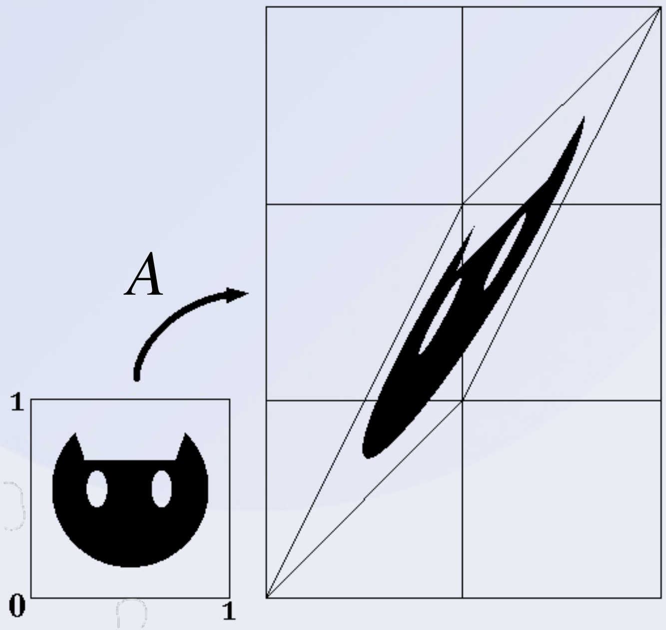
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Посмотрим на последовательность отображений

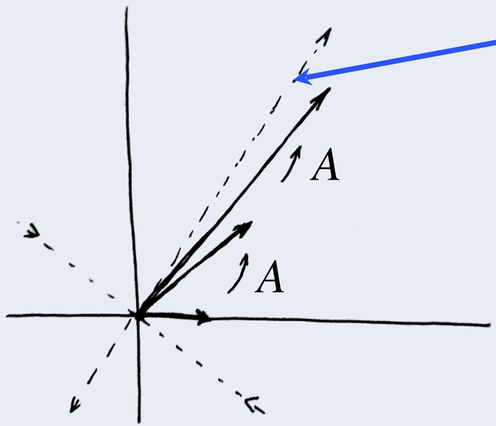
$$A,\ A \cdot A,\ A \cdot A \cdot A,\ \ldots,\ A^n,\ \ldots$$

https://www.researchgate.net/figure/Arnold-cat-map-29_fig1_312871693

Собственные векторы и собственные значения



$$A,\ A\cdot A,\ A\cdot A\cdot A,\ \ldots,\ A^n,\ \ldots$$



$$Av = \lambda v$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

v — **собственный вектор** матрицы A

λ — **собственное значение** матрицы A

https://www.researchgate.net/figure/Arnold-cat-map-29_fig1_312871693

Как найти собственные значения

Если для некоторого числа **λ** и ненулевого вектора **v** выполнено **Av = λv**, то

$$Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda \cdot I)v = 0$$

Значит, матрица **A-λI** вырожденна, т.е. **det(A-λI)=0**.

Определитель **det(A-λI)** называется **характеристическим многочленом** матрицы **A**. Это многочлен степени **n** относительно переменной **λ**.

det(A-λI)=0 — **характеристическое уравнение** матрицы **A**. Его корни — собственные значения матрицы A.

Полезное свойство: симметричные матрицы имеют ровно **n** собственных значений.

Как найти собственные векторы

Собственный вектор **v**, соответствующий собственному значений **λ** матрицы **A** :

$$Av = \lambda v$$

Можем переписать в виде $(A - \lambda I)v = 0$
и найти **v** как решение этой системы линейных уравнений. Поскольку матрица **A-λI** вырожденная, у неё нет обратного, так что решать придётся вручную.

Собственный вектор определён с точностью до пропорциональности.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\begin{cases} -3x - 6y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3$$

$$\begin{cases} -4x - 6y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Свойства собственных векторов

1. Собственные векторы — направления, в которых матрица лишь растягивает или сжимает векторы, но не поворачивает
2. Если есть **n** собственных векторов, то матрицу можно записать в диагональном виде
3. Собственные векторы наибольших собственных значений показывают направления наибольшего растяжения
4. Применяются при понижении размерности данных

Summary

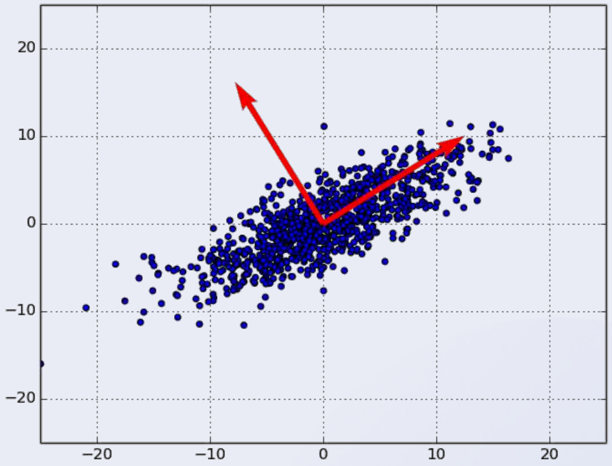
Узнали:

1. Какие бывают матрицы
2. Что такое собственные значения и собственные векторы
3. Как их искать
4. Их свойства

Матричные разложения

Principal Component Analysis (PCA)

1. Есть набор векторов в **N**-мерном пространстве. Хотим упростить, понизив размерность
2. Вычисляем матрицу их попарных скалярных произведений. Она симметрична.
3. Все её собственные значения положительны. Берём **n** наибольших.
4. Проецируем на подпространство, порождённое **n** собственными векторами
5. Получаем **n**-мерное представление данных, отражающее б**о**льшую часть вариативности



https://www.science-emergence.com/Images/pca-example-1/

Матричные разложения

Разложение матрицы — представление в виде произведения некоторых других, обладающих интересными свойствами.

Спектральное разложение: уже видели на примере PCA.

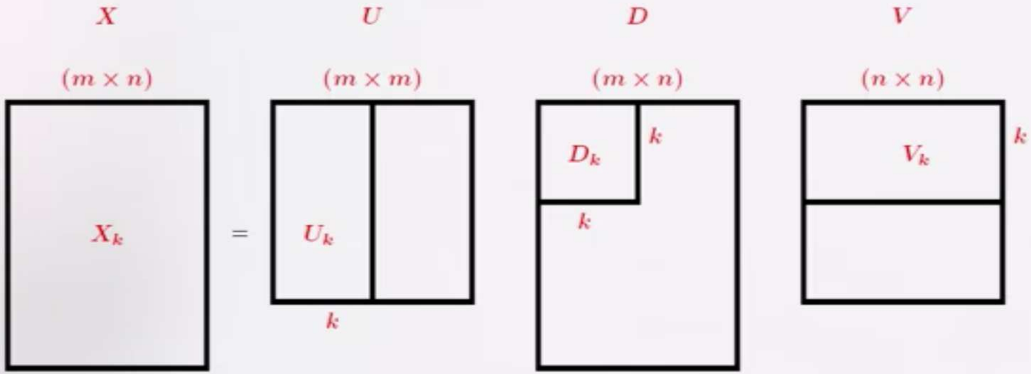
$$A = S^T \cdot D \cdot S$$

A — симметричная, S — ортогональная, D — диагональная из собственных значений A.

Сингулярное разложение

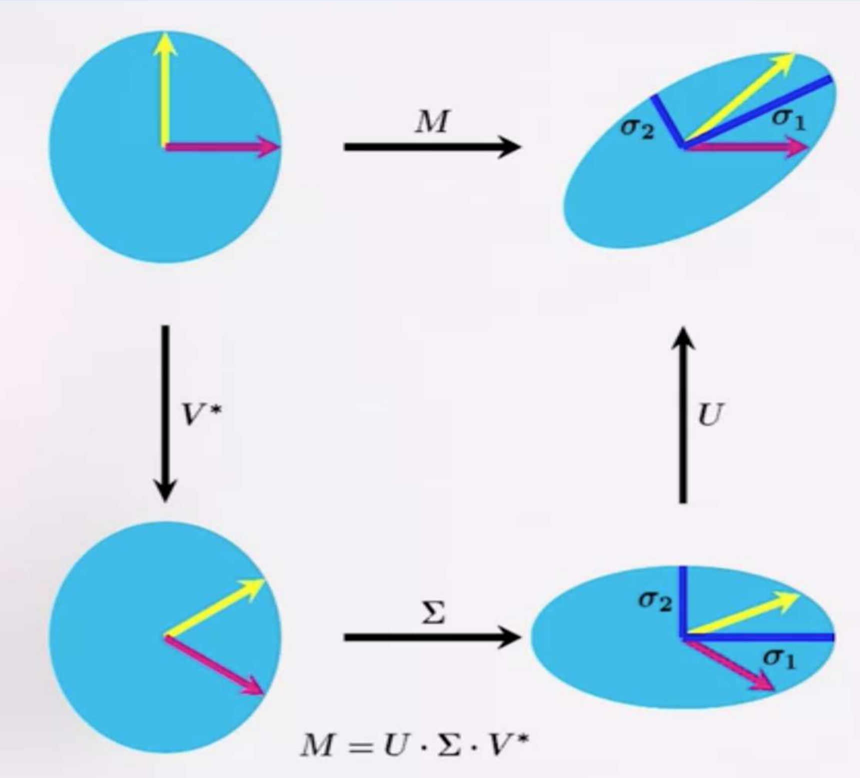
Но это была симметричная матрица, а что в случае произвольной?

- $X = UDV$
- U, V — ортогональные, D — диагональная



https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Сингулярное разложение (SVD)



https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Сингулярное разложение представляет линейное преобразование в виде композиции: вращения, растяжения по осям, вращения.

Ранг матрицы

Если матрица задаёт отображение, то ранг это мера “сложности” отображения

Обозначение: **rk A**

Ранг — максимальное количество линейно независимых столбцов или строк

В частности, если **A** — матрица **m x n**, то **rk A ≤ min(n, m)**

Ранг — максимальный размер подматрицы с ненулевым определителем

Если матрицы **A** и **B** можно умножить, то **rk(AB) ≤ min(rkA, rkB)**

Приближение матрицей меньшего ранга

Зачем приближать матрицу матрицей меньшего ранга?

Если предполагаем, что матрица **X** на самом деле более простая.

Что значит приблизить

- $X \approx X' = UV^T$
- $U - m \times k, V - n \times k$

Просто найлучшее приближение по норме: $||X - UV^T|| \to min$

$$||X||_F = \sqrt{\sum_{i,j} x_{ij}^2}$$

Пример применения в машинном обучении

- Пусть X – матрица признаков объектов
- Тогда U – матрица новых признаков
- При $k < n$ преобразование признаков понижает размерность пространства
- По U с максимальной возможной точностью восстанавливаются исходные признаки X

https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Пример применения в рекомендательных системах

- Пусть X – матрица с оценками x_{ij}, поставленными пользователем i фильму j
- Некоторые значения матрицы неизвестны
- $x_{ij} \approx \widehat{x_{ij}} = u_i v_j$, где u_i отражает интересы пользователя, а v_j – признаковое описание фильма
- Идея: настроим u_i и v_j на известных x_{ij}, а неизвестные спрогнозируем
- Будем рекомендовать фильмы, для которых спрогнозирована высокая оценка

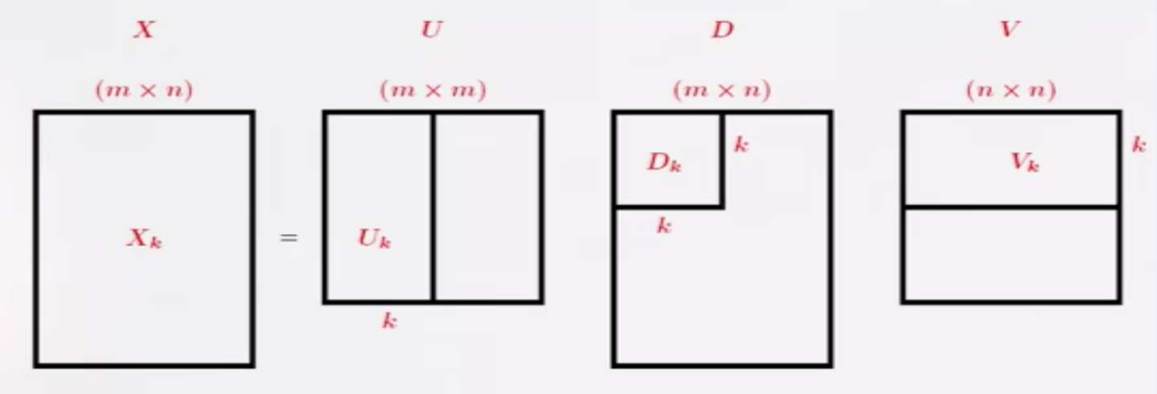
$$U, V = \underset{U \in \mathbb{R}^{m \times k}, V \in \mathbb{R}^{n \times k}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i,j: x_{ij} \neq 0} (x_{ij} - u_i^T v_j)^2$$

https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Связь SVD и низкорангового приближения

$$\hat{X} = \underset{\mathrm{rg}\,\hat{X} \leq k}{\operatorname{argmin}} \left\| X - \hat{X} \right\|$$

$$X = U \cdot D \cdot V^T$$



$$X_k = U_k D_k V_k^T$$

Усечённый SVD

https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Связь SVD и низкорангового приближения

Оказывается, X_k — наилучшее приближение матрицы X матрицей ранга $\leqslant k$

$$X_k = U_k D_k V_k^T$$

$$\hat{X}_k = \underset{rg(\hat{X}) \leq k}{\operatorname{argmin}} ||X - \hat{X}||_F$$

$$||X - \hat{X}||_F = \sqrt{\sum_{i,j} (x_{ij} - \hat{x}_{ij})^2}$$

https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

НЕТОЛОГИЯ

Summary

Узнали:

1. Матричные разложения
2. Спектральное разложение, PCA
3. Сингулярное разложение
4. Низкоранговые приближения

Слайд-разделитель: моё и template

СВД

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BD%D0%B0%D0%B9%D0%BF%D0%B5%D1%80%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D0%B8%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%BA%D0%B0_%D0%94%D1%80%D0%B0%D0%B3%D1%83%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B0

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Посмотрим на последовательность

$$Av,\ A(Av),\ A(A(Av))),\ \ldots,\ A^n v,\ \ldots$$

Фигуры

1

2

!

20 часов

Плашка для размещения текста поверх картинки

Перед вами шаблон для создания презентаций, который усилит ваши идеи и поможет слушателям быстрее и качественней усваивать контент

Работа с контентом

Правила оформления

Шаблоны слайдов

Элементы оформления и ресурсы

!

Если вам понравился какой-то слайд из этого файла, вы можете скопировать его и использовать в своих презентациях.