Матанализ 1
Функции и производные

Денис Волк
Senior Data Scientist @ KPMG

- Математик, кандидат наук, МГУ
- Специальность: динамические системы и случайные процессы
- Работал в университетах Триеста, Рима, Стокгольма
- Автор 14 научных статей в международных журналах

Денис Волк

Senior Data Scientist @ KPMG

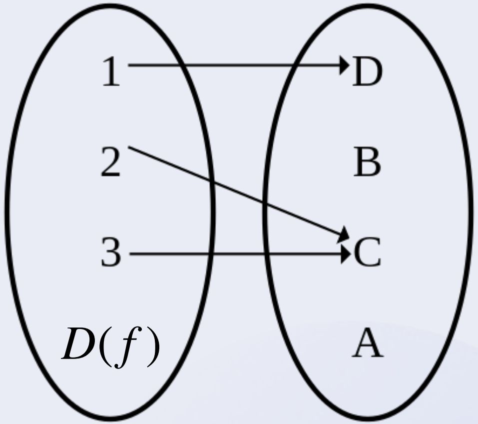
Функция, предел, производная

Функции

Функция – это некоторое соответствие **x → f(x)**, причём для каждого **x** задано единственное значение **f(x)**.

Символ **x** может обозначать объекты любой природы: числа, векторы, матрицы, геометрические фигуры, другие функции..

$$y = f(x)$$



D(f) – область определения функции

E(f) – область значений функции

$$E(f) = f(D(f))$$

В этой лекции будем работать только с функциями, у которых **D(f)** и **E(f)** – подмножества $\mathbb{R}$.

https://en.wikipedia.org/

Примеры функций

Каковы область определения и область значений следующих функций?

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Примеры функций

Каковы область определения и область значений следующих функций?

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad E(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Примеры функций

Каковы область определения и область значений следующих функций?

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad E(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$f(x) = 2^x$$

Примеры функций

Каковы область определения и область значений следующих функций?

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad E(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$f(x) = 2^x \qquad D(f) = \mathbb{R}, \quad E(f) = (0, +\infty)$$

Предел функции

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

Функция не определена в **x=0**, но её значение может быть вычислено в точках, сколь угодно близких к ней.

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$f(x)$	2.593..	2.704..	2.716..	2.718..	...

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Не всегда у функции есть конечный предел в данной точке:

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

Функция неограниченно растёт при приближении к **x = 0**.

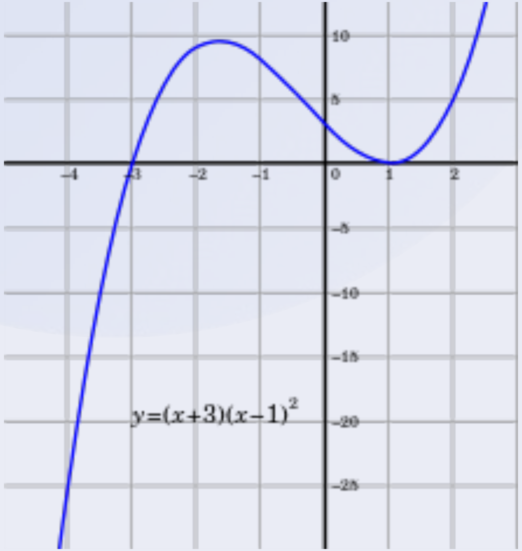
x	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$1/x$	10	100	1000	10000	...

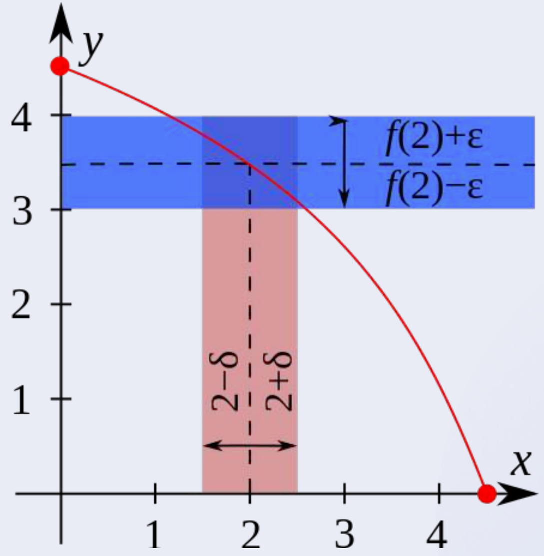
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Непрерывность функции

Понятие предела тесно связано с понятием непрерывности функции в точке.

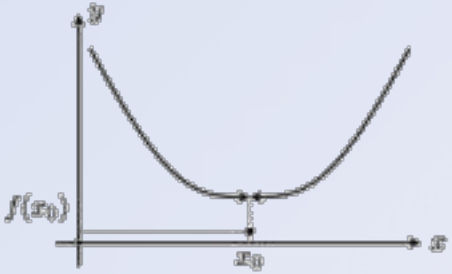
Функция непрерывна в точке **a**, если: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$



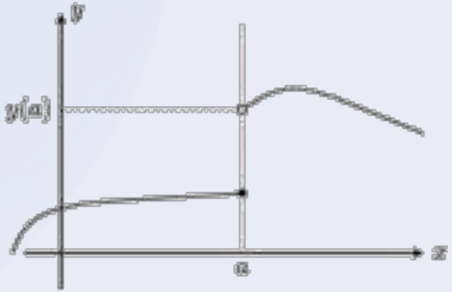


Разрывные функции

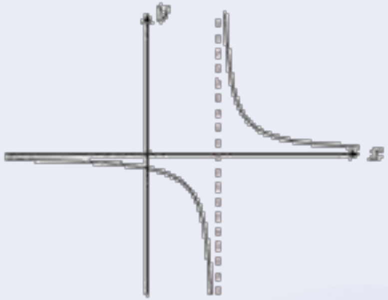
Все непрерывные функции непрерывны одинаково, а разрывны бывают по-разному:



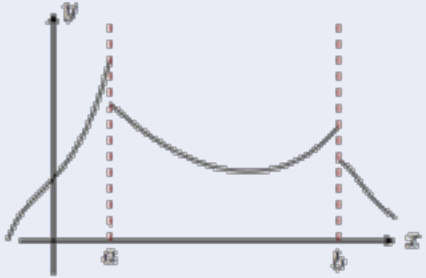
устранимый разрыв



неустранимый разрыв типа “скачок”



неустранимый разрыв типа “бесконечность”



два неустранимых разрыва

… а также более сложные разрывы…

https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Производная функции

Производная в точке x — мгновенная скорость роста функции в заданной точке:

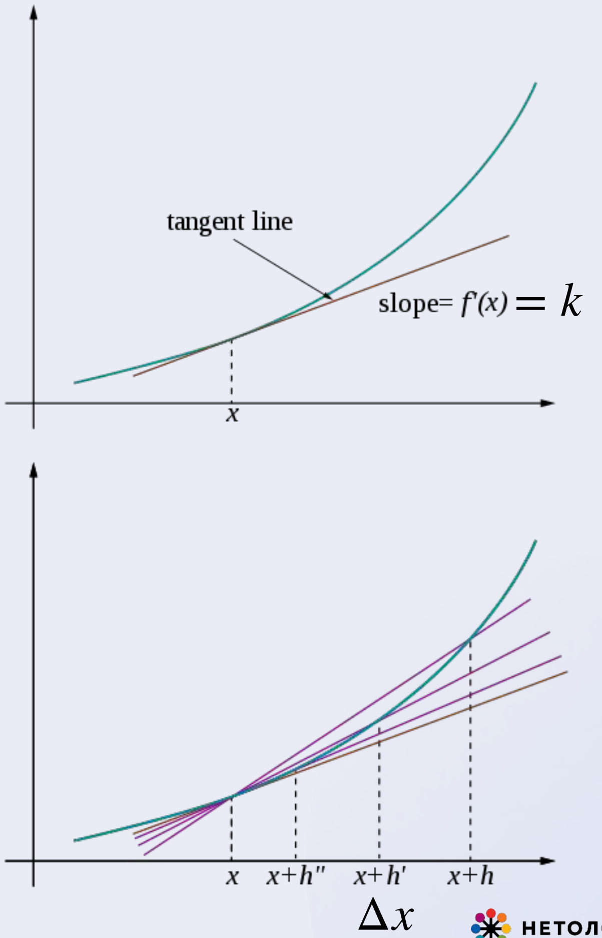
$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + k \cdot \Delta x$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Другое обозначение: $\dfrac{df}{dx}$

f'(x) — новая функция!

Гладкие функции — функции, производная которых непрерывна.



https://en.wikipedia.org/

Простые производные

Производные от элементарных функций:

$$(\mathrm{const})' = 0$$

$$\left(x^n\right)' = n x^{n-1}$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

Арифметика производных

Умножение на число: $\left(\lambda \cdot f(x)\right)' = \lambda \cdot f'(x)$

Производная суммы и разности: $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

Производная произведения: $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Производная частного: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Производная сложной функции

Пусть имеются две функции **f(x)** и **g(x)**, и область значений **f(x)** принадлежит области определения **g(x)**. Тогда **h(x) = g(f(x))** — применение одной функции к результату другой, называется **композицией функций**, или **сложной функцией**.

Пример: **f(x) = x+1**, **g(x) = ln(x)**, **h(x) = g(f(x)) = ln(x+1)**

$$\left(h(x)\right)' = \left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Eng: "Chain rule"

Как запомнить:

$$\frac{d(g(f(x)))}{dx} = \frac{dg(f(x))}{df(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(f)}{df} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

Арифметика производных

Умножение на число: $\left(\lambda \cdot f(x)\right)' = \lambda \cdot f'(x)$

Производная суммы и разности: $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

Производная произведения: $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Производная частного: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Производная сложной функции: $\left(g(x)\right)' = \left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Пример вычисления производной

$$f(x) = \sin(\ln x + 5x)$$

$$f'(x) = (\sin(\ln x + 5x))' = \cos(\ln x + 5x) \cdot (\ln x + 5x)' = \cos(\ln x + 5x) \cdot (1/x + 5)$$

$$g(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$ "Сигмоида"

$$g'(x) = \left(\frac{1}{1 + e^{-x}}\right)' = \frac{-\left(1 + e^{-x}\right)'}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^x}{(1 + e^{-x})^2}$$

Summary

Узнали:

1. Что такое функции
2. Предел функции
3. Непрерывные функции
4. Производная и как её вычислять

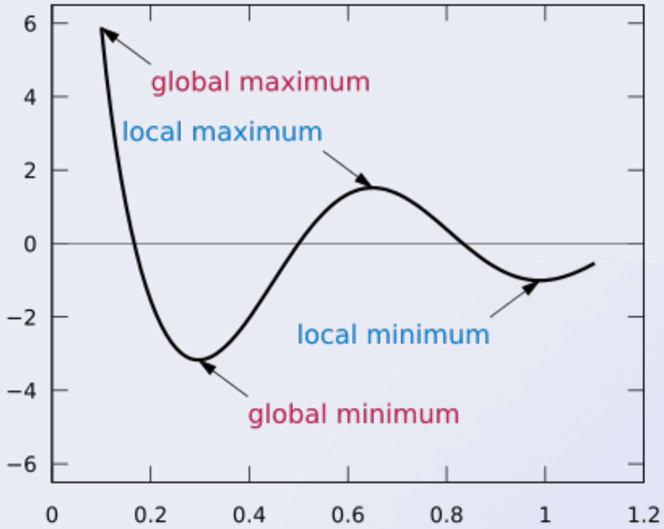
Применение производных

Экстремумы функции

Часто нужно найти экстремум функции, например минимум: $f(x) \to \min$

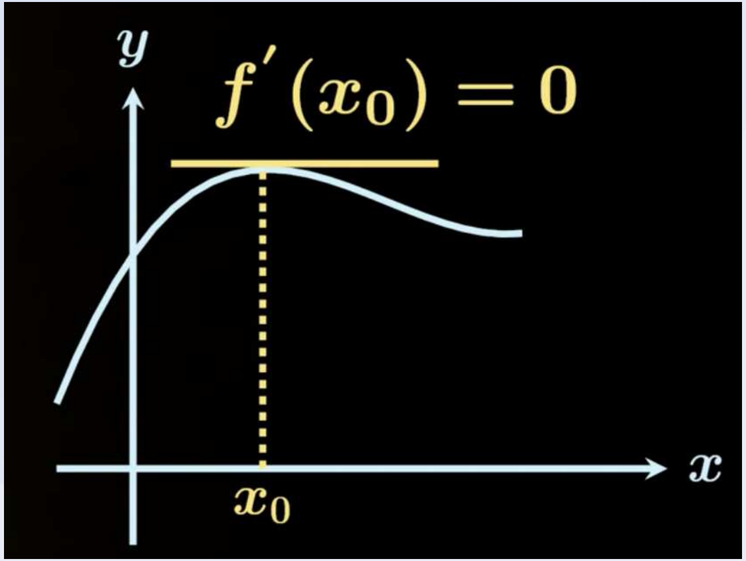
Точка **a** называется **локальным минимумом** функции **f(x)**, если существует такая окрестность **U(a)**, что **f(x) > f(a)** для всех **x** из **U(a)**, кроме **a**.

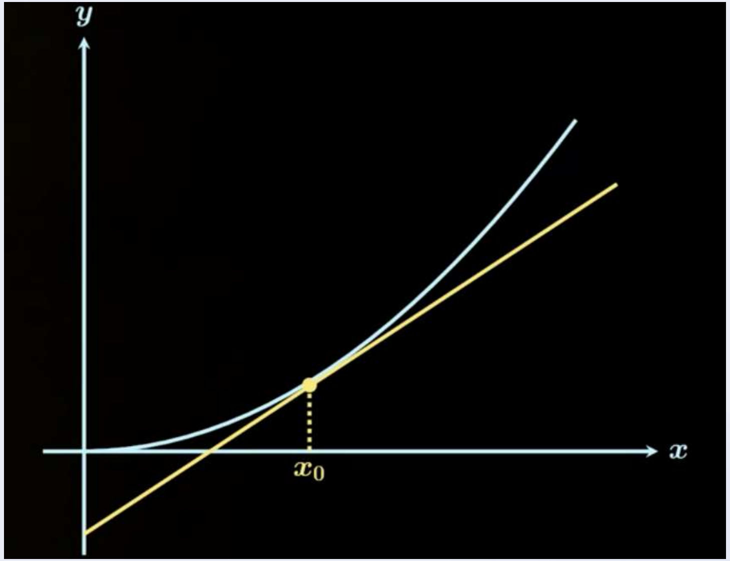
Аналогично — **локальный максимум**.



https://www.wikiwand.com/en/Maxima_and_minima

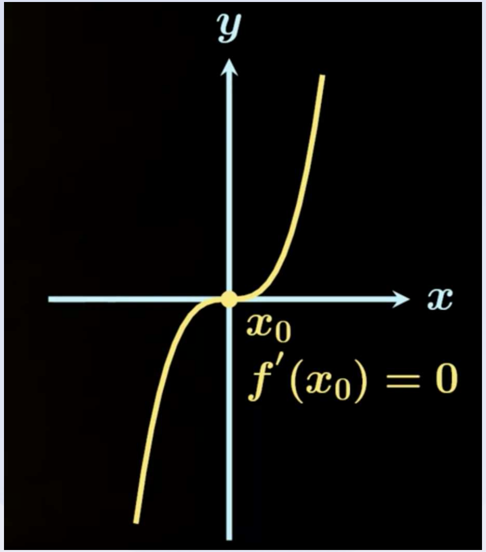
Экстремум функции и производная

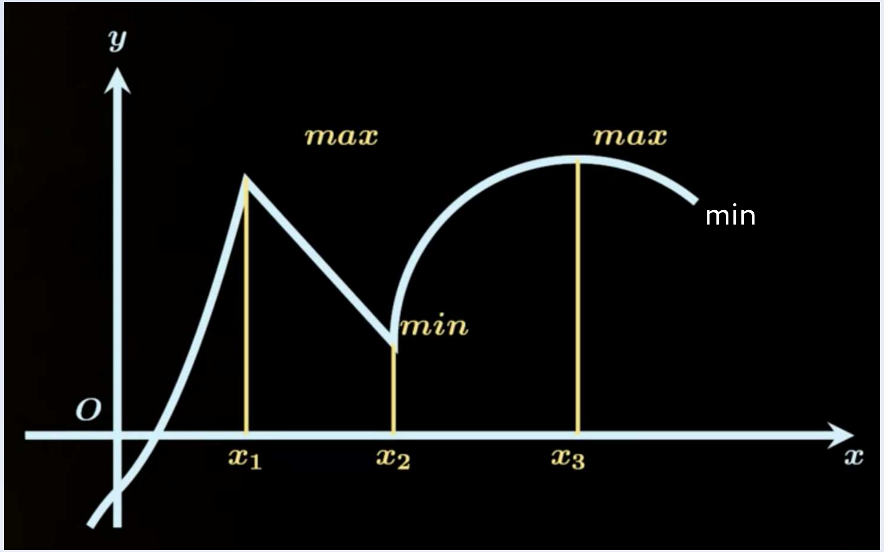




Необходимое условие экстремума: в точках локальных экстремумов производная равна нулю (если она определена(!)). Способ искать экстремумы!

Экстремум функции и производная





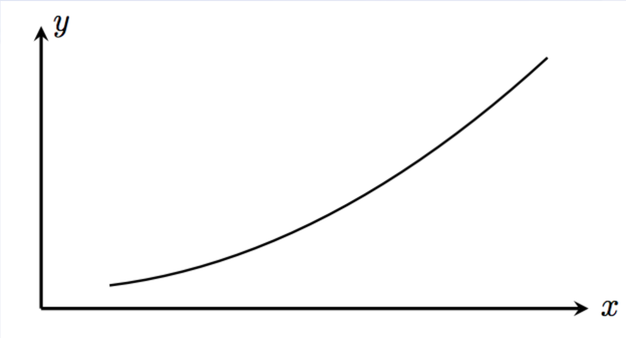
Однако равенство производной нулю не является достаточным условием локального экстремума. Также производная может быть вовсе не определена в точках локальных экстремумов.

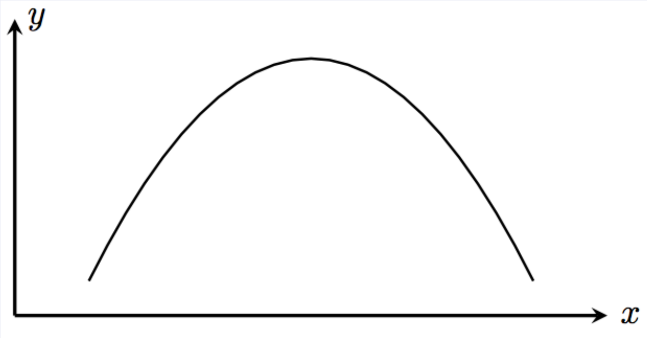
https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Монотонность функции и её производная

Как влияет знак производной на характер поведения функции?

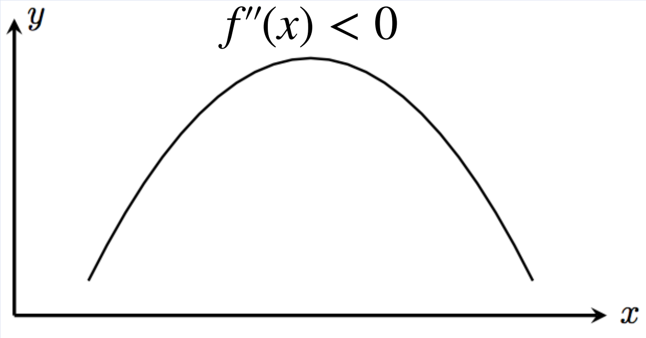
1. $f'(x) \geq 0$ — функция возрастает,
2. $f'(x) > 0$ — функция строго возрастает,
3. $f'(x) \leq 0$ — функция убывает,
4. $f'(x) < 0$ — функция строго убывает.



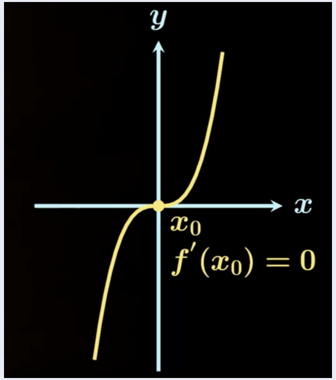


https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Экстремумы функции и монотонность производной



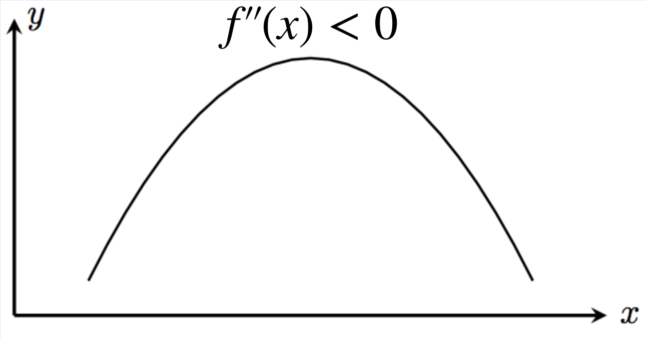
Производная монотонно убывает



$f'(x) = 3x^2$

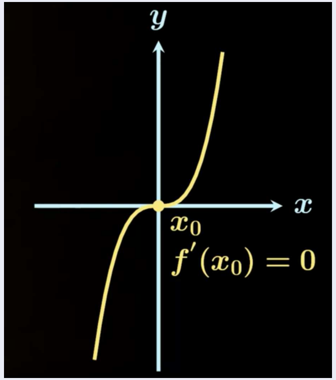
Производная сначала убывает, а потом возрастает

Экстремумы функции и вторая производная



Производная производной — **вторая производная**

Вторая производная отвечает за монотонность первой!



$f'(x) = 3x^2$

Достаточное условие экстремума Пусть выполнено необходимое условие экстремума, то есть в некоторой точке x_0 значение $f'(x_0) = 0$. Если в таком случае

1. $f''(x) > 0$ — функция будет строго выпукла и реализуется строгий минимум.
2. $f''(x) < 0$ — функция будет строго вогнута и реализуется строгий максимум.

Выпуклость функции и вторая производная

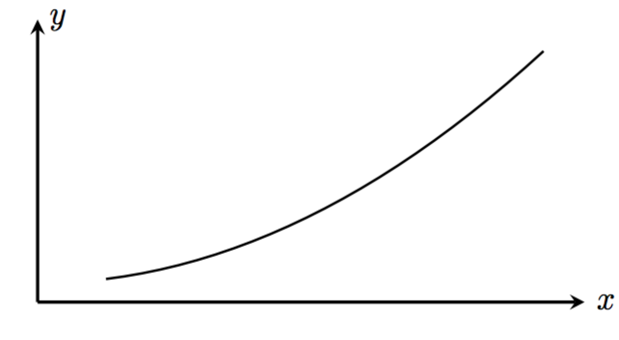


Рис. 11: Выпуклая функция

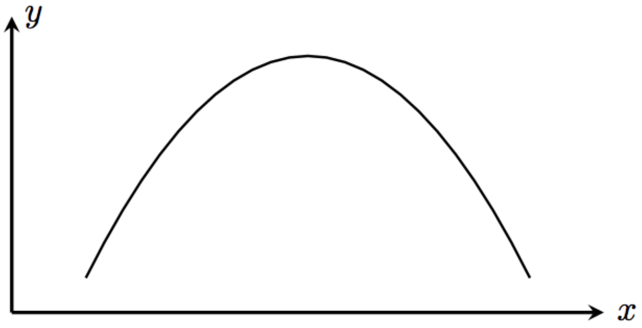


Рис. 12: Вогнутая функция

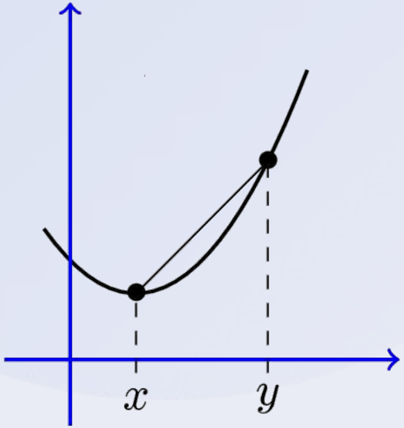
1. $f''(x) \geq 0$ — функция $f(x)$ выпукла,
2. $f''(x) > 0$ — функция $f(x)$ строго выпукла,
3. $f''(x) \leq 0$ — функция $f(x)$ вогнута,
4. $f''(x) < 0$ — функция $f(x)$ строго вогнута.

Если есть экстремум, то он глобальный!

Выпуклая оптимизация

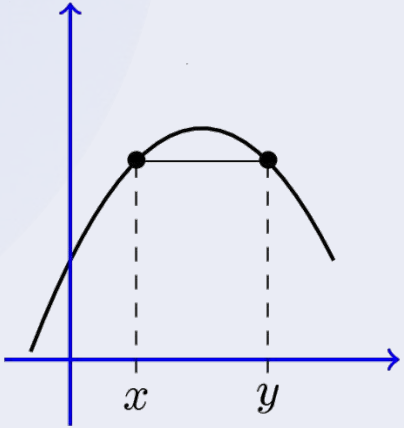
Выпуклость функции и секущие отрезки

Посмотрим на графики выпуклой и вогнутой функций и проведём прямые, пересекающие их.



выпуклая

График ниже отрезка



вогнутая

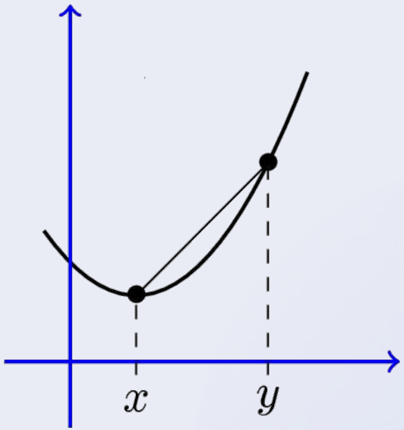
График выше отрезка

https://en.wikipedia.org/

Выпуклость функции и секущие отрезки

Отсюда возникает более общее определение выпуклости/вогнутости функции. Вещественнозначная функция **f**, определённая на некотором интервале, **выпукла**, если для любых двух значений аргумента **x, y** и для любого числа **t** $\in$ **[0, 1]** выполняется:

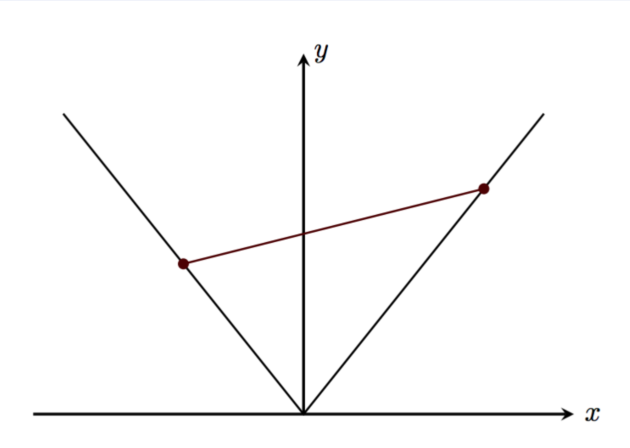
$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

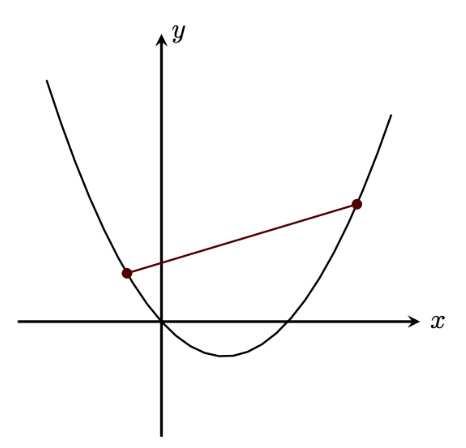


То есть, если соединить две точки на графике отрезком, он окажется выше графика функции **f(x)**.

Выпуклость функции и секущие отрезки

Общее определение подходит и для функций, производная которых не определена в некоторых точках.





И по-прежнему, если есть экстремум, то он глобальный!

Summary

Узнали:

1. Экстремумы функций и их связь с производной
2. Монотонность функций
3. Вторая производная
4. Выпуклые и вогнутые функции, их экстремумы